ლექცია 11

6.2. კერძო წარმოებულები. დივერგენცია. გრადიენტი

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ერთი ცვლადის (არგუმენტის) ფუნქციებს, მაგრამ *ფუნქცია* შეიძლება სიბრტყის ან სივრცის წერტილთა რაიმე სიმრავლის ყოველ წერტილს (შესაბამისად, რიცხვთა წყვილს და სამეულს) უთანადებდეს ცალსახად განსაზღვრულ რაიმე რიცხვს. ამის შესაბამისად მივიღებთ ორი და სამი ცვლადის (არგუმენტის) ფუნქციებს. მაგ.,

$$z = f(x,y) \quad \text{და} \quad u = f(x,y,z).$$

თუ ერთის, მაგ., x-ის, გარდა დანარჩენ არგუმენტებს დავაფიქსირებთ, მივიღებთ ერთი x ცვლადის ფუნქციას, რომლისთვისაც წარმოებული განმარტებული გვაქვს. ამ უკანასკნელს x-ის მიმართ კერძო წარმოებული ეწოდება. ანალოგიურად განიმარტება *კერძო წარმოებულები* სხვა ცვლადების მიმართ. სახელდობრ,

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y, z) - u(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, y, z+\Delta z) - u(x,y,z)}{\Delta z}.$$

გამოყენებითი თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია შემდეგი დიფერენციალური ოპერატორები:

1. $\vec{v} := \left(v_x, v_y, v_z\right)$ *ვექტორის დივერგენცია*

$$\operatorname{div} \vec{v} := \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

2. u *სკალარის გრადიენტი*

$$\operatorname{grad} u := \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

სადაც $\vec{i} \equiv \vec{e}_1 := (1,0,0)$, $\vec{j} \equiv \vec{e}_2 := (0,1,0)$, $\vec{k} \equiv \vec{e}_3 := (0,0,1)$, შესაბამისად, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ ღერძების ორტებია. დივერგენცია სკალარული, ხოლო გრადიენტი ვექტორული სიდიდეა.

ორი $\vec{v}$ და $\vec{w}$ *ვექტორის სკალარული (შიგა) ნამრავლი* მათი სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია:

$$\left(\vec{v}, \vec{w}\right) := |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha.$$

ეს განმარტება ადრე შემოტანილი განმარტების

$$(\vec{v}, \vec{w}) := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

ეკვივალენტურია[*]).

---

[*]) მართლაც, რადგანაც $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cos\alpha = \cos\alpha = \begin{cases} 1, \text{ როცა } i = j, \text{ ე.ი. } \varphi = 0; \\ 0, \text{ როცა } i = j, \text{ ე.ი. } \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ სადაც α კუთხეა $\vec{e}_i$-სა და $\vec{e}_j$-ის შორის, ამიტომ

$$(\vec{v}, \vec{w}) := (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3,\ w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3) = v_1 w_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + v_1 w_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + v_1 w_3(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + v_2 w_1(\vec{e}_2, \vec{e}_1) +$$
$$+ v_2 w_2(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + v_2 w_3(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + v_3 w_1(\vec{e}_3, \vec{e}_1) + v_3 w_2(\vec{e}_3, \vec{e}_2) + v_3 w_3(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

6.3. ფუნქციის ექსტრემუმი

განსაზღვრა 6.3.1. ამბობენ, რომ x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ ფუნქციას ამ წერტილში აქვს *ლოკალური მაქსიმუმი* (*მინიმუმი*), თუ

$$f(x) \le f(x_0) \quad \left(f(x) \ge f(x_0)\right)$$

ყველა x-ისთვის x_0-ის მახლობლობაში (იხ. ნახ. 6.3.1).

ლოკალური მაქსიმუმი და მინიმუმი *მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმი* და *მინიმუმია*, თუ, შესაბამისად,

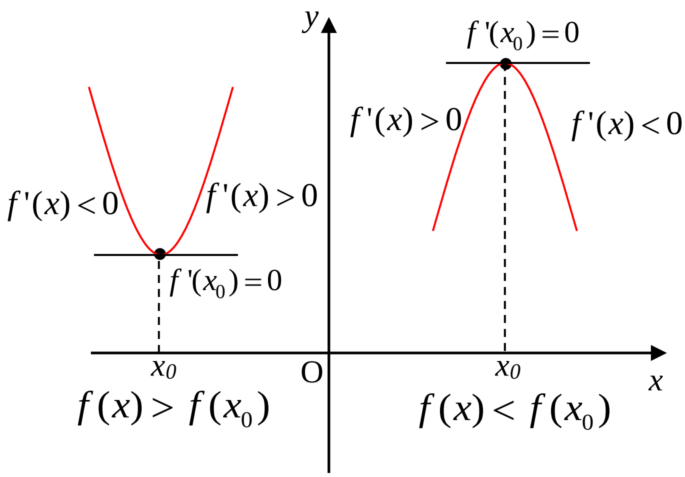
$$f(x) < f(x_0) \text{ და } f(x) > f(x_0).$$

