რამაზ ბოჭორიშვილი
თინათინ დავითაშვილი

რიცხვითი ანალიზი

ლექციათა კურსი

2013 წელი

ს ა რ ჩ ე ვ ი

გვ.

თავი 1. კომპიუტერული არითმეტიკა. ცდომილებები. გამოთვლითი მათემატიკის ძირითადი ცნებები ________ 3

თავი II. მატრიცების და ვექტორების ნორმები. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი ________ 19

თავი III. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პირდაპირი მეთოდები ________ 34

თავი IV. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის იტერაციული მეთოდები ________ 58

თემა V. არაწრფივი განტოლებები ________ 76

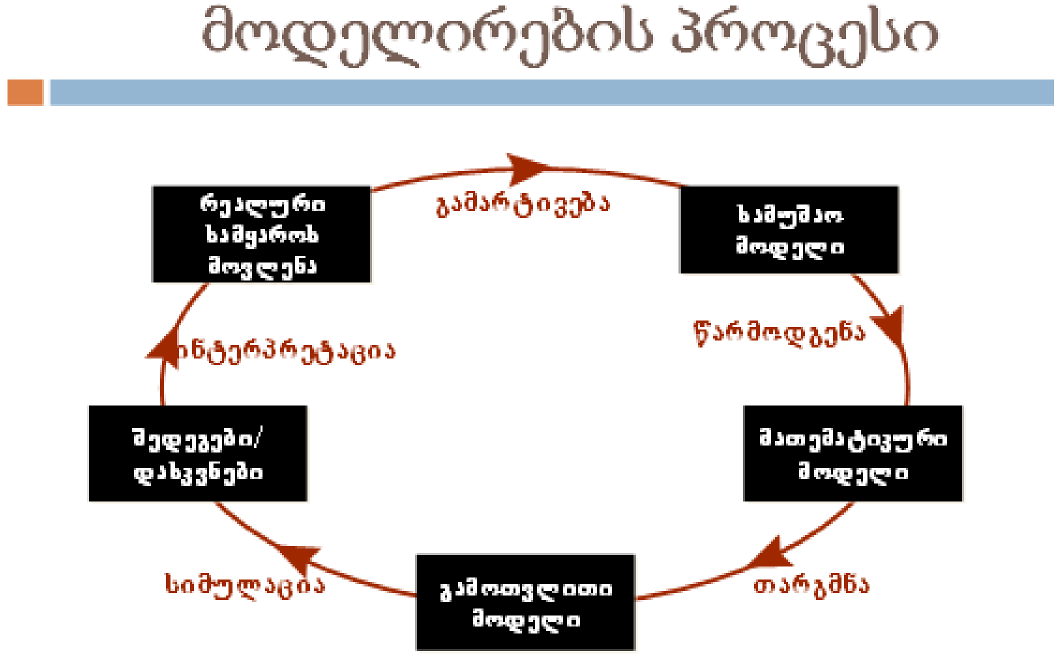
თემა VI. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები ________ 91

თავი VII. ინტერპოლება და ფუნქციათა მიახლოება ________ 103

თავი VIII. რიცხვითი ინტეგრება ________ 138

თავი 1. კომპიუტერული არითმეტიკა. ცდომილებები. გამოთვლითი მათემატიკის ძირითადი ცნებები

1.1. მოდელირების ზოგადი სქემა



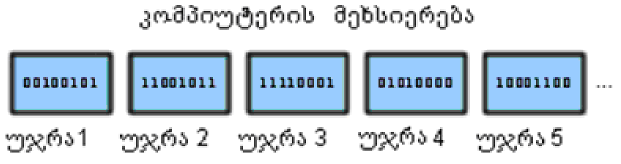
ნახ.1.1

1.2. მთელი უნიშნო რიცხვების წარმოდგენა კომპიუტერის მეხსიერებაში

კომპიუტერის k–თანრიგიან მეხსიერების უჯრაში (თანრიგების ათვლა ხდება მარჯვნიდან, 0-დან) ნებისმიერი მთელი არაუარყოფითი n რიცხვი წარმოდგება შემდეგნაირად – ხდება მისი თვლის ორობით (ბინარულ) სისტემაში წარმოდგენა და მიღებული შედეგით მარჯვნიდან ივსება მეხსიერების უჯრა, დარჩენილი თავისუფალი ადგილი კი ივსება ნულებით k თანრიგამდე:

$$n = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} b_i \; , \qquad (1.1)$$

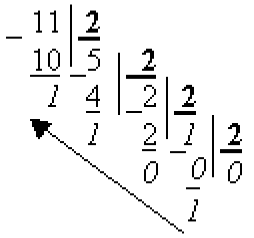
სადაც b_i , $i = 1,2,\ldots,L,$ რიცხვები იღებს მნიშვნელობებს 0 ან 1. მათ ბიტებს უწოდებენ. 8 ბიტი ქმნის ერთ ბაიტს. ჩვეულებრივ, მთელი რიცხვის წარმოსადგენად გამოიყენება 2 ან 4 ბაიტი. საზოგადოდ, რიცხვების ჩასაწერად გამოყოფილი ველის სიგრძე დამოკიდებულია ერთის მხრივ, კომპიუტერზე და მეორეს მხრივ, დაპროგრამების სისტემაზე.



ნახ. 1.2

წესი1	წესი 2	წესი 3	წესი 4
0 + 0 = 0	0 + 1 = 1	1 + 0 = 1	1 + 1 = 10

ნახ. 1.3. ბინარული შეკრების წესები



შენიშვნა 1. მთელი ათობითი რიცხვის ორობით რიცხვში გადაყვანის ალგორითმი ასეთია:

- თანმიმდევრობით ჩავატაროთ 2–ზე გაყოფა მთელი ათობითი რიცხვისა და მიღებული განაყოფებისა, მანამ სანამ განაყოფში არ მივიღებთ 0–ს. ყოველ ბიჯზე ამოვწეროთ ნაშთი.
- მიღებული ნაშთები ჩვწეროთ უკუ თანმიმდევრობით.

  მაგალითად, $11_{10}=1011_2$

მაქსიმალურ უნიშნო რიცხვს, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში, შეესაბამება ერთიანები უჯრედის ყველა თანრიგში. k–თანრიგიანი წარმოდგენის დროს იგი ტოლი იქნება

$$M = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1.$$

8 თანრიგიანი (1 ბაიტიანი) უნიშნო წარმოდგენის დროს $M = 2^8 - 1 = 255$, 2 ბაიტიანი უნიშნო მთელი რიცხვების შემთხვევაში $M = 2^{16} - 1 = 65535$, ხოლო 4 ბაიტიანი რიცხვების დროს კი - $M = 2^{32} - 1 = 4294967295$. მთელი რიცხვები, რომლებიც მოდულით აღემატება M რიცხვს, შეუძლებელია წარმოვადგინოთ კომპიუტერის მეხსიერებაში. მინიმალური უნიშნო რიცხვის ყველა თანრიგში ნულია და იგი ნულის ტოლია.

ცნობილია, რომ უარყოფითი რიცხვების უშუალოდ წარმოდგენა თვლის ორობით სისტემაში მხოლოდ ორი ციფრის - 0 და 1-ის გამოყენებით შეუძლებელია. უარყოფითი რიცხვის მოდულის წინ აუცილებლად უნდა დაისვას ნიშანი “მინუსი”. ეს კი იწვევს ოპერანდების ნიშნების შემოწმების აუცილებლობას არითმეტიკული ოპერაციების შესრულების დროს, რაც ამცირებს ინფორმაციის დამუშავების სისწრაფეს. ოპერანდების შემოწმების თავიდან ასაცილებლად შეიმუშავეს და დანერგეს უარყოფითი რიცხვების დამატებითი კოდის სახით წარმოდგენის ხერხი. ამან არსებითად გაამარტივა არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარების სქემა, გამოკლების ოპერაცია შეკრებით შეიცვალა, მაგრამ ძნელად აღსაქმელი გახდა უარყოფითი რიცხვის ჩანაწერი. (კომპიუტერში ინფორმაციის წარმოდგენისათვის თვლის კლასიკური ორობითი სისტემის გამოყენებას არსებითი ნაკლოვანებები აქვს. ერთერთი სწორედ უარყოფითი რიცხვების წარმოდგენის პრობლემაა).

1.3. მთელი ნიშნიანი რიცხვების წარმოდგენა თვლის ორობითი სისტემაში. პირდაპირი და დამატებითი კოდი

მთელი ნიშნიანი რიცხვების წარმოდგენის აღწერისათვის საჭიროა პირდაპირი, შებრუნებული და დამატებითი კოდების განმარტება.

განსაზღვრება 1.1. რიცხვის წარმოდგენას ადამიანისათვის ჩვეული ფორმით “ნიშანი-სიდიდე”, რომლის დროსაც მეხსიერების უჯრედის უფროსი თანრიგი ეთმობა ნიშანს, ხოლო დარჩენილი k -1 თანრიგი - რიცხვის ციფრებს, ეწოდება **პირდაპირი კოდი.**

მაგალითად, რიცხვების 11001_2 და -11001_2 პირდაპირი კოდები 8-თანრიგიანი უჯრედის შემთხვევაში ტოლია, შესაბამისად, 00011001 და 10011001-ისა. ისინი განსხვავდება ნიშნის თანრიგის მნიშვნელობით. თუმცა, მთელი უარყოფითი რიცხვების წარმოდგენისათვის კომპიუტერში გამოიყენება არა პირდაპირი კოდი, არამედ დამატებითი კოდი (იხ. ქვემოთ).

შევნიშნოთ, რომ მაქსიმალური დადებითი რიცხვი, რომელიც შეიძლება ჩავწეროთ ნიშნიანი წარმოდგენის დროს, ტოლია 2^{k-1}-1, რაც თითქმის ორჯერ ნაკლებია იგივე რაოდენობის თანრიგებში ჩაწერილ მაქსიმალურ უნიშნო რიცხვზე. მართლაც, 8 ბიტში ჩაწერილი მაქსიმალური დადებითი რიცხვი ტოლია 127-ის (2^7-1), ხოლო 16 ბიტში ჩაწერილი ტოლია 32767-ის (2^{15}-1).

განსაზღვრება 1.2. მთელი უარყოფითი ($-m$) რიცხვის (m>0) k თანრიგიანი **დამატებითი კოდი** წარმოადგენს $2^k - m$ დადებითი რიცხვის ჩანაწერს k თანრიგში, სადაც $m \le 2^{k-1}$.

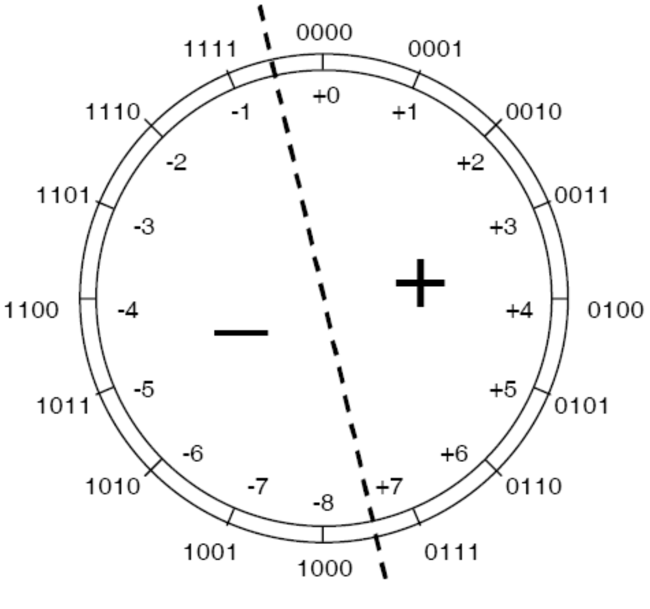
რას და სადამდე ავსებს დამატებითი კოდი? უარყოფითი ($-m$) რიცხვის დამატებითი კოდი წარმოადგენს ამ რიცხვის მოდულის დამატებას 2^k–მდე (ან, რაც იგივეა, 0-მდე k თანრიგიან არითმეტიკაში): $\left(2^k - m\right) + m = 2^k \equiv 0$.

ჩავწეროთ $2^k - m$ შემდეგი სახით:

$$2^k - m = 2^{k-1} + (2^{k-1} - m).$$

აქ პირველი შესაკრები 2^{k-1} შეესაბამება ერთიანს მარცხენა, ნიშნის თანრიგში. ე.ი. უარყოფითი რიცხვის დამატებით კოდში წარმოდგენისას მარცხენა, ნიშნის თანრიგში იწერება უარყოფითი რიცხვის ნიშანი (ერთიანი), ხოლო დანარჩენ თანრიგებში კი რიცხვი $2^{k-1} - m$. შესაბამისად, მინიმალური უარყოფითი (მოდულით მაქსიმალური) რიცხვი, რომელიც შეიძლება k თანრიგიან უჯრაში ჩავწეროთ, ტოლია (-2^{k-1})-ის.

მაგალითად განვიხილოთ დადებითი და უარყოფითი რიცხვების კოდირება ორობით 4-ბიტიან (k =4) ფორმატში. შევნიშნოთ, რომ დადებითი რიცხვები 0-დან 7-ის (ან, ზოგადად, $2^{k-1}-1$) ჩათვლით, წარმოდგება პირდაპირი კოდით, მაშინ როცა უარყოფითი რიცხვები (-1)-დან (-8)-ის (ან, ზოგადად, -2^{k-1}) ჩათვლით, გარდაიქმნება უნიშნო რიცხვებად მათთვის 16-ის (ან, ზოგადად, 2^k) დამატებით.



ნახ. 1.4. ორობითი 4-ბიტიანი კოდის სქემატური წარმოდგენა მთელი რიცხვებისათვის [−8, +7] შუალედიდან

ორობითი წარმოდგენა	ათობითი მნიშვნელობა
10000000000000000000000000000000	(-2^{31} = -2,147,483,648)
10000000000000000000000000000001	($-2^{31}-1$ = -2,147,483,647)
10000000000000000000000000000010	($-2^{31}-2$ = -2,147,483,646)
.	
.	
.	
11111111111111111111111111111101	(-3)
11111111111111111111111111111110	(-2)
11111111111111111111111111111111	(-1)
00000000000000000000000000000000	(0)
00000000000000000000000000000001	(1)
00000000000000000000000000000010	(2)
00000000000000000000000000000011	(3)
.	
.	
.	
01111111111111111111111111111101	($2^{31}-3$ = 2,147,483,645)
01111111111111111111111111111110	($2^{31}-2$ = 2,147,483,646)
01111111111111111111111111111111	($2^{31}-1$ = 2,147,483,647)

ნახ. 1.5. ნიშნიანი ორობითი რიცხვები 32-თანრიგიანი წარმოდგენის შემთხვევაში

დამატებითი კოდის აგების ალგორითმი.

1) ჩავწეროთ რიცხვის მოდულის *k* თანრიგიანი ორობითი პირდაპირი კოდი.

2) მოვახდინოთ ყველა თანრიგის ინვერტირება, ანუ 0 შევცვალოთ 1-ით, ხოლო 1 ნულით. ამგვარად მივიღებთ საწყისი რიცხვის *k* თანრიგიან შებრუნებულ კოდს.

3) მიღებულ შებრუნებულ კოდს ბოლო თანრიგში დავუმატოთ ერთიანი.

მაგალითი 1.1. ჩავწეროთ -52-ის დამატებითი კოდი რვა და თევსმეტ თანრიგიანი უჯრებისათვის.

რვა თანრიგიანი უჯრისათვის:

0011 0100 - პირდაპირი კოდი რიცხვისა |-52| = 52;

1100 1011 - შებრუნებული კოდი რიცხვისა (-52);

1100 1100 - დამატებითი კოდი რიცხვისა (-52);

თევსმეტ თანრიგიანი უჯრისათვის:

0000 0000 0011 0100 - პირდაპირი კოდი რიცხვისა |-52|;

1111 1111 1100 1011 - შებრუნებული კოდი რიცხვისა (-52);

1111 1111 1100 1100 - დამატებითი კოდი რიცხვისა (-52);

საწყისი უარყოფითი ათობითი რიცხვის მოდულის აღდგენა დამატებითი კოდის მიხედვით შეიძლება ორი ხერხით.

I ხერხი. ვატარებთ დამატებითი კოდის მიღების ალგორითმს უკუმიმართულებით: დამატებით კოდს გამოვაკლებთ ერთიანს, მოვახდენთ მიღებული კოდის ინვერტირებას და შედეგად მიღებულ ორობით რიცხვს ჩავწერთ ათობით სისტემაში.

II ხერხი. საწყისი რიცხვის არსებული დამატებითი კოდისათვის ავაგოთ დამატებითი კოდი და წარმოვადგინოთ შედეგი ათობით სისტემაში.

მაგალითი 1.2. ჩავწეროთ რიცხვის მნიშვნელობა ათობით სისტემაში მისი დამატებითი კოდის მიხედვით: $1001\ 0111_2$.

I ხერხით:

1) დამატებითი კოდიდან გამოვაკლოთ ერთიანი:

1001 0111 – 1 = 1001 0110 (მივიღეთ შებრუნებული კოდი);

2) მოვახდინოთ მიღებული კოდის ინვერტაცია: 0110 1001 (მივიღეთ უარყოფითი რიცხვის მოდული);

3) გადავიყვანოთ მიღებული ორობითი რიცხვი ათობითში:

$0110\ 1001_2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 1 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105.$

პასუხი: –105.

II ხერხით:

1) მოვახდინოთ არსებული დამატებითი კოდის ინვერტაცია: 0110 1000;

2) დავუმატოთ შედეგს 1 : 0110 1000 + 1 = 0110 1001 (მივიღეთ უარყოფითი რიცხვის მოდული);

3) გადავიყვანოთ მიღებული ორობითი რიცხვი ათობითში:

$0110\ 1001_2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 1 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105.$

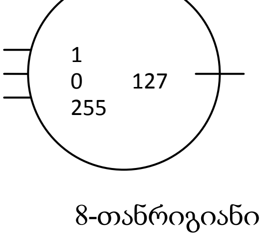
პასუხი: –105.

1.4. მთელი რიცხვების წარმოდგენის დიაპაზონი მეხსიერების *k* თანრიგიან უჯრედში

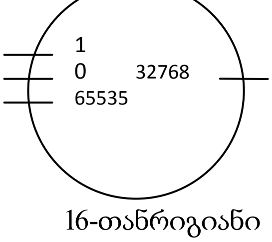
ნიშნიანი მთელი რიცხვები *k* თანრიგიანი წარმოდგენის დროს ეკუთვნის დიაპაზონს $[-2^{k-1}, 2^{k-1}-1]$, რომელიც არ არის სიმეტრიული 0-ის მიმართ. ეს უნდა გავითვალისწინოთ დაპროგრამების დროს. კერძოდ, თუ ნიშანს შევუცვლით მოდულით უდიდეს უარყოფით რიცხვს, მაშინ მიღებული შედეგის წარმოდგენა შეუძლებელი იქნება *k* თანრიგში. ქვემოთ მოყვანილია დიაპაზონის საზღვრები სხვადასხვა თანრიგიანი უჯრების შემთხვევაში:

თანრიგების რაოდენობა *k*	მთელი რიცხვების წარმოდგენის დიაპაზონი
8	უნიშნო: 0 – 255 (2^8-1); ნიშნიანი -128 (-2^7) – 127 (2^7-1)
16	უნიშნო: 0 – 65535 (2^{16}-1); ნიშნიანი -32768 (-2^{15}) – 32767 (2^{15}-1)
32	უნიშნო: 0 – 4294967295 (2^{32}-1); ნიშნიანი -2147483648 (-2^{31}) – 2147483647 (2^{31}-1)

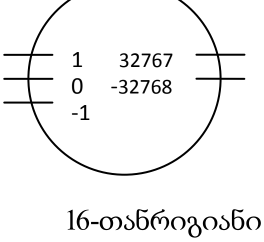
კომპიუტერში წარმოდგენილი მთელი რიცხვები (ნიშნიანი ან უნიშნო) შეიძლება დავალაგოთ ზრდის მიხედვით. მაგალითად, უნიშნო 8 თანრიგიანი მთელი რიცხვები - 0-დან 255-მდე. თუმცა, რადგანაც ***k* თანრიგიან მთელრიცხვა კომპიუტერულ არითმეტიკაში** $2^k \equiv 0$, ამიტომ *k* თანრიგიან არითმეტიკაში ეს მონაკვეთები შეიძლება წრიულად შევკრათ. მაშინ მაქსიმალური რიცხვის გვერდით აღმოჩნდება მინიმალური:



8-თანრიგიანი უნიშნო



16-თანრიგიანი უნიშნო



16-თანრიგიანი ნიშნიანი

ნახ. 1.6

მართლაც, ერთიანის მიმატების შედეგი ფიქსირებული რაოდენობის თანრიგებიან არითმეტიკაში არის წრეზე მდებარე მომდევნო რიცხვი საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო ერთიანის გამოკლება – ასევე მომდევნო რიცხვი, მხოლოდ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ეს ფაქტი ცხადია, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ხდება მაქსიმალური შესაძლებელი რიცხვიდან მინიმალურზე გადასვლა ერთიანის მიმატების დროს და პირიქით – გამოკლების დროს.

1.5. ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენა მცოცავწერტილიან ფორმატში

რიცხვის ჩაწერის ყველაზე ბუნებრივ ფორმას წარმოადგენს ის ფორმა, რომელიც გამოიყენება რიცხვების ათობით სისტემაში წარმოდგენისას. ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით:

$$x = \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 \; + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots),$$

სადაც a_i -კოეფიციენტებს შეუძლიათ მიიღონ ერთ-ერთი შემდეგი მნიშვნელობებიდან: 0,1,2,...,9. აქედან გამომდინარეობს x რიცხვის წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$x = \pm\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \cdots}.$$

ანალოგიურად შეიძლება წარმოვადგინოთ ნებისმიერი x რიცხვი თვლის ისეთ სისტემაში, რომლის ფუძეც განსხვავებულია 10-სგან, მაგალითად, თვლის სისტემაში, რომლის ფუძეა $P > 1$:

$$x = \pm(b_n \cdot P^n + b_{n-1} \cdot P^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot P \; + b_0 + b_{-1} \cdot P^{-1} + b_{-2} \cdot P^{-2} + \cdots),$$

სადაც b_i კოეფიციენტებს შეუძლიათ მიიღონ ერთ-ერთი შემდეგი მნიშვნელობებიდან: $0,1,2,\ldots,P-1$. ათობით სისტემაში რიცხვების ჩაწერის ანალოგიურად, ეს რიცხვებიც შეიძლება წარმოდგეს შემდეგი სახით:

$$x = \pm\overline{b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0 , b_{-1} b_{-2} \cdots} \quad .$$

რიცხვების წარმოდგენის ზემოთ აღწერილ სისტემას უწოდებენ პოზიციურ სისტემას. ეს სახელწოდება განპირობებულია იმ გარემოებით, რომ უკანასკნელ ჩანაწერში თითოეული b_i ციფრის როლი ცალსახად განსაზღვრულია მის მიერ დაკავებული პოზიციით. P რიცხვს ეწოდება თვლის სისტემის ფუძე, ხოლო 0,1,2,..., P-1 რიცხვებს – ბაზისური რიცხვები.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $P = 2$.

შენიშვნა 2. წესიერი ათწილადის ოროობით რიცხვში გადაყვანის ალგორითმი ასეთია:

- თანმიმდევრობით გაამრავლეთ 2–ზე საწყისი ათწილადი რიცხვი და მიღებული ნამრავლების წილადი ნაწილები, მანამ სანამ ნამრავლში არ მიიღება ნულოვანი წილადი ნაწილი ან მიღწეული არ იქნება სასურველი სიზუსტე.
- ჩაწერეთ მიღებული ნამრავლების მთელი ნაწილები პირდაპირი თანმიმდევრობით.

მართლაც, საწყისი წესიერი a ათწილადი გავშალოთ 2–ის ხარისხებად

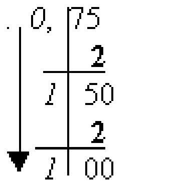
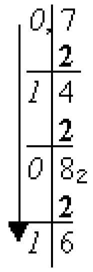
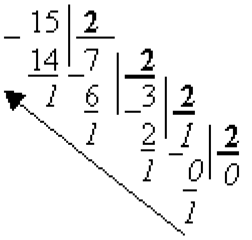
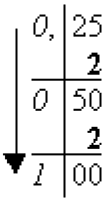
$$a = a_{-1} \cdot 2^{-1} + a_{-2} \cdot 2^{-2} + \cdots,$$

მაშინ ორობით წარმოდგენაში მისი სახე იქნება: $\overline{0, a_{-1}a_{-2}\cdots}$. თუ a–ს გავამრავლებთ 2–ზე, მარჯვენა მხარეში მივიღებთ $a_{-1} + a_{-2} \cdot 2^{-1} + a_{-3} \cdot 2^{-2} + \cdots$, სადაც a_{-1} მთელი ნაწილია და სწორედ ის არის მძიმის შემდეგ პირველი ციფრი a–ს ორობით წარმოდგენაში. დარჩენილი წილადი ნაწილი კვლავ გავამრავლოთ 2–ზე. მივიღებთ $a_{-2} + a_{-3} \cdot 2^{-1} + \cdots$, სადაც a_{-2} მძიმის შემდეგ მეორე ციფრია რიცხვის ორობით წარმოდგენაში. პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ მარჯვენა მხარეში 0–ს არ მივიღებთ ან მიღწეული არ იქნება გამოთვლების სასურველი სიზუსტე.

შენიშვნა 3. შერეული ათწილადის ორობით რიცხვში გადაყვანის ალგორითმი ასეთია:

- გადაიყვანეთ ორობითში მთელი ნაწილი;
- გადაიყვანეთ ორობითში წილადი ნაწილი;
- შეკრიბეთ მიღებული შედეგები.

მაგალითები

წესიერი ათწილადის გადაყვანა ორობითში		შერეული ათწილადის გადაყვანა ორობითში
 $0{,}75_{10} = 0{,}11_2$ შემოწმება: $0{,}11_2 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75_{10}$	 $0{,}7_{10}=0{,}101...$	  $15{,}25_{10} = 1111{,}01_2$
	ეს პროცესი შეიძლება უსასრულოდ გაგრძელდეს, ამიტომ მას შეწყვეტენ იმ ბიჯზე, როცა ჩათვლიან, რომ სასურველი სიზუსტე მიღწეულია	

კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში შეიძლება ჩაწერილი იქნას მხოლოდ სასრული ათწილადი. აქედან გამომდინარეობს, რომ კომპიუტერი არითმეტიკულ თუ სხვა სახის ოპერაციებს ასრულებს მხოლოდ სასრულ ათწილადებზე. ეს არის კომპიუტერში რიცხვის წარმოდგენის **მნიშვნელოვანი თვისება, რაც განსაზღვრავს კომპიუტერული არითმეტიკის აქსიომატიკას.** არითმეტიკული ოპერაციების შესრულების უნიფიცირების მოთხოვნამ, რაც აუცილებელია კომპიუტერის მუშაობისათვის, მოითხოვა კომპიუტერის მეხსიერებაში რიცხვების წარმოდგენის უნიფიცირებაც. თანამედროვე კომპიუტერებში ძირითადად გამოიყენება რიცხვების წარმოდგენა ე.წ. მცოცავწერტილიან ფორმატში.

მაგალითად, თუ თვლის ათობით სისტემაში გამოვიყენებთ რიცხვების წარმოდგენას მცოცავწერტილიან ფორმატში, მაშინ x რიცხვი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$x = (-1)^s f \cdot 10^e, \qquad (1.2)$$

სადაც f და e - შესაბამისად წარმოადგენს რიცხვის მანტისას და რიგს, ან ექსპონენტას, ხოლო s-ის მიხედვით განისაზღვრება რიცხვის ნიშანი. საილუსტრაციოდ, რიცხვი -273,9 წარმოვადგინოთ მცოცავწერტილიან ფორმატში:

$-2739\cdot 10^{-1}$, $-0{,}2739\cdot 10^{3}$, $-0{,}002739\cdot 10^{5}$, $-2{,}739\cdot 10^{2}$ და ა.შ.

უკანასკნელი ჩანაწერი წარმოადგენს რიცხვის ჩაწერის ნორმალიზებულ ფორმას. ამრიგად, თუ რიცხვის მანტისას წარმოვადგენთ შემდეგი სახით

$$f = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-1}\text{, სადაც } d_0 \neq 0\text{,}$$

მაშინ მივიღებთ ნორმალიზებული ფორმით ჩაწერილ (1.2) რიცხვს. ცხადია,

$$f = d_0 + d_1 \cdot P^{-1} + d_2 \cdot P^{-2} + \cdots + d_{k-1} \cdot P^{-(k-1)}\ .$$

თუ x რიცხვი წარმოდგენილია ნორმალიზებული სახით, მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$1 \le f < P.$$

F -ით აღვნიშნოთ მცოცავწერტილიან ფორმატში k თანრიგიანი (1 ციფრი ერთეულების თანრიგში + (k-1) წერტილის შემდეგ) მანტისით და e რიგით წარმოდგენილი რიცხვების სიმრავლე. ცხადია, რომ F წარმოადგენს სასრულ სიმრავლეს. ამ სიმრავლეში შემავალი ყოველი x რიცხვისთვის სამართლიანია შეფასება

$$P^L \le x \le P^U\text{ , სადაც } L \le e \le U.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ნამდვილი x რიცხვი მოდულით აღემატება F სიმრავლის უდიდეს ელემენტს, მაშინ ამ რიცხვის კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში წარმოდგენა შეუძლებელია.

F სიმრავლის მოდულით უმცირესი ელემენტი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი M_0, ხოლო მოდულით უდიდესი ელემენტი M_∞-ით. M_0-ს, უწოდებენ მანქანურ ნულს, ხოლო M_∞-ს - მანქანურ უსასრულობას.

ამრიგად, მცოცავწერტილიან რიცხვთა F სიმრავლე შეგვიძლია აღვწეროთ ასე:

$$F(P,k,L,U) = \{0\} \cup \left\{ x \in R: \quad x = (-1)^s P^e \sum_{i=0}^{k-1} d_i P^{-i} \right\}.$$

იგი ხასიათდება k ნიშნადი ციფრით, თვლის სისტემის $P \ge 2$ ფუძით, $0 \le d_i \le P-1$ ციფრებითა და ექსპონენტის (L,U) საზღვრებით, $L \le e \le U$. ამასთნ, $d_0 \neq 0$.

1.6. არითმეტიკული მოქმედებები მცოცავწერტილიან რიცხვებზე

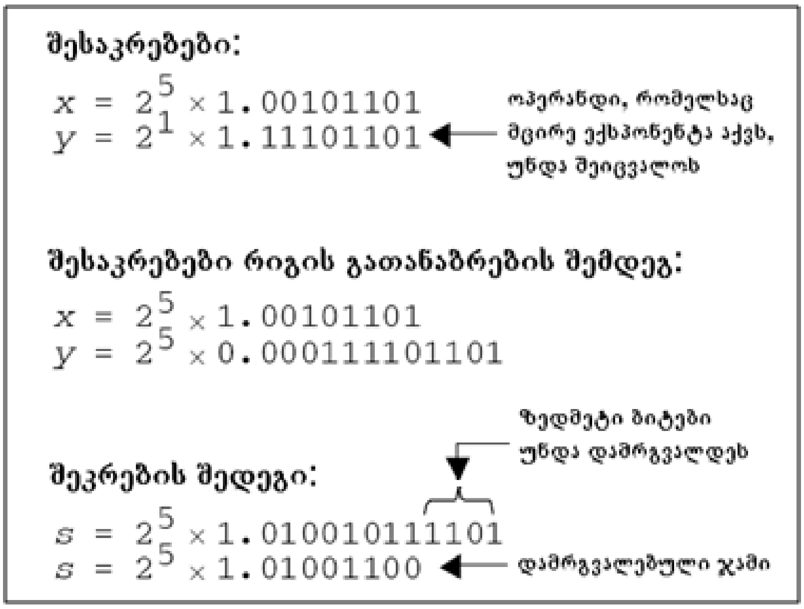
თუ $e1$ და $e2$, შესაბამისად, პირველი და მეორე ოპერანდის ექსპონენტას (ანუ რიგს) აღნიშნავს, ხოლო $s1$ და $s2$ - მანტისებს, მაშინ

$$\left(\pm 2^{e1} s1\right) \times \left(\pm 2^{e2} s2\right) = \pm 2^{e1+e2}(s1 \times s2)\ , \qquad \left(\pm 2^{e1} s1\right) / \left(\pm 2^{e2} s2\right) = \pm 2^{e1-e2}(s1/s2)\ .$$

შევნიშნოთ, რომ შეკრების დროს ჯერ ხდება ოპერანდების რიგის გათანაბრება (უდიდესისაკენ), ხოლო შემდეგ თანაბარრიგიანი ოპერანდების შეკრება.

$$\left(\pm 2^{e1} s1\right) + \left(\pm 2^{e1}\left(s2/2^{e1-e2}\right)\right) = \pm 2^{e1}\left(s1 \pm s2/2^{e1-e2}\right)$$

სქემატურად შეკრება ასე გამოისახება:



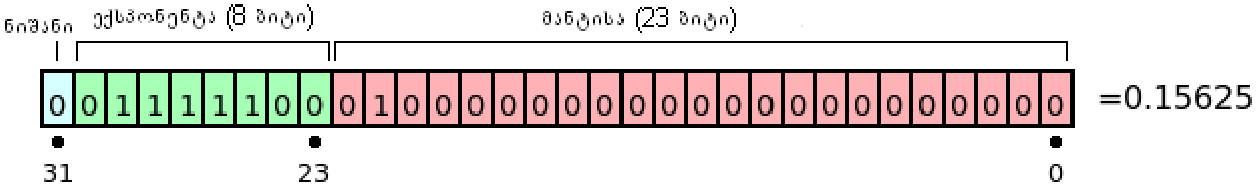
ნახ. 1.7. რიგის გათანაბრება და დამრგვალება შეკრების დროს

1.7. ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენის სტანდარტები

სამეცნიერო ფორმატით ჩაწერილი ნამდვილი რიცხვი კომპიუტერის მეხსიერებაში შეიძლება შეინახოს, როგორც მთელი ტიპის რიცხვების წყვილი, რომელთაგან პირველი ექსპონენტას შეესაბამება, ხოლო მეორე - მანტისას. უმეტეს შემთხვევაში კომპიუტერის მეხსიერებაში ნამდვილი რიცხვების წარმოსადგენად გამოიყენება IEEE-754 სტანდარტი (IEEE: The Institute of Electrical and Electronics Engineers).

ძირითადად გამოიყენება ორი ფორმატი:

- 32 ბიტიანი – ერთმაგი სიზუსტის,
- 64 ბიტიანი – ორმაგი სიზუსტის.



ნახ. 1.8. სტანდარტული 32 ბიტიანი ფორმატი ნამდვილი რიცხვების შესანახად

32 ბიტიანი ფორმატი მოიცავს:

- ნიშნის ერთ ბიტს (ყველაზე მარცხნივ მდებარე თანრიგი), 0 დადებითი და 1 უარყოფითი რიცხვებისთვის;
- 8 ბიტიან *e* ექსპონენტას (ნიშნიანი მთელი), რომელიც კომპიუტერს მეხსიერებაში წარმოდგება ე.წ. წანაცვლებული ფორმატით (ექსპონენტას ემატება ფიქსირებული "წანაცვლება", ამ შემთხვევაში 127, დადებით მთელ რიცხვად გარდაქმნის მიზნით). ამასთან, $e_{\min}$ = –126 (კომპიუტერის მეხსიერებაში ინახება, როგორც $127_{(10)} - 126_{(10)} = 1_{(10)} = 00000001_{(2)}$) და $e_{\max}$ = 127 (ინახება, როგორც $127_{(10)} + 127_{(10)} = 254_{(10)} = 11111110_{(2)}$).

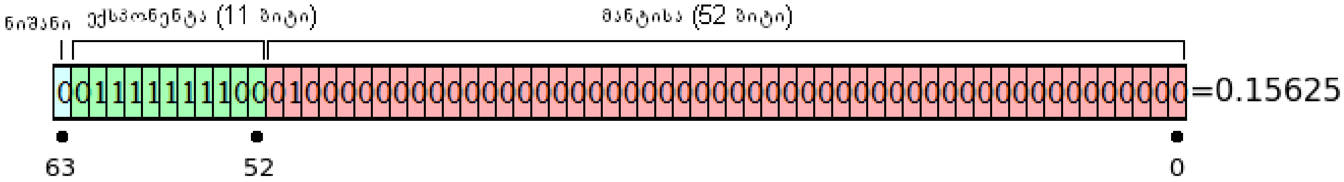
”წანაცვლებული” ექსპონენტის ველში ყველაზე მცირე და ყველაზე დიდი კოდები (ყველა 0 ან ყველა 1) არ გამოიყენება ჩვეულებრივი რიცხვებისთვის და ასეთი ფორმატის მქონე ჩანაწერი იწოდება, როგორც NaN (“not a number”). NaN წარმოიქმნება, მაგალითად, ისეთი ოპერაციების შედეგად, როგორიცაა 0/0, $+\infty+(-\infty)$, $0\times\infty$ და $\sqrt{-1}$.

- ნორმალიზებულ მანტისას, რომელიც ფიქსირებულ წერტილიანი რიცხვია შუალედიდან [1, 2). რადგან ნორმალიზებული მანტისის ორობითი წარმოდგენა ყოველთვის იწყება “**1.**”-ით, ამიტომ 1 და ფიქსირებული წერტილი დამალულია და მხოლოდ წილადი ნაწილია ჩაწერილი მანტისისათვის გამოყოფილ 23 ბიტიან ველში (ე.ი. მანტისას აქვს სახე $1.d_1d_2...d_{23}$ და ფაქტიურად 24 ბიტით წარმოდგება). მანტისის 24 ბიტიანი წარმოდგენა ექვივალენტურია ≈7.2 ათობითი თანრიგისა.
  ამ ფორმატით წარმოდგენილი რიცხვების ზედა ზღვარი (მოდულით) ტოლია $2\times2^{127}\cong3.402823\times10^{38}$, ხოლო ქვედა ზღვარი (მოდულით) ტოლია $1\times2^{-127}\cong1.17549\times10^{-38}$.

ასეთი ფორმატის რიცხვებს შეესაბამება "float" ტიპი C ენების ოჯახში.

ანალოგიურად აღიწერება ორმაგი სიზუსტის მქონე 64 ბიტიანი ფორმატი. მას შეესაბამება "double" ტიპი C ენების ოჯახში. ექსპონენტის 11 ბიტში შეიძლება წარმოვადგინოთ რიცხვები (-1022)-დან +1023-მდე; 1023-ის ტოლი ”წანაცვლება” ემატება ექსპონენტას და შედეგი ორობითი რიცხვის სახით ინახება (უმცირესია 00000000001, ხოლო უდიდესია 11111111110). მანტისის 52+1 ბიტიანი წარმოდგენა ექვივალენტურია ≈16 ათობითი თანრიგისა.

ორმაგი სიზუსტის მქონე რიცხვების საზღვრებია: $[\pm2.225\times10^{-308} \div \pm1.7977\times10^{308}]$.



ნახ. 1.9. 64 ბიტიანი (ე.წ. ორმაგი სიზუტის) ფორმატი ნამდვილი რიცხვების შესანახად

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით ნახ.8,9–ზე ნაჩვენები ათწილადი რიცხვის წარმოდგენა ორობით IEEE-754 სტანდარტში. ჯერ გადავიყვანოთ 0.15625 ორობითში (იხ. ზემოთ შენიშვნა 2):

0,	15625	ამრიგად, $0.15625_{10} = 0.00101_2 = 1.01\times2^{-3}$ (ნორმალიზებული სახით).
	2	მანტისისთვის გამოყოფილ ველში ჩაიწერება 010000... (1. – არ იწერება).
0	31250	ექსპონენტა არის –3.
	2	32–ბიტიან წარმოდგენაში ექსპონენტას ემატება წანაცვლება 127,
0	62500	$-3+127 = 124$, $124_{10} = 0111\ 1100_2$.
	2	
1	25000	64–ბიტიან წარმოდგენაში ექსპონენტას ემატება წანაცვლება 1023,
	2	$-3+1023 = 1020$, $1020_{10} = 011\ 1111\ 1100_2$
0	50000	რიცხვი დადებითია, ამიტომ ორივე შემთხვევაში ნიშნის თანრიგში 0–ია.
	2	
1	00000	

პირიქით, აღვადგინოთ ნახ.8–ზე მოყვანილი 32–ბიტიანი წარმოდგენიდან საწყისი ათწილადი რიცხვი: ნიშნის თანრიგში 0–ია, ამიტომ რიცხვი დადებითია; ექსპონენტის ველში

0111 1100₂ = 124₁₀. თუ გამოვაკლებთ წანაცვლებას (127–ს), მივიღებთ, რომ ექსპონენტა არის –3; მანტისისთვის გამოყოფილ ველში წერია 010000...0. მას წინ დაემატება 1., საბოლოოდ ნორმალიზებული მანტისა ორობითში იქნება 1.01000...0–ის ტოლი.

$1.01000...0_2 = 1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2} = 1+0.25 = 1.25_{10}$.

ამრიგად, საძიებელი რიცხვია $1.25\times2^{-3} = 1.25\times0.125 = 0.15625$.

IEEE-754 სტანდარტის 32 და 64 ბიტიანი წარმოდგენა შეძლება დავახასიათოთ შემდეგი მაჩვენებლებით:

სახელი	ფუძე (*Base*)	ციფრთა რაოდ. (*Digits*)	e_{min}	e_{max}	ათობით ციფრთა რაოდენობა, ≈	ათობითი E_{max}
binary32 ერთმაგი სიზუსტე	2	23+1	-126	+127	7.22	38.23
binary64 ორმაგი სიზუსტე	2	52+1	-1022	+1023	15.95	307.95

ათობითი ნიშნადი ციფრების რაოდენობა განისაზღვრება ფორმულით $\log_{10} base^{digits}$.
ათობითი E_{max} (ექსპონენტის მაქსიმუმი ათობითში) ტოლია $e_{max} \times \log_{10} base$.

32 ბიტიან მცოცავწერტილიან რიცხვთა F სიმრავლე აღიწერება ასე:

$$F(P,k,L,U) = F(2,\,24,\,-126,\,+127) = \{0\} \cup \left\{ x \in R: \quad x = (-1)^s\, 2^e \sum_{i=0}^{23} d_i\, 2^{-i} \right\}.$$

სადაც d_i ციფრები 0 ან 1-ის ტოლია, ამასთან, $d_0 \neq 0$, ხოლო $-126 \le e \le 127$, ხოლო 64 ბიტიან მცოცავწერტილიან რიცხვთა F სიმრავლე აღიწერება ასე:

$$F(P,k,L,U) = F(2,\,53,\,-1022,\,+1023) = \{0\} \cup \left\{ x \in R: \quad x = (-1)^s\, 2^e \sum_{i=0}^{52} d_i\, 2^{-i} \right\}.$$

სადაც d_i ციფრები 0 ან 1-ის ტოლია, ამასთან, $d_0 \neq 0$, ხოლო $-1022 \le e \le 1023$.

IEEE ფორმატში რიცხვების წარმოდგენის საილუსტრაციოდ იხილეთ ონლაინ-კალკულატორი http://babbage.cs.qc.edu/IEEE-754/Decimal.html .

1.8. ნამდვილი რიცხვების დამრგვალება. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება

კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედი შეიცავს თანრიგების სასრულ რაოდენობას, ამიტომ $[M_0, M_\infty]$ შუალედში მდებარე ყველა რიცხვის წარმოდგენა კომპიუტერში ზუსტად შეუძლებელია.

აღვნიშნოთ x^* -ით x ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი რიცხვი $F = F(P,k,L,U)$ სიმრავლიდან, რომლისთვისაც მინიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს სხვაობა $\left| x - x^* \right|$.

ჩვეულებრივ, ამ სხვაობის მნიშვნელობის დადგენა შეუძლებელია. ამიტომ შემოვიღოთ ასეთი ცნება: უმცირესს $\left|x - x^*\right|$ სიდიდის ზედა ზღვრებს შორის ვუწოდოთ **აბსოლუტური ცდომილება** და აღვნიშნოთ Δx^* სიმბოლოთი: $\left|x - x^*\right| \le \Delta x^*$. პრაქტიკულად Δx^* -ის მნიშვნელობად ხშირად იღებენ $\left|x - x^*\right|$ სიდიდის რომელიმე ზედა ზღვარს, რომელიც საკმარისად ახლოს არის ზუსტ ზედა საზღვართან.

აბსოლუტური ცდომილება არ წარმოადგენს რიცხვის მიახლოების შეფასების საუკეთესო მახასიათებელს. მაგალითად, თუ ცნობილია, რომ გაზომვის შემდეგ მიღებული რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება ტოლია 1 სმ-ის, ეს ინფორმაცია, საზოგადოდ, არ არის საკმარისი გაზომვის სიზუსტის დასახასიათებლად. თუ იზომება, მაგალითად, ასანთის ღერის სიგრძეს, მაშინ ეს სიზუსტე არ არის დამაკმაყოფილებელი, ხოლო თუ იზომება მანძილი თბილისსა და ქუთაისს შორის, მაშინ გაზომვის სიზუსტე შესანიშნავია. ამიტომ შემოვიღოთ სიზუსტის კიდევ ერთი მახასიათებელი – δx^* **ფარდობითი ცდომილება**:

$$\left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \le \delta x^*,$$

აბსოლუტური ცდომილებისგან განსხვავებით, ფარდობითი ცდომილება წარმოადგენს უგანზომილებო სიდიდეს.

შედეგის სიზუსტეს უკეთ ახასიათებს ფარდობითი ცდომილება. მართლაც, განვიხილოთ ორი რიცხვი: $\pi^* = 3.14$ და $r^* = 257906$. ცნობილია, რომ $\pi = 3.1415926\ldots$. მაშინ $\Delta\pi^* = 0.0016$ (Δx^* და δx^*-ის ჩაწერის დროს, როგრც წესი, ორ ნიშნად ციფრზე მეტს არ ტოვებენ და ამრგვალებენ აუცილებლად მეტობით), ხოლო ფარდობითი ცდომილება ტოლია $\delta\pi^* = \dfrac{0.0016}{3.14} \approx 0.0005$ ან 0.05%. ცნობილია, რომ $\Delta r^* = 1$. მაშინ $\delta r^* = \dfrac{1}{257906} \approx 0.0000039$ ან $0.00039\,\%$. ამრიგად, თუმცა $\Delta\pi^* << \Delta r^*$, რიცხვი r უფრო ზუსტადაა განსაზღვრული, ვიდრე π რიცხვი.

ნამდვილი რიცხვის დამრგვალების პროცედურა. ჩვეულებრივ, x^* რიცხვი მიიღება x -ის დამრგვალების შედეგად. ვთქვათ, x რიცხვი ათობით სისტემაში წარმოდგენილია ნორმალიზებული ფორმით:

$$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{-k} + \alpha_{k+1} \cdot 10^{-(k+1)} + \cdots) \cdot 10^{\lambda}\ .$$

ვთქვათ, აგრეთვე, რომ კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში მანტისისთვის გამოყოფილია k თანრიგი (ე.ი. მოცემული რიცხვის მანტისაში შენარჩუნებული უნდა იქნას k თანრიგი). მაშინ x რიცხვი დამრგვალების შემდეგ შეიცვლება შემდეგი რიცხვით:

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{-k}) \cdot 10^{\lambda}\ ,\ \text{თუ}\ \ \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \cdot 10^{-1} + \cdots < \frac{1}{2}10 = 5$$

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + (\alpha_k + 1) \cdot 10^{-k}) \cdot 10^{\lambda},\ \text{თუ}\ \ \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \cdot 10^{-1} + \cdots > \frac{1}{2}10 = 5$$

რჩება შემთხვევა, როდესაც $\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \cdot 10^{-1} + \cdots = \frac{1}{2}10 = 5$. ამ შემთხვევაში სულ ერთია, დამრგვალების რომელ წესს გამოვიყენებთ და x რიცხვი შეიძლება შეიცვალოს ზემოთ მოყვანილი პირველი ან მეორე რიცხვით (მიღებულია x რიცხვის მეორე რიცხვით შეცვლა).

ჩვეულებრივ, დამრგვალების შედეგად მიღებული x^* რიცხვის აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობად იღებენ x^* რიცხვის უკანასკნელი თანრიგის ერთეულის ნახევარს. ე.ი. ზემოთ მოყვანილი რიცხვებისათვის

$$\Delta x^* = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}.$$

ასე, მაგალითად, რიცხვი $x^* = 0{,}734$ შეიძლება მიღებული იქნას $x = 0{,}73441$, $x = 0{,}73353$ და ა.შ. რიცხვების დამრგვალებით. ამ შემთხვევაში $\left|x - x^*\right| \le 0{,}0005$, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\Delta x^* = 0{,}0005$. საერთოდ, F სიმრავლის ნებისმიერი რიცხვი ახდენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან არა ერთი რიცხვის, არამედ **მთელი ინტერვალის** აპროქსიმაციას.