თეორემა 6.3.2. სამართლიანია შემდეგი მტკიცებები

თუ	მაშინ, როცა $x < x_0$ და x ახლოსაა x_0-თან	ხოლო, როცა $x > x_0$ და x ახლოსაა x_0-თან
$f'(x_0) > 0$	$f(x) < f(x_0)$	$f(x_0) < f(x)$
$f'(x_0) < 0$	$f(x) > f(x_0)$	$f(x_0) > f(x)$

დამტკიცება გამომდინარეობს წარმოებულის განმარტებიდან.

თეორემა 6.3.3. თუ რაიმე ინტერვალზე ფუნქციის წარმოებული დადებითია (უარყოფითია), იქ *ფუნქცია ზრდადია (კლებადია).*



ნახ. 6.3.1

თეორემა 6.3.2-დან ცხადია, რომ, თუ

$$f'(x_0) > 0 \text{ ან } f'(x_0) < 0,$$

მაშინ x_0 წერტილში ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს არც ლოკალური მაქსიმუმი და არც ლოკალური მინიმუმი (ერთი სიტყვით, ლოკალური ექსტრემუმი). ამდენად, თუ ფუნქციას x_0 წერტილში წარმოებული აქვს და იქ ექსტრემუმს აღწევს, აუცილებლად

$$f'(x_0) = 0$$

და ფუნქციის გრაფიკისადმი ექსტრემუმის წერტილის შესაბამის წერტილში გავლებული მხები ჰორიზონტალურია (იხ. ნახ. 6.3.1). ამდენად, ჭეშმარიტია:

თეორემა 6.3.4. თუ x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია (ე. ი. ისეთი წერტილი, რომელშიც ფუნქცია ლოკალურ მინიმუმს ან მაქსიმუმს აღწევს) და ამ წერტილში არსებობს წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული 0-ის ტოლია:

$$f'(x_0) = 0 .$$

ანალოგიურად, მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში ექსტრემუმის წერტილში ფუნქციის პირველი რიგის ყველა კერძო წარმოებული აუცილებლად ნულის ტოლია მათი არსებობის პირობებში.

თეორემა 6.3.5. თუ $y = f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მეორე რიგამდე წარმოებული და სრულდება

$$f'(x_0) = 0 , \quad f''(x_0) < 0$$

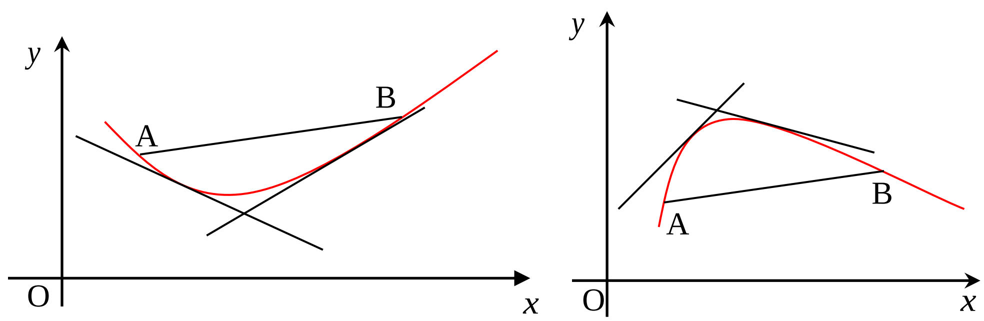
პირობები, მაშინ x_0 წერტილი ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია.