სანდო ნიშნადი ციფრები

განსაზღვრება 1.3. რიცხვის ჩანაწერში **ნიშნადი ციფრი** ეწოდება ყველა ციფრს მარცხნიდან პირველი არანულოვანი ციფრიდან დაწყებული ბოლო, მარჯვენა ციფრამდე.

მაგალითად,

ა) რიცხვს 42,0 აქვს სამი ნიშნადი ციფრი;

ბ) რიცხვს 70 აქვს ორი ნიშნადი ციფრი;

გ) რიცხვს 680 აქვს სამი ნიშნადი ციფრი;

დ) რიცხვს 0,325 აქვს სამი ნიშნადი ციფრი;

ე) რიცხვს 0,0056 აქვს ორი ნიშნადი ციფრი.

განსაზღვრება 1.4. რიცხვის ჩანაწერში ციფრს ეწოდება **სანდო ნიშნადი ციფრი**, თუ რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება ამ ციფრის შესაბამისი თანრიგის ერთეულის ნახევრს.

მაგალითად, თუ $\Delta x^* < 0{,}5 \cdot 10^{-k}$, მაშინ მძიმის შემდეგ k-ური ნიშნადი ციფრი სანდოა. ცხადია, სანდო იქნება მის მარცხნივ მდგომი ყველა ნიშნადი ციფრი. ხოლო თუ $\Delta x^* > 0{,}5 \cdot 10^{-k}$, მაშინ მძიმის შემდეგ k-ური ნიშნადი ციფრი და მის მარჯვნივ მდგომი ყველა ნიშნადი ციფრი საეჭვოა.

მაგალითი 1.3.

ა) ვთქვათ, $x^* = 24{,}387$ და ცნობილია, რომ $\Delta x^* = 0{,}03$. რამდენი სანდო ნიშნდი ციფრი აქვს x^* რიცხვს?

შევამოწმოთ მძიმის შემდეგ მეორე ნიშნადი ციფრის (ანუ 8-ის) სანდოობა: $\Delta x^* > 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. ამიტომ 8 და მის მარჯვნივ მდგომი ციფრი 7 საეჭვოა. ხოლო პირველი ციფრი მძიმის შემდეგ (ანუ 3) სანდოა: $\Delta x^* < 0{,}5 \cdot 10^{-1}$. ე.ი. x^* რიცხვის ჩანაწერში სანდოა ციფრი 3 და მის მარცხნივ მდგომი ციფრები 2, 4.

ბ) ვთქვათ, $x^* = 0.0386764$ და $\Delta x^* = 0{,}007$. რამდენი სანდო ნიშნდი ციფრი აქვს x^* რიცხვს?

$\Delta x^* > 0{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}005$, ხოლო $\Delta x^* < 0{,}5 \cdot 10^{-1}$. რადგან ამ რიცხვის ჩანაწერში ნიშნადი ციფრები იწყება მძიმის შემდეგ მეორე თანრიგიდან, ამიტომ x^* რიცხვის ჩანაწერში ყველა ნიშნდი ციფრი საეჭვოა.

გ) ვთქვათ, $x^* = 9.999785$ და $\Delta x^* = 4 \cdot 10^{-4}$. რამდენი სანდო ნიშნდი ციფრი აქვს x^* რიცხვს?

რადგან $\Delta x^* = 0{,}4 \cdot 10^{-3} < 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, ხოლო $\Delta x^* > 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. ამიტომ x^* რიცხვის ჩანაწერში სანდოა მესამე ციფრი მძიმის შემდეგ და, ცხადია, მის მარცხნივ მდგომი სამი ციფრიც (ანუ სანდოა ყველა ცხრიანი).

თუ რიცხვს აქვს მხოლოდ სანდო ციფრები, მაშინ მის დამრგვალებულ მნიშვნელობასაც მხოლოდ სანდო ციფრები ექნება. აუცილებელი არ არის, რომ მიახლოებითი მნიშვნელობა, რომელსაც ყველა ნიშნადი ციფრი სანდო აქვს, ემთხვეოდეს ზუსტ მნიშვნელობას.

1.9. ცდომილებათა წყაროები

ამა თუ იმ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის დროს ჯამური ცდომილება ანუ საბოლოო შედეგში დაგროვილი ცდომილება შესაძლოა განპირობებული იყოს ცდომილების სამი ძირითადი წყაროთი. ესენია:

1. საწყისი მონაცემების ცდომილება;
2. გამოთვლების ცდომილება;
3. მეთოდის (ალგორითმის) ცდომილება.

საწყის მონაცემებში ცდომილება გვაქვს, თუ მათი განსაზღვრა ზუსტად შეუძლებელია (ვთქვათ, მონაცემები მიიღება გაზომვების, ცდების, საშუალედო გამოთვლების ჩატარების შედეგად). ხშირად ასეთ ცდომილებას აუცილებად ცდომილებასაც უწოდებენ.

კომპიუტერზე ამა თუ იმ გამოთვლითი ალგორითმის რეალიზაციისას, ჩვეულებრივ ადგილი აქვს დამრგვალების ცდომილებების დაგროვებას. ამ მიზეზის გამო, ხშირად ვღებულობთ შედეგს, რომელიც განსხვავდება განსახილველი ამოცანის ზუსტი ამონახსნისაგან. ამ ცდომილებას გამოთვლით ცდომილებას უწოდებენ. იგი დამოკიდებულია ორ ძირითად ფაქტორზე: კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენის სიზუსტეზე და დამრგვალების ცდომილებების მიმართ ალგორითმის მგრძნობიარობაზე.

განსაზღვრება 1.5. ალგორითმს ეწოდება **მდგრადი,** თუ მისი რეალიზაციის პროცესში ყოველ მომდევნო ბიჯზე გამოთვლების ცდომილება არ იზრდება, ხოლო ალგორითმს უწოდებენ **არამდგრადს,** თუ გამოთვლების პროცესში ყოველ მომდევნო ბიჯზე ცდომილება იზრდება.

შემდგომში, კონკრეტული ალგორითმების განხილვისას, ჩვენ დავაზუსტებთ მათი მდგრადობის ცნებას და მოვიყვანთ შესაბამის განსაზღვრებას.

მდგრადი ალგორითმის რეალიზაციის პროცესში გამოთვლითი ცდომილებები ძალიან არ ამახინჯებს ამოცანის ამონახსნს და კომპიუტერზე მიღებული ამონახსნი მცირედ განსხვავდება ზუსტი ამონახსნისაგან. პრაქტიკული მიზნებისათვის შეიძლება მხოლოდ მდგრადი ალგორითმების გამოყენება.

1.10. არითმეტიკული ოპერაციები დამრგვალებით: ფსევდო-ოპერაციები

$x \in G$ და $y \in G$ რიცხვებზე არითმეტიკული ოპერაციები – შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა, როგორც წესი, ვერ სრულდება ზუსტად. ამის ძირითადი მიზეზია ის გარემოება, რომ არითმეტიკული ოპერაციების განხორციელების შედეგად მიღებული რიცხვის მანტისის თანრიგების რაოდენობა აღემატება კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედის თანრიგების რაოდენობას და ამიტომ ხდება არითმეტიკული ოპერაციის შედეგის დამრგვალება. ამრიგად, კომპიუტერში სრულდება არითმეტიკული ოპერაციები დამრგვალებით, ე.წ. ფსევდო-ოპერაციები. ეს ოპერაციები აღინიშნება სიმბოლოებით

$$\oplus \qquad \ominus \qquad \otimes \qquad \odot$$

უმარტივესი მაგალითების განხილვის საშუალებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ამ ოპერაციებისთვის არ სრულდება არითმეტიკული ოპერაციების აქსიომები. ასე, მაგალითად, ზოგად შემთხვევაში არ არის ჭეშმარიტი ჯუფთებადობის კანონი როგორც გამრავლების, ისე შეკრების ოპერაციისთვის:

$$(x \oplus y) \oplus z \neq x \oplus (y \oplus z),$$

$$(x \otimes y) \otimes z \neq x \otimes (y \otimes z).$$

არ სრულდება, აგრეთვე, განრიგებადობის კანონიც.

მაგალითი 1.4. ვთქვათ, ჩვენს განკარგულებაშია კომპიუტერი, რომელიც არითმეტიკულ ოპერაციებს ასრულებს ნორმალიზებული სახით ჩაწერილ ოთხთანრიგიან ათობით რიცხვებზე. ე.ი. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში შეიძლება ჩაწერილი იქნას რიცხვი, რომლის მანტისა შეიცავს ოთხ ათობით თანრიგს.

ამ კომპიუტერის საშუალებით გამოვთვალოთ შემდეგი ხუთი რიცხვის ჯამი:

$$S = 0{,}2764 + 0{,}3944 + 1{,}475 + 26{,}46 + 1364.$$

ჯამის ზუსტი მნიშვნელობა ტოლია $S = 1392{,}6058$.

ახლა რიცხვები წარმოვადგინოთ ნორმალიზებული სახით და ოთხთანრიგიან (თვლის ათობით სისტემაში) კომპიუტერზე S ჯამი გამოვთვალოთ ორჯერ: თავდაპირველად შეკრება ვაწარმოოთ იმ მიმდევრობით, რა მიმდევრობითაც არის ჩაწერილი ჯამი, ხოლო შემდეგ შებრუნებული მიმდევრობით.

შევნიშნოთ, რომ კომპიუტერში რიცხვების შეკრებისას ჯერ ხდება ამ რიცხვების რიგების გათანაბრება, ხოლო შემდეგ მიღებული შედეგის დამრგვალება (როგორც ვიცით ჩვენი კომპიუტერის მეხსიერების უჯრედში შეიძლება ჩაწერილი იქნას რიცხვი, რომლის მანტისა შეიცავს ოთხ ათობით თანრიგს).

$$S = 0{,}2764 \cdot 10^0 + 0{,}3944 \cdot 10^0 + 0{,}1475 \cdot 10^1 + 0{,}2646 \cdot 10^2 + 0{,}1364 \cdot 10^4.$$

როგორც ვხედავთ, ჯამის ყველა შესაკრები ჩაწერილია ზუსტად, ნორმალიზებული სახით.

$$0{,}2764 \cdot 10^0 + 0{,}3944 \cdot 10^0 = 0{,}6708 \cdot 10^0$$

$$0{,}6708 \cdot 10^0 + 0{,}1475 \cdot 10^1 = 0{,}06708 \cdot 10^1 + 0{,}1475 \cdot 10^1 = 0{,}21458 \cdot 10^1$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0{,}2146 \cdot 10^1$.

$$0{,}2146 \cdot 10^1 + 0{,}2646 \cdot 10^2 = 0{,}02146 \cdot 10^2 + 0{,}2646 \cdot 10^2 = 0{,}28606 \cdot 10^2$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0{,}2861 \cdot 10^2$.

$$0{,}2861 \cdot 10^2 + 0{,}1364 \cdot 10^4 = 0{,}002861 \cdot 10^4 + 0{,}1364 \cdot 10^4 = 0{,}139261 \cdot 10^4$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0,1393 \cdot 10^4$.

ამრიგად, ჯამის გამოთვლის შემდეგ S -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება

$$S_m = 0,2764 \cdot 10^0 \oplus 0,3944 \cdot 10^0 \oplus 0,1475 \cdot 10^1 \oplus 0,2646 \cdot 10^2 \oplus$$
$$\oplus 0,1364 \cdot 10^4 = 0,1393 \cdot 10^4 = 1393.$$

ახლა S ჯამი გამოვითვალოთ შებრუნებული მიმდევრობით:

$$0,1364 \cdot 10^4 + 0,2646 \cdot 10^2 = 0,1364 \cdot 10^4 + 0,002646 \cdot 10^4 = 0,139046 \cdot 10^4.$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0,1390 \cdot 10^4$.

$$0,1390 \cdot 10^4 + 0,1475 \cdot 10^1 = 0,1390 \cdot 10^4 + 0,0001475 \cdot 10^4 = 0,1391475 \cdot 10^4$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0,1391 \cdot 10^4$.

$$0,1391 \cdot 10^4 + 0,3944 \cdot 10^0 = 0,1391 \cdot 10^4 + 0,00003944 \cdot 10^4 =$$
$$= 0,13913944 \cdot 10^4 .$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0,1391 \cdot 10^4$.

$$0,1391 \cdot 10^4 + 0,2764 \cdot 10^0 = 0,1391 \cdot 10^4 + 0,00002764 \cdot 10^4 =$$
$$= 0,13912764 \cdot 10^4$$

დამრგვალების შემდეგ მივიღებთ $0,1391 \cdot 10^4$.

ამრიგად, ამ შემთხვევაში გვექნება მიახლოებითი ჯამი S_m

$$S_m = 0,1364 \cdot 10^4 \oplus 0,2646 \cdot 10^2 \oplus 0,1475 \cdot 10^1 \oplus 0,3944 \cdot 10^0 \oplus$$
$$\oplus 0,2764 \cdot 10^0 = 0,1391 \cdot 10^4 = 1391.$$

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ფსევდოშეკრების ოპერაციისთვის არ სრულდება ჯუფთებადობის თვისება. საბოლოო შედეგი დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ დავაჯგუფებთ შესაკრებებს. შევნიშნოთ ისიც, რომ პირველ შემთხვევაში მიღებული S ჯამის მნიშვნელობა უფრო ახლოს არის ჯამის ზუსტ მნიშვნელობასთან, ვიდრე მეორე შემთხვევაში მიღებული მნიშვნელობა.

თუ გავაანალიზებთ ჯამებს გამოთვლის პროცესს, დავინახავთ, რომ მეორე შემთხვევაში პირველი ორი შესაკრები საერთოდ არ იქნა გათვალისწინებული ჯამის მნიშვნელობის გამოთვლისას. ეს ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ხშირად საერთოდ არ ხდება "დიდი" რიცხვებისთვის "პატარა" რიცხვების დამატება, რადგან ეს უკანასკნელნი, ნორმალიზებული სახით წარმოდგენისას, გადის მეხსიერების უჯრედის გარეთ და ფაქტიურად მანქანურ ნულს წარმოადგენს. თუ $a >> b$ და $b \neq 0$, ვღებულობთ პარადოქსალურ შედეგს $a + b = a$. ჯამის გამოთვლისას ასეთი პატარა შესაკრები შეიძლება ძალიან ბევრი იყოს, მაგრამ ისინი ჯამზე გავლენას არ მოახდენს. ამიტომ ასეთი რიცხვების შეკრებისას უნდა დავიცვათ შემდეგი წესი: აჯამვა უნდა ვაწარმოოთ შესაკრებების მოდულების ზრდის მიხედვით. კომპიუტერულ არითმეტიკაში, როგორც დავრწმუნდით, ხშირად არსებითი მნიშვნელობა აქვს ოპერაციების შესრულების რიგსაც.

თავი II. მატრიცების და ვექტორების ნორმები. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი

2.1. წრფივი სივრცის ბაზისი. ვექტორის ნორმა. სკალარული ნამრავლი

განვიხილოთ ყველა n-განზომილებიანი ნამდვილი ვექტორის V სიმრავლე, რომელიც ქმნის წრფივ სივრცეს.

განსაზღვრება 2.1. $x, y, ..., u \in V$ ვექტორებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha, \beta, ..., \delta$ რიცხვები, რომლებიც ერთდროულად არ არის ნულის ტოლი და $\alpha x + \beta y + ... + \delta u = 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე.ი. თუ ეს ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha = \beta = ... = \delta = 0$) ვექტორებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი.

განსაზღვრება 2.2. წრფივ სივრცეს ეწოდება n განზომილებიანი, თუ მასში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ხოლო ყველა $n+1$ ვექტორი ამ სივრციდან წრფივად დამოკიდებულია.

განსაზღვრება 2.3. V სივრცის ნებისმიერ n წრფივად დამოუკიდებელ $e_1, e_2, ..., e_n$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება ამ სივრცის ბაზისი, ხოლო თვით ვექტორებს – ბაზისური ვექტორები.

თვისება 2.1. V სივრცის ნებისმიერი x ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ ბაზისური ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით : $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. ამასთან, ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

განსაზღვრება 2.4. ვექტორის ნორმა ეწოდება ასახვას $\|\cdot\|: V \longrightarrow \Re$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

- არაუარყოფითია
  $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V; \quad \|v\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $v = 0$;
- ჰომოგენურია
  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall \lambda \in \Re, \quad \forall v \in V$;
- სრულდება სამკუთხედის უტოლობა
  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V$.

ამრიგად, ნორმა წარმოადგენს V-ზე განსაზღვრულ არაუარყოფით მნიშვნელობიან ფუნქციას (ფუნქციონალს).

განსაზღვრება 2.5. სკალარული ნამრავლი $(.,.)$ არის V-ს ელემენტებისათვის განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც იღებს მნიშვნელობებს $\Re$-ში და აქვს შემდეგი თვისებები:

- წრფივია
  $(\alpha x + \lambda z, y) = \alpha(x, y) + \lambda(z, y), \ \forall x, z \in V, \quad \forall \alpha, \lambda \in \Re$;
- სიმეტრიულია
  $(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in V$;
- არაუარყოფითია (დადებითად განსაზღვრულია)
  $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ორი $x, y \in V$ ვექტორის სკალარული ნამრავლის გამოთვლის შედეგად ვიღებთ რიცხვს $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

ვთქვათ, V-ში მოცემულია ვექტორები $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}$, სადაც $\{e^{(i)}\}_1^n$ სისტემა წარმოადგენს V სივრცის რაიმე ბაზისს. ამ წრფივ სივრცეში შემოვიღოთ ნორმები შემდეგი ტოლობების საშუალებით:

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k| \;;$$

$$\|x\|_2=(x,x)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}=\left(x^T x\right)^{1/2} \;;$$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty \;;$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|x_k| \;;$$

$\|x\|_{A^2}=\|Ax\|, \quad \forall x\in R^n$, სადაც A კვადრატული მატრიცაა;

$\|x\|_A=(Ax,x)^{1/2}, \quad A=A^T, \quad A>0$ (იხ. განსაზღვრება 2.7, 2.8)

2.2. კოში-შვარცის და ჰელდერის უტოლობები. ნორმის თვისებები

თვისება 2.2. კოში-შვარცის უტოლობა

$$|(x,y)|=|x^T y|\le\|x\|_2\,\|y\|_2 \quad \text{ან} \quad (x,y)^2\le(x,x)(y,y).$$

თვისება 2.3. ჰელდერის უტოლობა

$$|(x,y)|\le\|x\|_p\,\|y\|_q, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 .$$

თვისება 2.4. მინკოვსკის უტოლობა

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

თვისება 2.5. ნორმა არის თავისი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქცია.

ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}_1^\infty$, $x^{(i)}=\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)$, ვექტორების მიმდევრობა კრებადია $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ვექტორისაკენ.

თვისება 2.6. ნორმით კრებადობა და კომპონენტების მიხედვით კრებადობა ეკვივალენტურია:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i, \quad i=1,\dots,n \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty}\left\|x-x^{(k)}\right\|=0 .$$

განსაზღვრება 2.6 (ნორმათა ექვივალენტობა). ვთქვათ, V წარმოადგენს წრფივ სივრცეს და, ვთქვათ, მასში შემოღებულია ორი განსხვავებული ნორმა $\|\cdot\|_q$ და $\|\cdot\|_p$. ამ ნორმებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ არსებობს ისეთი მუდმივები $c_{pq}>0$, $C_{pq}>0$, რომ ყველა $x\in V$ ელემენტისთვის სამართლიანია უტოლობები:

$$c_{pq}\|x\|_q\le\|x\|_p\le C_{pq}\|x\|_q, \quad \forall x\in V .$$

თვისება 2.7. სასრულ განზომილებიან წრფივ სივრცეში ნორმები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ამ უკანასკნელი თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი შედეგი.

თვისება 2.8. თუ დამტკიცებულია ვექტორული მიმდევრობის კრებადობა რომელიმე ერთ ნორმაში, მაშინ მიმდევრობა კრებადია იმავე ზღვრისაკენ ნებისმიერ სხვა ნორმაშიც.

ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთ ვექტორულ ნორმათა ექვივალენტობის კოეფიციენტთა ცხრილი (n არის x ვექტორის განზომილება).

c_{pq}	$q=1$	$q=2$	$q=\infty$
$p=1$	1	1	1
$p=2$	$n^{-1/2}$	1	1
$p=\infty$	n^{-1}	$n^{-1/2}$	1

C_{pq}	$q=1$	$q=2$	$q=\infty$
$p=1$	1	$n^{1/2}$	n
$p=2$	1	1	$n^{1/2}$
$p=\infty$	1	1	1

2.3. სიმეტრიული, დადებითად განსაზღვრული, ორთოგონალური მატრიცები. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები

შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ მატრიცებს. კომპლექსური მატრიცების შემთხვევაში სპეციალურად მივუთითებთ.

განსაზღვრება 2.7. A მატრიცა სიმეტრიულია, თუ $A=A^T$.

განსაზღვრება 2.8. A მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია, თუ $(Ax,x)>0$ ყველა $x\neq 0$ -ისათვის, $x\in V$.

განსაზღვრება 2.9. ნამდვილი A მატრიცა ორთოგონალურია, თუ $A^T A=I$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა.

განსაზღვრება 2.10. A-ს საკუთრივი ვექტორები ეწოდება ისეთ არანულოვანი x ვექტორებს, რომელთათვისაც

$$Ax=\lambda x, \tag{2.1}$$

სადაც $A(n,n)$ მოცემული მატრიცაა, ხოლო $\lambda-$ კომპლექსური რიცხვი; ასეთ λ რიცხვებს **საკუთრივი რიცხვები** ეწოდება.

საკუთრივი ვექტორებისა და რიცხვების მოსაძებნად (2.1) სისტემა გადავწეროთ $(A-\lambda I)x=0$ სახით, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა. ჩავწეროთ ეს სისტემა სკალარული განტოლებების სახით:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0,\\
&a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+...+a_{2n}x_n=0,\\
&\quad\quad . \; . \; .\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

თუ (2.2) სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია - $\det(A-\lambda I)\neq 0$, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი - მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. საკუთრივი ვექტორის განმარტების თანახმად საძიებელი ვექტორი არ უნდა იყოს ნულოვანი. ამიტომ, იმისათვის, რომ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვან (2.2) სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსნი, მას უნდა გააჩნდეს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა. ამისათვის კი აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (2.3)$$

(2.3) სისტემა წარმოადგენს n-ური ხარისხის ალგებრულ განტოლებას λ-ს მიმართ. მას, როგორც ცნობილია, აქვს n ამონახსნი. ისინი აღვნიშნოთ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$-ით. (2.3) განტოლებას მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ.

განსაზღვრება 2.11. A მატრიცის საკუთრივ რიცხვთა ერთობლიობას A მატრიცის **სპექტრი** ეწოდება, ხოლო სიდიდეს $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ უწოდებენ A მატრიცის **სპექტრალურ რადიუსს.**

ნამდვილი A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები შეიძლება კომპლექსური იყოს.

თვისება 2.9. თუ ნამდვილი მატრიცა სიმეტრიულია ($A=A^T$), მაშინ მისი ყველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია.

თვისება 2.10. თუ A მატრიცა დიაგონალური, ზედა ან ქვედა სამკუთხაა, მაშინ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ საკუთრივი რიცხვები ზუსტად ემთხვევა მატრიცის მთავარი დიაგონალის $a_{11}, \dots, a_{nn}$ ელემენტებს.

განსაზღვრება 2.12. A მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტების ჯამს **მატრიცის კვალი** ეწოდება და აღინიშნება ასე:

$$tr(A)=a_{11}+\dots+a_{nn}.$$

საკუთრივი რიცხვებისა და ვექტორების პრობლემებს უფრო დაწვრილებით შევეხებით მეოთხე თავში.

თვისება 2.11. $(Ax,y)=(x,A^T y)$. თუ $A=A^T$, მაშინ $(Ax,y)=(x,Ay)$.

თვისება 2.12. თუ A სიმეტრიული მატრიცაა, ის დადებითად განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი დებულება:

- $(Ax,x)>0$ ნებისმიერი არანულოვანი x-თვის;
- A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია;
- A მატრიცის ყველა მთავარი მინორი დადებითია;
- არსებობს არასინგულარული H მატრიცა, ისეთი, რომ $A=H^T H$.

თვისება 2.13. თუ A მატრიცა სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მისი მთავარი ქვემატრიცებიც იგივე თვისებების მქონეა.

თვისება 2.14. A მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს დადებითდ განსაზღვრული მატრიცა $B>0$, ისეთი რომ $B^2=A$. აღვნიშნოთ $B=A^{1/2}$. ასეთი B მატრიცა $B>0$ პირობით ერთადერთია.

თვისება 2.15. ვთქვათ, A დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა. მაშინ

- A შებრუნებადია და მისი შებრუნებული A^{-1} დადებითად განსაზღვრულია;
- თუ $0<\alpha\in R$, მაშინ αA-ც დადებითად განსაზღვრულია;
- მთვარი დიაგონალის ელემენტები $a_{ii}>0, \quad i=1,\dots,n$. უფრო მეტიც

$$|a_{ij}|\le\sqrt{a_{ii}a_{jj}}\le\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2};$$

- თუ D A-ს დიაგონალური ნაწილია ($d_{ii}=a_{ii}$, $d_{ij}=0, i\neq j$), მაშინ D -ც დადებითად განსაზღვრულია.

2.4. მატრიცის ნორმა. მატრიცის და ვექტორის ნორმის შეთანხმებულობა. ინდუცირებული მატრიცული ნორმა

განსაზღვრება 2.13. მატრიცის ნორმა ეწოდება ასახვას $\|\cdot\|:\Re^{m\times n}\to\Re$, რომელსაც შემდეგი თვისებები აქვს:

- არაუარყოფითია
  $\|A\|\geq 0,\ \forall A\in\Re^{m\times n}$, ამასთან $\|A\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad A=0$;
- ჰომოგენურია
  $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|, \qquad \forall\alpha\in\Re,\quad \forall A\in\Re^{m\times n}$;
- აკმაყოფილებს სამკუთხედის უტოლობას
  $$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|,\quad \forall A,B\in\Re^{m\times n}.$$

განსაზღვრება 2.14. მატრიცის ნორმა სუბ-მულტიპლიკატურია, თუ
$$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|,\quad \forall A\in\Re^{m\times n},\quad \forall B\in\Re^{m\times n}.$$

წრფივი ალგებრის ამოცანების განხილვისას მატრიცები და ვექტორები ერთდროულად განიხილება. ამიტომ, A მატრიცის ნორმას ისე განმარტავენ, რომ იგი შეთანხმეული იყოს x ვექტორის ნორმასთან.

განსაზღვრება 2.15. A მატრიცის ნორმა შეთანხმებულია ვექტორულ ნორმასთან, თუ
$$\|Ax\|\leq\|A\|\|x\|,\quad \forall x\in\Re^{n}.$$

ეს უკანასკნელი უტოლობა კარგ შეფასებას რომ იძლეოდეს, მისი გაუმჯობესება არ უნდა შეიძლებოდეს. ამიტომ ცალკე გამოყოფენ მატრიცის ყველა შეთანხმებულ ნორმებს შორის უმცირესს.

განსაზღვრება 2.16. მატრიცული ნორმა ინდუცირებულია ვექტორული ნორმით (დაქვემდებარებულია ვექტორულ ნორმაზე), თუ
$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

მაგალითი 2.1. ნორმა, რომელიც არ არის სუბ-მულტიპლიკატური:
$$\|A\|_{\Delta}=\max|a_{ij}|,\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m.$$

თუ $A=B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, მაშინ $AB=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$, $2=\|AB\|_{\Delta}>\|A\|_{\Delta}\|B\|_{\Delta}=1$.

მაგალითი 2.2. ნორმები, რომლებიც სუბ-მულტიპლიკატურია

$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{tr(A^TA)}$, სადაც $tr(\cdot)$ მატრიცის კვალს აღნიშნავს;

$$\|A\|_\infty=\max_{i=1,\ldots,m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|;$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)};$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \ .$$

მაგალითი 2.3. ნორმათა ეკვივალენტობა, განიმარტება ისევე, როგორც ვექტორების შემთხვევაში

$$\max_{i,j}|a_{ij}| \le \|A\|_2 \le n \max_{i,j}|a_{ij}| \ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty \ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1 \ ,$$

$$\frac{1}{n}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le n\|A\|_\infty ,$$

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty} \ .$$

თეორემა 2.1. ინდუცირებული მატრიცული ნორმა აკმაყოფილებს ნორმის განმარტებებს.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ ინდუცირებული ნორმის განმარტება ეკვივალენტურია შემდეგი განმარტების

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| .$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის u ვექტორი

$$x \ne 0, \quad u = x/\|x\| \ .$$

ვექტორული ნორმის ჰომოგენურობის თვისების გამოყენებით ინდუცირებული ნორმის განმარტებიდან $\|A\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\ne 0}\frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \sup_{x\ne 0}\left\|\frac{1}{\|x\|}Ax\right\| = \sup_{x\ne 0}\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \Rightarrow$

$\|A\| = \sup_{\|u\|=1}\|Au\| = \|Aw\|$, სადაც $\|w\| = 1$.

1. არაუარყოფითობის შემოწმება: ვაჩვენოთ, რომ $\|A\| \ge 0$. ამასთან, $\|A\| = 0 \ \Leftrightarrow \ A = 0$.

მართლაც, ვექტორული ნორმის არაუარყოფითობის გამო $\|Ax\| \ge 0 \ \Rightarrow$ $\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \ge 0$.

ვთქვათ, $\|A\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \ \Leftrightarrow \ \|Ax\| = 0, \ \ \forall x \ne 0 \ \Rightarrow$

$$Ax = 0, \quad \forall x \ne 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\|A\| = 0 \ \Leftrightarrow \ A = 0 \right) .$$

2. ჰომოგენურობის შემოწმება:

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\| = |\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = |\alpha| \, \|A\| \ .$$

3. სამკუთხედის უტოლობის შემოწმება:

ინდუცირებული ნორმის განმარტებიდან გამომდინარე $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \ \Rightarrow \ \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$.

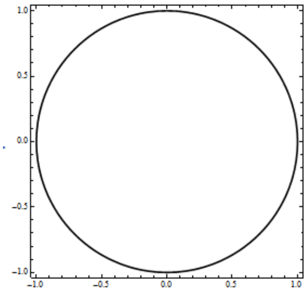
$\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| + \|B\|$, როცა $\|x\| = 1$.

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\| \ .$$

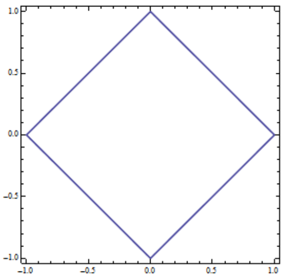
4. სუბ-მულტიპლიკატურობის თვისება:

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| \ , \qquad \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\| \ . \ ◢$$

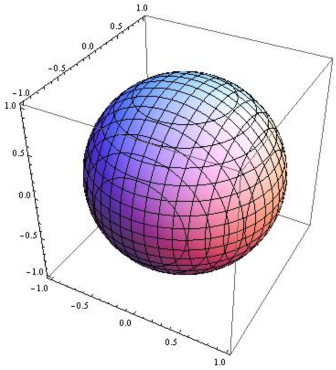
შევნიშნოთ, რომ გეომეტრიულად $\|x\| = 1$ განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს წერტილთა სიმრავლეს (იხ. ნახაზები ქვემოთ ორ და სამგანზომილებიან შემთხვევაში).



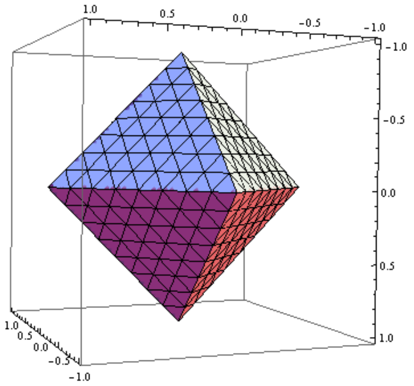
$\{x \mid x \in R^2, \ \ \|x\|_2 = 1\}$ სიმრავლე



$\{x \mid x \in R^2, \ \ \|x\|_1 = 1\}$ სიმრავლე



$\{x \mid x \in R^3, \ \ \|x\|_2 = 1\}$ სიმრავლე (ზედაპირი)



$\{x \mid x \in R^3, \ \ \|x\|_1 = 1\}$ სიმრავლე (ზედაპირი)

თეორემა 2.2. თუ მატრიცული ნორმა შეთანხმებულია ვექტორულ ნორმასთან, მაშინ

$$\rho(A) \le \|A\|, \quad \forall A \in C^{n \times n} .$$

დამტკიცება: მატრიცის საკუთრივი რიცხვის და საკუთრივი ვექტორის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$Av = \lambda v \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| \, \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \le \|A\| \, \|v\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \le \|A\| \ . ◢$$

თვისება 2.16 . თუ A არის კვადრატული მატრიცა და $\|\cdot\|$ რაიმე შეთანხმებული ნორმაა, მაშინ

$$\lim_{m \to \infty} \|A^m\|^{1/m} = \rho(A).$$

2.5. კორექტული და არაკორექტული ამოცანები, განპირობებულობის რიცხვი, კარგად და ცუდად განპირობებული ამოცანები

განსაზღვრება 2.17. ამოცანა **კორექტულია** (well posed problem), თუ ამონახსნი არსებობს, ერთადერთია და მონაცემებზე უწყვეტად არის დამოკიდებული. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანა **არაკორექტულია** (ill posed problem).

ამოცანის **განპირობებულობის** რიცხვის განსაზღვრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები: d - მონაცემი, x - ამონახსნი, δd – მონაცემის ცდომილება (”შეშფოთება”), δx - ამონახსნის ცდომილება, $K(d)$ - განპირობებულობის რიცხვი.

განსაზღვრება 2.18. ამოცანის ფარდობითი განპირობებულობის რიცხვი ეწოდება სიდიდეს

$$K(d) = \sup_{\delta d \in D} \frac{\|\delta x\| / \|x\|}{\|\delta d\| / \|d\|},$$

სადაც D კოორდინატთა სათავის მიდამოა და აღნიშნავს მონაცემთა დასაშვებ ”შეშფოთებათა” სიმრავლეს, რომელთათვისაც საწყისი ამოცანის შესაბამის ”შეშფოთებულ” ამოცანას ჯერ კიდევ აქვს აზრი.

როცა $d=0$ ან $x=0$, აუცილებელია შემოვიღოთ აბსოლუტური განპირობებულობის რიცხვის ცნება, რომელიც ასე განისაზღვრება

$$K_{abs}(d) = \sup_{\delta d \in D} \frac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|}.$$

განსაზღვრება 2.19.

ამოცანა **კარგად განპირობებულია** (well-conditioned problem), თუ განპირობებულობის რიცხვი არის „მცირე“.

ამოცანა **ცუდად განპირობებულია** (ill-conditioned problem), თუ განპირობებულობის რიცხვი არის „დიდი“.

ტერმინების „დიდი“ და „მცირე“ მნიშვნელობა დაზუსტდება კონკრეტული ამოცანის განხილვის დროს.

შენიშვნა 1. საზოგადოდ განპირობებულობის რიცხვი ახასიათებს ამოცანის მგრძნობელობას შემავალი მონაცემების მიმართ, რაც ზემოთ მოყვანილი განმარტებებიდანაც ჩანს. კერძოდ, განსაზღვრება 2.18-ში მოცემული ფორმულებიდან ადვილად შეიძლება დავასკვნათ, რომ ამოცანის განპირობებულობის რიცხვი მხოლოდ მაშინ შეიძლება იყოს “დიდი”, თუ ამოცანის d მონაცემში დაშვებული „მცირე“ ფარდობითი (ან აბსოლუტური) ცდომილება, იწვევს დაშვებულ ცდომილებაზე გაცილებით “დიდ” ფარდობით (ან აბსოლუტურ) ცდომილებას ამოცანის x ამონახსნში.

შენიშვნა 2. განპირობებულობის რიცხვი განიმარტება მხოლოდ მონაცემის, ცდომილების და ამონახსნის საშუალებით; განმარტებაში ცხადი სახით არ ჩანს თუ კონკრეტულად რა ამოცანაზეა საუბარი.

თვისება 2.17.

- ამოცანა შეიძლება იყოს კორექტული და ცუდად განპირობებული;
- რიცხვითი მეთოდით, საზოგადოდ, არ შეიძლება ცუდად განპირობებულობის პრობლემის გადაწყვეტა;
- ცუდად განპირობებულობის პრობლემის გადაჭრის ერთ–ერთი გზას წარმოადგენს ამოცანის რეგულარიზაცია.

დებულება 2.1. ამოცანა $Ax=b$, სადაც A ზედა სამკუთხა მატრიცაა, $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, $a_{ij}=0, i>j;\quad a_{ij}=1, i=j;\quad a_{ij}=-1, i<j$, და $b=(-1,\ldots,-1,1)^T$, არის ცუდად განპირობებული.

დამტკიცება: განსახილველ ამოცანაში შემავალ მონაცემებს წარმოადგენს A მატრიცა და b ვექტორი. ცუდად განპირობებულობის განმარტებიდან გამომდინარე დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $Ax=b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეში (ანუ ამოცანის მონაცემში) დაშვებული მცირე ცდომილება იწვევს ამონახსნის დიდ ცდომილებას არითმეტიკულ ოპერაციათა ზუსტად ჩატარების შემთხვევაშიც კი.

იმის გათვალისწინებით, რომ A მატრიცა ზედა სამკუთხაა და მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების მნიშვნელობა არის 1, შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\det(A)=1$, ე.ი. A მატრიცა არის არაგადაგვარებული და, მაშასადამე, არსებობს $Ax=b$ სისტემის ერთადერთი ამონახსნი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ A მატრიცის ბოლო სვეტი ემთხვევა მარჯვენა მხარის b ვექტორს. აქედან გამომდინარე, $Ax=b$ სისტემის ამონახსნი არის ვექტორი $x=(0,\ldots,0,1)^T$.

განვიხილოთ ე.წ. შეშფოთებული ამოცანა, ანუ ისეთი ამოცანა, როცა შემავალ მონაცემში, კერძოდ, განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეში დაშვებულია ცდომილება. ავიღოთ $b_e=(-1,\ldots,-1,1+e)^T$ და განვიხილოთ $Ax_e=b_e$ სისტემა:

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{e,1}\\ \vdots\\ x_{e,n-1}\\ x_{e,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \vdots\\ -1\\ 1+e\end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ $Ax_e=b_e$ სისტემის ამონახსნი x_e, რაც საკმაოდ მარტივია, კერძოდ გვაქვს:

$$x_{e,n}=1+e$$
$$x_{e,n-1}=-1+x_{e,n}=e$$
$$x_{e,n-2}=\left(-1+x_{e,n}\right)+x_{e,n-1}=x_{e,n-1}+x_{e,n-1}=2\cdot x_{e,n-1}$$

$$\begin{aligned}x_{e,n-k-1}&=\left(-1+x_{e,n}\right)+x_{e,n-1}+\cdots+x_{e,n-k+1}+x_{e,n-k}=\\&=\left(\left(-1+x_{e,n}\right)+x_{e,n-1}+\cdots+x_{e,n-k+1}\right)+x_{e,n-k}=\\&=x_{e,n-k}+x_{e,n-k}=2\cdot x_{e,n-k}\end{aligned}$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$x_{e,n}=1+e\ ;\quad x_{e,n-1}=e\ ;\quad x_{e,n-j-1}=2\cdot x_{e,n-j}\ ,\quad j=1,2,\ldots,n-2\ ;$$
$$x_{e,n-2}=2e\ ;\quad x_{e,n-3}=2^2e\ ;\quad x_{e,n-4}=2^3e\ ;\quad \ldots\quad x_{e,1}=2^{n-2}e\ .$$

დავთვალოთ შემავალი მონაცემის ცდომილება და შედეგად გამოწვეული ამონახსნის ცდომილება:

$$\delta d=b-b_e=(0,\ldots,0,-e)^T=-e(0,\ldots,0,1)^T\ ,$$
$$\delta x=x-x_e=-e\left(2^{n-2},\ldots,2,1,1\right)^T.$$

სიმარტივისთვის ცდომილების შეფასება ჩავატაროთ უსასრულობა ნორმაში. ადვილი სანახავია, რომ :

$$\|\delta d\|_\infty=|e|,\quad \|\delta x\|_\infty=2^{n-2}|e|\ .$$

ამრიგად, საკმაოდ ზომიერი n-ების შემთხვევაშიც კი მარჯვენა მხარეში დაშვებულმა მანქანური ნულის ტოლმა e ცდომილებამ შეიძლება გამოიწვიოს მანქანური უსასრულობის ტოლი ცდომილება $\left(2^{n-2}e\right)$!

ადვილი შესამოწმებელია, რომ უსასრულოობა ნორმაში ამოცანის აბსოლუტური და ფარდობითი განპირობებულობის რიცხვი არის არანაკლებ 2^{n-2}. ამრიგად ამოცანა ცუდად განპირობებულია. ◢

2.6. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი. განპირობებულობის რიცხვის თვისებები

განსაზღვრება 2.20. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი ეწოდება სიდიდეს

$$K(A)=\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|,$$

სადაც $\|\,.\,\|$ ინდუცირებული მატრიცული ნორმაა.

საზოგადოდ, განპირობებულობის რიცხვის სიდიდე დამოკიდებულია ნორმის შერჩევაზე.

შევნიშნოთ, რომ $K\left(A^{-1}\right)=K(A)$ და $\forall\alpha\in C, \alpha\neq 0, K(\alpha A)=K(A)$. დაბოლოს, თუ A არის ორთოგონალური, $K_2(A)=1$, რადგანაც $\|A\|_2=\sqrt{\rho\left(A^T A\right)}=\sqrt{\rho(I)}=1$ და $A^{-1}=A^T$. გადაგვარებული მატრიცების განპირობებულობის რიცხვი უსასრულობის ტოლია.

დებულება 2.2. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვის თვისებები:

2.1. $K(A)\geq 1$

2.2. $K(A)\geq|\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|$

2.3. $K_2(A)=\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A),\quad A=A^T>0$

2.4. $K(AB)\leq K(A)\cdot K(B)$,

სადაც $\lambda_{\max}(A)$ და $\lambda_{\min}(A)$, შესაბამისად, A მატრიცის მოდულით უდიდესი და მოდულით უმცირესი საკუთრივი რიცხვებია.

დამტკიცება:

2.1. $1=\left\|AA^{-1}\right\|\leq\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|=K(A);$

2.2. $|\lambda|\leq\|A\|$,

$\lambda\left(A^{-1}\right)=1/\lambda(A),$

$|1/\lambda(A)|\leq\left\|A^{-1}\right\|,$

$$K(A)=\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\geq|\lambda_{\max}(A)|\cdot|1/\lambda_{\min}(A)|=|\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|\,;$$

2.3. $A=A^T>0\quad\Rightarrow\quad\|A\|_2=\lambda_{\max}(A),\quad\left\|A^{-1}\right\|_2=1/\lambda_{\min}(A)$;

$$K_2(A)=\|A\|_2\cdot\left\|A^{-1}\right\|_2=\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$$

2.4. $$K(AB)=\|AB\|\cdot\left\|(AB)^{-1}\right\|=\|AB\|\cdot\left\|B^{-1}A^{-1}\right\|\leq\|A\|\cdot\|B\|\cdot\left\|B^{-1}\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|=$$
$$=\left(\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\right)\left(\|B\|\cdot\left\|B^{-1}\right\|\right)=K(A)K(B).\ ◢$$

შევნიშნოთ, რომ დეტერმინანტის ნულთან სიახლოვე, რაც ნიშნავს მატრიცის გადაგვარებულობასთან ”სიახლოვეს”, განპირობებულობის რიცხვის ცუდი მახასიათებელია და არ იძლევა სწორ მინიშნებას მატრიცის განპირობებულობის რიცხვის სიდიდის შესახებ. მაგალითად, განვიხილოთ $n \times n$ განზომილების დიაგონალური მატრიცა $\frac{1}{10}I$, რომლის დიაგონალური ელემენტები $\frac{1}{10}$-ის ტოლია. ამ მატრიცის დეტერმინანტია 10^{-n}, მაგრამ ამ თითქმის გადაგვარებული მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი 1-ის ტოლია, ე.ი. იგი იმდენად კარგად არის განპირობებული, რამდენადაც ეს თეორიულად შესაძლებელია.

მაგალითი 2.4. განვიხილოთ A მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}000001 \end{pmatrix}.$$

ის სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრული. მისი საკუთრივი რიცხვებია: $\lambda_1 \approx \frac{1}{2} \times 10^{-6}$, $\lambda_2 \approx 2$. ამიტომ, $K(A) \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4 \times 10^6$. ამის გამო, ჩვენ უნდა ველოდოთ ამონახსნის ძლიერ ცვლილებას მონაცემების მცირე ცვლილების დროსაც კი. მართლაც, განვიხილოთ ორი განტოლებათა სისტემა ერთი და იმავე A მატრიცით და მცირედ განსხვავებული მარჯვენა მხარეებით:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 1{,}000001\, x_2 = 2{,}000001, \end{cases} \qquad (2.4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 1{,}000001\, x_2 = 2{,}000002\,. \end{cases} \qquad (2.5)$$

(2.4) სისტემის ამონახსნია $(1, 1)^T$, ხოლო (2.5) სისტემისა _ $(0, 2)^T$. მარჯვენა მხარის ვექტორის ერთ კომპონენტში მეექვსე ათობითი თანრიგის ერთი ერთეულით ცვლილებამ გამოიწვია ამონახსნის ცვლილება ერთეულების თანრიგში ორივე კომპონენტში. აქ ძალზე მნიშვნელოვანია იმის აღნიშვნა, რომ ორივე ”მახლობელი“ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მიღებულია ზუსტად, ასე რომ ამოხსნის მეთოდს აქ მნიშვნელობა არა აქვს და, ცხადია, არ არსებობს ისეთი რიცხვითი მეთოდი, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელი იქნებოდა დამრგვალების ცდომილების მიმართ ასეთი მგრძნობელობის თავიდან აცილება.

საინტერესოა ცუდად განპირობებული მატრიცის მქონე ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. თითოეული განტოლება განსაზღვრავს წრფეს. თუ ასეთი სისტემის მატრიცა ცუდად განპირობებულია, მაშინ გეომეტრიულად ეს შეესაბამება ”თითქმის” პარალელურ წრფეებს. მათი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები სისტემის ამონახსნია. ამ შემთხვევაში საკუთხო კოეფიციენტის მცირე შეცვლა ან ერთ-ერთი წრფის პარალელურად ”მცირედ” გადაადგილება ”ძლიერ” შეცვლის ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილის მდებარეობას.

2.7. კავშირი განპირობებულობის რიცხვს, წრფივი სისტემის მარჯვენა მხარეში დაშვებულ ცდომილებას და წრფივი სისტემის ამონახსნის ცდომილებას შორის

დებულება 2.3. ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა სისტემა $Ax=b$, $b \neq 0$, A - არაგადაგვარებული მატრიცაა, δb - მარჯვენა მხარის შეშფოთებაა, ხოლო δx - მარჯვენა მხარის შეშფოთებით ამონახსნში გამოწვეული ცდომილება, მაშინ

$$(1/K(A))\,\|\delta b\|/\|b\| \le \|\delta x\|/\|x\| \le K(A)\|\delta b\|/\|b\| .$$

დამტკიცება:

ა) თავდაპირველად დავამტკიცოთ მარჯვენა უტოლობა:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \|b\| \le \|A\| \cdot \|x\| .$$

განვიხილოთ "შეშფოთებული" სისტემა

$$A(x+\delta x) = b + \delta b \quad \Rightarrow \quad A\delta x = \delta b \quad \Rightarrow \quad \delta x = A^{-1}\delta b \quad \Rightarrow \quad \|\delta x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\delta b\| .$$

$$\|b\| \le \|A\| \cdot \|x\| ,$$

$$\|\delta x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\delta b\| .$$

გადავამრავლოთ ბოლო ორი უტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები, შესაბამისად; მივიღებთ:

$$\|b\|\,\|\delta x\| \le \|A\|\,\|x\|\,\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\delta b\| .$$

გავყოთ ორივე მხარე $\|b\| \cdot \|x\|$ -ზე. შედეგად მივიღებთ:

$$\|\delta x\|/\|x\| \ \le \|A\|\,\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\delta b\|/\|b\| .$$

მატრიცის განპირობებულობის რიცხვის განმარტების გათვალისწინებით ამ უკანასკნელი უტოლობიდან ცხადია, რომ მარჯვენა უტოლობა დამტკიცებულია.

ბ) მარცხენა უტოლობის დამტკიცება.