თეორემა 6.3.6. თუ $y = f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მეორე რიგამდე წარმოებული და სრულდება

$$f'(x_0) = 0 , \quad f''(x_0) > 0$$

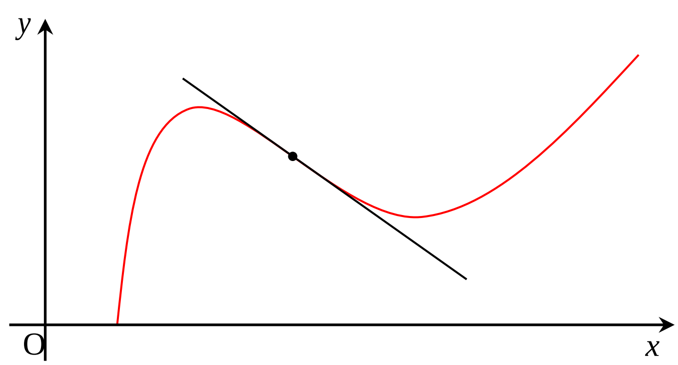
პირობები, მაშინ x_0 წერტილი ფუნქციის მინიმუმის წერტილია.

განსაზღვრა 6.3.7. ფუნქციას ეწოდება „ქვემოთ" ამოზნექილი[*] („ზემოთ" ამოზნექილი[**]) რაიმე ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალში აღებული ნებისმიერი წერტილის შესაბამის წირის



ა) ბ)

ნახ. 6.3.2



ნახ. 6.3.3

[*] ზოგჯერ – *ჩაზნექილი*

[**] ზოგჯერ – *ამოზნექილი*

(გრაფიკის) წერტილში გავლებული მხები ფუნქციის გრაფიკის ქვემოთ (ზემოთ) არის მოთავსებული (იხ., შესაბამისად, ნახ. 6.3.2 ა) და ბ))*).

თეორემა 6.3.8. თუ მოცემულ ინტერვალზე f ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული და ეს წარმოებული დადებითია (უარყოფითია) ამ ინტერვალზე, მაშინ ფუნქცია ჩაზნექილია (ამოზნექილია).

განსაზღვრა 6.3.9. ფუნქციის *გადაღუნვის წერტილი* ეწოდება წერტილს, რომელიც ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედებს განაცალკევებს (იხ. ნახ. 6.3.3) ან, რაც იგივეა, გადაღუნვის წერტილი ეწოდება წერტილს, რომელშიც გავლებული მხების ამ წერტილის ცალ მხარეს მდებარე ნაწილი გრაფიკის ზემოთ, ხოლო მეორე ნაწილი გრაფიკის ქვემოთაა მოთავსებული.

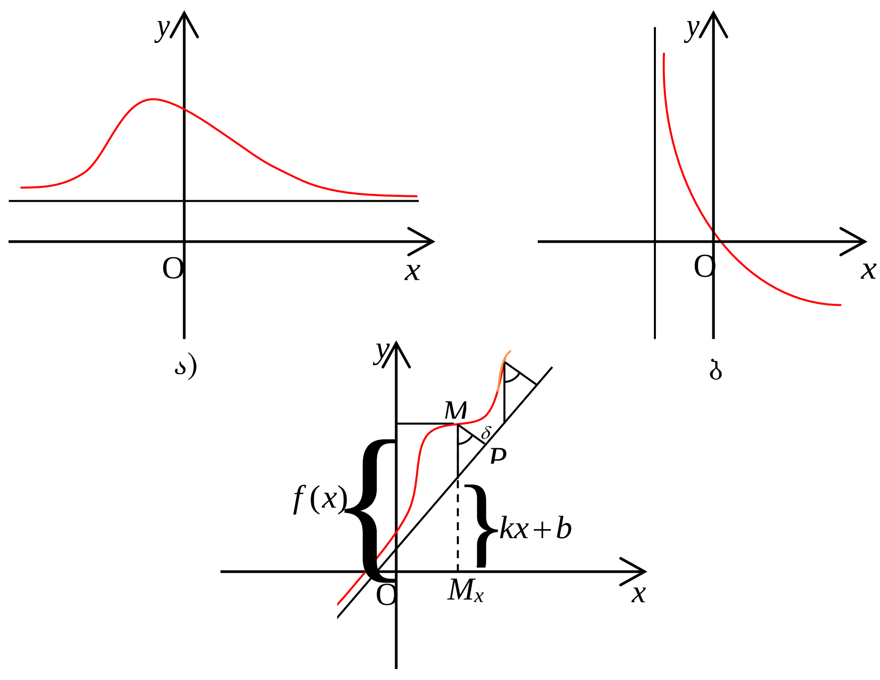
თეორემა 6.3.10. თუ f ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული x_0 წერტილის მახლობლობაში, ამასთან

$$f''(x_0)=0$$

და f''-ს x_0 წერტილის მარცხენა და მარჯვენა მიდამოში სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ $(x_0, f(x_0))$ წერტილი ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია.