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad \|x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\| ,$$

$$A(x+\delta x) = b + \delta b \quad \Rightarrow \quad \delta b = A\delta x \quad \Rightarrow \quad \|\delta b\| \le \|A\|\,\|\delta x\| .$$

გადავამრავლოთ მიღებული ორი უტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები, შესაბამისად. მივიღებთ:

$$\|x\|\,\|\delta b\| \le \left\|A^{-1}\right\|\,\|b\|\,\|A\| \cdot \|\delta x\| .$$

გავყოთ ორივე მხარე $\|b\|\,\|x\|$ -ზე. შედეგად გვაქვს:

$$\|\delta b\|/\|b\| \le \left\|A^{-1}\right\|\ \|A\| \cdot \|\delta x\|/\|x\| .$$

ამ უკანასკნელი უტოლობის $K(A)$-ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ დასამტკიცებელ მარცხენა უტოლობას. ◢

2.8. კავშირი განპირობებულობის რიცხვს, წრფივი სისტემის კოეფიციენტებში დაშვებულ ცდომილებას და წრფივი სისტემის ამონახსნის ცდომილებას შორის

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$Ax=b, \tag{2.6}$$

სადაც A $n\times n$ მატრიცაა, ხოლო x და b - n-განზომილებიანი ვექტორებია. ცდომილების გამო, მაგალითად საწყის მონაცემებში არსებული ან დამრგვალების ცდომილების გამო (2.6)

სისტემის რიცხვითი მეთოდით ამოხსნისას ვიღებთ არა ზუსტ, არამედ მიახლოებით ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს ე.წ. ”შეშფოთებულ” სისტემას. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რიცხვითი მეთოდი გვაძლევს შემდეგი ”შეშფოთებული” სისტემის ზუსტ $x+\delta x$ ამონახსნს

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b\ . \tag{2.7}$$

დებულება 2.5 საშუალებას გვაძლევს δx შევაფასოთ δA და δb-ს საშუალებით. მანამდე დავამტკიცოთ დამხმარე დებულება 2.4.

დებულება 2.4. ვთქვათ, || . || - ინდუცირებული ნორმაა და $\|A\|<1$, მაშინ არსებობს $(I-A)^{-1}$ და

$$\frac{1}{1+\|A\|}\le\left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|A\|}\ .$$

დამტკიცება: დამტკიცება ჩატარდება სამ ნაწილად.

I) თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ დებულების პირობებში არსებობს $(I-A)^{-1}$ მატრიცა. აღვნიშნოთ O-ით ნულოვანი მატრიცა.

$$\left\|A^k-O\right\|=\left\|A^k\right\|\le\|A\|^k\to 0,\quad \text{როცა}\quad k\to\infty, \text{რადგან } \|A\|<1.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=O$.

ჩავწეროთ იგივეობა

$$(I-A)\,(I+A+A^2+\cdots+A^n)=I-A^{n+1}.$$

და გადავიდეთ ზღვარზე:

$$(I-A)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k=I-\lim_{n\to\infty}A^{n+1},$$

$$(I-A)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k=I\,.$$

შებრუნებული მატრიცის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$(I-A)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\,.$$

II) ინდუცირებული ნორმის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\|I\|=\sup_{x\ne 0}\frac{\|Ix\|}{\|x\|}=\sup_{x\ne 0}\frac{\|x\|}{\|x\|}=1.$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1=\|I\|=\|(I-A)(I-A)^{-1}\|\le\|I-A\|\cdot\|(I-A)^{-1}\|\le(1+\|A\|)\,\|(I-A)^{-1}\|\,.$$

ამ უკანასკნელის $(1+\|A\|)$-ზე გაყოფის შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ მარცხენა უტოლობას.

III) მეორე უტოლობის დასამტკიცებლად ვწერთ იგივეობას: $I=I-A+A$. იგივეობის $(I-A)^{-1}$-ზე მარჯვნიდან გამრავლების შედეგად მივიღებთ:

$$(I-A)^{-1}=I+A(I-A)^{-1}\ ,$$

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\|=\left\|I+A(I-A)^{-1}\right\|\le 1+\|A\|\cdot\left\|(I-A)^{-1}\right\|\,.$$

$\left\|(I-A)^{-1}\right\|$-თან მდგომი წევრების დაჯგუფების შემდეგ გვექნება: $\left(1-\|A\|\right)\left\|(I-A)^{-1}\right\| \le 1$. დასამტკიცებელი მარჯვენა უტოლობა მიიღება $\left(1-\|A\|\right)$-ზე გაყოფის შედეგად. ◢

დებულება 2.5. ვთქვათ

- $A \in \Re^{n\times n}$ არაგადაგვარებული მატრიცაა;
- $\delta A \in \Re^{n\times n}$ ისეთი მატრიცაა, რომ რომელიმე ინდუცირებული მატრიცული ნორმისთვის სრულდება უტოლობა $\left\|A^{-1}\right\|\,\|\delta A\| < 1$;
- ვექტორი $x \in \Re^n$ არის $Ax=b$ სისტემის ამონახსნი, $b \in \Re^n$, $b \ne 0$;
- ვექტორი $x+\delta x \in \Re^n$ აკმაყოფილებს სისტემას $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$, $\delta b \in \Re^n$;

მაშინ სრულდება უტოლობა

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)}{1-K(A)\|\delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

დამტკიცება:

$\left\|A^{-1}\right\|\,\|\delta A\| < 1 \;\Rightarrow\; \left\|A^{-1}\delta A\right\| < 1 \;\Rightarrow$ დებულება 2.4-ის თანახმად, $I + A^{-1}\delta A$ შებრუნებადია და

$$\left\|\left(I + A^{-1}\delta A\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|} \le \frac{1}{1-\left\|A^{-1}\right\|\,\|\delta A\|}. \tag{2.8}$$

(2.7) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ A^{-1}-ზე:

$$A^{-1}(A+\delta A)(x+\delta x) = A^{-1}(b+\delta b),$$

$$\left(I + A^{-1}\delta A\right)(x+\delta x) = A^{-1}b + A^{-1}\delta b,$$

$$x + A^{-1}\delta A x + \left(I + A^{-1}\delta A\right)\delta x = A^{-1}b + A^{-1}\delta b.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.6)-ს, მივიღებთ

$$A^{-1}\delta A x + \left(I + A^{-1}\delta A\right)\delta x = A^{-1}\delta b,$$

$$\left(I + A^{-1}\delta A\right)\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A x),$$

$$\delta x = \left(I + A^{-1}\delta A\right)^{-1} A^{-1}(\delta b - \delta A x).$$

გამოვიყენოთ (2.8) უტოლობა. მივიღებთ

$$\|\delta x\| \le \left\|\left(I + A^{-1}\delta A\right)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|\left\|(\delta b - \delta A x)\right\|,$$

$$\|\delta x\| \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\,\|\delta A\|}\left(\|\delta b\| + \|\delta A\|\,\|x\|\right).$$

გავყოთ ორივე მხარე $||x||$-ზე (რომელიც არანულოვანია, რადგან $b\neq 0$ და A არაგადაგვარებულია), მივიღებთ

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|} + \|\delta A\|\right)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\|x\| \geq \|b\| / \|A\|$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|/\|A\|}+\|\delta A\|\right),$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|\|A\|}{\|b\|}+\|\delta A\|\right).$$

შემდეგ, თუ გავიტანთ $||A||$-ს ფრჩხილებს გარეთ, მივიღებთ საბოლოო ფორმულას, რ.დ.გ. ◢

თავი III. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პირდაპირი მეთოდები

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც განტოლებათა რიცხვი უცნობების რიცხვის ტოლია:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

ან, შემოკლებული ჩანაწერით:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

x_j უცნობთა a_{ij} კოეფიციენტები ქმნის (3.1) სისტემის A მატრიცას

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ხოლო $x_1, \ldots, x_n$ უცნობები და $b_1, \ldots, b_n$ მარჯვენა მხარეები ქმნის n-კომპონენტიან ვექტორებს – x და b. ამის გათვალისწინებით (3.1) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით

$$Ax = b, \quad A \in R^{n \times n}, \quad b \in R^n. \tag{3.2}$$

თვისება 3.1. (3.2) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია, თუ სრულდება ერთერთი შემდეგი (ექვივალენტური) დებულება:

1. A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული ($\det A \neq 0$);
2. A მატრიცის რანგი[1] n -ის ტოლია;
3. ერთგვაროვან სისტემას $Ax = 0$ მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი გააჩნია.

ფორმალურად (3.2) სისტემის ამონახსნს გვაძლევს კრამერის ფორმულები

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

სადაც Δ_j წარმოადგენს იმ მატრიცის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან მისი j-ური სვეტის შეცვლით (3.1) სისტემის მარჯვენა მხარეებისაგან შედგენილი სვეტით. (3.3) ფორმულებით n-განზომილებიანი სისტემის ამოხსნას სჭირდება $O((n+1)!)$ არითმეტიკული ოპერაცია. რას ნიშნავს ეს 50-უცნობიანი წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის შემთხვევაში? თუ კომპიუტერის წარმადობაა 10^9 ოპერაცია წამში, მაშინ კრამერის ფორმულებით ამოცანის ამოხსნისთვის საჭირო დრო დაახლოებით **9.6 * 10^{47} წელია.**

---

[1] მატრიცის **რანგი** ეწოდება მატრიცის უდიდესი არანულოვანი მინორის რიგს. ე.ი., მატრიცის რანგი ტოლია r-ის, თუ:

1. არსებობს r რიგის ერთი მაინც არანულოვანი მინორი;
2. მატრიცის ყველა ის მინორი, რომლის რიგი r-ზე მეტია, ნულის ტოლია.

ნულოვანი მატრიცის რანგი ნულის ტოლად ითვლება.

ჩატარებული ანალიზი ცხადყოფს, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა კრამერის ფორმულებით, დეტერმინანტების “პირდაპირი” გამოთვლით, პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ, ამ ფორმულების პრაქტიკული ღირებულება მცირეა. შედარებისთვის, გაუსის მეთოდით (ოპერაციათა რაოდენობა - $O(n^3)$) იმავე სისტემის ამოხსნას იგივე სიმძლავრის კომპიუტერის გამოყენებით დაახლოებით **1 წმ** სჭირდება. აღსანიშნავია, რომ ოპერაციათა რაოდენობა $O(n^3)$ დიდი განზომილების მქონე სისტემებისთვის საკმაოდ დიდ დროს მოითხოვს. სწორედ ამიტომ გაუსის მეთოდი შედარებით მცირე ზომის სისტემების ამოსახსნელად არის მიზანშეწონილი.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები იყოფა ორ ჯგუფად: **პირდაპირი მეთოდები** - ამონახსნს იძლევა სასრულ რაოდენობის ოპერაციების ჩატარების შემდეგ, და **იტერაციული მეთოდები** - ამონახსნს იძლევა (თეორიულად) უსასრულოდ განმეორებადი მოქმედებების ჩატარების შემდეგ.

გაუსის, კრამერის მეთოდები - პირდაპირი მეთოდებია.

ამოცანის ამოსახსნელად პირდაპირი თუ იტერაციული მეთოდის შერჩევა ხდება კონკრეტული ამოცანიდან გამომდინარე.

3.1. გაუსის გამორიცხვის მეთოდი

გაუსის მეთოდი ორ ეტაპად იყოფა. პირველ ეტაპზე (პირდაპირი სვლა) $Ax = b$ სისტემა დაიყვანება $Ux = \hat{b}$ ექვივალენტურ სისტემაზე (ე.ი. სისტემაზე, რომელსაც იგივე ამონახსნები აქვს), სადაც U ზედა სამკუთხა მატრიცაა, ხოლო $\hat{b}$ - გარდაქმნილი მარჯვენა მხარის ვექტორი. მეორე ეტაპზე (უკუსვლა) ხდება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების მიმდევრობით გამოთვლა პირდაპირ სვლაზე მიღებული სამკუთხა სისტემიდან.

განვიხილოთ სისტემა არაგადაგვარებული მატრიცით $A \in R^{n \times n}$. საწყისი სისტემა აღვნიშნოთ ასე: $A^{(1)}x = b^{(1)}$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ a_{11} ელემენტი არანულოვანია. (იმ შემთხვევაში, როცა a_{11}=0, ადგილებს შევუცვლით განტოლებებს ნომრებით 1 და *i*, რომლისთვისაც $a_{i1} \neq 0$. რადგან წინასწარ ვთვლით, რომ სისტემის მატრიცა არაგადაგვარებულია, ასეთი *i*-ური განტოლება ყოველთვის მოიძებნება). შემოვიღოთ მამრავლები

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2,3,\ldots,n,$$

სადაც $a_{ij}^{(1)}$ აღნიშნავს $A^{(1)}$-ის ელემენტს, და გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი პირველის გარდა ყველა სტრიქონიდან შემდეგი ელემენტარული ოპერაციის ჩატარებით: *i*-ურ სტრიქონს, $i = 2,3,\ldots,n$, გამოვაკლოთ m_{i1}-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონი (იგივენაირად გარდავქმნათ *i*-ური განტოლების მარჯვენა მხარეც). ჩავწეროთ ეს ელემენტარული ოპერაცია შესაბამისი აღნიშვნების და ფორმულების გამოყენებით. შედეგად მივიღებთ:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2,\ldots,n,$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, \quad i = 2,\ldots,n,$$

ანუ მივიღებთ ახალ, საწყისი სისტემის ეკვივალენტურ სისტემას

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \quad \text{ან} \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

ზემოთ მოყვანილი ელემენტარული ოპერაციის მსგავსი ელემენტარული ოპერაციის გამოყენებით ეს უკანასკნელი სისტემა შეგვიძლია ისე გარდავქმნათ, რომ x_2 უცნობი გამოვრიცხოთ $3,\dots,n$ სტრიქონებიდან.

ზოგადად მივიღებთ სასრულ მიმდევრობას $A^{(k)}x = b^{(k)}, \quad 1 \le k \le n$, სადაც $A^{(k)}, \quad k \ge 2$, მატრიცას აქვს შემდეგი ფორმა:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ მსჯელობისას ვაკეთებთ დაშვებას: $a_{ii}^{(i)} \ne 0, \quad i = 1,\dots,k-1$. ცხადია, როცა $k = n$, მივიღებთ ზედა სამკუთხა სისტემას

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

$a_{kk}^{(k)}$ ელემენტს, $k = 1,\dots,n-1$, k-ური ბიჯის **წამყვანი** ელემენტი ეწოდება და ჩვენი დაშვების თანახმად ის არაულოვანი უნდა იყოს.

ამოვწეროთ ზოგადი ფორმულები, რომლებიც გარდაქმნის k-ურ სისტემას k+1 სისტემაში, $k = 1,\dots,n-1$, $a_{kk}^{(k)} \ne 0$:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1,\dots,n,$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1,\dots,n,$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}, \quad i = k+1,\dots,n.$$

მაგალითი 3.1. ამოვხსნათ გაუსის გამორიცხვის მეთოდით შემდეგი სისტემა

$$\left(A^{(1)}x = b^{(1)}\right) \qquad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60} \end{cases}$$

სისტემის მატრიცა წარმოადგენს ე.წ. ჰილბერტის H_3 მატრიცას ელემენტებით

$$h_{ij} = 1/(i+j-1), \quad i,j=1,\ldots,n \ .$$

სისტემის ამონახსნია ვექტორი $x=(1,1,1)^T$. პირველ ბიჯზე გამოვთვალოთ მამრავლები $m_{21}=1/2$ და $m_{31}=1/3$, და გამოვაკლოთ მეორე და მესამე განტოლებიდან პირველი განტოლება გამრავლებული m_{21} და m_{31}-ზე, შესაბამისად. მივიღებთ პირველი სისტემის ეკვივალენტურ სისტემას

$$\left(A^{(2)}x=b^{(2)}\right) \qquad \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{11}{6} \\ 0+\frac{1}{12}x_2+\frac{1}{12}x_3=\frac{1}{6} \\ 0+\frac{1}{12}x_2+\frac{4}{45}x_3=\frac{31}{180} \end{cases}$$

შემდეგ მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ $m_{32}=1$-ზე გამრავლებული მეორე განტოლება. მივიღებთ სისტემას ზედა სამკუთხა მატრიცით:

$$\left(A^{(3)}x=b^{(3)}\right) \qquad \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{11}{6} \\ 0+\frac{1}{12}x_2+\frac{1}{12}x_3=\frac{1}{6} \\ 0+0+\frac{1}{180}x_3=\frac{1}{180} \end{cases}$$

საიდანაც უკუსვლით გამოვთვლით $x_3=1$, და შემდეგ, ჩასმით ვიპოვით დანარჩენ ორ უცნობს $x_1=x_2=1$.

გაუსის მეთოდის პირდაპირი სვლისთვის $2(n-1)n(n+1)/3+n(n-1)$ ოპერაციაა საჭირო, პლუს n^2 ოპერაცია - უკუსვლისთვის. მთლიანად, გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისთვის $\left(2n^3/3+2n^2\right)$ ოპერაციაა საჭირო.

3.2. გაუსის გამორიცხვის მეთოდის ჩაწერა მატრიცული ფორმით. მატრიცის *LU* ფაქტორიზაცია

ვაჩვენოთ, რომ გაუსის გამორიცხვის მეთოდის ჩატარებისას ხდება *A* მატრიცის დაშლა ორი მატრიცის ნამრავლად $A=LU$, სადაც $U=A^{(n)}$. რადგან *L* და *U* დამოკიდებულია მხოლოდ *A* მატრიცაზე და არა სისტემის მარჯვენა მხარეზე, ამიტომ ერთი და იგივე დაშლა შეიძლება გამოვიყენოთ რამოდენიმე სისტემის ამოსახსნელად ერთიდაიმავე A მატრიცით და სხვადასხვა მარჯვენა მხარით. ეს მნიშვნელოვნად ამცირებს ოპერაციათა საერთო რაოდენობას.

გავიხსენოთ მაგალითი 3.1, ჰილბერტის $A=H_3$ მატრიცით. პირველ ბიჯზე $A^{(1)}=H_3$ მატრიციდან $A^{(2)}$ მატრიცის მისაღებად იგი უნდა გამრავლდეს მარცხნიდან მატრიცაზე

$$M_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

მართლაც,

$$M_1A = M_1A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{bmatrix} = A^{(2)}.$$

ანალოგიურად, გაუსის გამორიცხვის მეორე (ამ შემთხვევაში, უკანასკნელ) ბიჯზე $A^{(2)}$ უნდა გავამრავლოთ მარცხნიდან მატრიცაზე

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

მივიღებთ $A^{(3)} = M_2A^{(2)}$. ამრიგად,

$$M_2M_1A = A^{(3)} = U \ . \qquad (3.4)$$

M_1 და M_2 მატრიცები ქვედა სამკუთხაა. ქვედა სამკუთხაა მათი ნამრავლიც და მისი შებრუნებულიც. ამიტომ (3.4)-დან გვექნება

$$A = \left(M_2M_1\right)^{-1}U = LU \ ,$$

რაც წარმოადგენს A მატრიცის ზემოხსენებულ ფაქტორიზაციას.

ზოგად შემთხვევაში განვსაზღვროთ

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{k+1,k} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{n,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

მატრიცა, როგორც გაუსის გამორიცხვის მეთოდის **k-ური გარდამქმნელი მატრიცა:**

$$A^{(k+1)} = M_kA^{(k)}, \quad k = 1,\dots,n-1 \, .$$

შენიშვნა. ადვილად შეიძლება დავადგინოთ ზოგადად M_k მატრიცების სტრუქტურა. ვთქვათ, გაუსის მეთოდის (k+1)-ურ ბიჯზე (i, k) პოზიციაში (i>k), გვინდა მივიღოთ ნულოვანი ელემენტი. ამისათვის i-ურ განტოლებას უნდა გამოვაკლოთ k-ური განტოლება გამრავლებული $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ მამრავლზე. ეს ოპერაცია შესრულდება, თუ მიმდინარე სისტემის მატრიცა მარცხნიდან გამრავლდება მატრიცაზე, რომელიც მიიღება ერთეულოვანი მატრიცისაგან მასში (i, k) პოზიციაში 0-ის ($-m_{ik}$)-ით შეცვლით. ანუ, M_k მატრიცა მიიღება ერთეულოვანი მატრიცისგან, თუ მასზე ჩავატარებთ ყველა იმ მოქმედებას, რაც ძირითად მატრიცზე უნდა ჩავატაროთ. ძირითადი მატრიცი M_k-ზე მარცხნიდან გამრავლებისას შესაბამისად გარდაიქმნება. რადგან გაუსის მეთოდის რეალიზაციის ყოველ ბიჯზე (i>k) ამიტომ, ყველა M_k მატრიცა ქვედა უნისამკუთხაა (ქვედა სამკუთხა მატრიცა, რომლის ყველა დიაგონალური ელემენტი ერთის ტოლია).

ზოგადად, U მატრიცა მიიღება შემდეგნაირად:

$$M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1A = U \, .$$

აღვნიშნოთ

$$L = \left(M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1\right)^{-1} = M_1^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1} \, .$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ M_k^{-1} მატრიცას აქვს სახე:

$$M_k^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & 1 & 0 & & 0\\ 0 & & m_{k+1,k} & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & m_{n,k} & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

მართლაც, თუ შევხედავთ M_k-ს, როგორც გარდამქმნელ მატრიცას, რომელიც გარდაქმნის M_k^{-1}-ს I ერთეულოვან მატრიცაში, ანუ ანულებს ელემენტებს ინდექსით (k+1,k) … (n, k). მაშინ გვექნება

$$I=M_kM_k^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & 1 & 0 & & 0\\ 0 & & -m_{k+1,k} & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & -m_{n,k} & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & 1 & 0 & & 0\\ 0 & & x_{k+1,k} & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & x_{n,k} & 0 & \dots & 1\end{bmatrix},$$

სადაც $m_{i,k}$ ტოლი უნდა იყოს სიდიდის $\frac{x_{i,k}}{1}$, (i=k+1, … n). აქედან $x_{i,k}=m_{i,k}$.

საბოლოოდ გვექნება $A=LU$, ან

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ m_{21} & 1 & & & \vdots\\ \vdots & m_{32} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}U.$$

ამრიგად, L მატრიცა არის ქვედა უნისამკუთხა, ხოლო დიაგონალის ქვემოთ მდგომი ელემენტები წარმოადგენს გაუსის გამორიცხვის მეთოდის m_{ik} მამრავლებს.

3.3. ბლოკური მატრიცები

განსაზღვრება 3.1. $A(m\times n)$ მატრიცას ეწოდება ბლოკური (ან ბლოკებად დანაწევრებული), თუ იგი წარმოდგება სახით

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kl}\end{bmatrix},$$

სადაც A_{ij} - A მატრიცის ქვემატრიცაა.

A მატრიცის შესაძლო დანაწევრებებს შორის შეიძლება განვიხილოთ დანაწევრება სვეტების მიხედვით

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

სადაც a_i - A მატრიცის i-ური ვექტორ-სვეტია. ანალოგიურად, A მატრიცა შეიძლება დავანაწევროთ სტრიქონების მიხედვით.

აღვნიშნოთ A მატრიცის $(i_2 - i_1 + 1)\times(j_2 - j_1 + 1)$ ზომის ქვემატრიცა შემდეგნაირად:

$$A(i_1 : i_2, j_1 : j_2) = (a_{ij}), \quad i_1 \le i \le i_2, \quad j_1 \le j \le j_2 \ .$$

ეს ქვემატრიცა მოიცავს A მატრიცის ელემენტებს, რომლებიც მოთავსებულია i_1 და i_2 სტრიქონებსა და j_1 და j_2 სვეტებს შორის.

ბლოკური მატრიცის ტრივიალური მაგალითია ბლოკურ-დიაგონალური მატრიცა.

ოპერაციები ბლოკურ მატრიცებზე

ვთქვათ, A და B ბლოკური მატრიცებია,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

სადაც A_{ij} და B_{ij} შესაბამისად $(k_i \times l_j)$ და $(m_i \times n_j)$ ზომის მატრიცებია. მაშინ

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \cdots & \lambda A_{kl} \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{k1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1l}^T & \cdots & A_{kl}^T \end{bmatrix}$$

თუ $k = m, \quad l = n, \quad m_i = k_i$ და $n_j = l_j$, მაშინ

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1l} + B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} + B_{k1} & \cdots & A_{kl} + B_{kl} \end{bmatrix}.$$

თუ $l = m, \quad l_i = m_i$ და $k_i = n_i$, მაშინ

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & \cdots & C_{kl} \end{bmatrix}, \quad \text{სადაც } C_{ij} = \sum_{s=1}^{m} A_{is} B_{sj} \ .$$

3.4. თეორემა LU ფაქტორიზაციის არსებობის და ერთადერთობის შესახებ

ყოველი კვადრატული მატრიცა გარკვეულ პირობებში შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ორი სამკუთხა მატრიცის ნამრავლის სახით. მათგან ერთი ზედა, ხოლო მეორე - ქვედა სამკუთხაა. ამასთან, თუ წინასწარ დავაფიქსირებთ ერთ-ერთი ამ მატრიცის დიაგონალურ ელემენტებს (მაგალითად, ავიღებთ უნისამკუთხა მატრიცას), მაშინ ეს წარმოდგენა ერთადერთი იქნება.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 3.1. ვთქვათ, $A \in R^{n\times n}$. A მატრიცის LU-ფაქტორზაცია, სადაც U ზედა სამკუთხა მატრიცაა , ხოლო L ქვედა სამკუთხა მატრიცაა მთავარ დიაგონალზე ერთის ტოლი ელემენტებით, არსებობს და ერთადერთია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის ყველა მთავარი ქვემატრიცა $A_i, i = 1,2,\ldots,n-1$, არაგადაგვარებულია.

დამტკიცება:

საკმარისობა: თუ თეორემის პირობები შესრულებულია, ე.ი.

$$\det(A_1)=a_{11}\neq 0,\quad \det(A_2)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0\ ,\ \ldots,\quad \det(A_{n-1})\neq 0\,,$$

მაშინ არსებობს A მატრიცის ერთადერთი LU ფაქტორიზაცია.

თეორემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქცის მეთოდით.

როცა i=1 - დებულების სამართლიანობა ცხადია.

დავუშვათ, თეორემა სამართლიანია (i-1)-თვის. ე.ი. არსებობს და ერთადერთია A_{i-1}-ის ფაქტორიზაცია

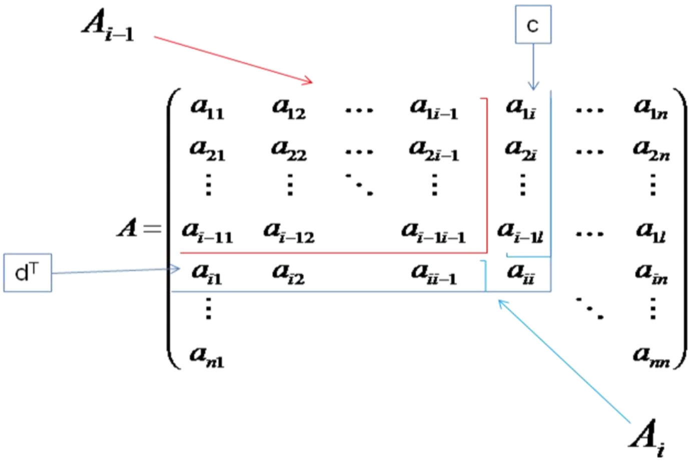
$$A_{i-1}=L^{(i-1)}U^{(i-1)},\quad \text{სადაც}\quad l_{kk}^{(i-1)}=1,\quad k=1,2,\ldots,i-1.$$

უნდა ვაჩვენოთ, რომ თეორემა სამართლიანია i-თვის. წარმოვადგინოთ A_i მატრიცა, როგორც ბლოკური მატრიცა:

$$A_i=\begin{bmatrix} A_{i-1} & c\\ d^T & a_{ii}\end{bmatrix},$$

სადაც c და d ვექტორებია, თითოეული i-1 განზომილებიანი, ამასთან

$$c=(c_1,\ldots,c_{i-1})^T,\ d^T=(d_1,\ldots,d_{i-1}).$$



უნდა დავამტკიცოთ, რომ A_i წარმოდგება შემდეგი სახით

$$A_i=L^{(i)}U^{(i)}=\begin{bmatrix} L^{(i-1)} & 0\\ l^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U^{(i-1)} & u\\ 0^T & u_{ii}\end{bmatrix},\tag{3.5}$$

სადაც l და u ვექტორებია, თითოეული i-1 განზომილებიანი, $u=(u_1,\ldots,u_{i-1})^T$, $l^T=(l_1,\ldots,l_{i-1})$. თუ ამ ბლოკურ მატრიცებს გადავამრავლებთ და A_i-ს ბლოკებს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ $A_{i-1}=L^{(i-1)}U^{(i-1)}$, ხოლო ვექტორები l და u წარმოადგენს $L^{(i-1)}u=c$ და $l^TU^{(i-1)}=d^T$ წრფივი სისტემების ამონახსნებს.

მეორე მხრივ, რადგან

$$0\neq\det(A_{i-1})=\det\left(L^{(i-1)}\right)\det\left(U^{(i-1)}\right),$$

$L^{(i-1)}$ და $U^{(i-1)}$ მატრიცები არაგადაგვარებულია. შესაბამისად, l და u არსებობს და ერთადერთია. ამგვარად, არსებობს და ერთადერთია A_i-ის ფაქტორიზაცია, სადაც u_{ii} არის $u_{ii}=a_{ii}-l^Tu$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი.

ამით ინდუქციის დამტკიცება დასრულებულია.

აუცილებლობა: თუ A მატრიცის ერთადერთი LU ფაქტორიზაცია არსებობს, მაშინ მისი n-1 მთავარი დიაგონალური მინორი არაგადაგვარებულია.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: როცა A გადაგვარებულია და როცა A არაგადაგვარებულია.

A_i , $L^{(i-1)}$ და $U^{(i-1)}$ მატრიცების სტრუქტურიდან გამომდინარე

$$\det(A_i) = \det\left(L^{(i)}\right)\det\left(U^{(i)}\right) = \det\left(U^{(i)}\right) = u_{11}u_{22}\cdots u_{ii}, \tag{3.6}$$

ა) A არაგადაგვარებულია.

მაშინ $u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \neq 0$ და აუცილებლად $\det(A_i) = u_{11}u_{22}\cdots u_{ii} \neq 0$, როცა $i = 1,2,\ldots,n-1$.

ბ) A გადაგვარებულია

დავუშვათ, U მატრიცის დიაგონალური ელემენტი (ერთი მაინც) ნულის ტოლია. u_{kk}-თი აღვნიშნოთ U-ს ნულის ტოლი ელემენტი მინიმალური k ინდექსით. (3.5)-ის გამო ფაქტორიზაციის პროცესი შეუფერხებლად ჩატარდება (k+1) ბიჯამდე. ამ ბიჯზე, რადგან $U^{(k)}$ მატრიცა გადაგვარებულია, l^T ვექტორის არსებობა და ერთადერთობა ირღვევა, შესაბამისად, ირღვევა LU ფაქტორიზაციის ერთადერთობის პირობა. იმისათვის, რომ ეს პირობა არ დაირღვეს, საჭიროა ყველა u_{kk} განსხვავებული იყოს ნულისგან, k=n-1 ინდექსის ჩათვლით. ამგვარად, (6)-ის გამო, ყველა დიაგონალური მინორი A_k იქნება არაგადაგვარებული, $k = 1,2,\ldots,n-1$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ A_i გადაგვარებულია, $i = 1,2,\ldots,n-1$, მაშინ ფაქტორიზაცია ან არ არსებობს ან ერთადერთი არ არის.

მაგალითი 3.2. განვიხილოთ მატრიცები

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

B და D მატრიცები გადაგვარებულია, ხოლო C - არაგადაგვარებულია.

თეორემა 3.1-ის ძალით გადაგვარებულ B მატრიცს არაგადაგვარებული დიაგონალური მინორით $B_1 = 1$ შეიძლება ჰქონდეს ერთადერთი LU ფაქტორიზაცია. C და D მატრიცის შემთხვევაში თეორემის პირობები ირღვევა. არაგადაგვარებული C მატრიცისთვის (გადაგვარებული C_1-ით) LU ფაქტორიზაცია შეუძლებელია, მაშინ როცა გადაგვარებული D მატრიცისთვის (გადაგვარებული D_1-ით) შესაძლებელია შემდეგი ფორმის უსასრულოდ ბევრი LU ფაქტორიზაცია, $D = L_\beta\, U_\beta$, სადაც

$$L_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad U_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2-\beta \end{bmatrix}, \quad \forall \beta \in \Re \; .$$

თვისება 3.2. მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა გაუსის მეთოდის გამოყენებით

თუ A მატრიცის LU ფაქტორიზაცია არის ერთადერთი, მაშინ A მატრიცის დეტერმინანტი ტოლია U მატრიცის დიაგონალური ელემენტების ნამრავლისა.

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U),$$
$$\det(A) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \, .$$

თვისება 3.3. წრფივი სისტემის ამოხსნა LU ფაქტორიზაციის გამოყენებით

თუ ცნობილია A მატრიცის LU ფაქტორიზაცია, მაშინ $Ax=b$ განტოლებათა სისტემა დაიყვანება სამკუთხა მატრიცის მქონე ორი უფრო მარტივი სისტემის ამოხსნაზე:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Ly = b, \quad Ux = y \ .$$

თვისება 3.4. შებრუნებული მატრიცის დათვლა გაუსის მეთოდის გამოყენებით

თუ ცნობილია *A* მატრიცის *LU* ფაქტორიზაცია, მაშინ შესაძლებელია ვიპოვოთ *A* მატრიცის შებრუნებული მატრიცა A^{-1}. შემდეგ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით:

$$Ly_i = e_i, \quad Ux_i = y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

სადაც $e_1 = (1,0,\ldots,0)^T$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)^T, \ldots,$ $e_n = (0,0,\ldots,1)^T$, მაშინ A^{-1} იქნება მატრიცი სვეტებით x_i: $A^{-1} = (x_1\ x_2 \cdots x_n)$.

3.5. ნულოვანი წამყვანი ელემენტის პრობლემა. გადაადგილებათა მატრიცა

ზემოთ განხილული გაუსის გამორიცხვის მეთოდის გამოყენება შეუძლებელია, თუ რომელიმე ბიჯზე წამყვანი ელემენტი 0-ის ტოლი გახდება. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა წამყვანი ელემენტის შერჩევის ტექნიკის გამოყენება, რაც შემდეგში მდგომარეობს: სისტემის მატრიცის სტრიქონების (ან სვეტების) გადანაცვლების საშუალებით ხდება ეკვივალენტური წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემ(ებ)ის მიღება, რომელსაც არანულოვანი წამყვანი ელემენტ(ებ)ი აქვს.

განვიხილოთ გაუსის მეთოდი *Ax=b* განტოლებისათვის და ვიგულისხმოთ, რომ პირველი $(k-1)$ წამყვანი ელემენტი არანულოვანია, ხოლო *k*-ური ელემენტი ნულის ტოლია.

ნულოვანი წამყვანი ელემენტის წარმოშობისას შესაძლებელია ორი სხვადასხვა შემთხვევა :

ა) სიძნელე ადვილად გადაილახება, თუ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მართლაც, ამ შემთხვევაში სისტემის მატრიცის *k*-ურ სვეტში (*k*, *k*) ელემენტის ქვემოთ გვექნება ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული ელემენტი, ვთქვათ, $a_{jk} \neq 0$ ($j > k$). მაშინ *k*-ური და *j*-ური განტოლების გადასმა უზრუნველყოფს (*k*,*k*) პოზიციაში წამყვანი ელემენტის ნულისაგან განსხვავებულობას.

ბ) თუ (*k*,*k*) ელემენტის ქვემოთ *k*-ურ სვეტში ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ განტოლებათა მიღებულ სისტემას $x_k, x_{k+1},\ldots, x_n$ უცნობებით ან არა აქვს ამონახსნი, ან ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს. ეს კი ნიშნავს, რომ *A* მატრიცა გადაგვარებულია. ამრიგად, გაუსის გამორიცხვის მეთოდი შესაძლებლობას გვაძლევს, აღმოვაჩინოთ მატრიცის გადაგვარებულობა. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ დამრგვალების ცდომილებების გამო ამ შესაძლებლობის გამოყენება პრაქტიკულად გაძნელებულია.

მაგალითი 3.3. განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

წამყვანი ელემენტი არის ნულის ტოლი. როგორც ვიცით, გაუსის სტანდარტული გამორიცხვის მეთოდის პირდაპირი სვლზე *M* მატრიცაზე გამრავლებით განტოლებათა სისტემა დაიყვანება სამკუთხა მატრიცის მქონე სისტემაზე. თუმცა, არ არსებობს ისეთი M_1 ტიპის მატრიცა, რომ $M_1 A = U$, მიუხედავად იმისა, რომ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი - ვექტორი $(1,1)^T$. პრობლემის გადასაწყვეტად:

გადავაადგილოთ განტოლებები

მივიღოთ სტანდარტული სიტუაცია არანულოვანი წამყვანი ელემენტით

გამოვიყენოთ სტანდარტული გაუსის გამორიცხვა

სტრიქონების გადაადგილებას მატრიცულად ექნება სახე:

გადაადგილებათა მატრიცა

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

კვადრატული მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნა: ორი სტრიქონის (სვეტის) გადაადგილება; სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის გამრავლება არანულოვან რიცხვზე; რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების შეკრება სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებთან), ტოლფასია ამ მატრიცის სხვა არანულოვან მატრიცაზე გამრავლებისა. ამასთან, თუ ხდება სტრიქონების (სვეტების) გარდაქმნა, მაშინ გამრავლება ხდება მარცხნიდან (მარჯვნიდან) და გარდამქმნელი მატრიცა მიიღება ერთეულოვანი მატრიციდან მასზე ანალოგიური ელემენტარული ოპერაციების ჩატარების შედეგად.

მაგალითად, თუ უნდა გადავაადგილოთ $A(n,n)$ მატრიცაში i, j სტრიქონები, უნდა გამოვიყენოთ $P_{ij}(n,n)$ მატრიცაზე მარცხნიდან გამრავლება, სადაც P_{ij} მატრიცა მიიღება ერთეულოვანი მატრიცისაგან i და j სტრიქონების გადანაცვლებით:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}$$

(სვეტები i და j აღნიშნულია მატრიცის ზემოთ.)

ამრიგად,

$P_{ij}A$ – A მატრიცის i და j სტრიქონები ადგილს უცვლის ერთმანეთს;

AP_{ij} – A მატრიცის i და j სვეტები ადგილს უცვლის ერთმანეთს;

$P_{ij} = P_{ij}^{T}$, $P_{ij}P_{ij} = I$, გადანაცვლებათა მატრიცა P_{ij} - ორთოგონალურია.

შევნიშნოთ, რომ თუ გამოთვლების პროცესში რამდენჯერმე გვიხდება განტოლებების გადანაცვლება, P_{ij} მატრიცათა ნამრავლი მოგვცემს ისეთ მატრიცას, რომელზედაც მარცხნიდან (მარჯვნიდან) გადამრავლების შემდეგ, A მატრიცაში მოხდება ყველა საჭირო სტრიქონის (სვეტის) გადანაცვლება.

თვისება 3.5. საზოგადოდ, თუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, მაშინ არსებობს გადაადგილებათა ისეთი P მატრიცა, რომ PA მატრიცა შეიძლება წარმოვადგინოთ $PA = LU$ სახით.

თვისება 3.6. სტრიქონების გადასმა **ცვლის დეტერმინანტის ნიშანს**, ამიტომ თუ გადაადგილებათა რიცხვი ლუწია, გვექნება $\det A = \det(PA)$, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში $\det A = -\det(PA)$.

3.6. გაუსის გამორიცხვის მეთოდი წამყვანი ელემენტის ნაწილობრივი არჩევით, სრული არჩევით

წრფივ განტოლებათა სისტემის გაუსის მეთოდით ამოხსნის პროცედურა შეიძლება არამდგრადი აღმოჩნდეს შემთხვევითი ცდომილებების მიმართ, რაც გარდაუვალია კომპიუტერზე გამოთვლების ჩატარების დროს დამრგვალებების გამო.

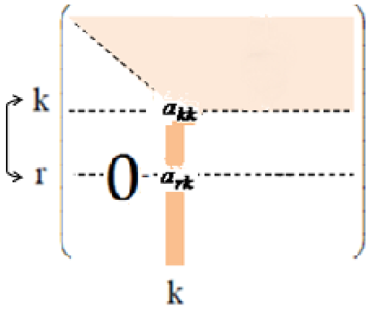
თუ გამორიცხვის ყოველ ბიჯზე გარდამქმნელი მატრიცის m_{ij} ელემენტები მოდულით 1-ზე ნაკლები იქნება (ანუ L მატრიცის ელემენტები იქნება მოდულით 1-ზე ნაკლები), მაშინ U მატრიცის ელემენტების გამოთვლის დროს დამრგვალების ცდომილებების როლი გამოთვლების პროცესში უმნიშვნელო იქნება.

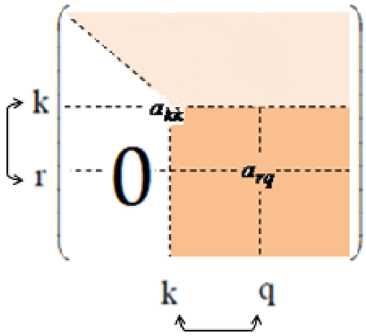
აღვწეროთ მდგრადობის გაუმჯობესების მიზნით ჩასატარებელი პროცედურები.

გაუსის გამორიცხვის მეთოდის პირდაპირი სვლის მიმდინარე k-ურ ბიჯზე A მატრიცაში გადავაადგილოთ **სტრიქონები** ისე, რომ წამყვანი ელემენტი გახდეს $A^{(k-1)}$ მატრიცის k-ური სვეტის $a_{ik}^{(k-1)}, i=k\ldots n$, ელემენტებს შორის მოდულით უდიდესი (სტრიქონების გადანაცვლება ნიშნავს განტოლებებს გავუცვალოთ ადგილი). ამ პროცედურას წამყვანი ელემენტის **ნაწილობრივი შერჩევა** ეწოდება.

შერჩევის პროცესი შეიძლება გავაფართოვოთ და გაუსის გამორიცხვის მეთოდის პირდაპირი სვლის მიმდინარე k-ურ ბიჯზე გადავაადგილოთ **სტრიქონები** და **სვეტები** ისე, რომ წამყვანი ელემენტი შევარჩიოთ მთელი $A^{(k)}(k:n,k:n)$ ქვემატრიციდან (აქ საჭირო გახდება სტრიქონების გადანაცვლებაც და უცნობების გადანომრაც, რადგან გადავაადგილოთ სვეტები A მატრიცაში ნიშნავს უცნობებს გავუცვალოთ ადგილები). ამ პროცედურას წამყვანი ელემენტის **სრული შერჩევა** ეწოდება.

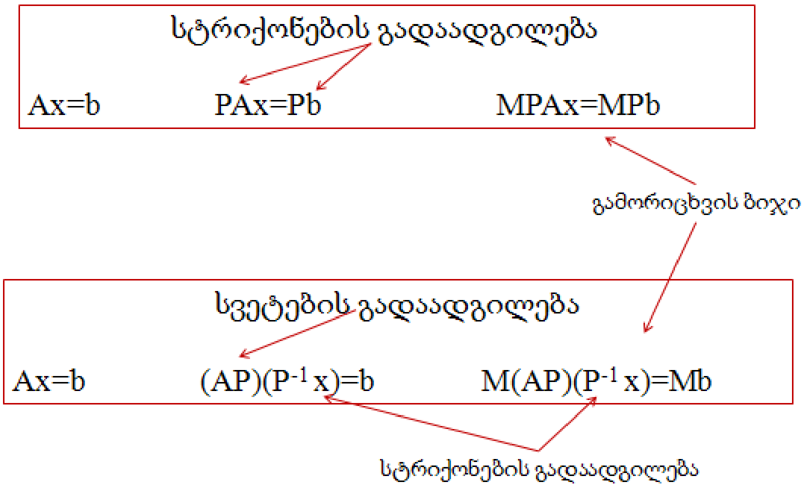
შევნიშნოთ, რომ წამყვანი ელემენტის ნაწილობრივ შერჩევას დამატებით n^2 ძიება სჭირდება, ხოლო სრულ შერჩევას კი - $2n^3/3$.





ნახ.1. ნაწილობრივი შერჩევა სტრიქონების გადანაცვლებით (მარცხნივ) და სრული შერჩევა (მარჯვნივ). გამუქებულია არე, სადაც ხდება წამყვანი ელემენტის შერჩევა.

სტრიქონებისა და სვეტების გადაადგილების მატრიცული სქემა



წამყვანი ელემენტის ნაწილობრივი შერჩევა მატრიცული ფორმით

წამყვანი ელემენტის ნაწილობრივი შერჩევის სტრატეგია განვიხილოთ შემდეგი მატრიცის მაგალითზე:

$$A=\begin{bmatrix}4&7&3\\6&2&5\\10&5&0\end{bmatrix}.$$

პირველ სვეტში მოდულით მაქსიმალური ელემენტი მესამე სტრიქონშია. უნდა გადავაადგილოთ პირველი და მესამე სტრიქონები, რისთვისაც A მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ P_1 გადანაცვლების მატრიცაზე:

$$P_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad P_1A=\begin{bmatrix}10&5&0\\6&2&5\\4&7&3\end{bmatrix}.$$

ჩავატაროთ გამორიცხვის პირველი ბიჯი, რისთვისაც P_1A მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ გაუსის მარდამქმნელ M_1 მატრიცაზე:

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3/5&1&0\\-2/5&0&1\end{bmatrix},\qquad M_1P_1A=\begin{bmatrix}10&5&0\\0&-1&5\\0&5&3\end{bmatrix}.$$

გამორიცხვის მეორე ბიჯზე გადავაადგილოთ მეორე და მესამე სტრიქონი, რათა მეორე ბიჯის წამყვანი ელემენტი მოდულით მაქსიმალური იყოს. ამისთვის მიღებული მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ P_2 გადანაცვლების მატრიცაზე:

$$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad P_2M_1P_1A=\begin{bmatrix}10&5&0\\0&5&3\\0&-1&5\end{bmatrix}.$$

ახლა ჩავატაროთ გამორიცხვის მეორე ბიჯი:

$$M_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1/5&1\end{bmatrix},\qquad M_2P_2M_1P_1A=\begin{bmatrix}10&5&0\\0&5&3\\0&0&5.6\end{bmatrix}=U.$$

საბოლოოდ, გადანაცვლებათა მატრიცა იქნება

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ხოლო თუ გავითვალისწინებთ მეორე ბიჯზე სტრიქონების გადანაცვლებას, მაშინ

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

ამრიგად, შესრულდება ტოლობა $PA = LU$.

ზოგადად, $M_{n-1}P_{n-1}\ldots M_2P_2M_1P_1A = U$.

თუ აღვნიშნავთ $M = M_{n-1}P_{n-1}\ldots M_2P_2M_1P_1$, მაშინ $U = MA$.

$P = P_{n-1}\ldots P_2P_1$,

$U = \left(MP^{-1}\right)PA$. რადგან $PA = LU$, ამიტომ $L = PM^{-1}$.

წამყვანი ელემენტის ნაწილობრივი შერჩევის სტრატეგიის შედეგად ჩვენ მივიღებთ ისეთ m_{ij} მამრავლებს, რომლებიც მოდულით არ აღემატება 1-ს.

წამყვანი ელემენტის სრული შერჩევა მატრიცული ფორმით:

წამყვანი ელემენტის სრული შერჩევის სტრატეგია განვიხილოთ შემდეგი მატრიცის მაგალითზე:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

მატრიცის მოდულით მაქსიმალური ელემენტი მეორე სტრიქონისა და მეორე სვეტის გადაკვეთაზე ძევს. უნდა გადავაადგილოთ პირველი და მეორე სტრიქონები (რისთვისაც A მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ P_1 გადანაცვლების მატრიცაზე) და პირველი და მეორე სვეტები (რისთვისაც A მატრიცა მარჯვნიდან გავამრავლოთ Q_1 გადანაცვლების მატრიცაზე):

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

ჩავატაროთ გამორიცხვის პირველი ბიჯი, რისთვისაც P_1AQ_1 მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ გაუსის მარდამქმნელ M_1 მატრიცაზე:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

გამორიცხვის მეორე ბიჯზე გადავაადგილოთ მეორე და მესამე სტრიქონი, აგრეთვე მეორე და მესამე სვეტი, მეორე ბიჯის წამყვანი ელემენტი რომ 7 იყოს. ამისთვის $M_1P_1AQ_1$ მატრიცა მარცხნიდან გავამრავლოთ P_2 გადანაცვლებათა მატრიცაზე, ხოლო მარჯვნიდან - Q_2 გადანაცვლებათა მატრიცაზე:

$$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad P_2M_1P_1AQ_1Q_2=\begin{bmatrix}10&5&0\\0&7&3\\0&-1&5\end{bmatrix}.$$

ახლა ჩავატაროთ გამორიცხვის მეორე ბიჯი:

$$M_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1/7&1\end{bmatrix},\quad M_2P_2M_1P_1AQ_1Q_2=\begin{bmatrix}10&5&0\\0&7&3\\0&0&38/7\end{bmatrix}=U\,.$$

საბოლოოდ, გადანაცვლებათა მატრიცა იქნება

$$P=P_2P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad Q=Q_1Q_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

ხოლო თუ გავითვალისწინებთ მეორე ბიჯზე ჩატარებულ გადანაცვლებას, მაშინ

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2/5&1&0\\3/5&-1/7&1\end{bmatrix}.$$

ამრიგად, შესრულდება ტოლობა $PAQ=LU$.

ზოგადად, $U=M_{n-1}P_{n-1}\dots M_2P_2M_1P_1AQ_1Q_2\dots Q_{n-1}$.

თუ აღვნიშნავთ $M=M_{n-1}P_{n-1}\dots M_2P_2M_1P_1$, $Q=Q_1Q_2\dots Q_{n-1}$, $P=P_{n-1}\dots P_2P_1$, მაშინ $U=MAQ$.

$U=\left(MP^{-1}\right)PAQ$. რადგან $PAQ=LU$, ამიტომ $L=PM^{-1}$.

3.7. ხოლეცკის ფაქტორიზაცია

თეორემა 3.2 (ხოლეცკის ფაქტორიზაცია). ვთქვათ $A\in R^{n\times n}$, $A=A^T>0$. მაშინ არსებობს ერთადერთი ზედა სამკუთხა მატრიცა H დადებითი დიაგონალური ელემენტებით, ისეთი, რომ $A=H^TH$. H^T მატრიცის h_{ij} ელემენტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით

$$h_{11}=\sqrt{a_{11}}\,, \tag{3.8}$$

$$h_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}h_{ki}h_{kj}\right)/h_{ii},\quad i=1,\dots,n-1,\quad j>i, \tag{3.9}$$

$$h_{ii}=\left(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}h_{ki}^2\right)^{1/2},\qquad i=2,\dots,n. \tag{3.10}$$

დამტკიცება: თეორემა მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

აღვნიშნოთ ქვემატრიცა $A_i\in R^{i\times i}$. თვისება 2.13-ის თანახმად, თუ A მატრიცა სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მისი მთავარი ქვემატრიცებიც იგივე თვისებების მქონეა. ამიტომ $A_i=A_i^T>0$.

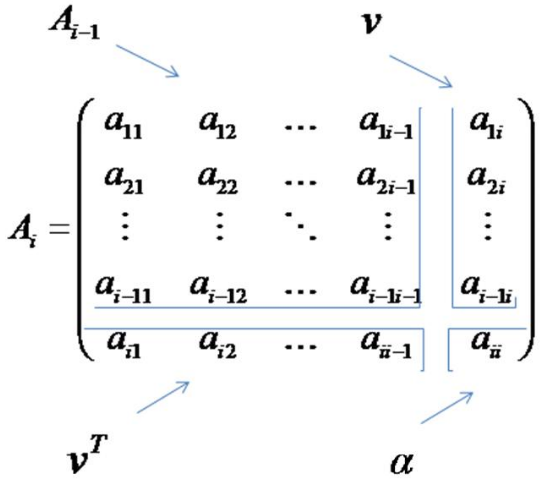
როცა i=1, თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

დავუშვათ თეორემა სრულდება (i-1)-სთვის: ე.ი. A_{i-1}-თვის არსებობს ზედა სამკუთხა მატრიცა H_{i-1} დადებითი დიაგონალური ელემენტებით, ისეთი, რომ $A_{i-1} = H_{i-1}^T H_{i-1}$. ვაჩვენოთ, რომ თეორემა სამართლიანია i-სთვის და გამოვიყვანოთ H_i^T მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელი ფორმულები.

დავშალოთ A_i შემდეგნაირად:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & v \\ v^T & \alpha \end{bmatrix},$$

სადაც $\alpha \in \Re^+$, $v^T \in \Re^{i-1}$; $v = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{i-1i})^T$, $\alpha = a_{ii}$,



ვეძებოთ A_i-ის შემდეგი სახით წარმოდგენა:

$$A_i = H_i^T H_i = \begin{bmatrix} H_{i-1}^T & 0 \\ h_i^T & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{i-1} & h_i \\ 0^T & \beta \end{bmatrix}, \qquad (3.11)$$

სადაც უცნობებია $h_i = (h_{1i}, h_{2i}, ..., h_{i-1i})^T$, $\beta = h_{ii}$.

თუ (3.11)-ში გადავამრავლებთ მატრიცებს და გავუტოლებთ A_i-ს შესაბამის წევრებს, მივიღებთ განტოლებებს: $H_{i-1}^T h_i = v$ და $h_i^T h_i + \beta^2 = \alpha$. პირველი განტოლებათა სისტემიდან h_i ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება, რადგან H_{i-1}^T არაგადაგვარებულია. რაც შეეხება β-ს, დეტერმინანტის თვისებიდან გამომდინარე,

$$0 < \det(A_i) = \det\left(H_i^T\right)\det(H_i) = \beta^2 \left(\det(H_{i-1})\right)^2,$$

ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ იგი ნამდვილი რიცხვია და $\beta = \sqrt{\alpha - h_i^T h_i}$ იქნება საძიებელი დიაგონალური ელემენტი. ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს (3.11) წარმოდგენას.

ახლა გამოვიყვანოთ H_i^T მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელი ფორმულები. ინდუქციის i=1 შემთხვევიდან უშუალოდ ვიღებთ, რომ $h_{11} = \sqrt{a_{11}}$. ზოგადი i-სთვის (3.9) ფორმულები მიიღება $H_{i-1}^T h_i = v = \left(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{i-1,i}\right)^T$ განტოლებათა სისტემის უშუალო ამოხსნის შედეგად:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12} & h_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ h_{1,i-1} & h_{2,i-1} & \cdots & h_{i-1,i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ \vdots \\ h_{i-1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{i-1i} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} & h_{1i} = a_{1i} / h_{11}, \\ & h_{2i} = (a_{2i} - h_{12} h_{1i}) / h_{22}, \\ & h_{3i} = (a_{3i} - h_{13} h_{1i} - h_{23} h_{2i}) / h_{33}, \\ & \dots \\ & h_{i-1,i} = (a_{i-1,i} - h_{1,i-1} h_{1i} - h_{2,i-1} h_{2i} \cdots - h_{i-2,i-1} h_{i-2,i}) / h_{i-1,i-1}. \end{aligned}$$

(3.10) ფორმულები კი მიიღება $\beta = \sqrt{\alpha - h_i^T h_i}$ -დან, სადაც $\alpha = a_{ii}$: $h_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki}^2 \right)^{1/2}$.

თეორემა დამტკიცებულია. ◢

$A = H^T H$ ფაქტორიზაციის არსებობისას სიმეტრიული მატრიცის მქონე $Ax = b$ სისტემის ამოხსნა დადის ორი სამკუთხა სისტემის მიმდევრობით ამოხსნაზე

$$H^T y = b \qquad \text{და} \qquad Hx = y.$$

პირველ სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} h_{11} y_1 & = b_1, \\ h_{12} y_1 + h_{22} y_2 & = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ h_{1n} y_1 + h_{2n} y_2 + \cdots + h_{nn} x_n & = b_n, \end{cases}$$

საიდანაც მიიღება დამხმარე $y_1, y_2, \dots, y_n$ უცნობების მნიშვნელობების გამოსათვლელი ფორმულები:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} h_{ji} y_j}{h_{ii}}, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{3.12}$$

მეორე სისტემიდან:

$$\begin{cases} h_{11} x_1 + h_{12} x_2 + \cdots + h_{1n} x_n = y_1, \\ \qquad h_{22} x_2 + \cdots + h_{2n} x_n = y_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad h_{nn} x_n = y_n, \end{cases}$$

მიიღება $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ უცნობების უკუთანმიმდევრობით გამოსათვლელი ფორმულები:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i-1}^{n} h_{ij} x_j}{h_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 2,1. \tag{3.13}$$

სიმეტრიული მატრიცის მქონე $Ax=b$ სისტემის ამოხსნას (3.12)–(3.13) ფორმულებით, სადაც H ზედა სამკუთხა მატრიცა განისაზღვრება (3.8)–(3.10)–დან, კვადრატულ ფესვთა მეთოდს ან ხოლეცკის სქემას უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ აღწერილი ალგორითმის განხორციელებას ესაჭიროება $\left(n^3/3\right)$ ოპერაცია და იგი მდგრადია დამრგვალების ცდომილების დაგროვების მიმართ.

3.8. თომასის ალგორითმი

განსაზღვრება 3.2. $A\in R^{n\times n}$ მატრიცას უწოდებენ ლენტურს $p+q+1$ სიგანის ლენტით, თუ $a_{ij}=0$ ყველა i,j-სთვის, რომელთათვისაც $i>j+p,\ \ j>i+q$. ასეთი მატრიცის ყველა არანულოვანი ელემენტი მოთავსებულია მთავარ დიაგონალზე, მის ქვედა - p და ზედა q რაოდენობის დიაგონალებზე. ამბობენ, რომ p არის ქვედა ლენტის სიფართე, ხოლო q - ზედა ლენტის სიფართე.

მაგალითები:

$p=0,\quad q=0$ - დიაგონალური მატრიცა
$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix};$$

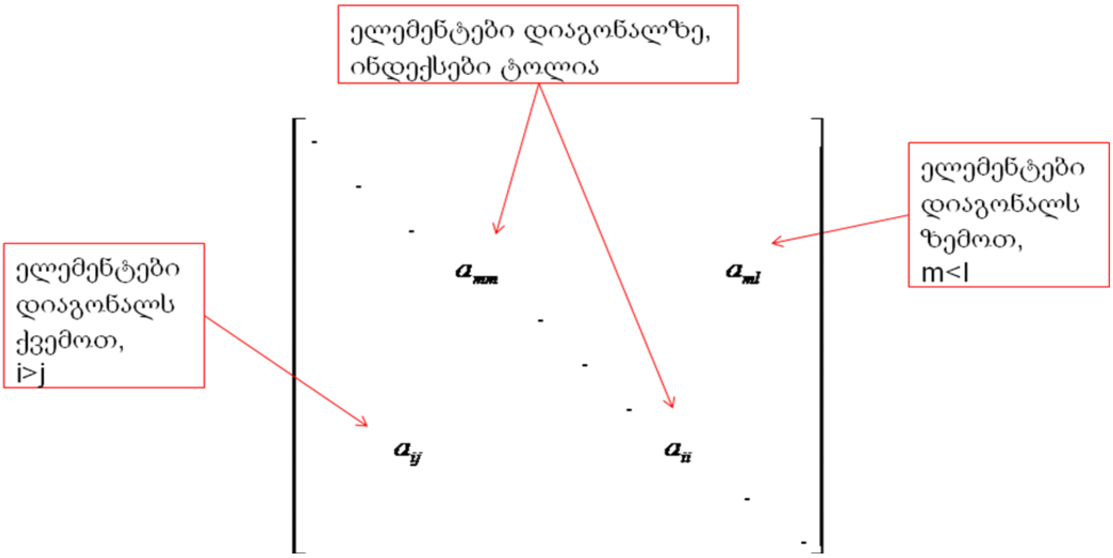
$p=0,\quad q=1$ - ზედა ორდიაგონალური მატრიცა
$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & u_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix};$$

$p=1,\quad q=0$ - ქვედა ორდიაგონალური მატრიცა
$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_n & d_n \end{bmatrix};$$

$p=1,\quad q=1$ - სამდიაგონალური მატრიცა
$$\begin{bmatrix} d_{11} & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_2 & d_{22} & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & d_{33} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{n-1n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_n & d_{nn} \end{bmatrix};$$

$p=0,\quad q>0$ - ზედა სამკუთხა მატრიცა;

$p>0,\quad q=0$ - ქვედა სამკუთხა მატრიცა.



თვისება 3.7. ვთქვათ, არსებობს *A* მატრიცის *LU* ფაქტორიზაცია. თუ *A* არის ლენტური მატრიცა ქვედა და ზედა ლენტის სიფართით *p* და *q*, მაშინ *L* მატრიცის ქვედა ლენტის სიფართეა *p*, ხოლო *U* მატრიცის ზედა ლენტის სიფართეა *q*.

დებულება 3.1 (თომასის ალგორითმი სამდიაგონალური მატრიცის ფაქტორიზაციის შესახებ). ვთქვათ მოცემულია არაგადაგვარებული *A* მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში არსებობს *A* მატრიცის ერთადერთი *LU* ფაქტორიზაცია ორდიაგონალური *L* და *U* მატრიცებით

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \qquad U=\begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

სადაც

$$\alpha_1=a_1,\quad \beta_i=\frac{b_i}{\alpha_{i-1}},\quad \alpha_i=a_i-\beta_i c_{i-1},\quad i=2,\ldots,n.$$

დამტკიცება: უნდა ვიპოვოთ α_i, β_i. მათ საპოვნელად განტოლებები იწერება მარტივად, *LU* ფაქტორიზაციის განმარტებიდან გამომდინარე. კერძოდ, ვწერთ *LU=A* , სადაც *A* მატრიცის ელემენტები ცნობილია, *L* მატრიცის ქვედა დიაგონალი $(\beta_i=?)$ უცნობია და *U* მატრიცის მატრიცის მთავარი დიაგონალი $(\alpha_i=?)$ უცნობია (იხილეთ *L* და *U* მატრიცების სტრუქტურა ზემოთ). წარმოვადგინოთ *LU* ნამრავლი კომპონენტების მიხედვით:

$$LU=\begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (\beta_2\alpha_1) & (\beta_2 c_1+\alpha_2) & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\beta_3\alpha_2) & (\beta_3 c_2+\alpha_3) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & (\beta_{n-1}c_{n-2}+\alpha_{n-1}) & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\beta_n\alpha_{n-1}) & (\beta_n c_{n-1}+\alpha_n) \end{bmatrix}$$

და $LU=A$ განტოლებიდან ამოვწეროთ α_i და β_i უცნობების გამოსათვლელი განტოლებები:

$$\alpha_1=a_1,$$
$$\beta_i\alpha_{i-1}=b_i,\quad \beta_i c_{i-1}+\alpha_i=a_i,\quad i=2,\dots,n.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\alpha_1=a_1,\quad \beta_i=\frac{b_i}{\alpha_{i-1}},\quad \alpha_i=a_i-\beta_i c_{i-1},\quad i=2,\dots,n\ .\ ◢$$

დებულება 3.2. თომასის ალგორითმით შეიძლება ამოვხსნათ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა სამდიაგონალური მატრიცით

$$(Ly=f)\qquad y_1=f_1,\quad y_i=f_i-\beta_i y_{i-1},\quad i=2,\dots,n\ ,$$
$$(Ux=y)\qquad x_n=\frac{y_n}{\alpha_n},\quad x_i=(y_i-c_i x_{i+1})/\alpha_i\,,\quad i=n-1,\dots,1.$$

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში ამოცანა დადის ორი ორდიაგონალური მატრიცის მქონე სისტემის ამოხსნაზე $(Ax=f\ \Leftrightarrow\ LUx=L(Ux)=Ly=f)$:

$$Ly=f\quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ fn \end{bmatrix}$$

და

$$Ux=y\quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

საიდანაც ცხადი სახით შეიძლება ამოიწეროს უცნობთა გამოსათვლელი ფორმულები:

$$y_1=f_1,\quad y_i=f_i-\beta_i y_{i-1},\quad i=2,\dots,n$$
$$x_n=\frac{y_n}{\alpha_n},\quad x_i=(y_i-c_i x_{i+1})/\alpha_i\,,\quad i=n-1,\dots,1\ ◢$$

თომასის ალგორითმისთვის საჭირო ოპერაციათა რაოდენობა n-განზომილებიანი სისტემის შემთხვევაში:

არითმეტიკულ ოპერაციათა რაოდენობა	-	$O(n)$
მათ შორის:		
მატრიცის ფაქტორიზაციისთვის	-	$3(n$-$1)$
ორ სამდიაგონალურ მატრიცაში ჩასმისთვის	-	$5n$-4
სულ:		$8n$-7

გავიხსენოთ, რომ გაუსის მეთოდისთვის საჭირო ოპერაციათა რაოდენობაა $O(n^3)$.

3.9. გადადენის მეთოდი

მოცემულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა სამდიაგონალური მატრიცით

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \ , \qquad (3.14)$$

$$y_0 = k_1 y_1 + m_1, \quad y_n = k_2 y_{n-1} + m_2 \ . \qquad (3.15)$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ სახით:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1, \qquad (3.16)$$

სადაც α_{i+1} და β_{i+1} ჯერჯერობით განუზღვრელი კოეფიციენტებია.

ჩავსვათ $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ (3.14) განტოლებაში

$$(a_i\alpha_i - c_i)y_i + b_i y_{i+1} + a_i\beta_i = -f_i \quad \Rightarrow \quad y_i = y_{i+1} b_i/(c_i - a_i\alpha_i) + (f_i + a_i\beta_i)/(c_i - a_i\alpha_i) \ .$$

შევადაროთ მიღებული იგივეობა (3.16)-ს. გვექნება:

$$\alpha_{i+1} = b_i/(c_i - a_i\alpha_i), \qquad \beta_{i+1} = (f_i + a_i\beta_i)/(c_i - a_i\alpha_i), \quad i = 1,2,\ldots,n-1. \qquad (3.17)$$

α_1 და β_1-ის განსაზღვრისთვის გამოვიყენოთ (3.15) პირობა i=0-სთვის. ამრიგად

$$(3.15),\ (3.16) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = k_1, \quad \beta_1 = m_1 .$$

ვიცით, რა α_1 და β_1, ვიპოვით ყველა α_i და β_i-ს, i=2,3,..,n. შემდეგ (3.16) ფორმულიდან გამოითვლება y_i-ები (i+1)-დან i-ზე გადასვლით. ამ გამოთვლების დაწყებისთვის მოცემული უნდა იყოს y_n . განვსაზღვროთ y_n (3.15) პირობიდან და (3.16) პირობიდან, როცა i =(n-1)-ს:

$$y_n = k_2 y_{n-1} + m_2 \ , \quad y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \quad \Rightarrow \quad y_n = (k_2\beta_n + m_2)/(1 - k_2\alpha_n).$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება გადადენის მეთოდის შემდეგი ფორმულები:

$$\alpha_{i+1} = b_i/(c_i - a_i\alpha_i), \qquad i = 1,2,\ldots,n-1, \qquad \alpha_1 = k_1,$$

$$\beta_{i+1} = (f_i + a_i\beta_i)/(c_i - a_i\alpha_i), \qquad i = 1,2,\ldots,n-1, \qquad \beta_1 = m_1,$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 2,1,0, \qquad y_n = (k_2\beta_n + m_2)/(1 - k_2\alpha_n).$$

თეორემა 3.3. ვთქვათ, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემისთვის სამდიაგონალური მატრიცით შესრულებულია პირობები:

$$a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad |k_1| < 1, \quad |k_2| < 1 \ ,$$

მაშინ $|\alpha_i| < 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$.

დამტკიცება: მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ $|\alpha_i| < 1$. ცხადია, $|\alpha_1| = |k_1| < 1$.

დავუშვათ $|\alpha_j| < 1$ და ვაჩვენოთ, რომ $|\alpha_{j+1}| < 1$.

$$|c_j - \alpha_j a_j| \geq \left||c_j| - |\alpha_j||a_j|\right| > \left||c_j| - |a_j|\right| \geq |b_j| > 0 \quad \Rightarrow \quad |c_j - \alpha_j a_j| > |b_j| \quad \Rightarrow$$

$$|\alpha_{j+1}| = |b_j| / |c_j - a_j\alpha_j| < 1. \ ◢$$

შედეგი 1. თეორემაში აღწერილი სისტემის ამოსახსნელად შესაძლებელია გადადენის მეთოდის გამოყენება.

დამტკიცება: გადადენის მეთოდის გამოყენება შეიძლება, თუ სათვლელ ფორმულებში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისგან, ე.ი. $1 - k_2\alpha_n \neq 0, \quad c_i - a_i\alpha_i \neq 0$.

$$1 - k_2\alpha_n \neq 0, \qquad \text{რადგან} \ |k_2| < 1, \quad |\alpha_n| < 1 .$$

თეორემის დამტკიცებისას ვაჩვენეთ, რომ $\left|c_j - \alpha_j a_j\right| > \left|b_j\right|$, რაც თეორემის $b_j \neq 0$ პირობის გათვალისწინებით, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ $c_j - \alpha_j a_j \neq 0$. ◢

შედეგი 2. გადადენის მეთოდში ამონახსნის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულების გამოყენებისას ცდომილება მცირდება.

დამტკიცება: ავღნიშნოთ ზუსტი ამონახსნი y_{i+1}-ით, ხოლო შესაბამისი ცდომილება δ_{i+1}-ით. გადადენის მეთოდის თანახმად, ამონახსნის j-ური კომპონენტი გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha_{j+1}\left(y_{j+1} + \delta_{j+1}\right) + \beta_{j+1} = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1} + \alpha_{j+1}\delta_{j+1} = y_j + \delta_j,$$

სადაც $\delta_i = \alpha_{i+1}\delta_{i+1}$, $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$. იმის გამო, რომ $\left|\alpha_{j+1}\right| < 1$, გვაქვს: $\left|\delta_i\right| = \left|\alpha_{i+1}\delta_{i+1}\right| < \left|\delta_{i+1}\right|$, ე.ი. რეკურენტული ფორმულების გამოყენებისას ცდომილება მცირდება. ◢

3.10. შერმან-მორისონის ფორმულა

ვთქვათ ცნობილია A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ან ისეთი მეთოდი, რომ A მატრიცის შებრუნება მარტივია და დიდ დანახარჯს არ მოითხოვს. შესაძლებელია თუ არა ამ ფაქტის გამოყენება იმისთვის, რომ ავაგოთ ეფექტური მეთოდი ისეთი მატრიცის შებრუნებული მატრიცის საპოვნელად, რომელიც A მატრიცის მოდიფიკაციით მიიღება? ერთ-ერთ კერძო შემთხვევაში ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შერმან-მორისონის ფორმულა.

ვთქვათ, ამოიხსნა რაიმე კონკრეტული წრფივ განტოლებათა $Ax = b$ სისტემა. შემდეგ აღმოჩნდა, რომ დასაზუსტებელია მატრიცის რამოდენიმე ელემენტი, ან კიდევ ცნობილი გახდა ახალი მონაცემები. მსგავსი სიტუაცია, ჩვეულებრივ, ტიპიურია ექსპერიმენტების დამუშავებისას. ამ დროს მუდმივად ხდება ახალი მონაცემების გენერირება და მოდელის განხილვა, რათა მასში აისახოს ახალი ინფორმაცია. ცხადია, ახალი მონაცემების მიღებისას, ყოველ ჯერზე შეიძლება ხელახლა ამოიხსნას წრფივ გატოლებათა სისტემა, თუმცა ეს გზა დაკავშირებულია ზედმეტი გამოთვლების ჩატარებასთან. თურმე შესაძლებელიაახალი ამოახსენის აგება გაცილებით ნაკლები დროის განმავლობაში.

ვიდრე შესაბამისი თეორემის ფორმულირებაზე გადავიდოდეთ გავიხსენოთ, რომ

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \quad \Rightarrow \quad (I + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B^k$$

თეორემა 3.4 (შერმან-მორისონის ფორმულა). ვთქვათ მოცემულია A და A^{-1} მატრიცები, u და v ვექტორები ისეთი, რომ არსებობს $A + uv^T$ მატრიცის შებრუნებული; მაშინ სამართლიანია ფორმულა

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+\lambda} A^{-1} uv^T A^{-1}, \quad \text{სადაც } \lambda = v^T A^{-1} u.$$

დამტკიცება:

$$(A + uv^T)^{-1} = (A(I + A^{-1}uv^T))^{-1} = (I + A^{-1}uv^T)^{-1} A^{-1}.$$

აღვნიშნოთ $B = A^{-1}uv^T$. B-ს ხარისხებისთვის გვექნება:

$$B^2 = A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T = A^{-1}u\left(v^T A^{-1}u\right)v^T = A^{-1}u\lambda v^T = \lambda A^{-1}uv^T = \lambda B;$$

$$B^3 = A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T = A^{-1}u\left(v^T A^{-1}u\right)\left(v^T A^{-1}u\right)v^T = A^{-1}u\lambda^2 v^T = \lambda^2 A^{-1}uv^T = \lambda^2 B;$$

....

$$B^k = \lambda^{k-1} A^{-1}uv^T = \lambda^{k-1} B.$$

ამრიგად, შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$(I+A^{-1}uv^T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B^k = I+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \lambda^{k-1}B = I-B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k = I-\frac{1}{1+\lambda}B,$$

$$(I+A^{-1}uv^T)^{-1}A^{-1}=(I-\frac{1}{1+\lambda}B)A^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\lambda}BA^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\lambda}A^{-1}uv^TA^{-1}.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი ნიშნავს, რომ თეორემა დამტკიცებულია. ◢

დებულება 3.3 (შერმან-მორისონის ფორმულის გამოყენება წრფივი სისტემის ამოსახსნელად).

$(A+uv^T)x=b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გამოითვლება ფორმულით $x=y-\frac{v^Ty}{1+v^Tz}z$, სადაც $y=A^{-1}b,\quad z=A^{-1}u$.

დამტკიცება: განმარტების თანახმად $\lambda=v^TA^{-1}u=v^Tz$.

$$x=(A+uv^T)^{-1}b=(A^{-1}-\frac{1}{1+\lambda}A^{-1}uv^TA^{-1})b=A^{-1}b-\frac{1}{1+\lambda}A^{-1}uv^TA^{-1}b=$$

$$=y-\frac{1}{1+\lambda}(A^{-1}u)v^T(A^{-1}b)=y-\frac{1}{1+\lambda}zv^Ty=y-\frac{v^Ty}{1+\lambda}z=y-\frac{v^Ty}{1+v^Tz}z.$$

განვიხილოთ შერმან-მორისონის ფორმულის გამოყენება ციკლურ სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემებისთვის. ციკლურ სამდიაგონალური მატრიცა ჩვეულებრივი სამდიაგონალური მატრიცისგან განსხვავდება მხოლოდ ორი ელემენტით. კერძოდ, ასეთ მატრიცებში ნულისაგან განსხვავებულია $(n,1)$ და $(1,n)$ ინდექსების მქონე ელემენტები და აქვს შემდეგი სახე.

$$C=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & \beta \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & b_n & c_n \end{bmatrix}$$

გავიხსენოთ, რომ სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად ეფექტურია თომასის ალგორითმის გამოყენება, რადგან მას მხოლოდ $O(n)$ არითმეტიკული ოპერაცია სჭირდება. იმისათვის, რომ შევძლოთ შერმან-მორისონის ფორმულის და თომასის ალგორითმის დაწყვილება, საჭიროა C მატრიცა წარმოვადგინოთ $A+uv^T$ სახით, სადაც A სამდიაგონალური მატრიცაა, ხოლო u და v ვექტორებია. ვთქვათ γ ნებისმიერი პარამეტრია, მაშინ u და v ვექტორები ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$u=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\\vdots\\0\\\alpha\end{pmatrix},\qquad v=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\\beta/\gamma\end{pmatrix}.$$

ტოლობიდან $C=A+uv^T \quad\Rightarrow\quad A=C-uv^T$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$A=\begin{bmatrix} a_1-\gamma & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & c_n-\alpha\beta/\gamma \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

თავი IV. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის იტერაციული მეთოდები

4.1. ზოგადი ცნებები იტერაციული მეთოდების შესახებ

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$Ax = b, \quad A \in R^{n \times n} \quad \text{და} \quad b \in R^n \; . \tag{4.1}$$

ვთქვათ, (4.1) სისტემის ამოხნახსნი არსებობს და ერთადერთია. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები ორ დიდ ჯგუფად იყოფა: პირდაპირი მეთოდები და იტერაციული მეთოდები. თეორიულად, იტერაციული მეთოდები ამონახსნს იძლევა უსასრულოდ განმეორებადი მოქმედებების ჩატარების შემდეგ. თეორიულად პირდაპირ მეთოდებს ზუსტი პასუხის მისაღებად არითმეტიკულ ოპერაციათა სასრული რაოდენობა ჭირდება, ხოლო იტერაციული მეთოდებს კი – არითმეტიკულ ოპერაციათა უსასრულო რაოდენობა. ერთი შეხედვით, თითქოს აშკარაა პირდაპირი მეთოდების უპირატესობა, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით ზუსტი ამონახსნის ნაცვლად მხოლოდ მისი გარკვეული სიზუსტის მიახლოების პოვნა საკმარისია; სწორედ ამის გამო იტერაციული მეთოდები საკმაოდ ეფექტურია და ფართოდ გამოიყენება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად.

იტერაციული მეთოდების ძირითადი იდეა მდგომარეობს $x^{(k)}$ ვექტორთა მიმდევრობის აგებაში, რომელიც კრებადია (4.1) განტოლებათა სისტემის x ამონახსნისაკენ:

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}. \tag{4.2}$$

პრაქტიკაში იტერაციული პროცესი შეწყდება მინიმალური n ბიჯის შემდეგ, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\left\| x^{(n)} - x \right\| < \varepsilon$, სადაც ε წინასწარ მოცემული მცირე რიცხვია, ხოლო || . || -- ვექტორის რაიმე ნორმაა. რადგან ზუსტი ამონახსენი უცნობია, ეს უკანასკნელი უტოლობა უნდა შეიცვალოს იტერაციული პროცესის გაჩერების უფრო მოსახერხებელი კრიტერიუმით, რომლიც შეგვიძლია ყოველ ბიჯზე გამოვთვალოთ (იხ. პუნქტი 4.13: იტერაციული მეთოდების შეჩერების კრიტერიუმები).

თავდაპირველად განვიხილოთ შემდეგი ფორმის იტერაციული მეთოდები:

$$x^{(0)} \text{ მოცემულია}, \quad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad k \geq 0\,, \tag{4.3}$$

სადაც B აღნიშნავს $n \times n$ კვადრატულ მატრიცას და **საიტერაციო მატრიცა** ეწოდება; როგორც წესი, B და f (4.1) წრფივი სისტემის A მატრიცის და b მარჯვენა მხარიდან გარკვეული გარდაქმნების შედეგად მიიღება. შევნიშნოთ, რომ სრული B მატრიცის შემთხვევაში თითოეულ იტერაციაზე საჭიროა ოპერაციათა რაოდენობა n^2 -ის რიგისაა.

განსაზღვრება 4.1. (4.3) ფორმის იტერაციულ მეთოდს ეწოდება **თავსებადი** (4.1) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან, თუ f და B ისეთია, რომ $x = Bx + f$, სადაც x (4.1) სისტემის ამონახსნია.

კრებადობის გამოკვლევისთვის შემოვიღოთ ორი მახასიათებელი. პირველი მათგანია **ცდომილება** იტერაციის k-ურ ბიჯზე

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x\; . \tag{4.4}$$

ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით საიტერაციო პროცესის კრებადობის (4.2) პირობა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს: $\lim\limits_{k \to \infty} e^{(k)} = 0$.

კრებადობის მეორე მახასიათებელია იტერაციის k-ური ბიჯზე განტოლებათა სისტემის **შეუსაბამობა:**

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}.$$

იგი გვიჩვენებს, რამდენად კარგად ან, პირიქით, ცუდად აკმაყოფილებს საიტერაციო მიმდევრობის წევრი მოცემულ განტოლებათა სისტემას. $e^{(k)}$ და $r^{(k)}$-ს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = b - A\left(e^{(k)} + x\right) = -Ae^{(k)} + b - Ax = -Ae^{(k)}.$$

$$e^{(k)} = -A^{-1}r^{(k)}.$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს შეფასებები:

$$\left\|r^{(k)}\right\| \le \|A\| \cdot \left\|e^{(k)}\right\|, \qquad \left\|e^{(k)}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|r^{(k)}\right\| .$$

მიღებული შეფასებები გვიჩვენებს, რომ ამონახსნის $e^{(k)}$ ცდომილება მიისწრაფის ნულისკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნულისკენ მიისწრაფის $r^{(k)}$ შეუსაბამობა. ეს შედეგი შესაძლებლობას გვაძლევს ვიმსჯელოთ საიტერაციო პროცესის კრებადობის ან განშლადობის შესახებ შეუსაბამობის მიხედვით, რომლის პირდაპირი გამოთვლა და, ამდენად, კონტროლირება შეგვიძლია.

4.2. იტერაციული მეთოდის კრებადობის თეორემები

თეორემა 4.1. (იტერაციული მეთოდის კრებადობის საკმარისი პირობა)

ვთქვათ

- იტერაციული მეთოდი $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad k \ge 0$, თავსებადია $Ax = b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან;
- $x^{(0)}$ საწყისი მიახლოება ნებისმიერი ვექტორია.

მაშინ ნებისმიერი თავსებადი მატრიცული ნორმისთვის $\|B\| < 1$ პირობის შესრულება უზრუნველყოფს $\left\{x^{(k)}\right\}$ მიმდევრობის კრებადობას $Ax = b$ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნისაკენ.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ცდომილების ნორმა იკრიბება ნულისკენ; ცდომილების ვექტორის გამოსახულებიდან $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ განვსაზღვროთ $x^{(k)} = x + e^{(k)}$ და ჩავსვათ იტერაციული მეთოდის ფორმულაში. მივიღებთ

$$x + e^{(k+1)} = B(x + e^{(k)}) + f, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

იტერაციული მეთოდის თავსებადობის გამო გვაქვს $x = Bx + f$. ამ გამოსახულების გათვალისწინებით გვექნება

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad e^{(0)} = x^{(0)} - x;$$

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)} = (B)^2 e^{(k-1)} = \cdots = (B)^{k+1} e^{(0)}.$$

$$e^{(k)} = (B)^k e^{(0)} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|e^{(k)}\right\| \le \|B\|^k \left\|e^{(0)}\right\|.$$

გადავიდეთ ზღვარზე ბოლო უტოლობაში და გავითვალისწინოთ, რომ $\|B\| < 1$; მივიღებთ ცდომილების ვექტორის ნულისკენ კრებადობას:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|e^{(k)}\right\| = \lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)} - x\right\| = 0 . \qquad ◢$$

თეორემა 4.2. (იტერაციული მეთოდის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა საკუთრივ ვექტორთა სრული სისტემის შემთხვევაში)

ვთქვათ

- იტერაციული მეთოდი $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad k \geq 0$, თავსებადია $Ax = b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან;
- $x^{(0)}$ საწყისი მიახლოება ნებისმიერი ვექტორია.

მაშინ $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა კრებადია $Ax = b$ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\rho(B) < 1$.

დამტკიცება. ცდომილების $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ ვექტორის გამოსახულებიდან განვსაზღვროთ $x^{(k)}$ და ჩავსვათ (4.3)-ში. მივიღებთ

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}, \quad k = 0,1,2,..., \quad e^{(0)} = x^{(0)} - x. \tag{4.5}$$

აუცილებლობა: ვთქვათ, $\{x^{(k)}\}$ ვექტორების მიმდევრობა კრებადია $x^{(0)}$ საწყისი მიახლოების ნებისმიერი შერჩევისას. ვაჩვენოთ, რომ $\rho(B) < 1$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო - ვთქვათ, $\rho(B) \geq 1$. ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\rho(B) > 1$. მაშინ არსებობს B მატრიცის ერთი მაინც საკუთრივი რიცხვი λ ისეთი, რომ $|\lambda(B)|>1$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში ისე შეიძლება შევარჩიოთ საწყისი მიახლოება $x^{(0)}$, რომ $e^{(k)}$ ცდომილება უსასრულოდ გაიზარდოს, როცა $k \to \infty$. ვთქვათ, μ არის B მატრიცის საკუთრივი ვექტორი, რომელიც შეესაბამება λ საკუთრივ რიცხვს, $|\lambda|>1$. მაშინ $B\mu = \lambda\mu$. საწყის მიახლოებად ავიღოთ ვექტორი $x^{(0)} = x + \mu$, სადაც x არის $Ax = b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი; ამ შემთხვევაში საწყისი ცდომილება იქნება $e^{(0)} = \mu$. მაშინ $Be^{(0)} = \lambda e^{(0)}, \quad B^2 e^{(0)} = B\left(Be^{(0)}\right) = B\left(\lambda e^{(0)}\right) = \lambda\left(Be^{(0)}\right) = \lambda^2 e^{(0)}$ და ა.შ. (4.5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)} = \lambda^k e^{(0)}$$

ვექტორული ნორმის ჰომოგენურობის თვისების გამო შეგვიძლია დავწეროთ $\left\|e^{(k)}\right\| = |\lambda|^k \left\|e^{(0)}\right\|$. ამ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლის შედეგად მივიღებთ $\left\|e^{(k)}\right\| \to \infty$, როცა $k \to \infty$, რადგან დაშვების თანახმად $|\lambda|>1$.

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $\rho(B) = 1$, $\left\|e^{(k)}\right\| = \left\|e^{(0)}\right\|$ და ზღვარზე გადასვლისას, როცა $k \to \infty$, საწყისი ცდომილემა არ მცირდება.

საკმარისობა: ვთქვათ, $\rho(B) < 1$. ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{k \to \infty} e^{(k)} = 0$ ნებისმიერად შერჩეული $x^{(0)}$ საწყისი მიახლოებისათვის.

დავუშვათ, რომ B მატრიცას აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი. ვთქვათ, $\lambda_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$, B მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია, ხოლო $\mu_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$ - მათი შესაბამისი წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორებია. გავშალოთ $e^{(0)} = x^{(0)} - x$ საწყისი ცდომილება $\mu_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$, ვექტორების მიხედვით:

$$e^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i \ .$$

გავამრავლოთ ეს გამოსახულება B^k -ზე და გავითვალისწინოთ, რომ μ_i საკუთრივი ვექტორია. მაშინ $B^k\mu_i = \lambda_i^k\mu_i$. მივიღებთ:

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i B^k \mu_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \mu_i \ .$$

(4.6)

თეორემის პირობის თანახმად $\rho(B) = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i| < 1$. მაშასადამე $\lambda_i^k \xrightarrow{k\to\infty} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$, ე.ი. (4.6)-ში ჯამის თითოეული წევრი მიისწრაფვის ნულისკენ და რადგან შესაკრებთა რაოდენობა სასრულია, ცდომილების ზღვარიც ნულის ტოლია, $e^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} = 0$.◢

(4.3) მეთოდი წარმოადგენს ქვემოთ მოყვანილი ზოგადი სახის იტერაციული მეთოდების კერძო შემთხვევას.

განსაზღვრება 4.2. ვთქვათ, $Ax = b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება იტერაციული მეთოდი

$$x^{(0)} = f_0(A,b),$$
$$x^{(n+1)} = f_{n+1}\left(x^{(n)}, x^{(n-1)},\ldots, x^{(n-m)}, A, b\right), \quad n \ge m,$$

სადაც f_i და $x^{(m)},\ldots,x^{(1)}$ - შესაბამისად, მოცემული ფუნქციები და ვექტორებია. თუ f_i დამოკიდებული არ არის იტერაციის i ნომერზე, მაშინ მეთოდს **სტაციონარული** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში - **არასტაციონარული.** თუ f_i წრფივად არის დამოკიდებული $x^{(0)},\ldots,x^{(m)}$ -ზე, მეთოდს **წრფივი** ეწოდება, სხვა შემთხვევაში - **არაწრფივი.**

თავსებადი იტერაციული მეთოდების აგების ზოგადი ტექნიკა ეფუძნება A მატრიცის შემდეგი ფორმის გახლეჩვას: $A = P - N$, სადაც P და N - კონკრეტული მეთოდის შესაბამისად შერჩეული მატრიცებია, ამასთან P - არაგადაგვარებულია. P მატრიცს **განმაპირობებელი** მატრიცა ეწოდება.

თუ $x^{(0)}$ მოცემულია, $x^{(k+1)}$, $k \ge 0$, შეგვიძლია გამოვთვალოთ, როგორც შემდეგი სისტემის ამონახსნი

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k \ge 0. \tag{4.7}$$

გადავწეროთ (4.7) (4.2) სახით. მივიღებთ, რომ (4.7)-ის შესაბამისი საიტერაციო მატრიცა $B = P^{-1}N$, ხოლო $f = P^{-1}b$.

(4.7) შეიძლება გადაიწეროს კიდევ ერთი განსხვავებული სახით

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1}r^{(k)}, \tag{4.8}$$

სადაც

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \tag{4.9}$$

აღნიშნავს k-ური ბიჯის **შეუსაბამობის** ვექტორს. (4.8)-დან ჩანს, რომ (k+1) მიახლოების გამოსათვლელად უნდა ამოიხსნას წრფივი სისტემა კოეფიციენტების P მატრიცით. (4.7) მეთოდს პრაქტიკული ღირებულობა რომ ჰქონდეს, ცხადია, რომ P უნდა იყოს არაგადაგვარებული და ადვილად შებრუნებადი მატრიცა.

4.3. იაკობის მეთოდი (J)[1]. იაკობის მეთოდი რელაქსაციით (JOR)

(4.1) წრფივ განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ შემდეგი ეკვივალენტური სახით:

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\,, \quad i = 1,\ldots,n.$$

ვთქვათ, A მატრიცის დიაგონალური ელემენტები არ უდრის 0-ს (თუ ეს ასე არ არის, A მატრიცის არაგადაგვარებულობის გამო, სტრიქონებისა და სვეტების გადასმით ყოველთვის შეიძლება მივაღწიოთ, რომ შესრულდეს პირობები $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,..,n.$). გავყოთ თითოეული განტოლება a_{ii}-ზე და გადავწეროთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა კიდევ ერთი ეკვივალენტური სახით:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right], \quad i = 1,\ldots,n.$$

იაკობის მეთოდი აიგება ამ უკანასკნელი ფორმულის გამოყენებით. კერძოდ, მარცხენა მხარეში მოთავსებულ უცნობებს დავუწეროთ ინდექსი k+1, ხოლო მარჯვენა მხარეში მოთავსებულ უცნობებს k. შედეგად მივიღებთ იაკობის იტერაციული მეთოდის სათვლელ ფორმულებს

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (4.10)$$

ცხადია, (4.10) ფორმულით რომ ვისარგებლოთ, საჭიროა $x^{(0)}$ საწყისი მიახლოება, რომელიც იტერაციული მეთოდების კრებადობის განმარტებიდან გამომდინარე შეიძლება შეირჩეს ნებისმიერად.

(4.7) ფორმულის აღნიშვნებში (4.10) ფორმულა შეესაბამება A მატრიცის შემდეგი სახით გახლეჩვას

$$A = P - N\,, \quad P = D, \quad N = D - A = E + F\,, \text{ ანუ } \quad A = D - (E + F),$$

სადაც D დიაგონალური მატრიცაა A მატრიცის დიაგონალური ელემენტებით, E - ქვედა სამკუთხა მატრიცაა ელემენტებით $e_{ij} = -a_{ij}$, თუ $i > j, \quad e_{ij} = 0$, თუ $i \leq j$, F - ზედა სამკუთხა მატრიცაა ელემენტებით $f_{ij} = -a_{ij}$, თუ $j > i, \quad f_{ij} = 0$, თუ $j \leq i$.

(4.7) ფორმულის აღნიშვნებში (4.10) ფორმულის შესაბამის იაკობის მეთოდის საიტერაციო მატრიცას აქვს სახე:

$$B_J = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A\,.$$

იაკობის მეთოდი ზედა რელაქსაციით (*JOR – Jacobi Over-Relaxation*) მიიღება იაკობის მეთოდის სათვლელი ფორმულების მარჯვენა მხარის და $x^{(k)}$ იტერაციული მიახლოების ω რელაქსაციის პარამეტრით გასაშუალოების შედეგად:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1,\ldots,n.\ . \qquad (4.11)$$

შესაბამის საიტერაციო მატრიცას აქვს სახე:

$$B_{J_\omega} = \omega B_J + (1-\omega)I\,. \qquad (4.12)$$

(4.8) ფორმით *JOR* მეთოდი ჩაიწერება ასე:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}r^{(k)}.$$

---

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Gustav_Jacob_Jacobi

აგებიდან გამომდინარე, იაკობის მეთოდი ზედა რელაქსაციით თავსებადია Ax=b წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან ნებისმიერი $\omega \neq 0$-სთვის და $\omega = 1$ შემთხვევაში ემთხვევა იაკობის მეთოდს.

4.4. გაუს-ზეიდელის[2] მეთოდი(GS), გაუს-ზეიდელის მეთოდი რელაქსაციით(SOR)

გაუს-ზეიდელის მეთოდში, იაკობის მეთოდისგან განსხვავებით, k+1 მიახლოების i-ური კომპონენტის გამოსათვლელად გამოიყენება (k+1) მიახლოების უკვე გამოთვლილი $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ კომპონენტების მნიშვნელობები:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.13}$$

(4.7) ფორმულის აღნიშვნებში (4.13) ფორმულა შეესაბამება A მატრიცის შემდეგი სახით გახლეჩვას:

$$P = D - E, \quad N = F,$$

ხოლო (4.7) ფორმულის აღნიშვნებში გაუს-ზეიდელის მეთოდის საიტერაციო მატრიცას აქვს სახე:

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} F.$$

იაკობის მეთოდის ანალოგიურად, გაუს-ზეიდელის მეთოდის საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ **გაუს-ზეიდელის მეთოდი რელაქსაცით** (*SOR – Successive Over-Relaxation*), რომელსაც ზედა რელაქსაციის მეთოდსაც უწოდებენ. სათვლელი ფორმულები მიიღება გაუს-ზეიდელის მეთოდის სათვლელი ფორმულების მარჯვენა მხარის და $x^{(k)}$ იტერაციული მიახლოების ω რელაქსაციის პარამეტრით გასაშუალოების შედეგად:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] + (1-\omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.14}$$

(4.14) მეთოდი ვექტორული ფორმით ჩაიწერება ასე:

$$\left(I - \omega D^{-1} E\right) x^{(k+1)} = \left[(1-\omega) I + \omega D^{-1} F\right] x^{(k)} + \omega D^{-1} b, \tag{4.15}$$

საიდანაც მარტივად შეიძლება გადავიდეთ (4.7) ფორმულაზე, რომლის შესაბამის საიტერაციო მატრიცას ექნება სახე:

$$B(\omega) = \left(I - \omega D^{-1} E\right)^{-1} \left[(1-\omega) I + \omega D^{-1} F\right].$$

თუ (4.15)-ის ორივე მხარეს გავამრავლებთ D-ზე და გავითვალისწინებთ, რომ $A = D - (E + F)$, მივიღებთ (4.8)-ის შესაბამის ფორმას *SOR* მეთოდისთვის:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} r^{(k)}.$$

ზედა რელაქსაციის მეთოდი თავსებადია $Ax = b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან ნებისმიერი $\omega \neq 0$-სთვის; $\omega = 1$ შემთხვევაში ზედა რელაქსაციის მეთოდი დაიყვანება გაუს-ზეიდელის მეთოდზე.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Philipp_Ludwig_von_Seidel

4.5. იაკობის და გაუს-ზეიდელის მეთოდების კრებადობა

თეორემა 4.3. $Ax = b$ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემისთვის იაკობის და გაუს-ზეიდელის მეთოდები კრებადია, თუ A მატრიცას აქვს მკაცრად დიაგონალური დომინირების თვისება სტრიქონების მიხედვით.

დამტკიცება (მხოლოდ იაკობის მეთოდისთვის): თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ იტერაციული მეთოდების კრებადობის საკმარისი პირობა.

თეორემის პირობის თანახმად A მატრიცას აქვს დიაგონალური დომინირების თვისება და მასასადამე $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad j \neq i, \quad i = 1, \ldots, n$; იაკობის მეთოდის საიტერაციო მატრიცას აქვს სახე $B_J = I - D^{-1}A$; აქედან მივიღებთ

$$\|B_J\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| / |a_{ii}| < 1,$$

რაც საკმარისია იაკობის მეთოდის კრებადობისთვის. ◢

თვისება 4.1. თუ A სამდიაგონალური და დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, მაშინ

$$\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J).$$

ეს ტოლობა კრებადობის თვალსაზრისით ნიშნავს, რომ გაუს-ზეიდელის მეთოდი უფრო სწრაფად იკრიბება, ვიდრე იაკობის მეთოდი.

თეორემა 4.4. თუ იაკობის მეთოდი კრებადია, მაშინ იაკობის მეთოდი რელაქსაციით კრებადია, როცა რელაქსაციის პარამეტრი მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის.