განსაზღვრა 6.3.11. თუ წირის**) წერტილიდან რაიმე წრფემდე მანძილი ნულისკენ მიისწრაფის წერტილის უსასრულობაში მისწრაფებისას, მაშინ ამ წრფეს წირის *ასიმპტოტა* ეწოდება. სხვა სიტყვებით, ისეთ წრფეს, რომელსაც წირი უსაზღვროდ უახლოვდება, როცა წირის წერტილი უსასრულობისკენ მიისწრაფის, მაგრამ მას არ კვეთს, ასიმპტოტა ეწოდება.

ასიმპტოტა შეიძლება იყოს *ჰორიზონტალური, ვერტიკალური და დახრილი* (იხ., შესაბამისად,



გ)
ნახ. 6.3.4

---

*) სხვა სიტყვებით, ეს თვისება იმით ხასიათდება, რომ გრაფიკის ნებისმიერი ორი A და B წერტილის შემაერთებელი $\overline{AB}$ ქორდა (ე.ი. A და B წერტილების შემაერთებელი წრფე – მონაკვეთი) მთლიანად მოქცეულია ამ წერტილების შემაერთებელი $\breve{AB}$ რკალის ზემოთ (სათანადოდ, ქვემოთ).

**) ასიმპტოტა განიმარტება წირისთვის. წრფეს ასიმპტოტა არ აქვს.

ნახ. 6.3.4 ა), ბ) და გ)).

განსაზღვრა 6.3.12. თუ

$$\lim_{x\to a\pm} f(x)=+\infty \quad \text{ან} \quad \lim_{x\to a\pm} f(x)=-\infty,$$

მაშინ $x=a$ წრფეს $y=f(x)$ ფუნქციის *ვერტიკალური ასიმპტოტა* ეწოდება.

თეორემა 6.3.13. $y=kx+b$ წრფე $y=f(x)$ ფუნქციის *დახრილი ასიმპტოტაა**) (*თუ* $k=0$, *ის ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა***)), თუ $y=f(x)$ ფუნქცია $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის, შესაბამისად, მარცხენა ან მარჯვენა რაიმე მიდამოში შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$f(x)=kx+b+\gamma(x)$$

სახით, სადაც

$$\lim_{x\to\pm\infty}\gamma(x)=0.$$

დამტკიცება ცხადია. მართლაც, თეორემაში მითითებულ მიდამოში $y=f(x)$ წირის წერტილსა და $y=kx+b$ წრფეს შორის მანძილის ზღვარი

$$\lim_{x\to\pm\infty}\delta=\left[f(x)-kx-b\right]\cos\angle PMM_x=0,$$

რადგან

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\gamma(x)=0.$$

ამრიგად, დახრილი ასიმპტოტის მოსაძებნად უნდა ვიპოვოთ ორი ზღვარი:

$$1)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k\,x+b+\gamma(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}k+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\gamma(x)}{x}=k;$$

$$2)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}[b+\gamma(x)]=b.$$

აქედან გამომდინარეობს

თეორემა 6.3.14. თუ არსებობს სასრული k და b, როცა x მიისწრაფის $+\infty$-სკენ ან $-\infty$–სკენ, მაშინ არსებობს $y=kx+b$ ასიმპტოტა.

განსაზღვრა 6.3.15. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უსასრულოდ მცირე ფუნქცია (სიდიდე)*, როცა $x\to a$ (a შეიძლება იყოს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი), თუ

$$\lim_{x\to a} f(x)=0.$$

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უსასრულოდ დიდი ფუნქცია (სიდიდე)*, როცა $x\to a$, თუ

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty.$$

თეორემა 6.3.16 (*ლოპიტალის****) *წესი*). ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციის შეფარდების ზღვარი ტოლია ამ ფუნქციების წარმოებულების შეფარდების ზღვრის, თუ ეს უკანასკნელი არსებობს, ე. ი.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\ \text{როცა}\ \lim_{x\to a} f(x)=0\ \text{და}\ \lim_{x\to a} g(x)=0.$$

შენიშვნა 6.3.17. მიუხედავად იმისა, $\lim_{x\to a} f(x)$ სასრულია თუ უსასრულო, ლოპიტალის წესი სამართლიანია მაშინაც, როცა

---

*) წირს მხოლოდ ორი დახრილი და ჰორიზონტალური ასიმპტოტა შეიძლება ჰქონდეს, როცა $x\to+\infty$ და როცა $x\to-\infty$.