დამტკიცება: (4.12) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ რელაქსაციით იაკობის მეთოდის საიტერაციო მატრიცის - B_{J_ω}-ს საკუთრივი რიცხვებია:

$$\mu_k = \omega\lambda_k + 1 - \omega, \quad k = 1, \ldots, n,$$

სადაც λ_k წარმოადგენს იაკობის მეთოდის საიტერაციო მატრიცის - B_J-ს საკუთრივ რიცხვებს. თუ გამოვიყენებთ კომპლექსური რიცხვების წარმოდგენის ეილერის ფორმულას[3], λ_k შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით $\lambda_k = r_k e^{i\theta_k}$. იაკობის მეთოდის კრებადობის გამო ყველა λ_k მოდულით 1-ზე ნაკლებია $\Rightarrow$ $|\lambda_k| = r_k < 1$. მაშინ გვექნება

$$\mu_k = \omega r_k e^{i\theta_k} + 1 - \omega = \omega r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) + 1 - \omega,$$

$$\mu_k = (\omega r_k \cos\theta_k + 1 - \omega) + i(\omega r_k \sin\theta_k),$$

$$|\mu_k|^2 = (\omega r_k \cos\theta_k + 1 - \omega)^2 + (\omega r_k \sin\theta_k)^2,$$

$$|\mu_k|^2 = \omega^2 r_k^2(\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k) + 2\omega r_k \cos(\theta_k)(1 - \omega) + (1 - \omega)^2,$$

---

[3] ვთქვათ, $z = x + iy, \quad x, y \in R, \quad i^2 = -1$. თუ x და y-ს გამოვსახავთ $r=|z|$ მოდულისა და θ არგუმენტის $(x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta)$ საშუალებით, მაშინ z შეიძლება წარმოვადგინოთ **ეილერის** ფორმულით: $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

გეომეტრიულად, თუ სიბრტყეზე აბსცისათა ღერძზე აითვლება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, ხოლო ორდინატთა ღერძზე - წარმოსახვითი, მაშინ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება წერტილი x და y დეკარტის კოორდინატებით, ხოლო მოდული და არგუმენტი იქნება ამ წერტილის პოლარული კოორდინატები.

$$|\mu_k|^2 = \omega^2 r_k^2 + 2\omega r_k \cos(\theta_k)(1-\omega) + (1-\omega)^2 \le (\omega r_k + 1 - \omega)^2,$$

რაც 1-ზე ნაკლებია, თუ $0 < \omega \le 1$. ◢

4.6. რელაქსაციის მეთოდის სიმეტრიული ფორმა

სიმეტრიული A მატრიცის შემთხვევაშიც კი GS და SOR მეთოდებში საიტერაციო მატრიცები საზოგადოდ სიმეტრიული არ არის. შესაძლებელია ამ მეთოდების მარტივი მოდიფიკაცია ისე, რომ შედეგად მივიღოთ სიმეტრიული საიტერაციო მატრიცები.

GS და SOR მეთოდებში გამოიყენება A მატრიცის წარმოდგენა $A = D - (E + F)$, სადაც D დიაგონალური მატრიცაა, E და F მატრიცები, შესაბამისად, ზედა და ქვედა სამკუთხაა. ამ მეთოდებისთვის განმაპირობებელი P მატრიცის აგება შესაძლებელია როგორც E, ისე F მატრიცის საშუალებით, რაც, მაგალითად, SOR-ის შემთხვევაში ნიშნავს, რომ (4.15) ფორმულაში E და F მატრიცები ერთმანეთს ადგილს გაუცვლიან.

GS და SOR მეთოდების სიმეტრიზაციისთვის საკმარისია შემდეგი ალგორითმის გამოყენება: ლუწი ნომრის მქონე იტერაციისათვის მეთოდის განმაპირობებელ მატრიცაში გამოვიყენოთ E მატრიცა, ხოლო კენტი ნომრის მქონე იტერაციისათვის - F მატრიცა ან პირიქით.

განვიხილოთ გაუს-ზეიდელის მეთოდის ანალოგი, რომელიც მიიღება სათვლელ ფორმულებში E და F მატრიცების ადგილების გაცვლით. მივიღებთ:

$$(D - F)x^{(k+1)} = Ex^{(k)} + b\,.$$

ამ იტერაციულ მეთოდს ეწოდება გაუს-ზეიდელის მეთოდი უკუსვლით. მეთოდის საიტერაციო მატრიცაა $B_{GSb} = (D - F)^{-1}E$.

სიმეტრიული გაუს-ზეიდელის მეთოდის (SGS) ერთი ბიჯი მიიღება ჩვეულებრივი გაუს-ზეიდელისა და შესაბამისი უკუსვლით მეთოდის ბიჯების კომბინირების შედეგად. სიმეტრიული გაუს-ზეიდელის მეთოდის k-ურ იტერაციას აქვს სახე:

$$(D - E)x^{(k+1/2)} = Fx^{(k)} + b\,, \quad (D - F)x^{(k+1)} = Ex^{(k+1/2)} + b\,.$$

$x^{(k+1/2)}$-ის გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ:

$$x^{(k+1)} = B_{SGS}x^{(k)} + b_{SGS}\,,$$
$$B_{SGS} = (D - F)^{-1}E(D - E)^{-1}F,$$
$$b_{SGS} = (D - F)^{-1}\left[E(D - E)^{-1} + I\right]b.$$

სიმეტრიული გაუს-ზეიდელის მეთოდის განმაპირობებელი მატრიცაა:

$$P_{SGS} = (D - E)D^{-1}(D - F).$$

თვისება 4.2. თუ A მატრიცა სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ $Ax = b$ წრფივი სისტემისთვის სიმეტრიული გაუს-ზეიდელის მეთოდი არის კრებადი, ხოლო შესაბამისი საიტერაციო მატრიცა B_{SGS} არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული.

ანალოგიურად განიმარტება SOR მეთოდი უკუსვლით:

$$(D - \omega F)x^{(k+1)} = [\omega E + (1-\omega)D]x^{(k)} + \omega b\,.$$

სიმეტრიული ზედა რელაქსაციის მეთოდის (SSOR) მისაღებად მოვახდინოთ SOR და უკუსვლით SOR მეთოდების კომბინირება. მივიღებთ:

$$(D - \omega E)x^{(k+1/2)} = [(1-\omega)D + \omega F]x^{(k)} + \omega b\,,$$
$$(D - \omega F)x^{(k+1)} = [(1-\omega)D + \omega E]x^{(k+1/2)} + \omega b\,.$$

$x^{(k+1/2)}$ -ის გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ:

$$x^{(k+1)} = B_{SSOR}(\omega)x^{(k)} + b_{SSOR},$$

სადაც

$$B_{SSOR}(\omega) = (D-\omega F)^{-1}(\omega E + (1-\omega)D)(D-\omega E)^{-1}(\omega F + (1-\omega)D),$$

$$b_{SSOR} = \omega(2-\omega)(D-\omega F)^{-1}D(D-\omega E)^{-1}b.$$

სიმეტრიული ზედა რელაქსაციის მეთოდის განმაპირობებელ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$P_{SSOR}(\omega) = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)\frac{\omega}{2-\omega}D^{-1}\left(\frac{1}{\omega}D - F\right).$$

4.7. იტერაციული მეთოდები ბლოკური ფორმით

განხილული მეთოდების ბლოკური ვარიანტების აგება ტრივიალურია. ვთქვათ, A მატრიცა წარმოდგენილია $p \times p$ ბლოკური მატრიცის სახით, რომლის ქვემატრიცებია A_{ij}, $i, j = 1,2,.., p$, განზომილებით $m \times m$. შესაბამისად, $Ax = b$ განტოლებათა სისტემის x ამონახსნი და b მარჯვენა მხარის ვექტორი წარმოვადგინოთ ბლოკური სახით $x = (x_1, x_2,.., x_p)^T, b = (b_1, b_2,.., b_p)^T$, სადაც x_i, b_i, $i = 1,2,.., p$, თავის მხრივ m განზომილებიან ვექტორებს წარმოადგენს. ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით იტერაციული მეთოდების ბლოკური ვარიანტი იწერება ზუსტად ისევე, როგორც სტანდარტულ შემთხვევაში; გასათვალისწინებელია მხოლოდ ის, რომ ელემენტზე გაყოფა ჩანაცვლებულია შესაბამისი ბლოკური მატრიცის შებრუნებულზე გამრავლებით.

ზემოთქმულის გათვალისწინებით იაკობის მეთოდის ბლოკური ვერსია შემდეგია

$$A_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{p} A_{ij}x_j^{(k)}, \qquad i = 1,\ldots, p.$$

ცხადია, მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა A_{ii}, $i = 1,\ldots, p$, დიაგონალური ბლოკები არაგადაგვარებულია. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ბლოკური იაკობის მეთოდი გადაიწეროს (4.10)-ის ანალოგიური ფორმით:

$$x_i^{(k+1)} = A_{ii}^{-1}\left(b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{p} A_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,\ldots, p.$$

სტანდარტული იაკობის მეთოდი ახალი, $(k+1)$ იტერაციული მიახლოების ცხადად გამოთვლის საშუალებას იძლევა; ბლოკური იაკობის მეთოდის შემთხვევაში კი ყოველ იტერაციაზე ამოსახსნელია წრფივი სისტემები ბლოკის ტოლი განზომილებით.

ანალოგიურად აიგება ბლოკური გაუს-ზეიდელის და ბლოკური ზედა რელაქსაციის მეთოდები.

4.8. რიჩარდსონის მეთოდი[4]

განვიხილოთ რიჩარდსონის სტაციონარული მეთოდი კანონიკური ფორმით

$$P\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha} + Ax^{(k)} = b, \qquad k \geq 0, \tag{4.16}$$

---

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson

სადაც P განმაპირობებელი მატრიცაა, ხოლო α - იტერაციის პარამეტრია. მოითხოვება, რომ P არაგადაგვარებულია, ხოლო $\alpha > 0$.

ზოგად შემთხვევაში, შესაძლებელია, α რიცხვითი პარამეტრი და P მატრიცა დამოკიდებული იყოს იტერაციის k -ურ ბიჯზე. მაშინ (4.16) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$P^{(k)} \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha^{(k)}} + Ax^{(k)} = b, \qquad k \geq 0.$$

ამ შემთხვევაში იტერაციულ მეთოდს უწოდებენ არასტაციონარულს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - სტაციონარულს (ზოგად შემთხვევაში იხ. 4.2 განსაზღვრება).

რიჩარდსონის მეთოდი თავსებადია $Ax = b$ განტოლებათა სისტემასთან. მართლაც, მარტივი გარდაქმნებით შეიძლება მივიღოთ: $0 = -Ax + b \Leftrightarrow 0 = \alpha(-Ax + b) \Leftrightarrow Px = Px + \alpha(-Ax + b)$. ამ უკანასკნელის საფუძველზე შეიძლება ჩაიწეროს რეკურენტული ფორმულა: $Px^{(k+1)} = Px^{(k)} + \alpha\left(-Ax^{(k)} + b\right)$, საიდანაც მიიღება (4.16) წარმოდგენა. მეორე მხრივ, ამ დებულების ჭეშმარიტებაში შეიძლება დავრწმუნდეთ უფრო ზოგადი ხერხით: (4.16) ფორმულაში ზღვარზე გადასვლით, თუ ჩავთვლით, რომ რიჩარდსონის მეთოდით აგებული მიმდევრობა კრებადია.

(4.16) ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ ეკვივალენტური სახით:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha P^{-1}Ax^{(k)} + \alpha P^{-1}b \qquad \Rightarrow$$

$$x^{(k+1)} = \left(I - \alpha P^{-1}A\right)x^{(k)} + \alpha P^{-1}b, \tag{4.17}$$

$$x^{(k+1)} = R_\alpha x^{(k)} + \alpha P^{-1}b,$$

სადაც $R_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$ რიჩარდსონის მეთოდის საიტერაციო მატრიცაა. თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, რიჩარდსონის მეთოდი შეიძლება ჩავწეროთ კიდევ ერთი განსხვავებული, მაგრამ ეკვივალენტური სახით:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha P^{-1}r^{(k)}, \quad k \geq 0. \tag{4.18}$$

იაკობის და გაუს-ზეიდელის მეთოდები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც რიჩარდსონის მეთოდი, თუ $\alpha = 1$, $P = D$ და $P = D - E$, შესაბამისად. მაგალითად, (4.16) კანონიკური ფორმით იაკობის მეთოდი ჩაიწერება ასე:

$$D\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) + Ax^{(k)} = b, \qquad k \geq 0,$$

რომელიც შეიძლება გადავწეროთ (4.17) სახით:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left[b - (A - D)x^{(k)}\right] \qquad \Rightarrow \qquad x^{(k+1)} = D^{-1}\left[(D - A)x^{(k)} + b\right],$$

$$x^{(k+1)} = \left(I - D^{-1}A\right)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

გაუს-ზეიდელის მეთოდი (4.16) კანონიკური ფორმით ჩაიწერება ასე:

$$(D - E)\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) + Ax^{(k)} = b, \qquad k \geq 0,$$

ხოლო (4.17) სახით - შემდეგნაირად:

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}\left[(D - E - A)x^{(k)} + b\right] \qquad \Rightarrow \qquad x^{(k+1)} = \left[\left(I - (D - E)^{-1}A\right)x^{(k)} + (D - E)^{-1}b\right].$$

ანალოგიურად შეიძლება ჩავწეროთ ზედა რელაქსაციის მეთოდი (4.16) კანონიკური ფორმით:

$$(D - \omega E)\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + Ax^{(k)} = b, \qquad k \geq 0. \tag{4.19}$$

ყოველივე ზემოთქმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (4.16) ფორმულაში P მატრიცის და α პარამეტრის სათანადოდ შერჩევის ხარჯზე შეიძლება მივიღოთ $Ax = b$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის განსხვავებული იტერაციული მეთოდები. ცნობილია, რომ ეს მეთოდები, როგორც წესი, განსხვავდება კრებადობის თვალსაზრისით, იხ. მაგ. თვისება 4.1.

4.9. რიჩარდსონის მეთოდის კრებადობა, ოპტიმალური პარამეტრი

თეორემა 4.5. ვთქვათ

- P არაგადაგვარებულია,
- $P^{-1}A$ მატრიცას აქვს ნამდვილი და დადებითი საკუთრივი რიცხვები (დანომრილი კლებადობის მიხედვით): $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n > 0$.

რიჩარდსონის მეთოდი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $0 < \alpha < 2/\lambda_1$.

დამტკიცება: (4.17)–ის შესაბამისად რიჩარდსონის მეთოდის საიტერაციო მატრიცა არის $R_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$, რომლის საკუთრივი რიცხვებია $\lambda_i(R_\alpha) = 1 - \alpha\lambda_i, \quad i = 1,2,...,n$. მართლაც,
$R_\alpha e_i = \lambda_i(R_\alpha)e_i \quad \Rightarrow \quad \left(I - \alpha P^{-1}A\right)e_i = Ie_i - \alpha\left(P^{-1}Ae_i\right) = 1e_i - \alpha\lambda_i e_i = (1 - \alpha\lambda_i)e_i$.

გამოვიყენოთ იტერაციული მეთოდების კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა საიტერაციო მატრიცისთვის $R_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$. შედეგად მივიღებთ, რომ (4.16) მეთოდი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|\lambda_i(R_\alpha)| < 1, \quad i = 1,\ldots,n,$ რაც სრულდება, თუ $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. მართლაც,

$$|1 - \alpha\lambda_i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1 - \alpha\lambda_i < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < -\alpha\lambda_i < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha\lambda_i < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < 2/\lambda_i, \; i = 1,2,\ldots,n, \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha < 2/\lambda_1 . ◢$$

შევნიშნოთ, რომ R_α-ს საკუთრივი რიცხვები დამოკიდებულია α პარამეტრზე. პრაქტიკული მიზნებისთვის ძალზე მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ α პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც იტერაციულ პროცესს დასჭირდება მინიმალური რაოდენობის ბიჯი მოცემული ε სიზუსტის მისაღწევად. ეს მოხდება მაშინ, როცა $\rho(R_\alpha)$ მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას α-ს მიმართ.

დებულება 4.1. ვთქვათ

- P არაგადაგვარებულია,
- $P^{-1}A$ მატრიცას აქვს ნამდვილი და დადებითი საკუთრივი რიცხვები (დანომრილი კლებადობის მიხედვით): $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n > 0$.

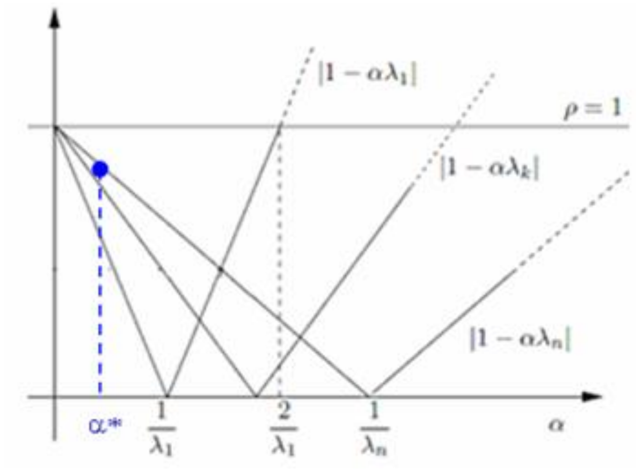
მაშინ R_α იტერაციული მატრიცის სპექტრალური რადიუსი იქნება მინიმალური, როცა $\alpha = \alpha_{opt}$,

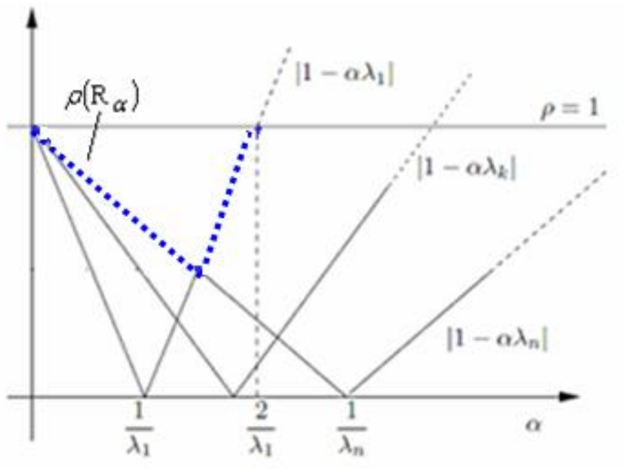
$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}, \qquad \text{ხოლო შესაბამისი} \qquad \rho_{opt} = \min_{\alpha}\left[\rho(R_\alpha)\right] = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}.$$

დამტკიცება: თეორემა 4.5–ის თანახმად, რიჩარდსონის მეთოდი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. ამიტომ განვიხილოთ R_α-ს სპექტრალური რადიუსის ცვლილება α-ს მიხედვით $[0, 2/\lambda_1]$ შუალედში,

$$\rho(R_\alpha) = \max\{|1 - \alpha\lambda_i|, \quad 1 \le i \le n\}. \tag{4.20}$$

თვალსაჩინოებისთვის ავაგოთ $y_i(\alpha) = |1 - \alpha\lambda_i|, \quad 1 \le i \le n$, ფუნქციების გრაფიკი. კონკრეტული $\alpha = \alpha^*$–თვის სპექტრალური რადიუსი ითვლება (4.20) ფორმულის შესაბამისად, რაც გრაფიკულად შემდეგნაირად გამოისახება:



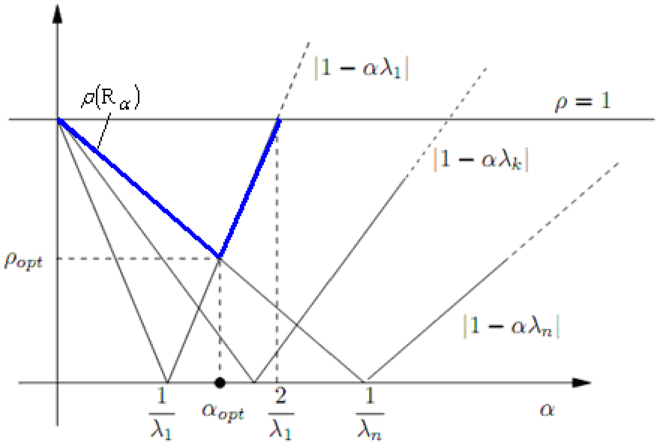


ნახაზიდან ჩანს, რომ $\rho(R_\alpha)$, როგორც α-ს ფუნქცია, იქნება მინიმალური, როცა $|1-\alpha\lambda_n|=|1-\alpha\lambda_1| \;\Rightarrow\; 1-\alpha\lambda_n=\alpha\lambda_1-1$ ანუ $\alpha=2/(\lambda_1+\lambda_n)$, რაც წარმოადგენს α_{opt}-ს:

$$\alpha_{opt}=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}.$$

α_{opt}-ის $(\alpha\lambda_1-1)$-ში ჩასმით (ან $(1-\alpha\lambda_n)$-ში ჩასმით) მივიღებთ ρ_{opt}-ის მნიშვნელობას:

$$\rho_{opt}=\min_{\alpha}\left[\rho(R_\alpha)\right]=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}\lambda_1-1=\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\quad .$$



◢

აღვნიშნოთ, რომ $0<\alpha<2/\lambda_1$ ფორმულას, რომელიც კრებადობის არის საზღვრებს გვაძლევს α-ს მიმართ, უპირველეს ყოვლისა, თეორიული მნიშვნელობა აქვს. საზოგადოდ, წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას A მატრიცის უდიდესი და უმცირესი საკუთრივი რიცხვები უცნობია, ამიტომ $\alpha=\dfrac{2}{\lambda_1}$ და $\alpha=\alpha_{opt}$ რიცხვების წინასწარ გამოთვლა შეუძლებელია, თუმცა მატრიცის სპექტრის მიახლოებით შეფასების მეთოდები არსებობს.

4.10. იტერაციული მეთოდების კრებადობა სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცის შემთხვევაში

თეორემა 4.6. რიჩარდსონის მეთოდი კრებადია, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

- A სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა;
- $\alpha > 0$;
- $P > 0.5\alpha A$.

დამტკიცება:

მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობიდან გამომდინარე უტოლობა $P > 0.5\alpha A$ ნიშნავს, რომ არსებობს მუდმივი β>0 ისეთი, რომ ნებისმიერი y ვექტორისთვის $((P-0.5\alpha A)y, y) \ge \beta(y, y)$.

აღვნიშნოთ: $J_k = (Ae^k, e^k)$; $y^k = P^{-1}Ae^k$ => $Py^k = Ae^k$ => $e^k = A^{-1}Py^k$,

სადაც $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ რიჩარდსონის მეთოდის ცდომილების ვექტორია.

რიჩარდსონის მეთოდისთვის (4.17) ფორმით ცდომილება აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$e^{k+1} = (I - \alpha P^{-1}A)e^k = e^k - \alpha y^k ;$$

$$Ae^{k+1} = (A - \alpha AP^{-1}A)e^k = Ae^k - \alpha Ay^k .$$

დამტკიცების დარჩენილი ნაწილი ჩავატაროთ ოთხ ეტაპად.

1. ვაჩვენოთ, რომ $0 \le J_{k+1} < J_k$.

პირველი უტოლობის მართებულობა ცხადია A მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობიდან გამომდინარე. მეორე უტოლობა დავამტკიცოთ არანულოვანი ცდომილების შემთხვევაში:

$$J_{k+1} = (Ae^{k+1}, e^{k+1}) = (Ae^k - \alpha Ay^k, e^k - \alpha y^k) =$$

$$= (Ae^k, e^k) - \alpha(Ay^k, e^k) - \alpha(Ae^k, y^k) + \alpha^2(Ay^k, y^k) =$$

$$= J_k - 2\alpha(Ae^k, y^k) + \alpha^2(Ay^k, y^k) = J_k - 2\alpha(Py^k, y^k) + \alpha^2(Ay^k, y^k) =$$

$$= J_k - 2\alpha((P - 0.5\alpha A)y^k, y^k) < J_k .$$

2. ვაჩვენოთ, რომ J_k მიმდევრობა არის კრებადი.

პირველ ეტაპზე დამტკიცებული უტოლობიდან გამომდინარე J_k მიმდევრობა არის მონოტონურად კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული, მაშასადამე კრებადია. აღვნიშნოთ $\lim\limits_{k\to\infty} J_k = J$.

3. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = 0$.

$$J_k - J_{k+1} = 2\alpha((P - 0.5\alpha A)y^k, y^k) \ge 2\alpha\beta(y^k, y^k)$$

ცხადია, $\lim\limits_{k\to\infty}(J_k - J_{k+1}) = 0$. მაშინ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლის შედეგად გვაქვს $\lim\limits_{k\to\infty}(y^k, y^k) = \lim\limits_{k\to\infty}\|y^k\|_2^2 = 0$.

4. ვაჩვენოთ, რომ მეთოდის ცდომილება იკრიბება ნულისკენ.

$$\|e^k\| = \|A^{-1}Py^k\| \le \|A^{-1}P\|\|y^k\| \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\|e^k\|_2 = 0 . \blacktriangleleft$$

დავამტკიცოთ (4.19) ზედა რელაქსაციის მეთოდის კრებადობა სიმეტრიული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცის შემთხვევაში.

დებულება 4.2. ზედა რელაქსაციის მეთოდი

$$(D - \omega E)\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + Ax^{(k)} = b, \qquad k \ge 0 ,$$

კრებადია, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

- A სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა

- $0<\omega<2$

დამტკიცება: კანონიკური სახით ჩაწერილი ზედა რელაქსაციის მეთოდისთვის $P=D-\omega E$. გავიხსენოთ, რომ საწყისი A მატრიცა წარმოდგება ჯამის სახით: $A=D-E-F$, სადაც D დიაგონალური მატრიცაა A მატრიცის დიაგონალური ელემენტებით, E - ქვედა სამკუთხა მატრიცაა ელემენტებით $e_{ij}=-a_{ij}$, თუ $i>j$, $e_{ij}=0$, თუ $i\le j$, ხოლო F - ზედა სამკუთხა მატრიცაა ელემენტებით $f_{ij}=-a_{ij}$, თუ $j>i$, $f_{ij}=0$, თუ $j\le i$.

სიმეტრიული A მატრიცისთვის E წარმოადგენს F-ის ტრანსპონირებულ მატრიცას, ამიტომ

$$(Ax,x)=(Dx,x)-(Ex,x)-(Fx,x)=(Dx,x)-2(Ex,x).$$

კრებადობის პირობა $P>0.5\omega A$ (იხ. თეორემა 3.10) ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს:

$$(Px,x)-0.5\omega(Ax,x)=((D-\omega E)x,x)-0.5\omega((Dx,x)-2(Ex,x))=(1-0.5\omega)(Dx,x).$$

რადგან $A>0 \Rightarrow a_{ii}>0$ (თვისება 2.15-ის თანახმად) $\Rightarrow (Dx,x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2>0$. ამიტომ $(1-0.5\omega)(Dx,x)>0$ შესრულდება, როცა $0<\omega<2$. ◢

შედეგი. თუ A სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, ზეიდელის მეთოდი ($\omega=1$) კრებადია.

4.11. განმაპირობებელი მატრიცის აგების მეთოდები

იდეალური განმაპირობებელი მატრიცა P განსაზღვრული იქნებოდა $P=A$ ფორმულის საშუალებით, რადგან იტერაციული მეთოდი ამ შემთხვევაში პასუხს მოგვცემდა ერთ იტერაციაში ერთის ტოლი იტერაციის პარამეტრის შემთხვევაში. მართლაც

$$A\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{1}+Ax^{(k)}=b,\quad k\ge 0 \qquad \Rightarrow$$

$$x^{(k+1)}-x^{(k)}+x^{(k)}=A^{-1}b \qquad \Rightarrow \qquad x^{(k+1)}=A^{-1}b, \qquad k\ge 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ ზუსტი ამონახსნი მიიღწევა ერთ იტერაციაში ნებისმიერი საწყისი მიახლოების შემთხვევაში. ცხადია, განმაპირობებელი მატრიცის $P=A$ სახით შერჩევას პრაქტიკული თვალსაზრისით ღირებულება არ გააჩნია, რადგან იტერაციის ჩასატარებლად საჭიროა A მატრიცის შებრუნებული მატრიცის პოვნა, რაც საწყისი წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ტოლფასია.

საზოგადოდ ითვლება, რომ მატრიცა არის კარგი განმაპირობებელი მატრიცა, თუ ის ადვილად შებრუნებადია (მაგალითად, ნორმალური მატრიცაა) და $P^{-1}A$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები თავმოყრილია კომპლექსური სიბრტყის საკმაოდ მცირე რეგიონში. ქვემოთ მოცემულია განმაპირობებელ მატრიცათა აგების ორი მეთოდი, რომელიც კარგ შედეგს იძლევა ზოგიერთ შემთხვევაში.

დიაგონალური განმაპირობებელი მატრიცა

სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული A მატრიცის შემთხვევაში ეფექტურია განმაპირობებელი P მატრიცის როლში A მატრიცის დიაგონალის აღება. არასიმეტრიული A მატრიცის შემთხვევაში განმაპირობებელი დიაგონალური P მატრიცის ელემენტები ხშირად განისაზღვრება ფორმულით

$$p_{ii}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2},\quad i=1,\ldots,n.$$

ანალოგიურად განიმარტება ბლოკურ-დიაგონალური განმაპირობებელი მატრიცებიც. ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ ოპტიმალური განმაპირობებელი დიაგონალური მატრიცის აგება არატრივიალური ამოცანაა.

პოლინომიალური განმაპირობებელი მატრიცა, ნეიმანის მეთოდი

განმაპირობებელი მატრიცა განიმარტება ფორმულით $P^{-1}=p(A)$, სადაც p წარმოადგენს პოლინომს, რომლის არგუმენტია A მატრიცა. პოლინომიალური განმაპირობებელი მატრიცის აგების ერთ-ერთი საინტერესო მეთოდია ნეიმანის მეთოდი. A მატრიცი გადაიწერება სახით:

$$A=D-C\quad\Rightarrow\quad A=\left(I-CD^{-1}\right)D\quad\Rightarrow$$

$$A^{-1}=D^{-1}\left(I-CD^{-1}\right)^{-1}=D^{-1}\left(I+CD^{-1}+\left(CD^{-1}\right)^2+\cdots\right)$$

განმაპირობებელი მატრიცა მიიღება მწკრივში სასრული რაოდენობის წევრების აღების შედეგად. როგორც წესი, მეთოდი ეფექტურია მხოლოდ მაშინ, როცა CD^{-1} მატრიცის სპექტრალური რადიუსი ნაკლებია ერთზე, რაც ზემოთ მოცემული მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობაა.

4.12. გრადიენტული (ვარიაციული ტიპის) იტერაციული მეთოდები

თეორემა 4.7. თუ A სიმეტრიული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, მაშინ შემდეგი დებულებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

I. y არის $Ax=b$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი;

II. y არის $\Phi(x)=0.5(Ax,x)-(b,x)$ ფუნციონალის მინიმუმის წერტილი.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ II ⇨ I

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)x_i-\sum_{i=1}^{n}x_ib_i\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)x_i\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n}x_ib_i\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i+\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right)-b_k\,,$$

$$\nabla\Phi(x)=\frac{1}{2}\left(A^Tx+Ax\right)-b=\frac{1}{2}\left(A^T+A\right)x-b=Ax-b\,,$$

სადაც ∇ ოპერატორი წარმოადგენს გრადიენტს -- ვექტორს კომპონენტებით $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$.

ექსტრემუმის წერტილის თვისების შესაბამისად $\nabla\Phi(x)=0$. ამრიგად, გვაქვს:

II ⇨ $\nabla\Phi(x)=0$ ⇨ $Ay-b=0$ ⇨ I.

ვაჩვენოთ, რომ I ⇨ II. აღვნიშნოთ $z=x-y$ ⇨ $x=y+z$.

$$\Phi(x)=\Phi(y+(x-y))=\Phi(y+z)=\frac{1}{2}(A(y+z),y+z)-(b,y+z)=$$

$$=\frac{1}{2}(Ay,y)+\frac{1}{2}(Az,z)+\frac{1}{2}(Ay,z)+\frac{1}{2}(Az,y)-(b,y)-(b,z)=$$

$$= \Phi(y) + \frac{1}{2}\|z\|_A^2 + (Ay - b, z) = \Phi(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|_A^2 .$$

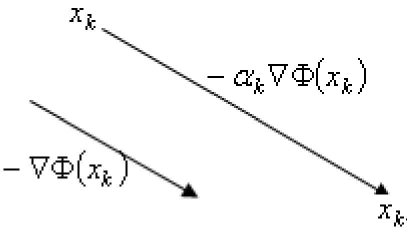
$\frac{1}{2}\|x - y\|_A^2 = \Phi(x) - \Phi(y) \;\Rightarrow\; \Phi(x) > \Phi(y)$ თუ $x \neq y$, ე.ი. y მინიმუმის წერტილია. ◢

დამტკიცებული თეორემა საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ რიჩარდსონის მეთოდის ინტერპრეტაცია, როგორც გრადიენტული მეთოდისა, რომელიც ფუნქციონალის მინიმუმის პოვნის საშუალებას იძლევა. განვიხილოთ რიჩარდსონის არასტაციონარული მეთოდი $P = I$ მატრიცითა და α_k პარამეტრით. გავითვალისწინოთ, რომ

$$\nabla\Phi(x_k) = Ax_k - b = -r_k .$$

მაშინ გვექნება: $x_{k+1} = (I - \alpha_k A)x_k + \alpha_k b = x_k + \alpha_k(b - Ax_k) = x_k + \alpha_k(-\nabla\Phi(x_k)) = x_k + \alpha_k r_k$.

ამ ფორმულაში α_k სკალარია, ხოლო ანტიგრადიენტი $-\nabla\Phi(x_k)$ განსაზღვრავს მიმართულებას, რომლის გასწვრივაც ხდება x_k მიახლოების ცვლილება x_{k+1} მიახლოებამდე მისასვლელად.



დებულება 4.3. ვთქვათ, A სიმეტრიული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, რიჩარდსონის არასტაციონალურ იტერაციულ მეთოდში ერთეულოვანი P მატრიცით $\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}$ იტერაციის პარამეტრი ოპტიმალურია იტერაციის ყოველ ბიჯზე $\Phi(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x)$ ფუნქციონალის მინიმიზაციის თვალსაზრისით.

დამტკიცება: გავიხსენოთ, რომ დებულების პირობებში რიჩარდსონის იტერაციული მეთოდის სათვლელი ფორმულა შეიძლება გადაიწეროს სახით:

$$x_{k+1} = (I - \alpha_k A)x_k + \alpha_k b = x_k + \alpha_k(b - Ax_k) = x_k + \alpha_k r_k \qquad \Rightarrow \qquad x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k .$$

უნდა ვაჩვენოთ, რომ დებულების თანახმად შერჩეული იტერაციის პარამეტრი არის ოპტიმალური ფუნქციონალის მინიმიზაციის თვალსაზრისით. ეს ნიშნავს, რომ α არგუმენტის მქონე ფუნქცია $\Phi(x_k + \alpha r_k)$ მინიმალურ მნიშვნელობას იღებს, როცა $\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}$. შემდგომი მსჯელობის გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Phi_\alpha(x_{k+1}, \alpha) = \Phi(x_k + \alpha r_k) = 0.5(A(x_k + \alpha r_k), x_k + \alpha r_k) - (b, x_k + \alpha r_k),$$

ვთქვათ, x_k არ არის განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნი; მაშინ შეუსაბამობა განსხვავებულია ნულისგან. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში ფუნქცია არის მკაცრად ამოზნექილი α მიმართ. გავიტანოთ α სკალარული ნიშნის გარეთ

$$\Phi_\alpha(x_{k+1}, \alpha) = 0.5(Ax_k + \alpha Ar_k, x_k + \alpha r_k) - (b, x_k) - \alpha(b, r_k) = 0.5(Ax_k, x_k) + 0.5\alpha(Ax_k, r_k) +$$
$$+ 0.5\alpha(Ar_k, x_k) + 0.5\alpha^2(Ar_k, r_k) - (b, x_k) - \alpha(b, r_k) = 0.5\alpha^2(Ar_k, r_k) +$$
$$+ \alpha[(Ax_k, r_k) - (b, r_k)] + 0.5(Ax_k, x_k) - (b, x_k).$$

მივიღეთ α -ს მიმართ კვადრატული ფუნქცია. ჩავწეროთ მისი პირველი რიგის წარმოებული:

$$\Phi'_\alpha = \alpha(Ar_k, r_k) + (Ax_k, r_k) - (b, r_k) = \alpha(Ar_k, r_k) + (Ax_k - b, r_k).$$

ჩავწეროთ მეორე რიგის წარმოებული

$$\Phi''_\alpha = (Ar_k, r_k).$$

მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობის გამო დავასკვნით, რომ მეორე რიგის წამოებული მეტია ნულზე. ამრიგად, ფუნქცია მკაცრად ამოზნექილია.

α შევარჩიოთ ისე, რომ ფუნქციონალის მნიშვნელობა იყოს მინიმალური. ამისთვის წარმოებული გავუტოლოთ ნულს:

$$\Phi'_\alpha = \alpha(Ar_k, r_k) - (r_k, r_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}. \blacktriangleleft$$

შენიშვნა 1: თეორემა 4.7-ის დამტკიცების პროცესში ვაჩვენეთ, რომ $\frac{1}{2}\|x-y\|_A = \Phi(x) - \Phi(y)$, სადაც y ფუნქციონალის მინიმუმის წერტილია, ხოლო x ნებისმიერია. ამ ფორმულის სამართლიანობის გამო α პარამეტრის შერჩევა დებულება 4.3-ის შესაბამისად იტერაციის ყოველ ბიჯზე უზრუნველყოფს იტერაციის პარამეტრის შერჩევას ისე, რომ მოხდეს ცდომილების მინიმიზაცია A–ნორმაში.

შენიშვნა 2. შესაძლებელია α პარამეტრი აიგოს არა ცდომილების ნორმის, არამედ შეუსაბამობის ნორმის მინიმიზაციის საფუძველზე. ამ შემთხვევაში მეთოდს ეწოდება უმცირეს შეუსაბამობათა მეთოდი.

4.13. იტერაციული მეთოდების შეჩერების კრიტერიუმები

დებულება 4.4. (აბსოლუტური ცდომილების შეფასების შესახებ)

ვთქვათ მოცემულია კრებადი იტერაციული მეთოდი $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad k \ge 0$, ისეთი, რომ $\|B\|<1$, სადაც მატრიცული ნორმა შეთანხმებულია შესაბამის ვექტორულ ნორმასთან. მაშინ აბსოლუტური ცდომილებისთვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\left\|x - x^{(k+1)}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|.$$

დამტკიცება: განვიხილოთ აბსოლუტური ცდომილების ვექტორი $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, სადაც x – სისტემის ზუსტი ამონახსნია. ცდომილების ვექტორისთვის სამართლიანია შემდეგი განტოლებები $e^{(k)} = x - x^{(k)} = x - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)} = e^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)}$,

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)},$$

სადაც B იტერაციული მეთოდის მატრიცია. დებულების პირობის შესაბამისად განვიხილოთ ვექტორული ნორმა და მასთან შეთანხმებული მატრიცული ნორმა. მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\left\|e^{(k+1)}\right\| \le \|B\|\left\|e^{(k)}\right\| \quad \Rightarrow \quad \left\|e^{(k+1)}\right\| \le \|B\|\left(\left\|e^{(k+1)}\right\| + \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|\right),$$

ამ უკანასკნელ უტოლობაში გადავიტანოთ ცდომილება მარცხენა მხარეში; იმის გათვალისწინებით რომ $\|B\|<1$, შესაძლებელია უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ სიდიდეზე 1-$\|B\|$; შედეგად აბსოლუტური ცდომილების პრაქტიკული შეფასებისთვის მივიღებთ ფორმულას:

$$\left\|x - x^{(k+1)}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|. \blacktriangleleft$$

შენიშვნა 1. პრაქტიკულ გამოთვლებში იტერაციული პროცესი უნდა შეწყდეს, როცა $\left\|e^{(k+1)}\right\| \le \varepsilon$, სადაც ε წინასწარ შერჩეული მცირე რიცხვია, მაგალითად 10^{-5}. როგორც წესი, ცდომილება უცნობია, რადგან განმარტების თანახმად ზუსტი ამონახსნის ცოდნას მოითხოვს. დამტკიცებული დებულება საშუალებას გვაძლევს ზემოდან შევაფასოთ ცდომილება ჩვენთვის უკვე ცნობილი იტერაციული მიახლოებების საშუალებით; კერძოდ იტერაციული მეთოდის შეჩერების კრიტერიუმად შეიძლება გამოყენებული იქნეს უტოლობა

$$\frac{\| B \|}{1-\| B \|}\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \le \varepsilon .$$

შენიშვნა 2. იტერაციული მეთოდის სათვლელი ფორმულიდან შეგვიძლია რეკურსიულად მივიღოთ:

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| = \| B(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \| = \| B^k (x^{(1)} - x^{(0)}) \| \le \| B \|^k \| x^{(1)} - x^{(0)} \| .$$

ამ უტოლობის გამოყენება დებულებაში დამტკიცებულ ფორმულაში გვაძლევს ცდომილების შემდეგი სახის შეფასებას:

$$\left\| x - x^{(k+1)} \right\| \le \frac{\| B \|^{k+1}}{1-\| B \|}\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|.$$

უკანასკნელი ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ იტერაციების რაოდენობის დასადგენად, რომელიც საჭიროა მოცემული $\left\|e^{(k+1)}\right\| \le \varepsilon$ სიზუსტის მისაღწევად.

შენიშვნა 3. ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია შეუსაბამობის გამოყენებაც ცდომილების შესაფასებლად $\left\|r^{(k)}\right\| \le \varepsilon$, სადაც $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$. ამ შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილება შეფასდება შემდეგნაირად:

$$\left\|x - x^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}b - x^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}(b - Ax^{(k)})\right\| = \left\|A^{-1}r^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}\right\|\left\|r^{(k)}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\varepsilon .$$

იმ შემთხვევაში თუ იტერაციული მეთოდის შეჩერების კრიტერიუმად განვიხილავთ ნორმალიზებულ შეუსაბამობას, კერძოდ :

$$\left\|r^{(k)}\right\| \Big/ \left\|b\right\| \le \varepsilon ,$$

მაშინ ფარდობითი ცდომილების შესაფასებლად მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$\frac{\left\|x - x^{(k)}\right\|}{\left\|x\right\|} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\left\|r^{(k)}\right\|}{\left\|x\right\|} = \frac{\left\|A\right\|\left\|A^{-1}\right\|\left\|r^{(k)}\right\|}{\left\|A\right\|\left\|x\right\|} = K(A)\frac{\left\|r^{(k)}\right\|}{\left\|A\right\|\left\|x\right\|} \le K(A)\frac{\left\|r^{(k)}\right\|}{\left\|b\right\|} \le \varepsilon K(A).$$

უკანასკნელი უტოლობიდან ჩანს, რომ უტოლობა $\left\|r^{(k)}\right\| \Big/ \left\|b\right\| \le \varepsilon$ შეიძლება მისაღები შეჩერების კრიტერიუმი იყოს კარგად განპირობებული მატრიცების შემთხვევაში.

თემა V. არაწრფივი განტოლებები

ვთქვათ, $f(x)$ წარმოადგენს (a,b) შუალედზე განსაზღვრულ უწყვეტ, ნამდვილი მნიშვნელობების მქონე ფუნქციას $f: I=(a,b)\subseteq R \to R$. $\alpha \in I$ რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ნული, ან

$$f(x)=0 \tag{5.1}$$

განტოლების ამონახსნი (ფესვი), თუ $f(\alpha)=0$.

თუ f წარმოადგენს ალგებრულ პოლინომს

$$f(x)\equiv P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \quad a_j\in R, \quad a_0\neq 0,$$

მაშინ (5.1) განტოლებას ეწოდება ალგებრული, ხოლო n-ს – პოლინომის ან ალგებრული განტოლების რიგი. (5.1) სახის განტოლებას, რომელიც ალგებრული არ არის, ტრანსცენდენტული ეწოდება (მაგალითად: $\ln x-\frac{1}{x}=0, \quad x-\cos x=0$).

შევნიშნოთ, რომ არაწრფივი განტოლებების ამონახსნის მიღება, ჩვეულებრივ, მხოლოდ მიახლოებით არის შესაძლებელი. ეს გამოწვეულია არა მხოლოდ იმ გარემოებით, რომ ნებისმიერ კომპიუტერზე გამოთვლები წარმოებს სასრული რაოდენობის ათწილადი ნიშნების გამოყენებით. ცნობილია ე.გალუასა და რ.აბელის კლასიკური შედეგი იმის შესახებ, რომ პოლინომებისათვის, რომელთა ხარისხიც აღემატება 4-ს, შეუძლებელია ვიპოვოთ ფესვები რადიკალებში, ე.ი. თუ გამოვიყენებთ მხოლოდ მთელ რიცხვებს, ოპერაციებს “+”, “–”, “×”, “ ÷”, მთელ ხარისხში აყვანას და მთელმაჩვენებლიანი ფესვის ამოღებას. ეს სიძნელეები კიდევ უფრო იზრდება, თუ განვიხილავთ ტრანსცენდენტულ განტოლებებს. ამ შემთხვევაში ფესვებისათვის ცხადი გამოსახულების მოძებნა, გარდა ზოგიერთი გამონაკლისი შემთხვევისა, შეუძლებელია.

5.1. ამოცანის დასმა

ვიპოვოთ $f(x)=0$ განტოლების ამონახსნი, $f: I=(a,b)\subseteq R \to R$. ამონახსნის მიახლოებით გამოსათვლელად, ჩვეულებრივ, იტერაციული მეთოდები გამოიყენება, რომლის იდეა მდგომარეობს განტოლების ფესვისკენ კრებადი $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობის აგებაში:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=\alpha .$$

განსაზღვრება 5.1. ვიტყვით, რომ იტერაციული მეთოდით გენერირებული მიმდევრობა $\{x^{(k)}\}$ კრებადია $p\geq 1$ რიგით, თუ მოიძებნება ისეთი მუდმივი C > 0, რომ

$$\frac{\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|}{\left|x^{(k)}-\alpha\right|^p}\leq C, \quad \forall k\geq k_0 .$$

სადაც k_0 სათანადოდ შერჩეული მთელი რიცხვია; იმ შემთხვევაში, როცა $p=1$, კრებადობის უზრუნველსაყოფად აუცილებელია, რომ $C<1$. C მუდმივას კრებადობის მამრავლსაც (convergence factor) უწოდებენ.

განსაზღვრება 5.2. გლობალური და ლოკალური კრებადობა

იტერაციული მეთოდს ეწოდება **გლობალურად კრებადი**, თუ იგი კრებადია ნებისმიერი საწყისი მიახლოებისთვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან.

იტერაციული მეთოდს ეწოდება **ლოკალურად კრებადი**, თუ იგი კრებადია მხოლოდ გარკვეული სიმრავლიდან აღებული საწყისი მიახლოებისათვის.

5.2. ბისექციის მეთოდი

აღვწეროთ (5.1) განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის ალგორითმი - ერთმანეთში ჩადგმული სეგმენტების I_k მიმდევრობის აგების მეთოდი, რომელიც ბისექციის მეთოდის სახელითაა ცნობილი.

დებულება 5.1. ვთქვათ, $f(a)f(b)<0, \quad f(x)\in C[a,b]$. მაშინ

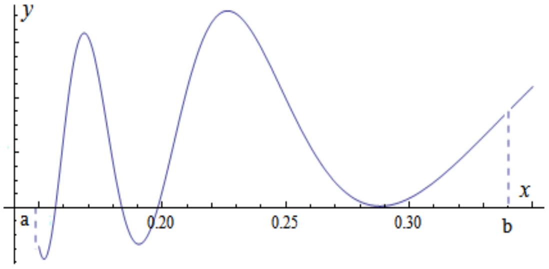
ა) ფუნქციას $(a,b)-$ზე გააჩნია ერთი ფესვი მაინც;

ბ) ბისექციის მეთოდი კრებადია რომელიმე ფესვისკენ და ცდომილებისთვის ადგილი აქვს შეფასებას

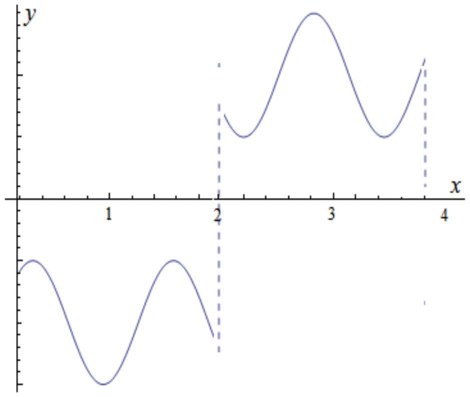
$$\left|x^{(k)}-\alpha\right|\le\frac{b-a}{2^k},\quad k\ge 0.$$

სანამ დებულების დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ, რომ დებულების პირობების შესრულება უზრუნველყოფს (a,b) შუალედზე ფესვის არსებობას, მაგრამ არ იძლევა საშუალებას დავადგინოთ ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციის ფესვების რაოდენობა. ნახ.5.1-ზე მოყვანილია ისეთი უწყვეტი ფუნქციის მაგალითი, რომელიც აკმაყოფილებს დებულების პირობებს და განსახილველ შუალედზე აქვს ოთხი განსხვავებული ფესვი.

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოთხოვნა $[a,b]$ სეგმენტის ყველა წერტილში არსებითი მოთხოვნაა. წყვეტის ერთი წერტილის არსებობის შემთხვევაშიც კი დებულება შეიძლება არ იყოს სამართლიანი. სათანადო მაგალითი მოყვანილია ნახ. 5.2-ზე,



ნახ. 5.1



ნახ. 5.2

დამტკიცება:

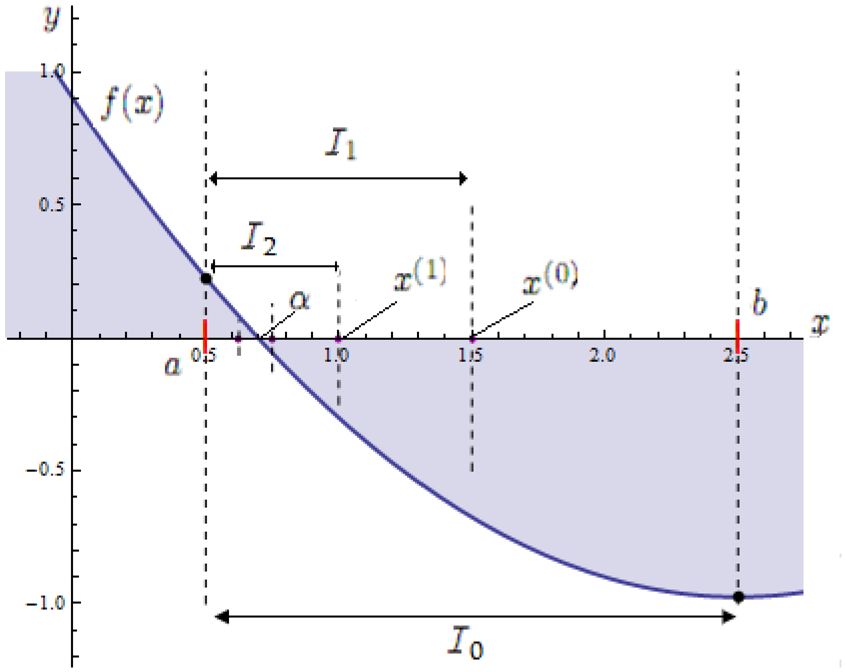
ა) განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)<0$ და $f(b)>0$. აღვნიშნოთ $a^{(0)}=a, \quad b^{(0)}=b$ და ავაგოთ მიმდევრობები: $k\ge 0$-სთვის $x^{(k)}=\left(a^{(k)}+b^{(k)}\right)/2$ არის $\left[a^{(k)},b^{(k)}\right]$ სეგმენტის შუა წერტილი, სადაც

$$a^{(k+1)}=a^{(k)},\quad b^{(k+1)}=x^{(k)},\quad \text{თუ}\ f\left(a^{(k)}\right)f\left(x^{(k)}\right)<0 \text{ და}$$

$$a^{(k+1)}=x^{(k)},\quad b^{(k+1)}=b^{(k)},\quad \text{თუ}\ f\left(x^{(k)}\right)f\left(b^{(k)}\right)<0.$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა $f\left(x^{(k)}\right)$. შესაძლებელია ორი შემთხვევა: თუ $f\left(x^{(k)}\right)=0$ პროცესი შეწყდება k ბიჯის შემდეგ (მაშინ $x^{(k)}$ წარმოადგენს (5.1) განტოლების ფესვს), ხოლო თუ $f\left(x^{(k)}\right)\ne 0$, პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ. პირველ შემთხვევაში განტოლების ფესვის პოვნის საკითხი გადაწყვეტილია, მეორე შემთხვევაში კი, დაწყებული $I_0=[a,b]$ შუალედიდან, ბისექციის მეთოდი მოგვცემს ერთმანეთში ჩადგმული $I_k=\left[a^{(k)},b^{(k)}\right]$ სეგმენტების და მათი შუა წერტილების $\left\{x^{(k)}\right\}$ მიმდევრობას, $I_k\subset I_{k-1}, \quad k\ge 1$, ე.ი.

$$a^{(k)} \le a^{(k+1)} < b^{(k+1)} \le b^{(k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \text{ ამასთან, } f(a^{(k)}) < 0, \quad f(b^{(k)}) > 0. \qquad (5.2)$$



ნახ. 5.3. ბისექციის მეთოდი

სეგმენტთა მარცხენა ბოლოების სიმრავლე (5.2)-ის ძალით ქმნის მონოტონურად არაკლებად მიმდევრობას $\{a^{(k)}\}$, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან. ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, ამ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, რომელიც აღვნიშნოთ α_1-ით:

$$\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = \alpha_1. \qquad (5.3)$$

(5.2)-ის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$\alpha_1 \le b^{(k)},\ k = 1,2,\ldots. \qquad (5.4)$$

ანალოგიურად, სეგმენტთა მარჯვენა ბოლოების სიმრავლე წარმოადგენს მონოტონურად არაზრდად შემოსაზღვრულ მიმდევრობას $\{b^{(k)}\}$, რომელსაც ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად გააჩნია ზღვარი. აღვნიშნოთ ეს ზღვარი α_2-ით:

$$\lim_{k\to\infty} b^{(k)} = \alpha_2.$$

(5.2), (5.3) და (5.4)-ის და უკანასკნელი ტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $a^{(k)} \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le b^{(k)}$, საიდანაც მივიღებთ:

$$\alpha_2 - \alpha_1 \le b^{(k)} - a^{(k)} = \frac{b-a}{2^k}.$$

ამრიგად, $\alpha_2 - \alpha_1$ სხვაობა ნაკლებია ნებისმიერ წინასწარ აღებულ დადებით რიცხვზე. ეს კი ნიშნავს, რომ $\alpha_2 - \alpha_1$=0, ე.ი. $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$. α წერტილი არის სეგმენტთა აგებული მიმდევრობის ერთადერთი საერთო წერტილი.

ვისარგებლოთ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის თვისებით და დავამტკიცოთ, რომ α წარმოადგენს $f(x)$=0 განტოლების ფესვს. ვიცით, რომ $f(a^{(k)}) < 0$ k-ს ყველა მნიშვნელობისათვის. $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო მივიღებთ

$$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(a^{(k)}) \le 0.$$

ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(b^{(k)})>0$, k-ის ყველა მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$f(\alpha)=\lim_{k\to\infty} f(b^{(k)})\geq 0.$$

უკანასკნელი ორი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(\alpha)=0$, ე.ი. α წარმოადგენს (5.1) განტოლების ფესვს. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ბ) I_k სეგმენტების სიგრძეები k-ს ზრდასთან ერთად მიისწრაფის ნულისაკენ, რადგან აგების თანახმად,

$$\left|I_k\right|=\frac{\left|I_0\right|}{2^k}=\frac{b-a}{2^k},\quad k\geq 0,$$

სადაც $\left|I_k\right|$ არის I_k შუალედის სიგრძე, ხოლო $\left|I_0\right|=b-a$.

განვიხილოთ k-ური ბიჯის ცდომილება: $e^{(k)}=x^{(k)}-\alpha$ და შევაფასოთ მისი მოდული. (5.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|e^{(k)}\right|\leq\left|I_k\right|=\frac{b-a}{2^k},\quad k\geq 0\quad\Rightarrow\quad\lim_{k\to\infty}\left|e^{(k)}\right|=0. ◢$$

ბისექციის იტერაციები შეწყდება m-ურ ბიჯზე, რომლისთვისაც $\left|x^{(m)}-\alpha\right|\leq\left|I_m\right|\leq\varepsilon$, ε - ფიქსირებული სიზუსტეა. $\left|x^{(m)}-\alpha\right|\leq\varepsilon$ შეფასების მისაღებად საკმარისია იტერაციათა რაოდენობა:

$$m\geq\log_2\left((b-a)/\varepsilon\right)=\frac{\ln\left((b-a)/\varepsilon\right)}{\ln(2)}\cong\frac{\ln\left((b-a)/\varepsilon\right)}{0.6931}.$$

ბისექციის მეთოდი გლობალურად კრებადია: იგი იკრიბება ყოველთვის, როცა $f(x)$ წარმოადგენს $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციას და $f(a)\cdot f(b)<0$. მეთოდის ნაკლად შეიძლება ჩაითვალოს მისი ნელი კრებადობა და აგრეთვე ის, რომ თუ $[a,b]$ მონაკვეთზე მდებარეობს რამდენიმე ფესვი, წინასწარ შეუძლებელია დავადგინოთ, თუ რომელი ფესვისკენ იქნება კრებადი იტერაციული პროცესი. ხშირად ბისექციის მეთოდს იყენებენ უფრო მაღალი რიგის მეთოდისთის პირველ ეტაპზე საწყისი, ნულოვანი მიახლოების შერჩევისათვის.

5.3. კვაზი–ნიუტონის მეთოდები

გავშალოთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად α-ს მიდამოში პირველი რიგის წარმოებულის ჩათვლით. მივიღებთ (5.1) ამოცანის გაწრფივებული ვერსიას:

$$f(\alpha)=0=f(x)+(\alpha-x)f'(\xi),\qquad (5.5)$$

სადაც ξ მოთავსებულია α და x წერტილებს შორის. (5.5) განტოლების საფუძველზე შეიძლება ავაგოთ იტერაციული პროცესი: ყოველი k-სთვის და ცნობილი $x^{(k)}$-სთვის $x^{(k+1)}$ განვსაზღვროთ განტოლებიდან: $f\left(x^{(k)}\right)+\left(x^{(k+1)}-x^{(k)}\right)q_k=0$, სადაც q_k წარმოადგენს $f'(x^{(k)})$-ს რაიმე აპროქსიმაციას. ამ მეთოდში $f(x)$ ფუნქცია იცვლება $\left(x^{(k)},f\left(x^{(k)}\right)\right)$ წერტილზე გამავალი q_k დახრილობის მქონე წრფით და ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად აიღება ამ წრფის გადაკვეთის წერტილი x-ღერძთან:

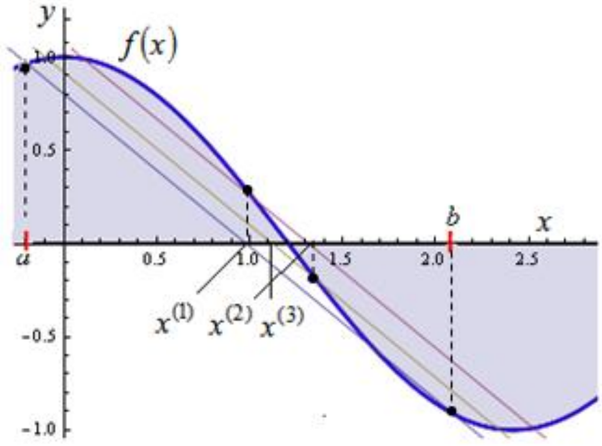
$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-q_k^{-1}f\left(x^{(k)}\right),\quad\forall k\geq 0.$$

q_k -ს შერჩევის მიხედვით მივიღებთ სხვადასხვა მეთოდს. ამ ტიპის მეთოდებს ხშირად კვაზი–ნიუტონის მეთოდებს უწოდებენ.

განვიხილოთ q_k -ს შერჩევის ოთხი კერძო შემთხვევა.

ქორდების მეთოდი. $(k+1)$-ურ იტერაციაზე $y = f(x)$ ფუნქცია იცვლება $\left(x^{(k)}, f\left(x^{(k)}\right)\right)$ წერტილზე გამავალი წრფით, რომლიც პარალელურია $(a, f(a))$ და $(b, f(b))$ წერტილებზე გავლებული წრფისა:

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall k \geq 0, \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f\left(x^{(k)}\right), \quad \forall k \geq 0.$$

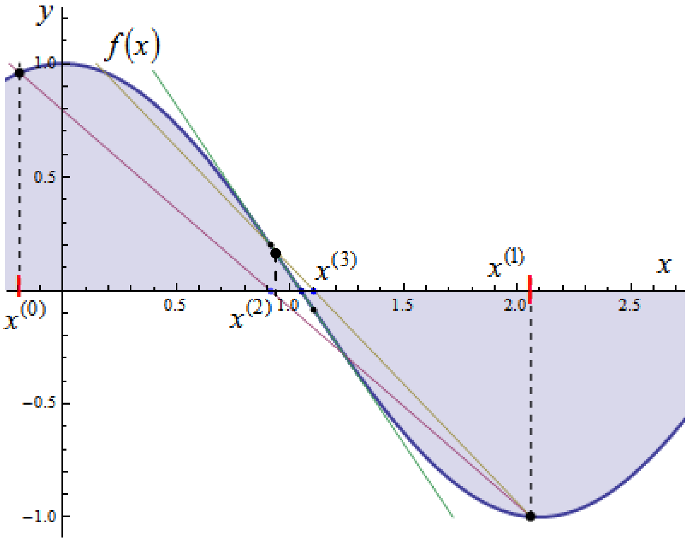


ნახ. 5.4. ქორდების მეთოდი

მკვეთთა მეთოდი. $(k+1)$-ურ იტერაციაზე $y = f(x)$ ფუნქცია იცვლება წრფით, რომელიც გაივლება $\left(x^{(k)}, f\left(x^{(k)}\right)\right)$ და $\left(x^{(k-1)}, f\left(x^{(k-1)}\right)\right)$ წერტილებზე:

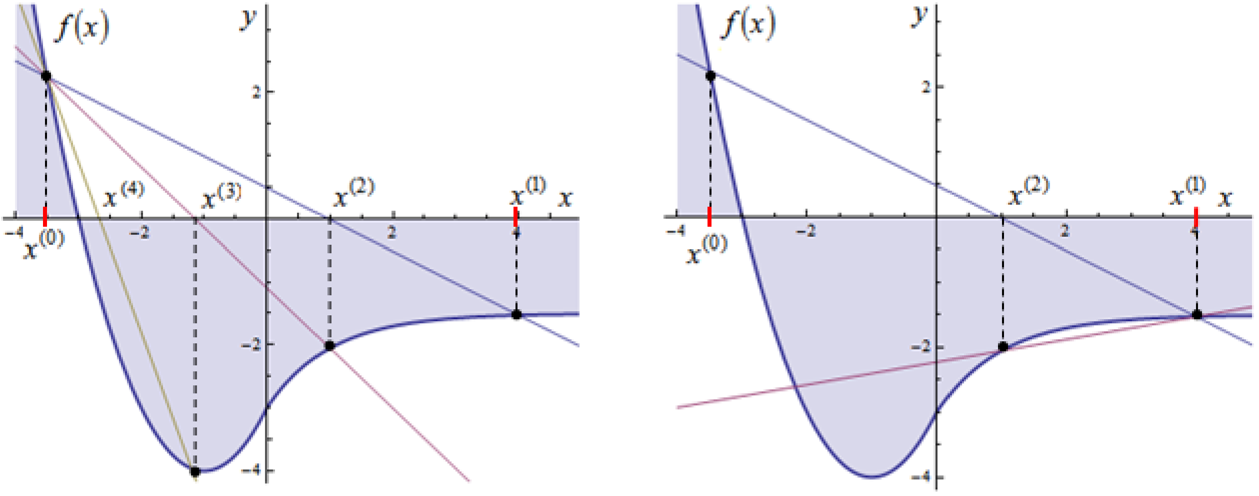
$$q_k = q = \frac{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}, \quad \forall k \geq 1,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} f\left(x^{(k)}\right), \quad \forall k \geq 1.$$



ნახ. 5.5. მკვეთთა მეთოდი

Regula falsi. (k+1)-ურ იტერაციაზე $y=f(x)$ ფუნქცია იცვლება წრფით, რომელიც გაივლება $\left(x^{(k)}, f\left(x^{(k)}\right)\right)$ და $\left(x^{(i)}, f\left(x^{(i)}\right)\right)$ წერტილებზე, სადაც $x^{(i)}$, $i<k$, აირჩევა, როგორც მაქსიმალური ინდექსის მქონე იმ წინა მიახლოებებს შორის, რომელთათვისაც სრულდება პირობა: $f\left(x^{(i)}\right)\cdot f\left(x^{(k)}\right)<0$. ცხადია, საწყისი მიახლოებებისთვის $f\left(x^{(0)}\right)\cdot f\left(x^{(1)}\right)<0$.

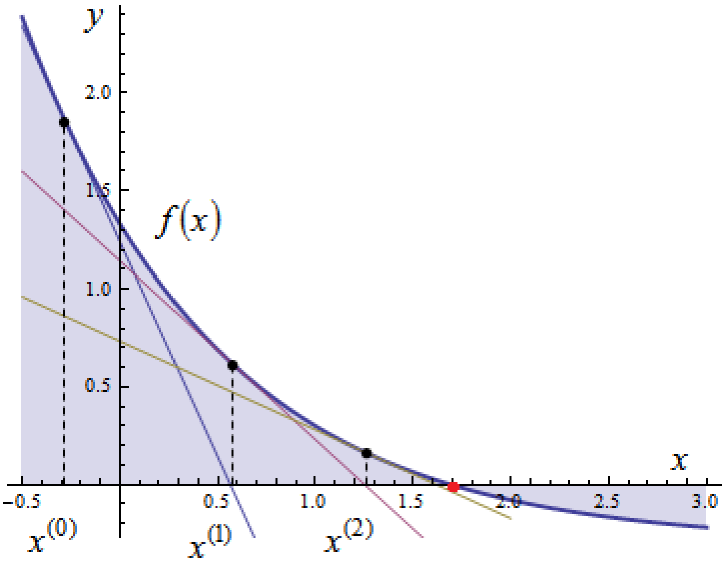


ნახ. 5.6. მეთოდი Regula falsi (მარცხნივ) და მკვეთთა მეთოდი (მარჯვნივ). ნახაზზე მოცემული ფუნქციისთვის და ერთი და იმავე საწყისი მიახლოებებისთვის მეთოდი Regula falsi კრებადია, ხოლო ქორდათა მეთოდი განშლადია.

ნიუტონის მეთოდი. (k+1)-ურ იტერაციაზე $y=f(x)$ ფუნქცია იცვლება $\left(x^{(k)}, f\left(x^{(k)}\right)\right)$ წერტილზე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებული მხებით:

$$q_k = f'\left(x^{(k)}\right), \quad \forall k \ge 0,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}, \quad \forall k \ge 0.$$



ნახ. 5.5. ნიუტონის ანუ მხებთა მეთოდი

5.4. მარტივი იტერაციის მეთოდი

კვლავ განვიხილოთ განტოლება $f(x)=0$, $x\in[a,b]$. იგი ყოველთვის შეიძლება გადაიწეროს ეკვივალენტური განტოლების სახით (ეკვივალენტური ნიშნავს, რომ $[a,b]$ მონაკვეთზე ამ განტოლებებს ერთი და იგივე ამონახსნები გააჩნიათ):

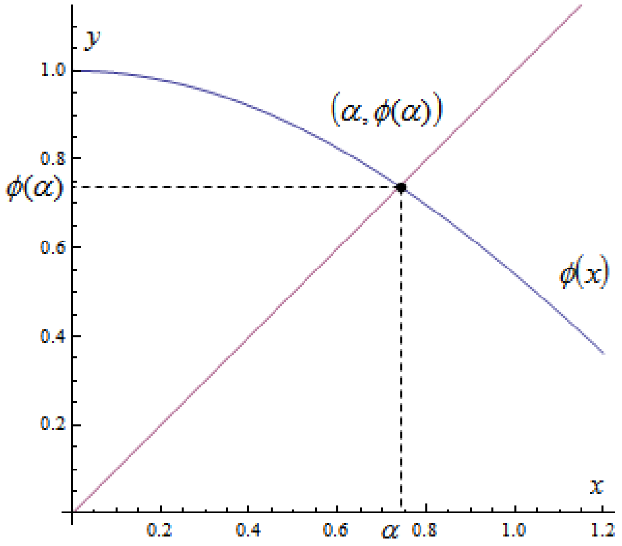
$$x=\phi(x)\,. \tag{5.6}$$

ამ შემთხვევაში $\alpha=\phi(\alpha)$, სადაც α წარმოადგენს $f(x)=0$ განტოლების ფესვს. ამრიგად, $f(x)=0$ განტოლების ფესვის პოვნა დადის ϕ ასახვის უძრავი წერტილის პოვნაზე

განსაზღვრება 5.3. $\phi:R_1\to R_1$ ასახვის **უძრავი წერტილი** ეწოდება α წერტილს, თუ იგი თავის თავში აისახება ϕ ასახვის საშუალებით.

უძრავი წერტილი წარმოადგენს $x=\phi(x)$ განტოლების ამონახსნს.

გეომეტრიულად, $\phi(x)$ ფუნქციის უძრავი წერტილები წარმოადგენს $y=\phi(x)$ მრუდისა და $y=x$ წრფის გადაკვეთის წერტილებს:



ნახ. 5.8. $\phi(x)$ ფუნქციის უძრავი წერტილი

თუ მოცემულია საწყისი $x^{(0)}\in(a,b)$ მნიშვნელობა, (5.6) ტოლობიდან გამომდინარე, შეიძლება ავაგოთ $\{x^{(k)}\}$ რიცხვითი მიმდევრობა შემდეგი წესით:

$$x^{(k+1)}=\phi(x^{(k)}),\ \ k\geq 0\,. \tag{5.7}$$

ცხადია, საწყისი მიახლოება და $\phi(x)$ ფუნქცია ისე უნდა შეირჩეს, რომ (5.7) ფორმულა კორექტული იყოს, ანუ $x^{(k)}, k>0$, რიცხვები ეკუთვნოდეს $\phi(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, თუ $x^{(0)}$ ამ არიდანაა და, როცა $k\to\infty$, $\{x^{(k)}\}$ მიმდევრობა $x=\phi(x)$ განტოლების ფესვისკენ იკრიბებოდეს.

მარტივი იტერაციის მეთოდი არაწრფივ განტოლებათა სისტემისთვის

არაწრფივ განტოლებათა სისტემა საზოგადოდ შემდეგი სახით იწერება:

$$f(x)=0,\ f:R^N\to R^N,\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^T,\ f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_N(x))^T\,. \tag{5.8}$$

ისევე, როგორც სკალარული განტოლების შემთხვევაში, (5.8) შეიძლება გადაიწეროს ეკვივალენტური სახით

$$x = \phi(x), \quad \phi : R^N \to R^N, \quad \phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_N(x))^T,$$

რაც საშუალებას გვაძლევს მარტივი იტერაციის მეთოდი არაწრფივ განტოლებათა სისტემისთვის ჩავწეროთ ერთი განტოლებისთვის მარტივი იტერაციის მეთოდის ანალოგიური ფორმულით:

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0,1,\cdots$$

მარტივი იტერაციის მეთოდის კრებადობა

თეორემა 5.1 (დაშვება უძრავი წერტილის არსებობის შესახებ)

ვთქვათ, $\phi : R^N \to R^N$ და არსებობს ისეთი წერტილი α, რომ $\alpha = \phi(\alpha)$. ვთქვათ, α წერტილის რაიმე δ მიდამოში, $S_\delta(\alpha) = \{x : \|x - \alpha\| < \delta\}$, $\delta > 0$, $\phi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \le L\|x - y\|, \; 0 < L < 1, \text{ ნებისმიერი } \; x, y \in S_\delta(\alpha) \text{- სთვის.} \qquad (5.9)$$

მაშინ ნებისმიერი $x^{(0)} \in S_\delta(\alpha)$-სთვის მარტივი იტერაციის მეთოდით აგებული მიახლოებებისთვის სამართლიანია:

(a) $x^{(k)} \in S_\delta(\alpha), \quad k = 1,2,3,\ldots$

(b) $\left\|x^{(k+1)} - \alpha\right\| \le L\left\|x^{(k)} - \alpha\right\| \le L^{k+1}\left\|x^{(0)} - \alpha\right\|.$

დამტკიცება: მსჯელობა ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციით. ვაჩვენოთ, რომ $x^{(1)} \in S_\delta(\alpha)$:

$$\left\|x^{(1)} - \alpha\right\| = \left\|\phi\left(x^{(0)}\right) - \phi(\alpha)\right\| \le L\left\|x^{(0)} - \alpha\right\| < \delta$$

ე.ი. (a) და (b) შესრულებულია, როდესაც $k = 1$. ვთქვათ, (a) და (b) სამართლიანია, როცა $k = 1,2,\ldots,k_0 - 1$. დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა $k = k_0$-სთვის. გვექნება:

$$\left\|x^{(k)} - \alpha\right\| = \left\|\phi\left(x^{(k-1)}\right) - \phi(\alpha)\right\| \le L\left\|x^{(k-1)} - \alpha\right\| \le \cdots \le L^k\left\|x^{(0)} - \alpha\right\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \in S_\delta(\alpha).$$

თეორემა დამტკიცებულია.◢

თეორემა 5.2 (საწყისი მიახლოების შერჩევა)

ვთქვათ, $\phi : R^N \to R^N$ და მოიძებნება ისეთი $x^{(0)}$ წერტილი, რომ

(a) $\|\phi(x) - \phi(y)\| \le L\|x - y\|$, $0 < L < 1$, ყველა x,y-სთვის, $x, y \in S_\delta\left(x^{(0)}\right) = \left\{x : \left\|x - x^{(0)}\right\| \le \delta\right\}$, $\delta > 0$,

(b) $\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| = \left\|\phi\left(x^{(0)}\right) - x^{(0)}\right\| \le (1 - L)\delta < L$ ნებისმიერი $x, y \in \Delta$ - სთვის.

მაშინ მარტივი იტერაციის მეთოდით აგებული მიახლოებებისთვის სამართლიანია:

(1) ყველა $x^{(k)} \in S_\delta\left(\mathrm{x}^{(0)}\right), \quad k = 1,2,3,\ldots;$ (5.10)

(2) ϕ-ს აქვს უძრავი წერტილი α, $\alpha = \phi(\alpha)$ და

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha; \qquad (5.11)$$

(3) უძრავი წერტილი α ერთადერთია;

(4) სამართლიანია შეფასებები

$$\left\|x^{(k+1)} - \alpha\right\| \le L\left\|x^{(k)} - \alpha\right\|, \qquad \left\|x^{(k)} - \alpha\right\| \le \frac{L^k}{1 - L}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|. \qquad (5.12)$$

დამტკიცება: (5.10) დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით. (b)-დან გამომდინარეობს, რომ $x^{(1)} \in S_\delta\left(x^{(0)}\right)$. ე.ი. (5.10) შესრულებულია, როდესაც $k=1$. ვთქვათ, (5.10) სამართლიანია, როცა $k=1,2,\ldots,k_0-1$. დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა $k=k_0$-სთვის:

$$x^{(k)}-x^{(0)}=\left(x^{(k)}-x^{(k-1)}\right)+\left(x^{(k-1)}-x^{(k-2)}\right)+\cdots+\left(x^{(2)}-x^{(1)}\right)+\left(x^{(1)}-x^{(0)}\right).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|=\left\|\phi\left(x^{(k-1)}\right)-\phi\left(x^{(k-2)}\right)\right\|\le L\left\|x^{(k-1)}-x^{(k-2)}\right\|\le\cdots\le L^{k-1}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|,\quad k=1,2,\ldots,k_0,$$

ე.ი.

$$\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\le L^{k-1}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|,\quad k=1,2,\ldots,k_0, \tag{5.13}$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left\|x^{(k)}-x^{(0)}\right\|\le\left(L^{k-1}+L^{k-2}+\ldots+L+1\right)\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|\le$$
$$\le\left(L^{k-1}+L^{k-2}+\ldots+L+1\right)(1-L)\delta=\left(1-L^k\right)\delta<\delta,$$

ე.ი. $\left\|x^{(k)}-x^{(0)}\right\|<\delta$, რაც ნიშნავს, რომ $x^{(k)}\in S_\delta\left(x^{(0)}\right)$.

ამრიგად, (5.10) დამტკიცებულია.

(5.11)–ის დასამტკიცებლად ავიღოთ m>1 და ვაჩვენოთ, რომ (5.7) იტერაციული მეთოდით აგებული მიმდევრობა კოშის მიმდევრობაა[1].

$$x^{(k+m)}-x^{(k)}=\left(x^{(k+m)}-x^{(k+m-1)}\right)+\left(x^{(k+m-1)}-x^{(k+m-2)}\right)+\cdots+$$
$$+\left(x^{(k+2)}-x^{(k+1)}\right)+\left(x^{(k+1)}-x^{(k)}\right).$$

თუ ვისარგებლებთ (5.13) შეფასებითა და (b)-პირობით, მივიღებთ:

$$\left\|x^{(k+m)}-x^{(k)}\right\|\le\left(L^{m-1}+L^{m-2}+\ldots+L+1\right)L^k\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|\le$$
$$\le\left(\sum_{i=0}^{\infty}L^i\right)L^k\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|=\frac{1}{1-L}L^k\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|\le L^k\delta, \tag{5.14}$$

რადგან $0<L<1$, $\forall\varepsilon>0$-სთვის და საკმარისად დიდი $k\ge N(\varepsilon)$-სთვის გვექნება $L^k\delta<\varepsilon$. ე.ი. $\left\|x^{(k+m)}-x^{(k)}\right\|\to 0$ როცა $k\to\infty$ და m ნებისმიერია: $m=1,2,3,\ldots$ ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\left\{x^{(k)}\right\}$ წარმოადგენს ფუნდამენტურ მიმდევრობას. კოშის კრიტერიუმის თანახმად, ეს მიმდევრობა კრებადია და არსებობს მისი ზღვარი $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=\alpha\in S_\delta\left(x^{(0)}\right)$.

ვაჩვენოთ, რომ α წარმოადგენს $x=\phi(x)$ განტოლების ფესვს. (5.7) ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $k\to\infty$ და ვისარგებლოთ $\phi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობით, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემის (b) პირობიდან. მივიღებთ:

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}x^{(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\phi(x^{(k)})=\phi(\lim_{k\to\infty}x^{(k)})=\phi(\alpha).$$

---

[1] $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური ან **კოშის მიმდევრობა**, თუ

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon),\quad\forall n,m>N(\varepsilon):\qquad\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

ამრიგად, α წარმოადგენს $x=\phi(x)$ განტოლების, ან რაც იგივეა $f(x)=0$ განტოლების ფესვს. ამრიგად, (5.11) დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ, რომ ეს უძრავი წერტილი ერთადერთია. ვთქვათ, არსებობს $x=\phi(x)$ განტოლების ორი სხვადასხვა ფესვი α' და α'' $(\alpha'\neq\alpha'')$. ეს ნიშნავს, რომ $\alpha'=\phi(\alpha')$, და $\alpha''=\phi(\alpha'')$. მაშინ

$$\|\alpha''-\alpha'\|=\|\phi(\alpha'')-\phi(\alpha')\|\leq L\|\alpha'-\alpha''\|.$$

აქედან მივიღებთ, რომ $(1-L)|\alpha'-\alpha''|\leq 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\alpha'=\alpha''$. ამრიგად, $S_\delta\left(x^{(0)}\right)$ შუალედზე $x=\phi(x)$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი.

განვიხილოთ ცდომილება $e^{(k)}=x^{(k)}-\alpha$ და შევაფასოთ მისი მოდული

$$\left\|e^{(k)}\right\|=\left\|x^{(k)}-\alpha\right\|=\left\|\phi(x^{(k-1)})-\phi(\alpha)\right\|\leq L\left\|x^{(k-1)}-\alpha\right\|=L\left\|e^{(k-1)}\right\|,\quad \left\|e^{(k)}\right\|\leq L\left\|e^{(k-1)}\right\|.$$

ამით დამტკიცდა (5.12)–ის პირველი უტოლობა. მისი გამოყენებით მარტივად მივიღებთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური k-სათვის სამართლიანია უტოლობა $\left\|e^{(k)}\right\|\leq L^k\left\|e^{(0)}\right\|$, ე.ი. მარტივი იტერაციის მეთოდი კრებადია გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, რომლის მნიშვნელია $L,\quad 0<L<1$.

(5.14) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ (5.12)-ის მეორე უტოლობას:

$$\left\|x^{(k)}-\alpha\right\|\leq\lim_{m\to\infty}\left\|x^{(m)}-x^{(k)}\right\|\leq\frac{L^k}{1-L}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|.$$

თეორემა დამტკიცებულია. ◢

(5.9) პირობას ერთი განტოლების შემთხვევაში აქვს სახე: $|\phi(x)-\phi(y)|\leq L|x-y|$, $0<L<1$. ეს პირობა შესრულებული იქნება, თუ ϕ ფუნქციას $S_\delta(\alpha)=\{x:|x-\alpha|<\delta\},\quad \delta>0$, შუალედზე გააჩნია უწყვეტი წარმოებული $\phi'(x)$, რომლის მოდულიც ერთზე ნაკლებია: $|\phi'(x)|\leq L<1$. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას საშუალო მნიშვნელობის შესახებ[2], გვექნება

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leq|\phi'(\xi)(x-y)|\leq L|x-y|,\quad \xi\in S_\delta(\alpha)..$$

ანალოგიურად, განტოლებათა სისტემის შემთხვევაში $\|\phi'(x)\|\leq L<1$ პირობის შესრულება უზრუნველყოფს (5.9) პირობის შესრულებას. ამ შემთხვევაში $\phi'(x)$ იაკობის მატრიცაა, რომლის (i,j) პოზიციაში დგას $\dfrac{\partial\phi_i}{\partial x_j}$.

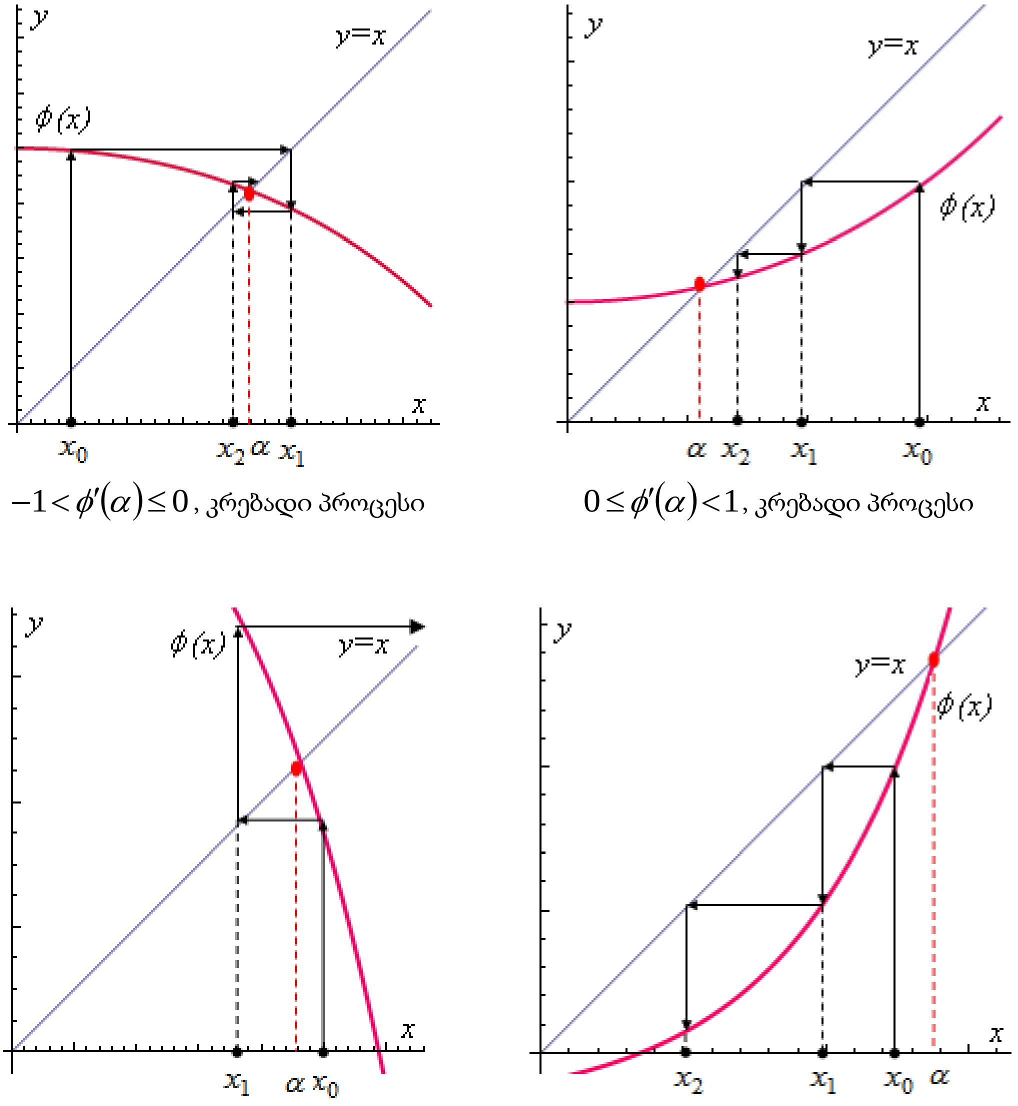
ერთი განტოლების შემთხვევაში მარტივი იტერაციის მეთოდს შეიძლება მიეცეს საინტერესო გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: (x,y) სიბრტყეზე გამოვსახოთ $y=\phi(x)$ და $y=x$ ფუნქციების გრაფიკები. მათი გადაკვეთის წერტილის აბსცისა წარმოადგენს საძიებელ α ფესვს. ვთქვათ, მოცემულია საწყისი x_0 მიახლოება. მაშინ $(x_0,\phi(x_0))=(x_0,x_1)$. გავავლოთ ამ წერტილზე წრფე $y=x_1=\phi(x_0)$. ამ წრფისა და $y=x$ წრფის თანაკვეთის წერტილის აბსცისაა x_1. შემდეგ თანაკვეთის ამ წერტილზე გავავლოთ $x=x_1$ წრფე $y=\phi(x)$ წირის გადაკვეთამდე,

---

[2] **ლაგრანჟის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ მონაკვეთზე და დიფერენცირებადია (a,b) ინტერვალზე, მაშინ მოიძებნება ისეთი წერტილი $c\in(a,b)$, რომ $f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$.

რის შედეგადაც მივიღებთ წერტილს $(x_1,\phi(x_1))=(x_1,x_2)$. ანალოგიურად გავაგრძელოთ ზემოაღწერილი პროცესი.

შემდეგ ნახაზებზე გამოსახულია ოთხი შემთხვევა:



$-1<\phi'(\alpha)\leq 0$, კრებადი პროცესი $0\leq\phi'(\alpha)<1$, კრებადი პროცესი

$\phi'(\alpha)<-1$, განშლადი პროცესი $\phi'(\alpha)>1$, განშლადი პროცესი

ნახ. 5.9. იტერაციული მიმდევრობის ყოფაქცევა $\phi(x)$-ს წარმოებულის მნიშვნელობების მიხედვით მარტივი იტერაციის მეთოდის შემთხვევაში

5.5. ნიუტონის[3] მეთოდი

ნიუტონის მეთოდით მიახლოებების გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)},\quad k\geq 0,\quad x^{(0)} \text{ მოცემულია.} \tag{5.15}$$

შევნიშნოთ, რომ ნიუტონის მეთოდი შეიძლება წარმოვადგინოთ (5.7) სახით:

[3] Sir Isaac Newton (1642–1727) – ინგლისელი მეცნიერი, http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right), \quad k \ge 0 \ , \ \text{სადაც } \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

მაშინ ნიუტონის მეთოდის კრებადობის დასამტკიცებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მარტივი იტერაციის კრებადობის პირველი თეორემა.

$C^p(D)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ p-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების კლასი, რომელთა განსაზღვრის არეა D.

თეორემა 5.3. (ნიუტონის მეთოდის კრებადობის შესახებ) ვთქვათ, $f(x) \in C^2([a,b])$. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ $|f'(x)| \ge \rho > 0$ და $|f''(x)| \le M$ ყველა x-სთვის, $x \in (a,b)$, და $\alpha \in (a,b)$ წარმოადგენს $f(x) = 0$ განტოლების ფესვს. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ $\forall x^{(0)}$-სთვის $S_\delta(\alpha)$-დან, $S_\delta(\alpha) = \{x : |x - \alpha| < \delta\}$, ნიუტონის (5.15) მეთოდით გამოთვლილი მიახლოებებისთვის სამართლიანია:

(a) $x^{(k)} \in S_\delta(\alpha), \ \ k = 1,2,3,\ldots$

(b) $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$.

დამტკიცება: გამოვთვალოთ

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \ .$$

შევნიშნოთ, რომ $\Phi'(\alpha) = 0$. $\Phi'(x)$ ფუნქცია უწყვეტია α ფესვის მიდამოში, ამიტომ მოიძებნება ფესვის ისეთი δ მიდამო $S_\delta(\alpha) = \{x : |x - \alpha| < \delta\}$, $\delta > 0$, რომ Φ' ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები 0-ის მიდამოში იქნება. აქედან გამომდინარე, მოიძებნება ისეთი q (დამოკიდებული ρ და M მუდმივებზე), რომ $|\Phi'(x)| \le q < 1$, რაც უზრუნველყოფს ნიუტონის მეთოდის კრებადობას (იხ.გვ. 10). მართლაც, მსჯელობა ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციით. ვაჩვენოთ, რომ $x^{(1)} \in S_\delta(\alpha)$. საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით, მოიძებნება ისეთი c წერტილი ($x^{(0)}$ და α-ს შორის), რომ

$$\left|x^{(1)} - \alpha\right| = \left|\Phi\left(x^{(0)}\right) - \Phi(\alpha)\right| = \left|\Phi'(c)\left(x^{(0)} - \alpha\right)\right| \le q\left|x^{(0)} - \alpha\right| < \delta$$

ე.ი. თეორემის (a) პირობა შესრულებულია, როცა $k = 1$. ვთქვათ, (a) პირობა სამართლიანია, როცა $k = 1,2,\ldots,k_0 - 1$. დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა $k = k_0$-სთვის. გვექნება:

$$\left|x^{(k)} - \alpha\right| = \left|\Phi\left(x^{(k-1)}\right) - \Phi(\alpha)\right| \le q\left|x^{(k-1)} - \alpha\right| \le \cdots \le q^k\left|x^{(0)} - \alpha\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \in S_\delta(\alpha) \ \text{ და}$$

რადგან $q < 1$, $\lim\limits_{k \to \infty}\left|x^{(k)} - \alpha\right| = 0 \ \Rightarrow \ \lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$.

თეორემა დამტკიცებულია. ◢

ზემოთ მოცემულ თეორემაში მტკიცდება ნიუტონის მეთოდის კრებადობა იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყისი $x^{(0)}$ მიახლოება საკმარისად ახლოსაა α-თან, ხოლო კრებადობის სიჩქარე შეფასებული არ არის. შემდეგი თეორემა საშუალებას გვაძლევს ვაჩვენოთ, რომ ნიუტონის მეთოდის კრებადობის რიგი ორის ტოლია.

თეორემა 5.4 (ნიუტონის მეთოდის კრებადობის რიგს შესახებ). ვთქვათ,

(a) α წარმოადგენს $f(x) = 0$ განტოლების ფესვს;

(b) $f(x) \in C^2(S_\delta(\alpha))$, $\quad S_\delta(\alpha) = \{x : |x - \alpha| < \delta\}$;

(c) $|f'(x)| \ge \rho > 0$, $|f''(x)| \le M$, $\forall x \in S_\delta(\alpha)$;

(d) $\dfrac{M\delta}{2\rho}<1.$

თუ $x^{(0)}\in S_\delta(\alpha)$, მაშინ ნიუტონის მეთოდით აგებული მიმდევრობა

- კრებადია $f(x)=0$ განტოლების ფესვისკენ;
- აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\left|x^{(k)}-\alpha\right|\le q^{2^k-1}\left|x^{(0)}-\alpha\right|,\quad \text{სადაც } q=\frac{M\left|x^{(0)}-\alpha\right|}{2\rho}.$$

დამტკიცება: გავშალოთ $f(\alpha)$ ტეილორის მწკრივად

$$f(\alpha)=f\left(x^{(k)}\right)+\left(\alpha-x^{(k)}\right)f'\left(x^{(k)}\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha-x^{(k)}\right)^2 f''(\xi_k),\ \xi_k=x^{(k)}+\theta\left(x-x^{(k)}\right),\quad 0\le\theta\le1;$$

$$0=f\left(x^{(k)}\right)+\left(\alpha-x^{(k)}\right)f'\left(x^{(k)}\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha-x^{(k)}\right)^2 f''(\xi_k);$$

$$0=\frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}+\left(\alpha-x^{(k)}\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha-x^{(k)}\right)^2\frac{f''(\xi_k)}{f'\left(x^{(k)}\right)};$$

$$x^{(k)}-\frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}-\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha-x^{(k)}\right)^2\frac{f''(\xi_k)}{f'\left(x^{(k)}\right)};$$

$$x^{(k+1)}-\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha-x^{(k)}\right)^2\frac{f''(\xi_k)}{f'\left(x^{(k)}\right)}.$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ $x^{(k)}\in S_\delta(\alpha)$, მაშინ $x^{(k+1)}\in S_\delta(\alpha)$; მართლაც თეორემის c) და d) პირობების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|\le\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k)}-\alpha\right|^2=\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k)}-\alpha\right|\right)\left|x^{(k)}-\alpha\right|<\frac{M\delta}{2\rho}\left|x^{(k)}-\alpha\right|<\left|x^{(k)}-\alpha\right|<\delta,$$

რაც ნიშნავს, რომ $x^{(k+1)}\in S_\delta(\alpha)$. ეს უკანასკნელი უტოლობა $x^{(0)}\in S_\delta(\alpha)$ პირობასთან ერთად უზრუნველყოფს, რომ ნიუტონის მეთოდით აგებული ყველა $x^{(k)}\in S_\delta(\alpha)$. ამრიგად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|\le\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k)}-\alpha\right|^2;$$

გავამრავლოთ უტოლობის ორივე მხარე $\dfrac{M}{2\rho}$ –ზე; მივიღებთ:

$$\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|\le\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k)}-\alpha\right|\right)^2;$$

$$\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|\right)\le\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k)}-\alpha\right|\right)^2\le\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k-1)}-\alpha\right|\right)^{2^2}\le\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(k-2)}-\alpha\right|\right)^{2^3}\le\cdots\le\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(0)}-\alpha\right|\right)^{2^{k+1}};$$

$$\left|x^{(k)}-\alpha\right|\le\frac{2\rho}{M}\left(\frac{M}{2\rho}\left|x^{(0)}-\alpha\right|\right)^{2^k}=\frac{2\rho}{M}q^{2^k}=\frac{2\rho}{M\left|x^{(0)}-\alpha\right|}\left|x^{(0)}-\alpha\right|q^{2^k}=\frac{1}{q}\left|x^{(0)}-\alpha\right|q^{2^k}=q^{2^k-1}\left|x^{(0)}-\alpha\right|.$$

თეორემის პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $q<1$; მაშასადამე ბოლო ორი უტოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ნიუტონის მეთოდი კრებადია.

5.6. იტერაციული მეთოდის შეჩერების კრიტერიუმები

დებულება 5.2 (აბსოლუტური ცდომილების შეფასების შესახებ)

ვთქვათ, მოცემულია კრებადი იტერაციული მეთოდი $x^{(k+1)} = \phi\left(x^{(k)}\right)$, $k \geq 0$, ისეთი, რომ $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|$, $0 < L < 1$, ფესვის მიდამოში. მაშინ აბსოლუტური ცდომილებისთვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\left|e^{(k+1)}\right| = \left|x^{(k+1)} - \alpha\right| \leq \frac{L}{1-L}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|, \quad k \geq 0. \tag{5.16}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ აბსოლუტური ცდომილების ვექტორი $e^{(k)} = x^{(k)} - \alpha$, $k \geq 0$, სადაც $\alpha -$ სისტემის ზუსტი ამონახსნია. მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\left|e^{(k+1)}\right| \leq L\left|e^{(k)}\right| = L\left|x^{(k)} - \alpha\right| = L\left|\left(x^{(k)} - x^{(k+1)}\right) + \left(x^{(k+1)} - \alpha\right)\right| \leq L\left\{\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| + \left|e^{(k+1)}\right|\right\}.$$

ამ უკანასკნელ უტოლობაში გადავიტანოთ ცდომილება მარცხენა მხარეში; იმის გათვალისწინებით რომ $0 < L < 1$, შესაძლებელია უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ სიდიდეზე $1 - L$. შედეგად აბსოლუტური ცდომილების პრაქტიკული შეფასებისთვის მივიღებთ ფორმულას:

$$\left|e^{(k+1)}\right| = \left|x^{(k+1)} - \alpha\right| \leq \frac{L}{1-L}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|. \blacktriangleleft$$

პრაქტიკულ გამოთვლებში იტერაციული პროცესი უნდა შეწყდეს, როცა $\left|e^{(k+1)}\right| \leq \varepsilon$, სადაც ε წინასწარ შერჩეული მცირე რიცხვია. როგორც წესი, ცდომილება უცნობია, რადგან განმარტების თანახმად ზუსტი ამონახსნის ცოდნას მოითხოვს. დამტკიცებული დებულება საშუალებას გვაძლევს ზემოდან შევაფასოთ ცდომილება ჩვენთვის უკვე ცნობილი იტერაციული მიახლოებების საშუალებით; კერძოდ, იტერაციული მეთოდის შეჩერების კრიტერიუმად შეიძლება გამოყენებული იქნეს უტოლობა

$$\frac{L}{1-L}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq \varepsilon.$$

ცდომილებისთვის (5.16) ტიპის შეფასების გამოყენება მოითხოვს ლიპშიცის მუდმივის ცოდნას, რაც გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ მიზანშეწონილია ისეთი შეფასების მიღება, რომელიც არ გამოიყენებს L მუდმივს.