**) თუ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ არ არის სასრული, წირს ჰორიზონტალური ასიმპტოტა არ აქვს.

***) გ. ფ. ა. ლოპიტალი (1661-1704) – ფრანგი მათემატიკოსი.

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \text{ ან } \lim_{x\to a} g(x) = -\infty .$$

ხშირად ლოპიტალის წესის გამოყენება მოხერხებულია $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 სახის განუზღვრელობების გასახსნელად.

6.4. ფუნქციის გრაფიკის აგება

ფუნქციის გრაფიკის აგების დიფერენციალური მეთოდი შედგება შემდეგი 9 ნაბიჯისგან:

1. ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნა; ლუწ-კენტობის და პერიოდულობის დადგენა;
2. წყვეტის წერტილების პოვნა; წყვეტის წერტილებში ცალმხრივი ზღვრების გამოთვლა;
3. საკოორდინატო ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების პოვნა;
4. უსასრულობაში ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა;
5. ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალების დადგენა;
6. ფუნქციის გამოკვლევა ექსტრემუმზე;
7. ფუნქციის ამოზნექილობის, ჩაზნექილობის შუალედების დადგენა; გადაღუნვის წერტილების პოვნა;
8. ფუნქციის ასიმპტოტების პოვნა;
9. პირველი რვა პუნქტის გამოყენებით გრაფიკის აგება.

მეთოდის ილუსტრირება მოვახდინოთ შემდეგი ოთხი მარტივი ფუნქციის მაგალითზე:

$$\text{ა)}\quad y = x; \tag{6.4.1}$$

$$\text{ბ)}\quad y = \frac{1}{x}; \tag{6.4.2}$$

$$\text{გ)}\quad y = x^2; \tag{6.4.3}$$

$$\text{დ)}\quad y = \sin x. \tag{6.4.4}$$

1. მოვძებნოთ (6.4.1), (6.4.2), (6.4.3), (6.4.4) ფუნქციების *განსაზღვრის არეები.*

ა) $y = x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty;+\infty[$, ან, რაც იგივეა, $x \in R^1$.

ბ) $y = \dfrac{1}{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი წერტილში R^1-დან, გარდა 0-სა, ე. ი. $x \in]-\infty;0[\bigcup]0;+\infty[$.

გ) $y = x^2$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty;+\infty[$.

დ) $y = \sin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty;+\infty[$.

გავარკვიოთ თითოეული ფუნქციის ლუწ-კენტობა.

ა) $f(x) = x$. განვიხილოთ $f(-x)$.

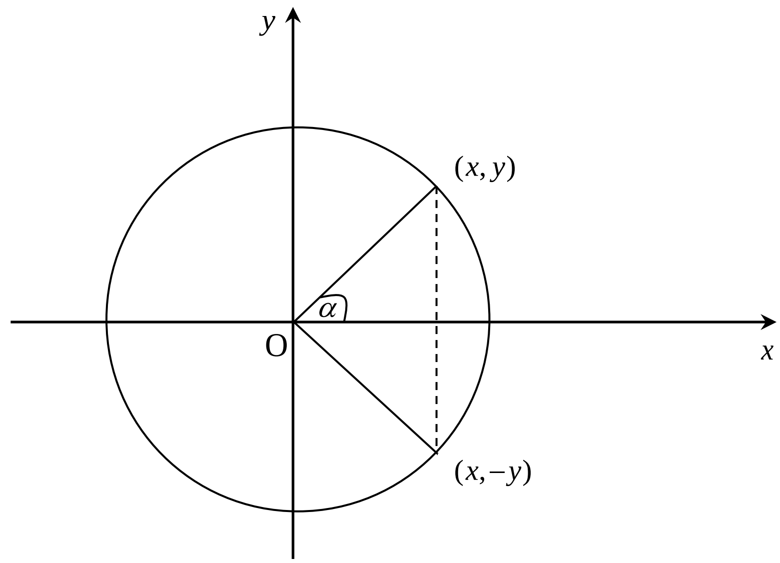
$f(-x) = -x = -f(x)$, ე. ი. ფუნქცია კენტია.

ბ) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. განვიხილოთ

$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, ე. ი. ფუნქცია კენტია.

გ) $f(x) = x^2$. განვიხილოთ

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, ე. ი. ფუნქცია ლუწია.