ვთქვათ, ფესვები განცალებულია და (a,b) შუალედზე α წარმოადგენს f ფუნქციის მარტივ ფესვს. $x^{(k)}$ – ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობაა. ვთქვათ, მოცემული მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის $\left[x^{(k)} - \varepsilon, x^{(k)} + \varepsilon\right] \subset (a,b)$ და სრულდება უტოლობა

$$f(x^{(k)} - \varepsilon) f(x^{(k)} + \varepsilon) < 0. \tag{5.17}$$

მაშინ დებულება 5.1–ის თანახმად $\alpha \in (x^{(k)} - \varepsilon, x^{(k)} + \varepsilon)$. ცხადია, სამართლიანი იქნება შეფასება $\left|x^{(k)} - \alpha\right| < \varepsilon$. ამის გათვალისწინებით L მუდმივის გამოყენების გარეშე ცდომილების შესაფასებლად შეიძლება გამოვიყენოთ მეთოდი: მოცემული $\varepsilon > 0$ სიზუსტისთვის იტერაციის ყოველ ბიჯზე ვამოწმებთ (5.17) პირობას. თუ რომელიმე $k_0(\varepsilon)$–სთვის სრულდება (5.17) უტოლობა, მაშინ x_{k_0} მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება შეფასდება $\left|x^{(k)} - \alpha\right| < \varepsilon$ უტოლობის საშუალებით საჭირო სიზუსტე მიღწეული იქნება.

აღსანიშნავია, რომ (5.17) პირობის შემოწმება დამატებით მოითხოვს ფუნქციის ორი მნიშვნელობის გამოთვლას, რაც გარკვეულწილად ზრდის ოპერაციების რაოდენობას. აქედან გამომდინარე ხშირად მიზანსეწონილია (5.17) პირობა გამოყენებული იქნეს არა ყველა

იტერაციაზე, არამედ მხოლოდ მაშინ, როცა ორი მომდევნო მიახლოება საკმარისად ახლოს არის ერთმანეთთან, მაგალითად $\left|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right| \leq \varepsilon$.

თემა VI. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები

6.1. მატრიცის საკუთრივი რიცხვების და საკუთრივი ვექტორების პოვნა საკმაოდ რთული ამოცანაა. გავიხსენოთ, რომ მატრიცის მახასიათებელი განტოლების $\det(A-\lambda I)=0$ ცხადი სახით ამოწერაც კი საკმაოდ დიდ სირთულეს წარმოადგენს შედარებით მცირე ზომის მატრიცების შემთხვევაშიც. გარდა ამისა, $\det(A-\lambda I)$ წარმოადგენს n-ური რიგის პოლინომს λ პარამეტრის მიმართ, რომლის ფესვების ანალიზური სახით პოვნა, საზოგადოდ, შეუძლებელია. მატრიცის სპექტრის (აღინიშნება $\sigma(A)$) ან მატრიცის სპექტრალური რადიუსის ცოდნა ხშირად სასარგებლოა სხვადასხვა ტიპის ამოცანების შესწავლის თვალსაზრისით. აქედან გამომდინარე, მიზანშეწონილია ისეთი მეთოდების გამოყენება, რომლებიც მატრიცის საკუთრივი რიცხვების საზღვრების დადგენაში გვეხმარება (იხ. ქვემოთ გერშგორინის თეორემები) ან ნაწილობრივ წყვეტს საკუთრივი რიცხვების და ვექტორების პოვნის პრობლემას და საშუალებას გვაძლევს მხოლოდ ექსტრემალური საკუთრივი რიცხვების პოვნისა (იხ. ქვემოთ ხარისხოვანი მეთოდი). გავიხსენოთ, რომ უკვე დამტკიცებული გვაქვს ერთი შეფასება $|\lambda|\le\|A\|,\quad \forall\lambda\in\sigma(A)$.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს მატრიცათა მნიშვნელოვანი კლასი, რომლისთვისაც საკუთრივი მნიშვნელობები მარტივად განისაზღვრება. ამ კლასს მიეკუთვნება დიაგონალური

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

და სამკუთხა (ზედა და ქვედა) მატრიცები.

თვისება 6.1. დიაგონალური და სამკუთხა მატრიცების საკუთრივი რიცხვები მათი მთავარი დიაგონალის ელემენტების ტოლია.

$D(n\times n)$ დიაგონალურ მატრიცას აქვს n ორთონორმირებული საკუთრივი ვექტორი $e_1=(1,0,\dots,0)^T$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)^T,\dots,$ $e_n=(0,0,\dots,1)^T$, რომლებიც შეესაბამება საკუთრივ მნიშვნელობებს

$$\lambda_1=d_{11},\quad \lambda_2=d_{22},\quad \dots,\quad \lambda_n=d_{nn}.$$

სამართლიანია შებრუნებული დებულება:

თვისება 6.2. თუ მატრიცის საკუთრივი ვექტორებია $\{e_i\}$, $i=1,2,\dots,n$, მაშინ ის დიაგონალურია.

თვისება 6.3. თუ A ნამდვილი და სიმეტრიულია _ $A=A^T$, მაშინ მისი ყველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია. გარდა ამისა, თუ $A=A^T>0$, ე.ი. $(Ax,x)=x^TAx>0$ ყველა $x\ne 0$-ისთვის, მაშინ A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია.

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც:

თვისება 6.4. თუ ნამდვილი სიმეტრიული მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი დადებითია, მაშინ ეს მატრიცა დადებითადაა განსაზღვრული.

თვისება 6.6. თუ $\{\lambda,x\}$ - A მატრიცის საკუთრივი წყვილია, ხოლო $\alpha\ne 0$ - რაიმე რიცხვია, მაშინ $\{\lambda,\alpha x\}$ ასევე წარმოადგენს A მატრიცის საკუთრივ წყვილს.

ეს ნიშნავს, რომ ყოველ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება საკუთრივ ვექტორთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც მხოლოდ სკალარული მამრავლით განსხვავდება ერთმანეთისგან. ასეთი ვექტორები განსაზღვრავს ერთი და იმავე მიმართულებას n-განზომილებიან სივრცეში.

თვისება 6.6. ვთქვათ, $\{\mu, x\}$ - $A - pI$ მატრიცის საკუთრივი წყვილია, სადაც $p \in R$ რაიმე რიცხვია. მაშინ $\{\lambda = \mu + p, x\}$ - A მატრიცის საკუთრივი წყვილია.

თვისება 6.7. თუ $\{\lambda, x\}$ - არაგადაგვარებული A მატრიცის საკუთრივი წყვილია, მაშინ $\left\{\dfrac{1}{\lambda}, x\right\}$ - A^{-1} მატრიცის საკუთრივი წყვილია.

ამ უკანასკნელის სამართლიანობა ცხადია, თუ მოცემული $\{\lambda, x\}$ წყვილისთვის სამართლიან ტოლობას $Ax = \lambda x$ მარცხნიდან გავამრავლებთ მატრიცზე $\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

განსაზღვრება 6.1. $n \times n$ განზომილების ორ, A და B მატრიცას ეწოდება **მსგავსი,** თუ არსებობს არაგადაგვარებული P მატრიცა ისეთი, რომ $B = PAP^{-1}$.

დებულება 6.1. თუ A და B მატრიცები მსგავსია, მაშინ მათ ერთნაირი საკუთრივი რიცხვები გააჩნიათ.

დამტკიცება. რადგან A და B მატრიცები მსგავსია, მაშინ არსებობს P, $\det P \neq 0$, ისეთი რომ $B = PAP^{-1}$. განვიხილოთ

$$\det(A - \lambda I) = \det(I) \cdot \det(A - \lambda I) = \det(P \cdot P^{-1})\det(A - \lambda I) =$$
$$= \det P \cdot \det(A - \lambda I)\det P^{-1} = \det\left[P(A - \lambda I)P^{-1}\right] = \det(PAP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) =$$
$$= \det(PAP^{-1} - \lambda I).$$

ამრიგად, მახასიათებელი მრავალწევრი და, მაშასადამე, საკუთრივი რიცხვებიც A და PAP^{-1} მატრიცებს ერთნაირი აქვთ.

საკუთრივი ვექტორებისათვის განვიხილოთ ტოლობა $PAP^{-1}y = \lambda y$. ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ P^{-1} მატრიცაზე. გვექნება $AP^{-1}y = \lambda P^{-1}y$. აქედან ჩანს, რომ A მატრიცის საკუთრივი x ვექტორი შემდეგი თანაფარდობითაა დაკავშირებული PAP^{-1} მატრიცის y საკუთრივ ვექტორთან $x = P^{-1}y$, ან $y = Px$. ◢

თვისება 6.8. A მატრიცა მსგავსია დიაგონალური მატრიცისა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას n წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი გააჩნია.

თვისება 6.9. თუ A მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი განსხვავებულია, მაშინ ის დიაგონალური მატრიცის მსგავსია.

თვისება 6.10. A მატრიცის საკუთრივი რიცხვების მოდული აკმაყოფილებს უტოლობას $\dfrac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|$.

განსაზღვრება 6.2. A $n\times n$ მატრიცისთვის რეილის თანაფარდობა (Rayleigh quatient) ეწოდება ფუნქციონალს $\rho(x)=\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}=\dfrac{x^T Ax}{x^T x}$, რომელიც არანულოვანი n–განზომილებიანი x ვექტორების სიმრავლეზეა განსაზღვრული.

თვისება 6.11. ვთქვათ, x^* A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია, მაშინ $\rho(x^*)$ მისი საკუთრივი რიცხვია.

თვისება 6.12. სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცის შემთხვევაში სრულდება უტოლობა

$$\lambda_{\min}\le\frac{(Ax,x)}{(x,x)}\le\lambda_{\max},$$

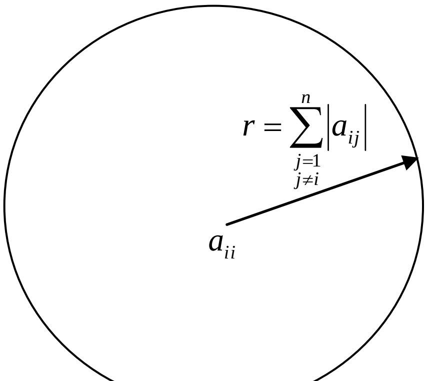
სადაც x ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორია, ხოლო $\lambda_{\min}$ და $\lambda_{\max}$ A მატრიცის უმცირესი და უდიდესი საკუთრივი რიცხვებია.

6.2. გერშგორინის თეორემები

თეორემა 6.1. (გერშგორინის წრეები $\Re_i$). ვთქვათ, $A\in C^{n\times n}$ ნამდვილი ან კომპლექსური მატრიცაა, მაშინ

$$\sigma(A)\subseteq S_{\Re}=\bigcup_{i=1}^{n}\Re_i,\qquad \Re_i=\{\,z\in C:\left|z-a_{ii}\right|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|a_{ij}\right|\,\}.$$

$\Re_i$ სიმრავლეებს გერშგორინის წრეებს უწოდებენ. ნახაზზე იხილეთ გერშგორინის $\Re_i$ წრის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:



დამტკიცება: ავიღოთ რომელიმე $\lambda\in\sigma(A)$, $\lambda\ne a_{ii}$, $i=1,2,\ldots,n$; აღვნიშნოთ: $A=D+E$, სადაც $D=diag\{a_{ii},\ i=1,2,\ldots,n\}$. E იყოს ასეთი მატრიცა $e_{ij}=a_{ij}$, თუ $i\ne j$, $e_{ii}=0$, ხოლო $B_\lambda=A-\lambda I$. იმის გამო, რომ λ საკუთრივი რიცხვია, გვაქვს:

$\det(B_\lambda)=0$ => არსებობს $x\ne0$ ისეთი, რომ $B_\lambda x=0$;

$((D+E)-\lambda I)x=0\ \Rightarrow\ (D-\lambda I)x=-Ex\ \Rightarrow\ x=-(D-\lambda I)^{-1}Ex$;

$$(D-\lambda I)^{-1} = diag\{1/(a_{ii}-\lambda),\quad i=1,2,\ldots,n\}\ ;$$
$$\|x\|_\infty \le \left\|(D-\lambda I)^{-1}E\right\|_\infty \cdot \|x\|_\infty\ ;$$
$$1 \le \left\|(D-\lambda I)^{-1}E\right\|_\infty = \sum_{j=1}^{n}\frac{|e_{kj}|}{|a_{kk}-\lambda|} = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}-\lambda|}\ ,$$

სადაც, ნორმის განმარტების თანახმად, k იმ სტრიქონის ნომერია, რომლის ელემენტების მოდულის ჯამი მაქსიმალურია. ბოლო უტოლობიდან $|a_{kk}-\lambda|$-ზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ:

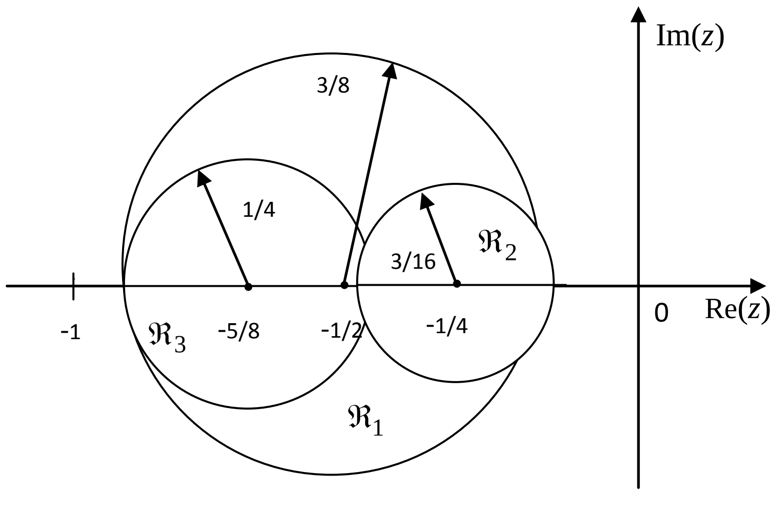
$$|a_{kk}-\lambda| \le \sum_{j=1,k\ne j}^{n}|a_{kj}|,$$

რაც ნიშნავს, რომ საკუთრივი რიცხვი ეკუთვნის გერშგორინის წრეს $\Re_k$, რომლის ცენტრია a_{kk} და რადიუსია $\sum_{\substack{j=1\\ k\ne j}}^{n}|a_{kj}|$. თუ მსგავს პროცედურას ჩავატარებთ სხვა საკუთრივი რიცხვებისთვისაც, მივიღებთ რომ ყველა საკუთრივი რიცხვი მოთავსებულია გერშგორინის რომელიღაც წრეში. აქედან გამომდინარე, ბუნებრივია, მატრიცის სპექტრი მოთავსებულია გერშგორინის წრეების გაერთიანებაში.◢

თეორემის გამოყენების მარტივ მაგალითად განვიხილოთ მატრიცა

$$A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix},$$

რომლის გერშგორინის წრეები ნაჩვენებია ნახაზზე:



გერშგორინის წრეები კომპლექსურ სიბრტყეზე

იმის გამო, რომ მატრიცას და მის ტრანსპონირებულს ერთიდაიგივე საკუთრივი რიცხვები გააჩნიათ, შესაძლებელია გერშგორინის წრეების შესახებ თეორემა ჩაიწეროს ტრანსპონირებული მატრიცისთვისაც; გვექნება:

$$\sigma(A) \subseteq S_C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j, \qquad C_j = \{ z \in C : \left| z - a_{jj} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| a_{ij} \right| \}$$

დამტკიცებული თეორემიდან ავტომატურად გამომდინარეობს გერშგორინის პირველი თეორემა.

თვისება 6.13. (გერშგორინის პირველი თეორემა) $A \in C^{n \times n}$ მატრიცისთვის სამართლიანია

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \qquad \lambda \in S_{\Re} \cap S_C \ .$$

თვისება 6.14. (გერშგორინის მეორე თეორემა). ვთქვათ,

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{m} \Re_i, \qquad S_2 = \bigcup_{i=m+1}^{n} \Re_i \ .$$

თუ $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, მაშინ S_1 შეიცავს A მატრიცის ზუსტად m საკუთრივ რიცხვს, ხოლო დანარჩენი საკუთრივი რიცხვები მოთავსებულია S_2 სიმრავლეში. საკუთრივი რიცხვების დათვლისას მხედველობაში მიიღება მათი ჯერადობა.

6.3. ხარისხოვანი მეთოდი

ხარისხოვანი მეთოდის გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ მატრიცის მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვი და შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი.

ვთქვათ, მოცემულია დიაგონალური მატრიცის მსგავსი ნამდვილი $A(n \times n)$ მატრიცა. მაშინ მას გააჩნია n წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორი:

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})^T, \quad x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})^T, \ldots, x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn})^T \ . \qquad (6.1)$$

ვთქვათ, საკუთრივი ვექტორები გადანომრილია შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობების მოდულების კლების მიხედვით (ამასთან, პირველი უტოლობა მკაცრია, ე.ი. λ_1-ის ალგებრული ჯერადობა 1-ის ტოლია):

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \ . \qquad (6.2)$$

$X(n \times n)$ იყოს A მატრიცის $x_i, \ i = 1, \ldots, n,$ საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგენილი მატრიცა.

დავსვათ ამოცანა: მიახლოებით ვიპოვოთ A მატრიცის მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვი λ_1 და მისი შესაბამისი x_1 საკუთრივი ვექტორი.

განვიხილოთ იტერაციული ალგორითმი, რომელიც ეფუძნება მატრიცის ხარისხების გამოთვლას და **ხარისხოვანი მეთოდი** ეწოდება:

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= Aq^{(k-1)}, \\ q^{(k)} &= z^{(k)} \Big/ \left\| z^{(k)} \right\|_2, \\ \nu^{(k)} &= (Aq^{(k)}, q^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (6.3)$$

სადაც $q^{(0)}$ ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორია, ერთის ტოლი ევკლიდეს ნორმით $\left\|q^{(0)}\right\|_2 = 1$. შევნიშნოთ, რომ (6.3) ფორმულაში $\nu^{(k)}$ შეიძლება გადავწეროთ ეკვივალენტური სახით

$$\nu^{(k)} = (z^{(k+1)}, q^{(k)}), \quad k = 1,2,\ldots$$

A მატრიცას გააჩნია საკუთრივ ვექტორთა სრული სისტემა, რომლებიც ქმნიან ბაზისს C^n -ში, ამიტომ შეგვიძლია ჩავწეროთ $q^{(0)}$ -ის გაშლა საკუთრივ ვექტორთა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ბაზისში:

$$q^{(0)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad \alpha_i \in C, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.4}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha_1 \neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში შევცვალოთ საწყისი $q^{(0)}$ ვექტორი).

დებულება 6.2. სამართლიანია ფორმულა

$$q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\left\|A^k q^{(0)}\right\|_2}, \quad k \geq 1 . \tag{6.5}$$

დამტკიცება: დამტკიცებისთვის გამოიყენება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი.

როცა $k = 1, \qquad z^{(1)} = Aq^{(0)}, \qquad q^{(1)} = \dfrac{z^{(1)}}{\left\|z^{(1)}\right\|_2} = \dfrac{Aq^{(0)}}{\left\|Aq^{(0)}\right\|_2}$.

დავუშვათ, ფორმულა სამართლიანია k-სთვის და დავამტკიცოთ (k+1)-სთვის. (6.3)-ის და დაშვების შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$z^{(k+1)} = Aq^{(k)},$$

$$q^{(k+1)} = \frac{z^{(k+1)}}{\left\|z^{(k+1)}\right\|_2} = \frac{Aq^{(k)}}{\left\|Aq^{(k)}\right\|_2} = \frac{A\dfrac{A^k q^{(0)}}{\left\|A^k q^{(0)}\right\|_2}}{\left\|A\dfrac{A^k q^{(0)}}{\left\|A^k q^{(0)}\right\|_2}\right\|_2} = \frac{\dfrac{1}{\left\|A^k q^{(0)}\right\|_2} A^{k+1} q^{(0)}}{\dfrac{1}{\left\|A^k q^{(0)}\right\|_2}\left\|A^{k+1} q^{(0)}\right\|_2} = \frac{A^{k+1} q^{(0)}}{\left\|A^{k+1} q^{(0)}\right\|_2}.$$

◢

შედეგი. ვთქვათ, $A(n \times n)$ მატრიცა დიაგონალური მატრიცის მსგავსია, რომლის საკუთრივი რიცხვები აკმაყოფილებს (6.2) პირობას. ვთქვათ ხარისხოვან მეთოდში საწყისი მიახლოება $q^{(0)}$ ისეთია, რომ (6.4)-ში $\alpha_1 \neq 0$. მაშინ

$$q^{(k)} = \mu_k \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\|x_1 + y^{(k)}\right\|_2}, \quad k \geq 1. \tag{6.6}$$

სადაც $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(k)} = 0$, ხოლო μ_k არის $\alpha_1 \lambda_1^{\ k}$ -ის ნიშანი.

დამტკიცება. ყოველი i–სთვის, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\{\lambda_i, x_i\}$ წარმოადგენს A მატრიცის საკუთრივ წყვილს, ამიტომ $Ax_i = \lambda_i x_i$. (6.4)-ის გამოყენებით გვექნება:

$$A^k q^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^k x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i =$$
$$= \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right) = \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + y^{(k)} \right), \quad k \geq 1, \tag{6.7}$$

სადაც $y^{(k)} \equiv \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i$. ცხადია, $y^{(k)}$ ვექტორი ქრება, როცა $k \to \infty$, რადგან $|\lambda_i / \lambda_1| < 1, \quad i = 2, \ldots, n,$ ე.ი. $\lim_{k \to \infty} y^{(k)} = 0.$

$q^{(k)}$-თვის (6.5) ფორმულაში ჩავსვათ (6.7). მივიღებთ:

$$q^{(k)} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + y^{(k)} \right)}{\left\| \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + y^{(k)} \right) \right\|_2} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + y^{(k)} \right)}{\left| \alpha_1 \lambda_1^k \right| \cdot \left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2} = \mu_k \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2},$$

სადაც μ_k არის $\alpha_1 \lambda_1^k$-ის ნიშანი. ◢

თეორემა 6.2. ვთქვათ, $A(n \times n)$ მატრიცა დიაგონალური მატრიცის მსგავსია, რომლის საკუთრივი რიცხვები აკმაყოფილებს (2) პირობას, ხოლო ხარისხოვანი მეთოდის საწყისი მიახლოება $q^{(0)}$ ისეთია, რომ (6.4)-ში $\alpha_1 \neq 0$. მაშინ ხარისხოვანი მეთოდით აგებული მიახლოებისთვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულები

$$\lim_{k \to \infty} \nu^{(k)} = \lambda_1,$$
$$\left\| \tilde{q}^{(k)} - x_1 \right\|_2 \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, \quad k \geq 1, \tag{6.8}$$

სადაც მუდმივა C > 0, ხოლო

$$\tilde{q}^{(k)} = \frac{q^{(k)} \left\| A^k q^{(0)} \right\|_2}{\alpha_1 \lambda_1^k} = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i, \quad k = 1, 2, \ldots$$

დამტკიცება. რადგან A დიაგონალური მატრიცის მსგავსია, არაგადაგვარებული X მატრიცა, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება იმგვარად ავაგოთ, რომ მის x_i სვეტებს ჰქონდეთ ერთეულოვანი სიგრძე $\|x_i\|_2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n$.

დებულება 6.2-ის შედეგის და ხარისხოვანი მეთოდის ალგორითმის შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\nu^{(k)} = (Aq^{(k)}, q^{(k)}) = (A\mu_k \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}, \mu_k \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}) = (A \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}, \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}) =$$
$$(\frac{Ax_1 + Ay^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}, \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}) = (\frac{\lambda_1 x_1 + Ay^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}, \frac{x_1 + y^{(k)}}{\left\| x_1 + y^{(k)} \right\|_2}) \overset{k \to \infty}{\to} (\frac{\lambda_1 x_1}{\|x_1\|_2}, \frac{x_1}{\|x_1\|_2}) = \frac{\lambda_1}{\|x_1\|_2^2}(x_1, x_1) = \lambda_1.$$

ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ $\lim_{k \to \infty} \nu^{(k)} = \lambda_1$.

(6.7)-ის გამო

$$A^k q^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right), \quad k \geq 1.$$

(6.5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\left\| A^k q^{(0)} \right\|_2} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{\left\| A^k q^{(0)} \right\|_2} \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right) = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{\left\| A^k q^{(0)} \right\|_2} \tilde{q}^{(k)}, \quad k \geq 1.$$

შევაფასოთ ნორმა $\left\| \tilde{q}^{(k)} - x_1 \right\|_2$:

$$\left\| x_1 + \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right] - x_1 \right\|_2 = \left\| \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right\|_2 \leq \sum_{i=2}^{n} \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right| \bullet \left| \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right| \| x_i \|_2 = \sum_{i=2}^{n} \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right| \bullet \left| \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right|$$

$$\leq \left(\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right]^2 \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right]^{2k} \right)^{1/2} \leq \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]^k \left(\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right]^2 \right)^{1/2}.$$

რაც წარმოადგნს (6.8) შეფასებას, სადაც

$$C = \left(\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

ამრიგად, $q^{(k)}$ ვექტორი გვაძლევს x_1 საკუთრივი ვექტორის მიახლოებას მიმართულების მიხედვით $\dfrac{\alpha_1 \lambda_1^k}{\left\| A^k q^{(0)} \right\|_2}$ სკალარული მამრავლის სიზუსტით (იხ. თვისება 6.5).◢

შევნიშნოთ, რომ ხარისხოვანი მეთოდი იკრიბება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, რომლის მნიშვნელია $\left| \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$. აქედან ჩანს, რომ მით უფრო სწრაფია კრებადობა, რაც უფრო მეტად დომინირებს λ_1 საკუთრივი რიცხვი მატრიცის სპექტრში. ეს ფაქტი (თვისება 6.6-თან) ერთად შეიძლება გამოვიყენოთ A მატრიცის უდიდესი საკუთრივი რიცხვის მოძებნის დასაჩქარებლად, თუ წავანაცვლებთ მატრიცის სპექტრს.

(6.3) ალგორითმით გამოთვლების დამთავრების კრიტერიუმად ხშირად სამივე პირობის შესრულებას იყენებენ: $\left| \nu^{(k)} - \nu^{(k-1)} \right| < \varepsilon \, | \nu^{(k)} |$, $\left\| q^{(k)} - q^{(k-1)} \right\| < \varepsilon, \quad k > 1$ პირობა, სადაც ε ფარდობითი ცდომილებისთვის წინასწარ დასახელებული სიზუსტეა. ამასთანავე უნდა შევამოწმოთ, რომ $| \nu^{(k)} |$ არ არის ახლოს ნულთან. შევნიშნოთ, რომ შეჩერების ეს კრიტერიუმი ყოველთვის არ ნიშნავს საძიებელი საკუთრივი რიცხვის განსაზღვრას მოცემული სიზუსტით. გასათვალისწინებელია ის ფაქტიც, რომ ყოველთვის არაა ცნობილი, შესრულებულია თუ არა პირობები, რომლის დროსაც გარანტირებულია ხარისხოვანი მეთოდის კრებადობა. ასეთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია, ყოველ იტერაციაზე შევამოწმოთ უტოლობის - $\left| \nu^{(k+1)} - \nu^{(k)} \right| < \left| \nu^{(k)} - \nu^{(k-1)} \right|$ შესრულება. ასევე, განვახორციელოთ იტერაციული პროცესი სხვადასხვა საწყისი ვექტორისათვის.

თვისება 6.15. თუ A ნამდვილი და სიმეტრიული მატრიცაა და $\alpha_1 \neq 0$, მაშინ

$$\left|\lambda_1 - \nu^{(k)}\right| < |\lambda_1 - \lambda_n| \tan^2(\theta_0)\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k},$$

სადაც $\cos(\theta_0) = \left|x_1^T q_0\right| \neq 0$.

6.4. ხარისხოვანი მეთოდის ვარიანტები

შებრუნებული ხარისხოვანი მეთოდი. ამ მეთოდის საშუალებით შეიძლება უმცირესი საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორისაკენ.

ვთქვათ, A-ს საკუთრივი წყვილებია $\{\lambda_i, \vec{x}_i\}$, $i = 1,2,...,n$. ვიგულისხმოთ, რომ საკუთრივ რიცხვებს შორის არ არის ნული. გამოვიყენოთ (6.3) ხარისხოვანი მეთოდი A^{-1} მატრიცისათვის. მაშინ დამტკიცებული დებულებისა და თეორემის თანახმად, ვიპოვით A^{-1}-ის უდიდეს საკუთრივ რიცხვს და მის შესაბამის საკუთრივ ვექტორს. თვისება 6.7-ის თანახმად, A^{-1} მატრიცის მოდულით უდიდესი საკუთრივი რიცხვის შებრუნებული რიცხვი წარმოადგენს A მატრიცის მოდულით უმცირეს საკუთრივ რიცხვს λ_n-ს, ხოლო საკუთრივი ვექტორი იგივე იქნება. ჩავწეროთ ხარისხოვანი მეთოდის ალგორითმი A^{-1} მატრიცისთვის:

$$z^{(k)} = A^{-1}q^{(k-1)},$$

$$q^{(k)} = z^{(k)} / \left\|z^{(k)}\right\|_2,$$

$$\nu^{(k)} = (Aq^{(k)}, q^{(k)}), \quad k = 1,2,\ldots$$

შევნიშნოთ, რომ A^{-1} მატრიცისათვის ხარისხოვანი მეთოდის გამოყენებისას A-ს შებრუნებულის გამოთვლის თავიდან ასაცილებლად, $z^{(k)} = A^{-1}q^{(k-1)}$, $k = 1,2,...$, ფორმულით გამოთვლის ნაცვლად, იტერაციის ყოველ ბიჯზე უნდა ამოვხსნათ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$Az^{(k)} = q^{(k-1)}, \quad k = 1,2,..., \ q^{(0)} \neq 0. \tag{6.9}$$

ამ სისტემას ერთი და იგივე A მატრიცა გააჩნია ყოველ იტერაციაზე, ამიტომ გაუსის მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში, მისი LU დაშლა საჭიროა შესრულდეს მხოლოდ ერთხელ. მეთოდის კრებადობის საკითხზე არ შევჩერდებით, რადგან ის ხარისხოვანი მეთოდის კრებადობის ანალოგიურია, მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ კრებადობის სიჩქარეს განსაზღვრავს სიდიდე $O\left(\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|^k\right)$.

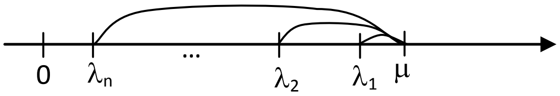
ხარისხოვანი მეთოდი წანაცვლებით. მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში: A მატრიცა შევცვალოთ $B = A - \mu I$ მატრიცით. μ რიცხვითი პარამეტრია და მას წანაცვლება ეწოდება, რადგან მატრიცის ასეთი გარდაქმნის შემდეგ A-ს საკუთრივი რიცხვები წაინაცვლებს μ სიდიდით (თუ A-ს საკუთრივი წყვილებია $\{\lambda_i, \vec{x}_i\}$, მაშინ $B = A - \mu I$ მატრიცის საკუთრივი წყვილები იქნება $\{\lambda_i - \mu, x_i\}$, $i = 1,2,...,n$). მართლაც,

$$Bx_A = (A - \mu I)x_A = \lambda_A x_A - \mu x_A = (\lambda_A - \mu)x_A,$$

ანუ $x_B = x_A$, $\lambda_B = \lambda_A - \mu$. ამგვარად, B-ს საკუთრივი ვექტორები იგივეა, რაც A-სი. შესაბამისად B მატრიცის მიმართ ხარისხოვანი მეთოდის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს

ვიპოვოთ μ -დან ყველაზე უფრო დაცილებული საკუთრივი რიცხვი; B მატრიცის მიმართ შებრუნებული ხარისხოვანი მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია მოიძებნოს μ -თან ყველაზე ახლოს მყოფი საკუთრივი რიცხვი.

<u>წანაცვლება მინიმალური საკუთრივი რიცხვის საპოვნელად</u>: ვთქვათ, A ნიშანგანსაზღვრულია, მაგ. $A > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i \quad \lambda_i > 0$. ე.ი. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n$. შევარჩიოთ μ: $\mu > \lambda_1$.



მაშინ B -ს საკუთრივი რიცხვები იქნება $(\lambda_i - \mu)$. მათ შორის მოდულით მაქსიმალური იქნება $(\lambda_n - \mu)$. ამიტომ მის საპოვნელად შეიძლება გამოვიყენოთ ხარისხოვანი მეთოდი B მატრიცის მიმართ. რადგან სამართლიანია დებულება $\forall i \quad |\lambda_i| \leq \|A\|$, ამიტომ μ -ს როლში შეიძლება ავიღოთ მატრიცის ნებისმიერი შეთანხმებული ნორმა.

მაგალითი. საზოგადოდ, არასიმეტრიული მატრიცისათვის საკუთრივი რიცხვების ამოცანა შესაძლოა არამდგრადი იყოს. ვაჩვენოთ ეს მარტივ მაგალითზე.

განვიხილოთ $A(n,n)$ მატრიცა, რომელიც შემდეგი სახისაა

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

მას n ჯერადობის ნულოვანი საკუთრივი რიცხვი გააჩნია. შევცვალოთ მატრიცის ერთი ნულოვანი ელემენტი ε რიცხვით –

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

გავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სვეტის მიხედვით, მივიღებთ:

$$-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\varepsilon\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ან, რაც იგივეა

$$-\lambda(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1}\varepsilon = 0, \quad \lambda^n - \varepsilon = 0.$$

ამრიგად, A_ε მატრიცას გააჩნია n განსხვავებული, კომპლექსური საკუთრივი რიცხვი $|\lambda_i| = \sqrt[n]{|\varepsilon|}$, $i = 1,2,\ldots,n.$ თუ ავიღებთ, მაგალითად, $n = 100,\ \varepsilon = 10^{-100}$, მაშინ $|\lambda_i| = 0.1$. ე.ი., მატრიცის ერთი ელემენტის 10^{-100} სიდიდით შეცვლამ გამოიწვია საკუთრივი მნიშვნელობების 10^{-1}-ის ტოლი სიდიდით შეცვლა, რაც 10^{99}-ჯერ მეტია საწყის ცდომილებაზე.

6.5. ბაუერ–ფიკეს თეორემა

ზოგიერთ შემთხვევაში A მატრიცის შესახებ საკმაოდ დეტალური ინფორმაცია შეიძლება იყოს ცნობილი, მაგალითად საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები, დიაგონალურ მატრიცთან მსგავსება (იხ. განსაზღვრება 6.1). $X(n\times n)$–ით აღნიშნული იყოს A მატრიცის x_i, $i = 1,\ldots,n,$ საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგენილი მატრიცა, ისე, რომ $D = X^{-1}AX = diag\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$, სადაც $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია.

A მატრიცას დავუმატოთ რაიმე E მატრიცა და ავაგოთ ახალი $C=A+E$ მატრიცა. გვაინტერესებს, შესაძლებელია თუ არა შევაფასოთ C მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ისე, რომ გამოვიყენოთ A მატრიცის შესახებ ცნობილი ინფორმაცია.

თეორემა 6.3 (ბაუერ–ფიკე). ვთქვათ,

- X არის A მატრიცის საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგენილი მატრიცა, ისეთი, რომ $D = X^{-1}AX = diag\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$;
- $C=A+E$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვია μ

მაშინ

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda-\mu| \le K_2(X)\|E\|_2, \tag{6.10}$$

სადაც $K_2(X)$ არის X მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი.

დამტკიცება: თუ μ ეკუთვნის A მატრიცის სპექტრს, მაშინ თეორემის დამტკიცება ტრივიალურია, რადგან (6.10) უტოლობის მარცხენა მხარე ნულის ტოლი ხდება. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\mu \notin \sigma(A)$. მატრიცა $C-\mu I$ გადაგვარებულია, რადგან μ არის C მატრიცის საკუთრივი რიცხვი. ჩავატაროთ $C-\mu I$ მატრიცის მსგავსების გარდაქმნა X მატრიცის გამოყენებით.

$$X^{-1}(C-\mu I)X = X^{-1}(A+E-\mu I)X = D + X^{-1}EX - \mu I$$

მსგავსების გარდაქმნა საკუთრივ რიცხვებს არ ცვლის (იხ. დებულება 6.1), ამიტომ ამ გარდაქმნის შედეგად მიღებული მატრიცა ისევ გადაგვარებული იქნება. მაშასადამე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ არსებობს არანულოვანი y ვექტორი, ისეთი რომ

$$(X^{-1}EX + (D-\mu I))y = 0,$$

$$(D-\mu I)y = (X^{-1}EX)y.$$

იმის გამო, რომ $\mu \notin \sigma(A)$, მატრიცა $(D-\mu I)$ არაგადაგვარებულია. შესაბამისად, არსებობს ამ მატრიცის შებრუნებული და შეგვიძლია დავწეროთ.

$$y = (D-\mu I)^{-1}(X^{-1}EX)y,$$

$$\|y\|_2 \le \left\|(D-\mu I)^{-1}(X^{-1}EX)\right\|_2 \|y\|_2.$$

$$1 \le \left\|(D-\mu I)^{-1}\right\|_2 \left\|(X^{-1}EX)\right\|_2 \quad . \tag{6.11}$$

$$\left\|(D-\mu I)^{-1}\right\|_2 = \max_{\lambda \in \sigma(A)} 1/|\lambda-\mu| = 1/\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda-\mu|.$$

$$\left\|(X^{-1}EX)\right\|_2 \le K_2(X)\|E\|_2.$$

ჩავსვათ ბოლო ორი შეფასება (6.11) უტოლობაში. მივიღებთ:

$$1 \le K_2(X)\|E\|_2 / \min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda-\mu|.$$

ამ უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარის გადამრავლება $\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda-\mu|$ ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.◢

თავი VII. ინტერპოლება და ფუნქციათა მიახლოება

7.1. ინტერპოლების ამოცანის დასმა

საზოგადოდ ინტერპოლების ქვეშ იგულისხმება წინასწარ დასახელებული თვისებების მქონე ისეთი ფუნქციის აგება, რომელიც წინასწარ მოცემულ წერტილებში იღებს წინასწარ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს.

ინტერპოლების ამოცანის მკაცრად მათემატიკური სახით ჩამოყალიბების მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ - კვანძითი წერტილებია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, n ნატურალური რიცხვია, $n \in N$.

$y_0, y_1, \cdots, y_n$ - წინასწარ მოცემული მნიშვნელობებია კვანძით წერტილებში, $y_i \in R, \quad i = \overline{0,n}$;

$\varphi_0(x), \cdots, \varphi_n(x)$ - წრფივად დამოუკიდებელ ბაზისურ ფუნქციათა სისტემაა.

$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$ - ინტერპოლანტია, $a_i \in R$ კოეფიციენტებით.

ამ აღნიშვნების გამოყენებით ინტერპოლების ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

ვიპოვოთ ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ შესრულდეს პირობები:

$$\varphi(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,\cdots,n. \tag{7.1}$$

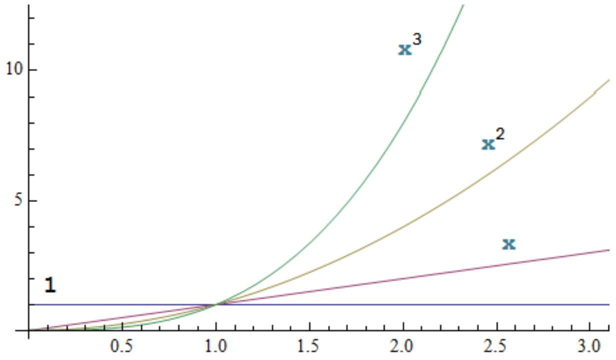
$\varphi(x)$ ინტერპოლანტის თვისებები, მაგალითად, სიგლუვე, განისაზღვრება ბაზისურ ფუნქციათა თვისებებით.

საინტერპოლაციო ფუნქცია შეიძლება აიგოს x–ის ცვლილების მთელი $[x_0, x_n]$ ინტერვალისათვის ან ამ ინტერვალის სხვადასხვა ნაწილებისათვის. პირველ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს გლობალური ინტერპოლება, ხოლო მეორე შემთხვევაში - უბან-უბან (ან ლოკალური) ინტერპოლება.

როგორც წესი, **ინტერპოლება** გამოიყენება კვანძებისგან განსხვავებულ საშუალედო x ($x_0 < x < x_n$) წერტილში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად კვანძით წერტილებში მოცემული მნიშვნელობების მიხედვით. თუმცა ხანდახან საჭიროა ამ მნიშვნელობების გამოყენებით ფუნქციის აპროქსიმაცია განსახილველი შუალედის გარეთ (როცა $x < x_0$ ან $x > x_n$). ასეთ მიახლოებას **ექსტრაპოლაცია** ეწოდება.

7.2. პოლინომიალური ინტერპოლება

პოლინომიალური ინტერპოლების დროს ბაზისური ფუნქციებია $1, x, x^2, \cdots x^n$ ანუ $\varphi_i(x) = x^i, \quad i = \overline{0,n}$.



ნახ. 7.1. $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ ბაზისური ფუნქციების გრაფიკები

ინტერპოლანტი $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ და წარმოადგენს n-ური რიგის პოლინომს:

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

სწორედ ამის გამო ინტერპოლანტის აღნიშვნისთვის ხშირად გამოიყენება ტერმინი - საინტერპოლაციო პოლინომი. პოლინომიალურ ინტერპოლების შემთხვევაში (7.1) პირობას აქვს სახე:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = y_j, \qquad j=\overline{0,n} \ ,$$

რაც გაშლილი სახით გადაიწერება ასე:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0, \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n. \end{cases} \tag{7.2}$$

დებულება 7.1. პოლინომიალური ინტერპოლების ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

დამტკიცება: (7.2) წარმოადგენს $A\vec{a}=\vec{y}$ სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, სადაც $\vec{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^T$ უცნობი ვექტორია, $\vec{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_n)^T$ ცნობილი მარჯვენა მხარეა, ხოლო A წარმოადგენს ე.წ. ვანდერმონდის მატრიცას:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots x_0^n \\ - & - & - & -- \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots x_n^n \end{pmatrix}.$$

როგორც ცნობილია, ვანდერმონდის მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, თუ $x_i \neq x_j$, როცა $i\neq j$, $i,j=\overline{0,n}$. მოცემულობის თანახმად ინტერპოლების კვანძითი წერტილები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე, $\det(A)\neq 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (7.2) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ პოლინომიალური ინტერპოლების ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (ე.ი. არსებობს $a_0,a_1,\cdots,a_n$ კოეფიციენტებით განსაზღვრული ერთადერთი $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ პოლინომი, რომლისთვისაც სრულდება (7.2) პირობები). ◢

საინტერპოლაციო მრავალწევრის აგების მეთოდს, როცა $a_0,a_1,\cdots,a_n$ უცნობი კოეფიციენტები განისაზღვრება (7.2) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის საშუალებით, ეწოდება **განუზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდი**. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მეთოდს სჭირდება საკმაო მოცულობის გამოთვლები, განსაკუთრებით კვანძების დიდი რაოდენობის დროს.

მაგალითი 7.1. ვთქვათ, მოცემულია ინტერპოლების კვანძები $x_0<x_1$ და ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები $y_0=f(x_0)$ და $y_1=f(x_1)$. მათი გამოყენებით, განუზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით, ავაგოთ წრფივი საინტერპოლაციო პოლინომი $P_1(x)=a_0+a_1x$.

a_0 და a_1-ის გამოსათვლელ წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 = f(x_1). \end{cases}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტია $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$. სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$a_0 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}, \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} .$$

ამრიგად,

$$P_1(x) = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot x.$$

გადავწეროთ ეს პოლინომი განსხვავებული ფორმით (იხ. ქვემოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი), გამოვყოთ რა $f(x_0)$ და $f(x_1)$ როგორც მამრავლები:

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

გეომეტრიულად $P_1(x)$ არის წრფე, რომელიც გადის (x, y) სიბრტყის წერტილებზე კოორდინატებით (x_0, y_0) და (x_1, y_1). ამ წრფის განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახითაც (იხ. ქვემოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი):

$$y = P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)..$$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ არსებობს საინტერპოლაციო პოლინომის ჩაწერის სხვადასხვა, ეკვივალენტური ფორმები, რომლებიც სხვადასხვა სიტუაციაშია მოსახერხებელი.

7.3. ლაგრანჟის[1] საინტერპოლაციო პოლინომი

პოლინომიალური ინტერპოლების ამოცანის ამოხსნა კვანძით წერტილთა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში გამოთვლითი თვალსაზრისით საკმაოდ შრომატევადი ამოცანაა, რადგან საინტერპოლაციო პოლინომის კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. თუმცა შეიძლება ამას თავი ავარიდოთ და საინტერპოლაციო პოლინომი სხვა ხერხით ჩავწეროთ (ლაპარაკია ერთიდაიგივე პოლინომის სხვადასხვა ფორმით ჩაწერაზე).

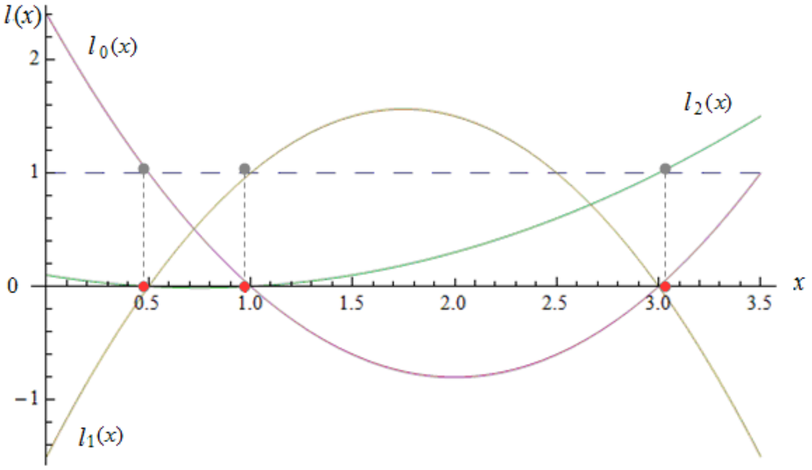
ლაგრანჟის ფორმით ჩაწერილი საინტერპოლაციო პოლინომი ამ თვალსაზრისით უფრო მოსახერხებელია, რადგან ცხადი სახით იწერება. კერძოდ, ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულას აქვს სახე:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_{i,n}(x), \tag{7.3}$$

$$l_{i,n}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \equiv \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}, \quad i = \overline{0, n}, \tag{7.4}$$

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736 –1813) - ფრანგი მათემატიკოსი, http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Lagrange

სადაც $l_{i,n}(x)$ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის ბაზისური ფუნქციებია. ინდექსი n მიუთითებს, რომ თითოეული მათგანი n კვანძითი წერტილისათვის არის ჩაწერილი.



ნახ. 7.2. $l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$ ბაზისური ფუნქციები კვანძებისთვის: 0.5, 1.0, 3.0.

დებულება 7.2.

(I) $L_n(x)$, $l_{i,n}(x)$, $i=\overline{0,n}$, წარმოადგენს n-ური რიგის პოლინომს;

(II) $l_{i,n}(x_k)=\delta_{ik}$, სადაც δ_{ik} კრონეკერის სიმბოლოა;

(III) $L_n(x)$ წარმოადგენს საინტერპოლაციო პოლინომს;

(IV) $L_n(x)$ ემთხვევა პოლინომიალური ინტერპოლების ამოცანის ამონახსნს.

დამტკიცება:

(I) შევნიშნოთ, რომ $l_{i,n}(x)$ განმარტების თანახმად $(x-x_j)$ სახის n თანამამრავლს შეიცავს. (I) გამომდინარეობს (7.3) და (7.4) ფორმულებიდან.

(II)
$$l_{i,n}(x_i)=\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}=1;$$

$$k\neq j,\quad l_{i,n}(x_k)=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}\left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k-1}(x_k-x_j)\right](x_k-x_k)\left[\prod_{\substack{j=k+1\\ j\neq i}}^{n}(x_k-x_j)\right]=0.$$

(III) წინა თვისებებზე დაყრდნობით გვაქვს

$$L_n(x_k)=\sum_{j=0}^{n}y_j l_{n,j}(x_k)=\sum_{j=0}^{n}y_j\delta_{jk}=y_k,\qquad 0\le k\prec n.$$

ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ (7.1) შესრულებულია, რაც (I) თვისების გათვალისწინებით ნიშნავს, რომ $L_n(x)$ საინტერპოლაციო პოლინომია.

(IV) ვთქვათ $P_n(x)$ აგებულია პოლინომიალური ინტერპოლების მეთოდით, ხოლო $L_n(x)$ აგებულია იგივე მონაცემებისთვის ლაგრანჟის მეთოდით. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი.