ნახ. 6.4.1

დ) $f(x) = \sin x$. განვიხილოთ

$$f(-x) = \sin(-x) . \qquad (6.4.5)$$

ნახ. 6.4.1-ზე მოცემულია r-რადიუსიანი წრე. I მეოთხედში გადავზომოთ α რადიანის ტოლი კუთხე. $\sin\alpha$ -ს განმარტების თანახმად (იხ. განსაზღვრა 6.1.5),

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} .$$

ცხადია,

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha .$$

ბოლო ტოლობის ძალით, (6.4.5) ტოლობა შემდეგი სახით გადაიწერება

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) ,$$

ე. ი. $y = \sin x$ ფუნქცია კენტია.

შენიშვნა 6.4.1. $y = \sin x$ ფუნქცია I და II მეოთხედებში დადებით მნიშვნელობებს იღებს, ხოლო III და IV მეოთხედებში – უარყოფითს.

პერიოდულობა.

ა) $f(x) = x$

$f(x+l) = x + l = x$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (6.4.1) ფუნქცია არაპერიოდულია.

ბ) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x+l) = \dfrac{1}{x+l} = \dfrac{1}{x}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (6.4.2) ფუნქციაც არაპერიოდულია.

გ) ანალოგიურად მტკიცდება, რომ (6.4.3) ფუნქციაც არაპერიოდულია.

დ) (6.4.4) ფუნქცია პერიოდულია და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π . მართლაც, რადგან

$$\sin(2\pi + x) = \sin 2\pi \cos x + \cos 2\pi \sin x = \sin x,$$

ამიტომ 2π წარმოადგენს ერთ-ერთ პერიოდს. ვაჩვენოთ, რომ ის უმცირესი დადებითი პერიოდია. თუ დავუშვებთ, რომ $0 < l < 2\pi$ პერიოდია, მაშინ

$$\sin(x + l) = \sin x$$

ნებისმიერი x-სთვის, მათ შორის $x = 0$-სთვისაც, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\sin l = \sin 0 = 0,$$

რაც მართებულია 2π-ზე ნაკლები მხოლოდ ერთი $l = \pi$ მნიშვნელობისთვის. მაგრამ π არ წარმოადგენს $\sin x$-ის პერიოდს, რადგან $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$.

ამდენად, საკმარისია მისი გრაფიკი ავაგოთ $[0, 2\pi]$ შუალედში, ხოლო შემდეგ გადავიტანოთ მარჯვნივ და მარცხნივ 2π პერიოდით.

2. გავარკვიოთ ფუნქციის წყვეტის წერტილების საკითხი.

ა) $y = x$ ფუნქციას წყვეტის წერტილები არ აქვს.

ბ) $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია $x = 0$. ვიპოვოთ (6.4.2) ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები წყვეტის წერტილში

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(6.4.3) და (6.4.4) ფუნქციებს წყვეტის წერტილები არ აქვს.

3. ფუნქციის გრაფიკის x და y ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების მოსაძებნად შესაბამისად y და x ცვლადები უნდა გავუტოლოთ ნულს.

ა) $y = x$ ფუნქცია გადის კოორდინატთა სათავეზე, ე. ი. $(0,0)$ წერტილზე.

ბ) $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი არ კვეთს საკოორდინატო ღერძებს.

გ) $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $(0,0)$ წერტილზე.

დ) $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი x ღერძს კვეთს, როცა $\sin x = 0$-ს, ე. ი. $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ წერტილებში, y ღერძს კი $(0,0)$ წერტილში, რადგან $y = \sin 0 = 0$.

4. *ფუნქციის ყოფაქცევა უსასრულობაში.*

ა) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$.

ბ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

გ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$.

დ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sin x)$ არ არსებობს.

5. *ზრდადობა-კლებადობის საკითხის დადგენა.*

ა) $f(x) = x$.

$f'(x) \equiv 1 > 0$, ე. ი. ფუნქცია ზრდადია განსაზღვრის მთელ არეზე.

ბ) $f(x) = \frac{1}{x}$.

$f'(x)=\left(x^{-1}\right)'=(-1)x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}<0$ ნებისმიერი $x\neq 0$ -სთვის.

ამდენად, ფუნქცია კლებადია თავის განსაზღვრის არეზე.

გ) $f(x)=x^2$.

$$f'(x)=\left(x^2\right)'=2x\begin{cases}>0, \text{ როცა } x>0, \text{ ე.ი. ზრდადია, როცა } x\in[0;+\infty[,\\ <0, \text{ როცა } x<0, \text{ ე.ი. კლებადია, როცა } x\in]-\infty;0].\end{cases}$$

დ) $f(x)=\sin x$.

$$f'(x)=\cos x\begin{cases}>0, \text{ I და IV მეოთხედებში ზრდადია},\\ <0, \text{ II და III მეოთხედებში კლებადია}.\end{cases}$$

6. *ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოძებნა.*

ა) $f(x)=x$.

$f'(x)\equiv 1\neq 0$, ე. ი. $y=x$ ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს.

ბ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\neq 0$, ე. ი. $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს.

გ) $f(x)=x^2$.

$f'(x)=2x=0$, როცა $x=0$.

$x=0$ ექსტრემუმის წერტილია. იმის გასარკვევად, ეს წერტილი მაქსიმუმის წერტილია თუ მინიმუმის, საჭიროა, ვიპოვოთ $f''(x)$:

$$f''(x)=2>0,$$

ე. ი. $x=0$ მინიმუმის წერტილია. რადგან $f(0)=\min f(x)=0,$ ამიტომ $(0,0)$ წერტილში გამავალი მხები $y=0$ წრფეს (x ღერძს) ემთხვევა (იხ. §5.3).

დ) $f(x)=\sin x$.

$f'(x)=\cos x=0$, როცა $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0;\pm1;\pm2;\ldots$.

განვიხილოთ $f''(x)$:

$$f''(x)=-\sin x\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$

$$=-\cos\pi k\begin{cases}<0, \text{ როცა } k=2j,\\ >0, \text{ როცა } k=2j+1,\end{cases}\quad j=0;\pm1;\pm2;\cdots.$$

მივიღეთ, რომ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi j$, $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$, წერტილები ფუნქციის მაქსიმუმის $\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi j\right)=1\right]$ წერტილებია, ხოლო $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi(2j+1)^{*)}$, ე. ი. $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi j^{*)}$,

---

*) წერტილთა ეს სიმრავლეები რომ ერთი და იგივეა, ადვილად დავრწმუნდებით $j=j'-1$, $j, j'=0,\pm1,\pm2,\cdots$, ჩასმით.

$j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, წერტილები – ფუნქციის მინიმუმის $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi j\right) = -1\right]$ წერტილებია. ექსტრემუმის წერტილების შესაბამის წრის წერტილებში გავლებული მხები x ღერძის პარალელურია (იხ. § 6.3.)

7. *ფუნქციის ამოზნექილობა, ჩაზნექილობა; გადაღუნვის წერტილების პოვნა.*

ა) $f(x) = x$.

$f''(x) \equiv 0$, ე. ი. $y = x$ ფუნქცია არ არის არც ამოზნექილი და არც ჩაზნექილი. მის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსი $tg\alpha = m = 1$, საიდანაც $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

ბ) $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'' = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3}\begin{cases} > 0, & \text{როცა } x > 0, \\ < 0, & \text{როცა } x < 0, \end{cases}$$

ე. ი. $y = \frac{1}{y}$ ფუნქციის გრაფიკი $x \in]0;+\infty[$ შუალედში ჩაზნექილია, ხოლო $x \in]-\infty;0[$ შუალედში – ამოზნექილი.

გ) $f(x) = x^2$.

$f''(x) \equiv 2 > 0$, ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია.

დ) $f(x) = \sin x$.

$$f''(x) = -\sin x\begin{cases} > 0, & \text{III და IV მეოთხედებში,} \\ < 0, & \text{I და II მეოთხედებში,} \end{cases}$$

ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, როცა $x \in]-\pi \pm 2\pi k, 2\pi k[$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots$, კერძოდ, $]\pi, 2\pi[$ ინტერვალზე, და ამოზნექილია, როცა $x \in]2\pi k, \pi(1+2k)[$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots$, კერძოდ, $]0, \pi[$ ინტერვალზე. ცხადია, რომ

$$f''(\pi k) = -\sin(\pi k) = 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $x = \pi k$ გადაღუნვის წერტილებია, რადგან πk წერტილის ერთ მხარეს ფუნქცია ჩაზნექილია, ხოლო მეორე მხარეს – ამოზნექილი.

გამოვთვალოთ გადაღუნვის 0 და π წერტილებში გავლებულ მხებთა მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხეები. წირისადმი გავლებული მხების განტოლების ფორმულიდან შესაბამისად გვექნება (იხ. § 6.1)

$$y - \sin 0 = \sin' 0 \cdot (x - 0) \quad \text{და} \quad y - \sin\pi = \sin'\pi \cdot (x - \pi),$$

ე.ი.

$$y = \cos 0 \cdot x \quad \text{და} \quad y = \cos\pi \cdot (x - \pi).$$

საიდანაც, შესაბამისად,

$$y = x \quad \text{და} \quad y = -x + \pi.$$

მაგრამ, რადგან საკუთხო კოეფიციენტი (იხ. § 6.1) $tg\alpha = m = f'(x_0)$, ამიტომ $tg\alpha = 1$, როცა $x_0 = 0$, და $tg\alpha = -1$, როცა $x_0 = \pi$. შესაბამისად $\alpha = \frac{\pi}{4}$, როცა $x_0 = 0$, და $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ან რაც იგივეა $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, როცა $x_0 = \pi$.

8. ასიმპტოტების პოვნა.

ა) (6.4.1) ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არ აქვს.

ბ) (6.4.2) ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა $y=0$, ვერტიკალური ასიმპტოტა კი $x=0$; დახრილი ასიმპტოტები არ გააჩნია. მართლაც,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

ამიტომ

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

ამდენად, ასიმპტოტის განტოლებაა $y=0$ და ის ჰორიზონტალურია. $x=0$ წრფე ვერტიკალური ასიმპტოტაა, რადგან

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty.$$

გ) (6.4.3) ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არ აქვს. მართლაც, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$, ე.ი., k არ არსებობს.

დ) (6.4.4) ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არ აქვს. მართლაც,

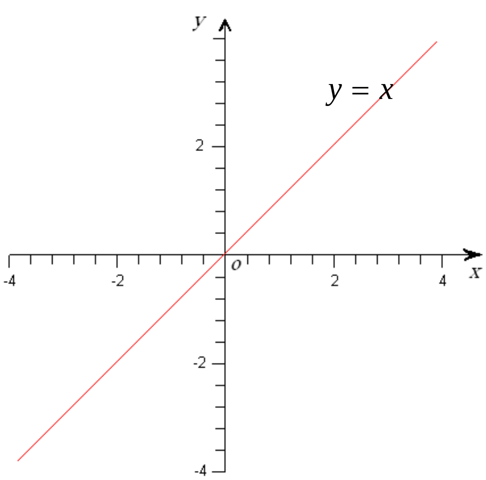
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

მაგრამ

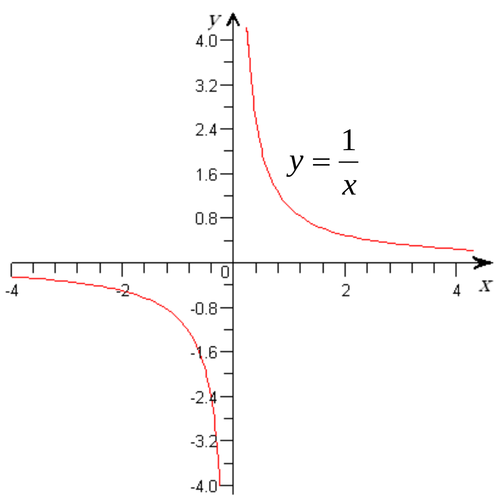
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\sin x\,.$$

ეს უკანასკნელი კი არ არსებობს, ე.ი., b არ არსებობს. ამდენად, ასიმპტოტებიც არ არსებობენ.

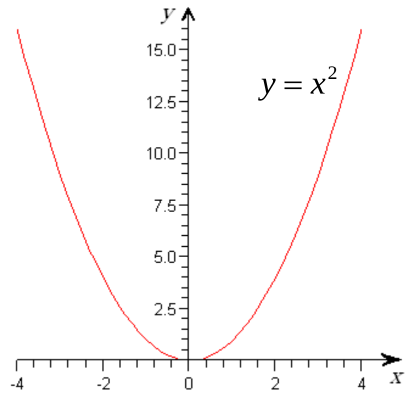
9. *გრაფიკის აგება* (იხ. ნახ 6.42 – 6.4.5).



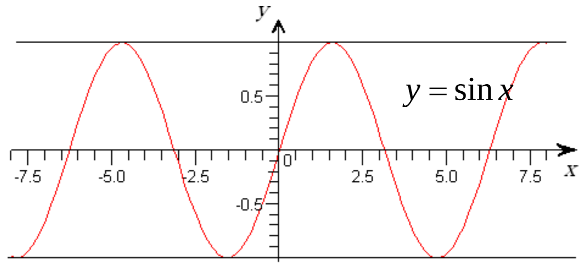
ნახ. 6.4.2



ნახ. 6.4.3



ნახ. 6.4.4



ნახ. 6.4.5