$P_n(x) \neq L_n(x)$ განვიხილოთ n-ური რიგის პოლინომი $Q(x) = P_n(x) - L_n(x)$. იმის გამო, რომ $P_n(x)$ და $L_n(x)$ ერთიდაიგივე ინტერპოლების ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენენ, მათი მნიშვნელობები კვანძით წერტილებში ერთმანეთს ემთხვევა. მაშასადამე $Q(x_i) = 0, \quad i = \overline{0,n}$. ამრიგად ჩვენი დაშვების შედეგად მივიღეთ, რომ n-ური რიგის პოლინომს აქვს n+1 ნამდვილი (და ერთმანეთისაგან განსხვავებული) ფესვი, რაც ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად შეუძლებელია. ამრიგად დაშვება არასწორია და $L_n(x) \equiv P_n(x)$. ◢

7.4. გაყოფილი სხვაობები

ვთქვათ მოცემულია ცხრილი $(x_i, y_i), \quad i = \overline{0,n}$, სახით. ამასთან ჩავთვალოთ, რომ $x_i \neq x_j$ როცა $i \neq j$. პირველი რიგის გაყოფილი სხვაობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$[x_i, x_k] = \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} \ . \tag{7.5}$$

მაღალი რიგის გაყოფილი სხვაობები განისაზღვრება დაბალი რიგის გაყოფილი სხვაობების გამოყენებით. კერძოდ, p რიგის გაყოფილი სხვაობა განიმარტება შემდეგი ფორმულით

$$\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}\right] = \frac{\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}\right] - \left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p}\right]}{x_i - x_{i+p}}. \tag{7.6}$$

გაყოფილი სხვაობების ჩაწერა შეიძლება ცხრილის საშუალებით:

x_i	y_i	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\cdots$	
x_0	$y_0 = f(x_0)$				
		$[x_0, x_1]$			
x_1	$y_1 = f(x_1)$		$[x_0, x_1, x_2]$		
		$[x_1, x_2]$			
x_2	$y_2 = f(x_2)$				
.	.			$\cdots$	$[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
.	.				
.	.				
x_{n-2}	$y_{n-2} = f(x_{n-2})$				
		$[x_{n-2}, x_{n-1}]$			
x_{n-1}	$y_{n-1} = f(x_{n-1})$		$[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$y_n = f(x_n)$				

ლემა 7.1. სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$\left[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+p}\right] = \sum_{k=i}^{i+p} \frac{y_k}{\prod\limits_{\substack{j=i \\ j \neq k}}^{i+p} (x_k - x_j)} \ . \tag{7.7}$$

დამტკიცება: ვისარგებლოთ მათემატიკური ინდუქციით. (7.7) ფორმულიდან p=1-თვის გვაქვს

$$[x_i,x_{i+1}]=\frac{y_i-y_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}=\frac{y_i}{x_i-x_{i+1}}+\frac{y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\quad .$$

დავუშვათ (7.7) სამართლიანია p-1 რიგის გაყოფილი სხვაობისათვის. მაშინ p რიგის გაყოფილი სხვაობისთვის გვექნება:

$$[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+p}]=\frac{1}{x_i-x_{i+p}}\left([x_i,\cdots,x_{i+p-1}]-[x_{i+1},\cdots,x_{i+p}]\right)=$$

$$=\frac{1}{x_i-x_{i+p}}\left(\sum_{k=i}^{i+p-1}\frac{y_k}{\prod\limits_{j=i,j\neq k}^{i+p-1}(x_k-x_j)}-\sum_{k=i+1}^{i+p}\frac{y_k}{\prod\limits_{j=i+1,j\neq k}^{i+p}(x_k-x_j)}\right)=\frac{y_i}{\prod\limits_{j=i+1}^{i+p}(x_i-x_j)}+$$

$$+\frac{1}{x_i-x_{i+p}}\left(\sum_{k=i+1}^{i+p-1}y_k\left(\frac{1}{\prod\limits_{j=i,j\neq k}^{i+p-1}(x_k-x_j)}-\frac{1}{\prod\limits_{j=i+1,j\neq k}^{i+p}(x_k-x_j)}\right)\right)+\frac{y_{i+p}}{\prod\limits_{j=i}^{i+p-1}(x_{i+p}-x_j)}=$$

$$=\frac{y_i}{\prod\limits_{j=i+1}^{i+p}(x_i-x_j)}+\frac{1}{x_i-x_{i+p}}\sum_{k=i+1}^{i+p-1}y_k\frac{x_k-x_{i+p}-(x_k-x_i)}{\prod\limits_{j=i,j\neq k}^{i+p}(x_k-x_j)}+\frac{y_{i+p}}{\prod\limits_{j=i}^{i+p-1}(x_{i+p}-x_j)}=$$

$$=\sum_{k=i}^{i+p}\frac{y_k}{\prod\limits_{j=i,j\neq k}^{i+p}(x_k-x_j)}.$$

◢

თვისება 7.1. ვთქვათ, $f(x)\in C^n[a,b]$, ე.ი. $f(x)$ ფუნქციას აქვს $[a,b]$ სეგმენტზე n რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები და $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ კვანძითი წერტილებია. მაშინ არსებობს ისეთი $\xi\in[a,b]$ წერტილი, რომლისთვისაც სამართლიანია ტოლობა:

$$[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

დებულება 7.3. გაყოფილი სხვაობის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული მისი არგუმენტების თანმიმდევრობაზე.

დამტკიცება: (7.7) ფორმულის თანახმად გაყოფილ სხვაობაში არგუმენტების თანმიმდევრობის ცვლილებამ შეიძლება გამოიწვიოს მარჯვენა მხარეში შესაკრებთა გადანაცვლება. რადგან შესაკრებთა გადანაცვლებით ჯამი არ იცვლება დებულება დამტკიცებულია.◢

7.5. ნიუტონის[2] საინტერპოლაციო პოლინომი

ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი აღვნიშნოთ $N_n(x)$-ით და ვეძებოთ შედეგი სახით

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}), \quad (7.8)$$

სადაც $a_0, a_1 \cdots a_n$ უცნობი კოეფიციენტებია. ამ კოეფიციენტების საპოვნელად (7.8) ფორმულაში რიგ-რიგობით ჩავსვათ კვანძითი წერტილები $x_0, \cdots x_n$ და მისი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ინტერპოლების (7.1) პირობით. შედეგად მივიღებთ:

$$N_n(x_0) = a_0 = y_0 \quad (7.9)$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \quad (7.10)$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \quad (7.11)$$

და ა.შ.

$$N_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + a_2(x_i - x_0)(x_i - x_1) + \cdots + a_i(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1}) = y_i, \quad (7.12)$$

$i \le n,$

(7.9)-დან განისაზღვრება a_0 კოეფიციენტი. (7.10)-(7.12) განტოლებებში რეალურად მხოლოდ ერთი უცნობია, რადგან დანარჩენი უცნობი კოეფიციენტები რიგით წინ მდგომი განტოლებებიდან განისაზღვრება. კერძოდ, გვაქვს

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = [x_1, x_0] = [x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - [x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{[x_2, x_0] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = [x_2, x_0, x_1] = [x_0, x_1, x_2]$$

....

$$a_i = \frac{y_i - y_0 - [x_0, x_1](x_i - x_0)\cdots - [x_0, ..., x_{i-1}](x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-2})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{i-1}(x_i - x_k)}\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} - [x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2](x_i - x_1) - \ldots - [x_0, x_1, .., x_{i-1}]\prod_{k=1}^{i-2}(x_i - x_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{i-1}(x_i - x_k)}\left([x_i, x_0] - [x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2](x_i - x_1) - \ldots - [x_0, x_1, .., x_{i-1}]\prod_{k=1}^{i-2}(x_i - x_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=2}^{i-1}(x_i - x_k)}\left(\frac{[x_i, x_0] - [x_0, x_1]}{x_i - x_1} - [x_0, x_1, x_2] - \ldots - [x_0, x_1, .., x_{i-1}]\prod_{k=2}^{i-2}(x_i - x_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=2}^{i-1}(x_i - x_k)}\left([x_i, x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2] - \ldots - [x_0, x_1, .., x_{i-1}]\prod_{k=2}^{i-2}(x_i - x_k)\right) =$$

---

[2] Sir Isaac Newton (1642–1727) – ინგლისელი მეცნიერი, http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

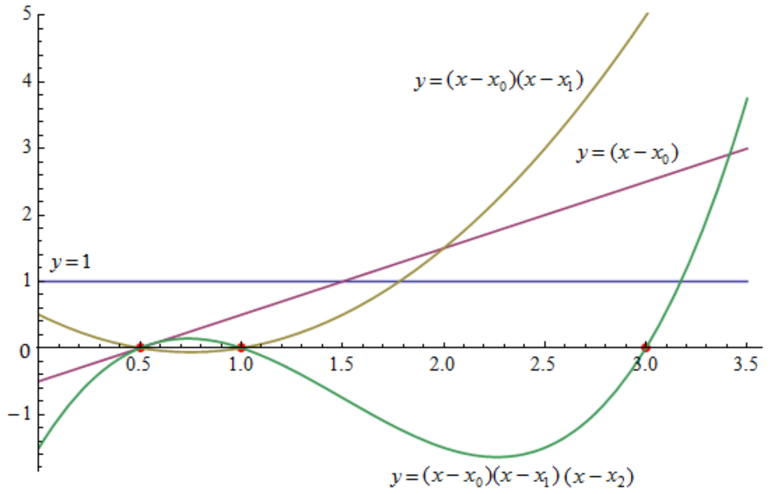
$$= \frac{1}{\prod_{k=3}^{i-1}(x_i - x_k)} \left(\frac{[x_i, x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2]}{x_i - x_2} - [x_0, x_1, x_2, x_3](x_i - x_3) - \ldots - [x_0, x_1, .., x_{i-1}] \prod_{k=3}^{i-2}(x_i - x_k) \right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=3}^{i-1}(x_i - x_k)} \left([x_i, x_0, x_1, x_2] - [x_0, x_1, x_2, x_3](x_i - x_3) - \ldots - [x_0, x_1, .., x_{i-1}] \prod_{k=3}^{i-2}(x_i - x_k) \right) = \cdots =$$

$$= \frac{[x_i, x_0, x_1, \ldots, x_{i-2}] - [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}} = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i].$$

ამრიგად,

$$N_n(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [x_0, x_1, .., x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$



ნახ.7.3. ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომის ბაზისური ფუნქციები კვანძებისთვის: 0.5, 1.0, 3.0.

ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი შეიძლება გადავწეროთ გამოთვლების ჩასატარებლად უფრო მოსახერხებელი “nested” ფორმით:

$$N_n(x) = y_0 +$$
$$+ (x - x_0)\Big([x_0, x_1] + (x - x_1)\big([x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_{n-2})\big([x_0, x_1, .., x_{n-1}] + (x - x_{n-1})[x_0, x_1, .., x_n]\big)\cdots\big)\Big).$$

ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრის გამოყენება ხელსაყრელია, როცა სხვადახვა მიზეზის გამო (მაგ. ინტერპოლების სიზუსტის გაზრდის მიზნით) საჭირო ხდება კვანძების მოცემული სისტემისათვის ახალი კვანძების დამატება, რადგან თითოეული კვანძის დამატება იწვევს ამ მრავალწევრისთვის ერთი შესაკრების დამატებას (ამ შემთხვევაში გამოიყენება ადრე ჩატარებული გამოთვლები), მაშინ როცა ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის შემთხვევაში საჭირო ხდება გამოთვლების მთლიანად თავიდან ჩატარება. თუმცა ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის გამოყენება მოსახერხებელია იმ შემთხვევაში, როცა ფიქსირებული გვაქვს კვანძების სიმრავლე და საინტერპოლაციო მრავალწევრი აიგება სხვადასხვა ფუნქციისათვის.

7.6. მრავალწევრების მნიშვნელობის გამოთვლის შესახებ

ფუნქციათა აპროქსიმაციის დროს, აგრეთვე ზოგიერთ სხვა ამოცანაში, გვიხდება შემდეგი სახის პოლინომის მნიშვნელობათა გამოთვლა:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \qquad (7.13)$$

თუ გამოთვლებს "პირდაპირ" ჩავატარებთ, n-ის დიდი მნიშვნელობის დროს ოპერაციათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის ჩატარება დაგვჭირდება (კერძოდ, $n^2 + n/2$ გამრავლება და n შეკრება). გარდა ამისა, ამან შეიძლება მიგვიყვანოს სიზუსტის დაკარგვამდე დამრგვალების ცდომილებათა გამო. (7.13) მრავალწევრის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ x-ის ახარისხების თავიდან აცილების მიზნით მრავალწევრი მიზანშეწონილია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\cdots)).$$

ასეთი ფორმით ჩაწერილი მრავალწევრის გამოთვლის სქემას **ჰორნერის სქემა** ეწოდება. მრავალწევრის მნიშვნელობა გამოითვლება შემდეგი ალგორითმით: თავდაპირველად $P = a_n$; შემდეგ, ყოველი i-სთვის (n-1)-დან 0-მდე ბიჯით (-1) გამოითვლება $P = a_i + xP$.

მაგალითი 7.2. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ცხრილის საშუალებით

n	0	1	2	3	4
x_n	0	2	3	5	6
$f(x_n)$	1	3	2	5	6

ავაგოთ $f(x)$ ფუნქციისათვის ლაგრანჟის და ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრები.

ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრის (7.3) ფორმულას, მივიღებთ:

$$L_4(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{(0-2)(0-3)(0-5)(0-6)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)(x-6)}{2(2-3)(2-5)(2-6)} \cdot 3 +$$

$$+ \frac{x(x-2)(x-5)(x-6)}{3(3-2)(3-5)(3-6)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)(x-6)}{2(5-2)(5-3)(5-6)} \cdot 5 + \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{6(6-2)(6-3)(6-5)} \cdot 6 =$$

$$= -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1.$$

ახლა ამავე $f(x)$ ფუნქციისათვის ავაგოთ ნიუტონის საინტერპოლაციო მრავალწევრი. ჯერ შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის გაყოფილი სხვაობების ცხრილი:

x	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4})$
0	<u>1</u>				
		<u>1</u>			
2	3		<u>-2/3</u>		
		−1		<u>3/10</u>	
3	2		5/6		<u>-11/120</u>
		3/2		-1/4	
5	5		-1/6		
		1			
6	6				

ცხრილში ხაზგასმული გაყოფილი სხვაობები წარმოადგენს ნიუტონის პოლინომის კოეფიციენტებს. მართლაც,

$$P_4(x) = 1 + x \cdot 1 + x(x-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + x(x-2)(x-3) \cdot \frac{3}{10} + x(x-2)(x-3)(x-5) \cdot \left(-\frac{11}{120}\right).$$

თუ მიღებულ მრავალწევრს გავამარტივებთ და დავალაგებთ x-ის ხარისხების კლების მიხედვით, დავინახავთ, რომ $P_4(x)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრი დაემთხვევა $L_4(x)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრს.

7.7. ბარიცენტრული ლაგრანჟის ინტერპოლება

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულას აქვს რამდენიმე მნიშვნელოვანი ნაკლი:

1. ლაგრანჟის $L_n(x)$ საინტერპოლაციო პოლინომის მნიშვნელობის გამოთვლას x წერტილში სჭირდება $O(n^2)$ არითმეტიკული ოპერაცია, რაც გაცილებით მეტია ნიუტონის $N_n(x)$ საინტერპოლაციო პოლინომის მნიშვნელობის გამოთვლისთვის საჭირო $O(n)$ არითმეტიკული ოპერაციასთან შედარებით.
2. ახალი კვანძითი წერტილის დამატება და, აქედან გამომდინარე, პოლინომის რიგის ერთით გაზრდა მოითხოვს ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულაში შემავალი სიდიდეების ხელახლა გამოთვლას. ამის საპირისპიროდ, ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულაში ახალი კვანძითი წერტილის დამატების დროს $N_n(x)$ პოლინომის კოეფიციენტები კვლავ გამოიყენება $N_{n+1}(x)$ პოლინომში.
3. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომით წარმოებული რიცხვითი ფორმულები არამდგრადია, განსაკუთრებით დიდი n–ებისთვის.

ყოველივე ზემოთქმულის გამო ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა **კლასიკური** სახით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკულ გამოთვლებში და მას ძირითადად თეორიული მიზნით იყენებენ.

აღნიშნული ნაკლისგან თავისუფალია ლაგრანჟის ბარიცენტრული ფორმულა, რომელიც ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომის განსხვავებული სახით ჩაწერისას მიიღება.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$w_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}, \qquad i = \overline{0,n}.$$

შევნიშნოთ, რომ $l_i(x)$ (ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომის ბაზისური ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით:

$$l_i(x) = w(x)\frac{w_i}{x - x_i}.$$

მაშინ

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot y_i = \sum_{i=0}^{n} w(x)\frac{w_i}{x - x_i} \cdot y_i = w(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} \cdot y_i .$$

ამრიგად, მივიღეთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა პირველი ფორმით

$$L_n(x) = w(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} \cdot y_i . \qquad (7.14)$$

იგივურად ერთის ტოლი ფუნქციის n–ური რიგის ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომით ინტერპოლებისას გვაქვს:

$$1 \equiv L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot 1 = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

(ახსენით რატომ?). მეორე მხრივ,

$$1 \equiv L_n(x) = w(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad w(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad w(x) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i}}.$$

უკანასკნელი თანაფარდობის გამოყენება ჩვენს მიერ უკვე მიღებულ (7.14) ფორმულაში გვაძლევს ლაგრანჟის ბარიცენტრულ ფორმულას

$$L_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} \cdot y_i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i}}.$$

ლაგრანჟის ბარიცენტრულ ფორმულა არის მდგრადი გამოთვლებს თვალსაზრისით, წერტილში მნიშვნელობის გამოსათვლელად საჭიროა მხოლოდ $O(n)$ არითმეტიკული ოპერაცია, ახალი x_{n+1} კვანძითი წერტილის დამატებისას w_i, $i = \overline{0,n}$, წონები ძალიან მარტივად გამოითვლება. კერძოდ, ალგორითმი შემდეგია:

1. $w_i := (x_i - x_{n+1})^{-1} \cdot w_i, \quad i = \overline{0,n}$,
2. $w_{n+1} = [(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)]^{-1}$.

ლაგრანჟის ბარიცენტრულ ფორმულას დიდი უპირატესობა აქვს ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულასთან შედარებით. კერძოდ, ბარიცენტრული ფორმულის წონები დამოკიდებული არ არის ფუნქციის მნიშვნელობებზე, მაშინ როცა ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულის კოეფიციენტები – გაყოფილი სხვაობები არსებითად არის დამოკიდებული ფუნქციის მნიშვნელობებზე.

წონები თანაბრად დაშორებული კვანძითი წერტილების შემთხვევაში. იმის გათვალისწინებით, რომ $x_j - x_k = (j-k)h$, სადაც h მეზობელ კვანძებს შორის მანძილია, $(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n) = (-1)^{n-j} j!(n-j)! h^n$, შეგვიძლია დავწეროთ $w_j = \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)! h^n}$, რაც $n!$–ზე გამრავლების და გაყოფის შედეგად მიიღებს სახეს:

$$w_j = (-1)^{n-j} \frac{\binom{n}{j}}{n!! h^n}.$$

სადაც $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ბინომის კოეფიციენტია.

7.8. პოლინომიალური ინტერპოლების ბაზისური ფუნქციები.

ჩვენ განვიხილეთ სამი მეთოდი საინტერპოლაციო პოლინომის ასაგებად. მიღებული პოლინომები ერთმანეთს ემთხვევა, ისინი მხოლოდ ჩაწერის ფორმით განსხვავდება. ამის ერთ-ერთი მიზეზი ის არის, რომ ყველა ეს მეთოდი განსხვავებულ ბაზისურ ფუნქციებს იყენებს.

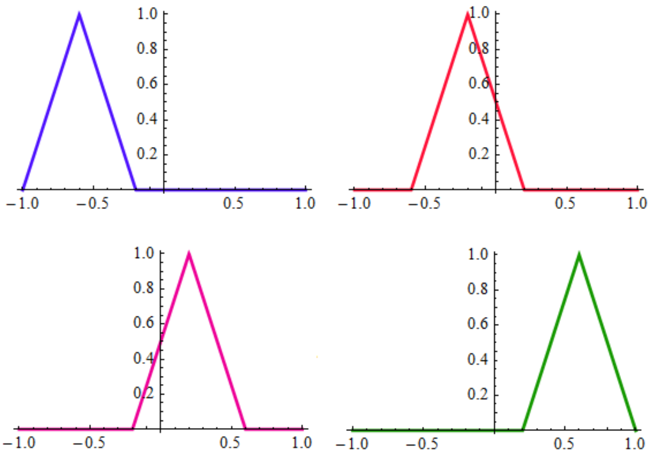
ქვემოთ მოცემულია პოლინომიალური ინტერპოლების სამივე მეთოდის შესაბამისი ბაზისური ფუნქციები:

- ბაზისი - $1, x, x^2, \cdots x^n$ $\rightarrow$ ფორმულა: $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, (იხ.ნახ. 1)
- ბაზისი - $l_i(x)=\dfrac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}$ $\rightarrow$ ფორმულა: $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$, (იხ.ნახ. 2)
- ბაზისი - $n_0(x)=1,\quad n_i(x)=\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$ $\rightarrow$ ფორმულა: $N_n(x)=\sum_{i=0}^{n}[x_0,\cdots x_i]n_i(x)$, (იხ.ნახ. 3)

გარდა ამისა, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შემდეგი ბაზისები:

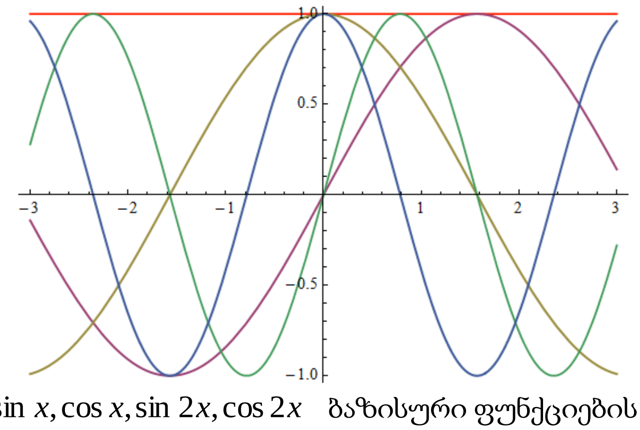
- ე.წ. „ქუდი“ ფუნქციების ბაზისი - $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_3(x), \dots$ (იხ.ნახაზი 4), სადაც

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}), & x_{i-1}\le x\le x_i\\ (x-x_{i+1})/(x_i-x_{i+1}), & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0, \quad x<x_{i-1}, & x>x_{i+1}\end{cases}\qquad i=0,1,\dots,n.$$



ნახ. 7.4. ბაზისური „ქუდი“ ფუნქციების გრაფიკები

- ბაზისი - $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$ (იხ.ნახაზი 5)



ნახ. 7.5. $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ ბაზისური ფუნქციების გრაფიკები

7.9. პოლინომიალური ინტერპოლების ცდომილება, საინტერპოლაციო პროცესის კრებადობა

დებულება 7.4. ვთქვათ $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, $P_n(x)$ არის $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ კვანძით წერტილებზე აგებული საინტერპოლაციო პოლინომი. მაშინ კვანძითი წერტილებისგან განსხვავებული ნებისმიერი *x*-თვის [*a,b*] მონაკვეთიდან მოიძებნება ისეთი $\xi\in[a,b]$, რომ სამართლიანია ფორმულა:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega(x).$$

დამტკიცება. რადგან $P_n(x)$ *n*-ური რიგის საინტერპოლაციო პოლინომია, ამიტომ $P_n(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$. განვიხილოთ ფუნქცია $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. ცხადია, $R_n(x)$ ფუნქცია განსაზღვრავს მოცემულ *x* წერტილში პოლინომიალური ინტერპოლების ცდომილებას. ინტერპოლების ამოცანის არსიდან გამომდინარე ცხადია, რომ კვანძით წერტილებში ცდომილება არის ნული: $R_n(x_i)=0$, $i=\overline{0,n}$. შევაფასოთ ცდომილება სხვა წერტილებში. ვთქვათ, $t\in[a,b]$ და *t* განსხვავებულია კვანძითი წერტილებისგან. განვსაზღვროთ *k* კონსტანტა შემდეგნაირად:

$$k=\frac{f(t)-P_n(t)}{\varpi(t)},\qquad \varpi(t)=(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n).$$

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=f(x)-P_n(x)-k\varpi(x).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\varphi(x_i)=0$, $i=\overline{0,n}$, და $\varphi(t)=0$. ანუ $\varphi(x)$ ფუნქცია ისეთნაირადაა განსაზღვრული, რომ [*a,b*] მონაკვეთზე ის ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ *n*+2 წერტილში, ანუ აქვს *n*+2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი. ამ ფაქტზე დაყრდნობით და როლის თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\varphi'(x)$ ფუნქციას გააჩნია *n*+1 ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი [*a,b*] მონაკვეთზე. ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი $\xi\in[a,b]$, რომ $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$. ცხადია, *n*-ური რიგის პოლინომის *n*+1 რიგის წარმოებული არის ნული, ანუ $P_n^{(n+1)}(x)=0$; ერთის ტოლი მთავარი კოეფიციენტის მქონე *n*+1 რიგის პოლინომის *n*+1 რიგის წარმოებული არის (*n*+1)!, ანუ $\varpi_n^{(n+1)}(x)=(n+1)!$. ამრიგად გვაქვს

$$f^{(n+1)}(\xi)-k(n+1)!=0.$$

ჩავსვათ ამ უკანასკნელ ტოლობაში *k* და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $R_n(t)$ ფუნქციის მიმართ. მივიღებთ: $R_n(t)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\varpi(t)$, სადაც *t* ნებისმიერი წერტილია [*a,b*]-დან ისეთი, რომ არ ემთხვევა კვანძით წერტილებს. ◢

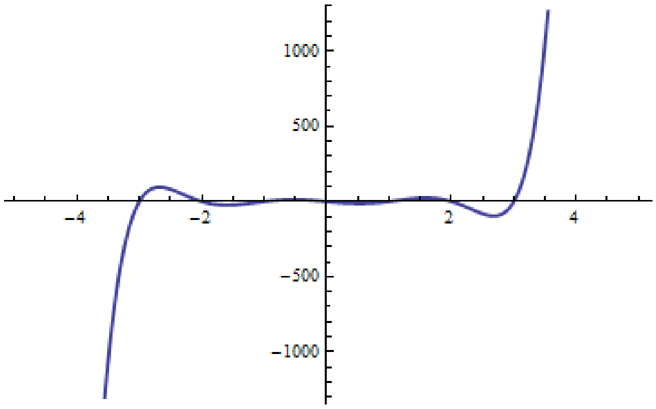
შედეგი. $|R_n(x)|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$, $M_{n+1}=\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, $x\in[a,b]$.

ცდომილების შეფასების ზემოთ მოყვანილი ფორმულიდან ჩანს, რომ პოლინომიალური ინტერპოლების სიზუსტე დამოკიდებულია რამდენიმე ფაქტორზე:

- პოლინომის რიგზე, რადგან შეფასებაში შედის *n*-ის ფაქტორიალი;
- კვანძითი წერტილების $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ განლაგებაზე, რადგან შეფასებაში შედის $\omega(x)$;

- იმ ფუნქციის წარმოებულზე, რომლის მიახლოებასაც ვპოულობთ ინტერპოლაციის საშუალებით, რადგან შეფასებაში შედის $f^{(n+1)}(x)$.

ცდომილების კონკრეტული მნიშვნელობა x წერტილში დამოკიდებულია $\omega(x)$ პოლინომის მნიშვნელობაზე x წერტილში. ინტერპოლების მონაკვეთის საზღვრებს გარეთ (ანუ ექსტრაპოლაციის დროს) $|\omega(x)|$ ძალიან სწრაფად იზრდება, ხოლო ინტერპოლაციის მონაკვეთის შუა წერტილის მიდამოში ექსტრემალური მნიშვნელობები ნაკლებია. $\omega(x)$ -ის გრაფიკის თვისობრივი ხასიათი ილუსტრირებულია შემდეგ ნახაზზე.



ნახ.7.6. $\omega(x)$ ფუნქცია 7 კვანძის შემთხვევაში. ინტერპოლების შუალედია [-3, 3]. შუალედის გარეთ $|\omega(x)|$ ფუნქცია ძალიან სწრაფად იზრდება

დებულება 7.5 (საინტერპოლაციო პოლინომის ცდომილების შეფასება გაყოფილი სხვაობების გამოყენებით). ვთქვათ, $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, ხოლო $N_n(x)$ არის $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ კვანძით წერტილებზე აგებული ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი. მაშინ კვანძითი წერტილებისგან განსხვავებული ნებისმიერი x -თვის $[a,b]$ მონაკვეთიდან სამართლიანია ფორმულა:

$$R_n(x) = [x_0, x_1, \cdots x_n, x]\varpi_n(x).$$

დამტკიცება: ავაგოთ ნიუტონის ორი საინტერპოლაციო პოლინომი $N_n(x)$ და $N_{n+1}(x)$, შესაბამისად n და $n+1$ რიგის. ორივე საინტერპოლაციო პოლინომი დააკმაყოფილებს ინტერპოლების პირობას – დამეთხვევა f ფუნქციის მნიშვნელობებს შესაბამისად $n+1$ და $n+2$ კვანძით წერტილში.

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2,\cdots,n;$$

$$N_{n+1}(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2,\cdots,n; \quad x \neq x_i; \quad N_{n+1}(x) = f(x);$$

$$N_{n+1}(t) = N_n(t) + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n),$$

$$N_{n+1}(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

$$f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\varpi_n(x).$$ ◢

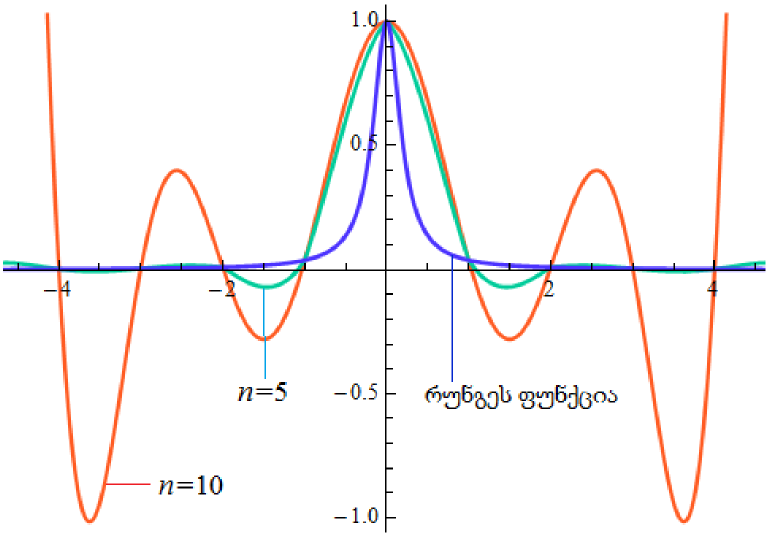
ბუნებრივად ისმის კითხვა: რა ემართება ინტერპოლების ცდომილებას კვანძით წერტილთა უსასრულოდ გაზრდის შემთხვევაში? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ფაბერისა და მარცინკევიჩის თეორემები, რომელთაც დამტკიცების გარეშე მოვიყვანთ. ასევე განვიხილავთ ერთ მაგალითს.

თვისება 7.2. (ფაბერის თეორემა) როგორიც არ უნდა იყოს კვანძით წერტილთა ბადეების მიმდევრობა $[a,b]$ მონაკვეთზე, მოიძებნება $f(x) \in C[a,b]$ ისეთი, რომ შესაბამისი

საინტერპოლაციო პოლინომთა მიმდევრობა $P_n(x)$ არ იკრიბება თანაბრად $f(x)$-კენ, როცა $n \to \infty$.

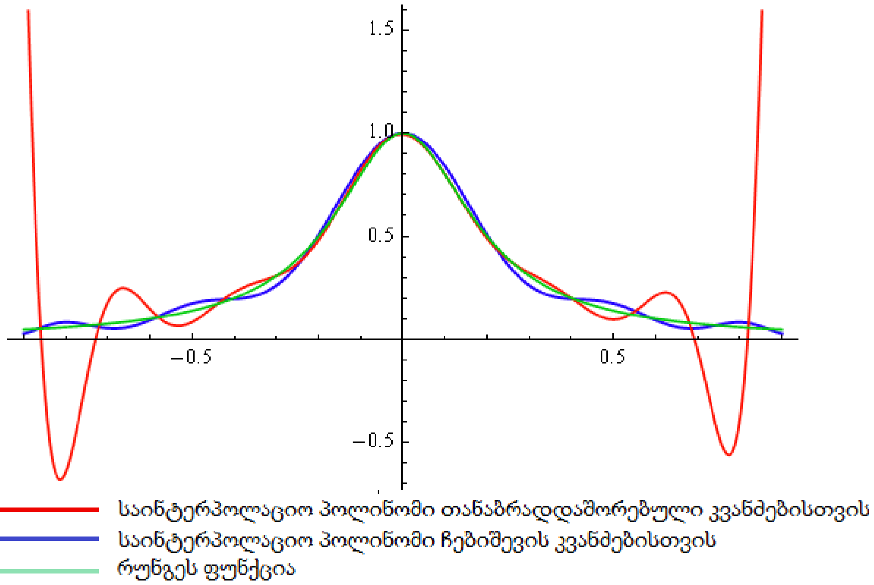
თვისება 7.3. (მარცინკევიჩის თეორემა) თუ $f(x) \in C[a,b]$ მაშინ მოიძებნება კვანძით წერტილთა ბადეების ისეთი მიმდევრობა, რომ შესაბამის საინტერპოლაციო პოლინომთა მიმდევრობა $P_n(x)$ თანაბრად იკრიბება $f(x)$-კენ $[a,b]$-ზე, როცა $n \to \infty$.

მაგალითი 7.3. n-ის ფაქტორიალი და $\omega(x)$ n-ის ზრდასთან ერთად ამცირებენ ცდომილებას, მაგრამ წარმოებულის რიგი იზრდება. მრავალი ფუნქციისთვის M_{n+1} უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე $(n+1)!$. ამის გამო პოლინომიალური ინტერპოლანტები იშვიათად იკრიბება ჩვეულებრივი უწყვეტი ფუნქციისაკენ. ამ ფაქტის პრაქტიკული ეფექტი მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის საინტერპოლაციო პოლინომის ყოფაქცევა შეიძლება იყოს „ცუდი“ კვანძითი წერტილებისაგან განსხვავებულ წერტილებში. ამიტომ პრაქტიკაში ხშირად იყენებენ ინტერპოლანტებს, რომელთა რიგი არ აღემატება 5-6-ს. მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ რუნგეს[3] ფუნქცია $f(x)=1/(1+25x^2)$, რომლის გრაფიკი მოყვანილია ნახ.7-ზე. თანაბრადდაშორებული კვანძებისათვის აგებული საინტერპოლაციო პოლინომს რიგის ზრდასთან ერთად ახასიათებს ოსცილაციები შუალედის ბოლოებისაკენ, რაც განპირობებულია იმით, რომ $f(x)$-ის წარმოებულები სწრაფად იზრდება. მიახლოებათა სიზუსტე შეიძლება გავაუმჯობესოთ, თუ შევცვლით კვანძითი წერტილების განლაგებას ინტერვალზე. უმარტივეს შემთხვევაში განხილული თანაბრადდაშორებული კვანძები შეიძლება არ აღმოჩნდეს ოპტიმალური საუკეთესო მიახლოების თვალსაზრისით. პოლინომიალური ინტერპოლებისთვის კვანძების ოპტიმალურ განლაგებას $[a, b]$ შუალედზე გვაძლევს ე.წ. ჩებიშევის ფორმულა $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ (იხ. ქვემოთ, ნახ.8).



ნახ.7.7. რუნგეს ფუნქცია და საინტერპოლაციო პოლინომები n=5 და n=10-სთვის, თანაბრადდაშორებული კვანძებისთვის, [-5,5] შუალედზე

[3] Carl David Tolmé Runge (1856–1927) – გერმანელი მათემატიკოსი, http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_David_Tolmé_Runge



ნახ. 7.8. რუნგეს ფუნქცია და მისთვის აგებული საინტერპოლაციო პოლინომები. პოლინომების რიგი n=14, ინტერპოლების შუალედია [-1,1]

7.10. ჩებიშევის[4] მრავალწევრი [-1,1] მონაკვეთზე

განვიხილოთ ამოცანა: 1-ის ტოლი მთავარი კოეფიციენტის მქონე პოლინომებს შორის ვიპოვოთ ნულისაგან მინიმალურად გადახრილი პოლინომი [-1,1]-ზე, ანუ ვიპოვოთ $T_n(x)$ მრავალწევრი, ისეთი რომ $\max|T_n(x)|$, $T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, $x \in [-1,1]$, არის მინიმალური. ამ ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს ჩებიშევის მრავალწევრი.

ლემა 7.2. $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$ წარმოადგენს x-ის მიმართ n-ური რიგის პოლინომს.

დამტკიცება: ტრიგონომეტრიიდან ცნობილი ფორმულის

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

თანახმად გვექნება: $\cos\big((n+1)\arccos x\big) + \cos\big((n-1)\arccos x\big) = 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x)$, საიდანაც მივიღებთ რეკურენტულ თანაფარდობას:

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2P_n(x)\cdot x \quad \Rightarrow \quad P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) \tag{7.15}$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ ტოლობების გათვალისწინებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $P_n(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს n-ური რიგის მრავალწევრს $P_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$. ◢

$P_n(x)$ მრავალწევრის საშუალებით განვსაზღვროთ $T_n(x)$ მრავალწევრი, რომლის უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია

$$T_n(x) = 2^{1-n}P_n(x).$$

$T_n(x)$-ს **ჩებიშევის მრავალწევრი** ეწოდება. შევისწავლოთ ჩებიშევის მრავალწევრის ზოგიერთი თვისება. ამ პოლინომის ჩაწერის ტრიგონომეტრიული ფორმა მოსახერხებელია პოლინომის ფესვების თვისებათა შესწავლისათვის. მართლაც,

[4] Пафну́тий Льво́вич Чебышёв (1821–1894) – რუსი მათემატიკოსი, http://en.wikipedia.org/wiki/Pafnuty_Chebyshev

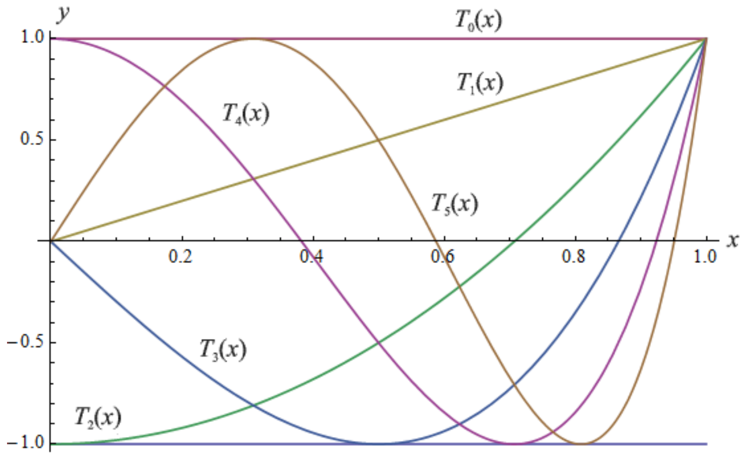
$T_n(x)$ -ის ნულებია $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$. (7.16)

$T_n(x)$ ექსტრემუმს აღწევს წერტილებში: $x_k^{'} = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,\cdots,n$.

ამასთან, $T_n(x_k^{'}) = (-1)^k 2^{1-n}$, $k = 0,1,2,\cdots n$. ცხადია, სამართლიანია ტოლობა

$$\|T_n\|_C = \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 2^{1-n}.$$

თვისება 7.4. ყოველი n-სთვის $T_n(x)$ ჩებიშევის მრავალწევრის ფესვები ნამდვილია, მარტივია, მოთავსებულია ინტერვალში (-1,1) და გამოისახება (7.16) ფორმულით.



ნახ.7.9. ჩებიშევის პირველი ექვსი პოლინომის გრაფიკი [0, 1]-ზე

დებულება 7.6. ვთქვათ, $Q_n(x)$ n-ური რიგის პოლინომია 1-ის ტოლი მთავარი კოეფიციენტით. ვთქვათ არსებობს ისეთი $(n+1)$ წერტილი, რომ

$$-1 \le x_0^{'} < x_1^{'} < \cdots < x_n^{'} \le 1, \qquad |Q_n(x_k^{'})| = \|Q_n\|_C, \quad k = \overline{0,n}, \qquad \text{სადაც } \|\cdot\|_C = \max_{x\in[-1,1]} |Q_n(x)|,$$

და ამ წერტილებში $Q_n(x)$ ნიშანს იცვლის $Q_n(x_k^{'}) = -1\cdot Q_n(x_{k+1}^{'})$. მაშინ იმ მრავალწევრებს შორის, რომლის უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, $Q_n(x)$ ნულისაგან უმცირესად გადახრილი მრავალწევრია $[-1;1]$ მონაკვეთზე ($\|Q_n\|_C = \max_{x\in[-1,1]} |Q_n(x)|$ ყველაზე მინიმალურია).

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს ანალოგიური თვისებების მქონე სხვა პოლინომი $\tilde{Q}_n(x)$, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\|\tilde{Q}_n\|_C < \|Q_n\|_C,$$

ანუ $\tilde{Q}_n(x)$ უფრო მცირედ არის გადახრილი ნულისაგან, ვიდრე $Q_n(x)$. მაშინ $[-1;1]$ მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილში შესრულდება უტოლობა

$$|\tilde{Q}_n(x)| < \|Q_n\|_C, \quad x \in [-1,1]. \tag{7.17}$$

განვიხილოთ სხვაობა $R(x) = Q_n(x) - \tilde{Q}_n(x)$.

$$R(x_k^{'}) = Q_n(x_k^{'}) - \tilde{Q}_n(x_k^{'}), \quad k = \overline{0,n}.$$

(7.17)-ის გამო $R(x_k^{'})$-ის ნიშანი ემთხვევა $Q_n(x_k^{'})$-ის ნიშანს. ანუ $R(x_k^{'})$ იცვლის ნიშანს $[x_k^{'}, x_{k+1}^{'}]$, $k = \overline{0,n-1}$ ინტერვალზე, რაც ნიშნავს, რომ ამ ინტერვალზე $R(x)$-ს აქვს ფესვი, აქედან გამომდინარეობს, რომ [-1,1]-ზე $R(x)$ აქვს n ფესვი. იმის გამო, რომ $Q_n(x)$-ს და $\tilde{Q}_n(x)$-ის

უფროსი კოეფიციენტები 1-ის ტოლია, $R(x)$ შეიძლება წარმოადგენდეს ყველაზე დიდი n-1 რიგის პოლინომს. ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად n-1 რიგის პოლინომს არ შეიძლება გააჩნდეს n ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი. ამრიგად მივიღეთ, რომ $R(x)\equiv 0$ და, მაშასადამე, დაშვების შესრულება შეუძლებელია.◢

შედეგი. იმ მრავალწევრებს შორის, რომლის უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, ჩებიშევის მრავალწევრი $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n\arccos x)$ ნულისაგან უმცირესად გადახრილი მრავალწევრია [-1,1] მონაკვეთზე.

დამტკიცება: ჩებიშევის მრავალწევრი $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n\arccos x)$ წარმოადგენს n-ური რიგის მრავალწევრს 1-ის ტოლი მთავარი კოეფიციენტით.

$\|T_n(x)\|_C=2^{1-n}$ და ეს მნიშვნელობა [-1,1] სეგმენტზე მიიღწევა $x_k^{'}=\cos\dfrac{k\pi}{n}$, $k=0,1,\cdots,n$, წერტილებში. რადგან $T_n(x_k^{'})=(-1)^k 2^{1-n}$, $k=0,1,2,\cdots n$, ამ n+1 წერტილში $T_n(x)$ მონაცვლეობით იცვლის ნიშანს $T_n(x_k^{'})=-1\cdot T_n(x_{k+1}^{'})$. ამრიგად, ჩებიშევის პოლინომი აკმაყოფილებს წინა დებულების პირობებს და, შესაბამისად, იგი წარმოადგენს ნულისაგან უმცირესად გადახრილ პოლინომს [-1,1]-ზე. ◢

ზოგჯერ საჭიროა ავაგოთ ისეთი მრავალწევრი, რომლის უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია და რომელიც უმცირესადაა გადახრილი ნულისაგან $[a,b]$ მონაკვეთზე. ეს ამოცანა ზემოთ განხილულ ამოცანაზე დაიყვანება ჩასმით

$$x=\frac{2}{b-a}t-\frac{b+a}{b-a}$$

($a\le t\le b$ მონაკვეთი გადაჰყავს $-1\le x\le 1$ მონაკვეთში). ასეთი ჩასმის შემდეგ მრავალწევრი $P_n(x)=\cos(n\arccos x)$ მიიღებს სახეს

$$\tilde{P}_n(t)=\cos\left(n\arccos\frac{2t-(b+a)}{b-a}\right).$$

$\tilde{P}_n(t)$ მრავალწევრი აკმაყოფილებს (7.15) რეკურენტული დამოკიდებულების ანალოგიურ დამოკიდებულებას:

$$\tilde{P}_{n+1}(t)=2\left(\frac{2t-(b+a)}{b-a}\right)\tilde{P}_n(t)-\tilde{P}_{n-1}(t)\ .$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\tilde{P}_0(t)=1,\ \ \tilde{P}_1(t)=\frac{2}{b-a}t-\frac{b+a}{b-a},\ \text{დავადგენთ}\ \tilde{P}_n(t)=\frac{2^{2n-1}}{(b-a)^n}t^n+\cdots\ .$$

ახლა განვიხილოთ მრავალწევრი

$$\tilde{T}_n(t)=\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(n\arccos\frac{2t-(b+a)}{b-a}\right),\quad t\in[a,b]\ ,$$

რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია. $\tilde{T}_n(t)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ჩებიშევის მრავალწევრი. ყველა იმ მრავალწევრს შორის, რომლის უფროსი კოეფიციენტია ერთი, იგი ნულისგან უმცირესად გადახრილი მრავალწევრია.

$\tilde{T}_n(t)$ მრავალწევრის ფესვები წარმოადგენს

$$\frac{2t-(b+a)}{b-a}=\cos\left(\frac{\pi/2+\pi k}{n}\right),\qquad k=0,\cdots,n-1,$$

განტოლებების ამონახსნებს. შედეგად გვაქვს,

$$t_k=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},\quad \text{ანუ}\quad t_k=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_k,\quad k=0,1,\ldots,n-1\ ,$$

სადაც x_k წარმოადგენს $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n\arccos x)$ მრავალწევრის ფესვებს.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{T}_n(x)$ მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს იღებს შემდეგ წერტილებში

$$t'_k=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi k}{n},\quad k=0,1,\cdots,n\ ,$$

ხოლო ამ მრავალწევრის ნულისაგან მაქსიმალური გადახრა ტოლია სიდიდისა

$$\left\|\tilde{T}_n\right\|_C=\max_{t\in[a,b]}\left|\tilde{T}_n\ (t)\right|=\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

7.11. კვანძების ოპტიმალური შერჩევა პოლინომიალური ინტერპოლების ამოცანაში

გავიხსენოთ, რომ პოლინომიალური ინტერპოლებისას ნაშთითი წევრის ფორმულაში მონაწილეობს პოლინომი $\varpi_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, რომლის მთავარი კოეფიციენტი ერთის ტოლია. თუ ეს კვანძითი წერტილები შერჩეულია ისე, რომ ემთხვევა ჩებიშევის პოლინომის ფესვებს, მაშინ $\varpi_{n+1}(x)$ შეგვიძლია შევაფასოთ ჩებიშევის პოლინომის მაქსიმუმით. კერძოდ,

$$\left|\varpi_{n+1}(x)\right|\le\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

შესაბამისად, ნაშთითი წევრის ფორმულის შესავსებად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\max\left|f^{n+1}(x)\right|,\qquad x\in[a,b].$$

7.12. ინტერპოლება ჯერადი კვანძებით. ერმიტის[1] საინტერპოლაციო პოლინომი

ინტერპოლების ამოცანის უფრო **ზოგადი დასმა** მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია ინტერპოლების კვანძები $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ და ყოველ x_k კვანძში ცნობილია როგორც ფუნქციის მნიშვნელობა, ისე ამ ფუნქციის წარმოებულების მნიშვნელობა m_k-1 რიგის ჩათვლით:

$$f(x_k), \quad f'(x_k), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad f^{(m_k-1)}(x_k).$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში უნდა შესრულდეს პირობა $f(x) \in C^p[a,b]$, სადაც $p = \max\{m_0 - 1, \quad m_1 - 1, \quad . \quad . \quad . \quad , \quad m_n - 1\}$. თუ განვიხილავთ ყველა კვანძს, სულ მოცემული იქნება $m_0 + m_1 + \cdots + m_n$ რაოდენობის სიდიდე ($f(x)$ ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები ბადის წერტილებში). უნდა ავაგოთ ისეთი N-ური რიგის მრავალწევრი $H_N(x)$, $N = m_0 + m_1 + \cdots + m_n - 1$, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$H_N(x_0) = f(x_0), H'_N(x_0) = f'(x_0), \ldots, H_N^{(m_0-1)}(x_0) = f^{(m_0-1)}(x_0),$$
$$H_N(x_1) = f(x_1), H'_N(x_1) = f'(x_1), \ldots, H_N^{(m_1-1)}(x_1) = f^{(m_1-1)}(x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_N(x_n) = f(x_n), H'_N(x_n) = f'(x_n), \ldots, H_N^{(m_n-1)}(x_n) = f^{(m_n-1)}(x_n),$$

$H_N(x)$ მრავალწევრს, რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობებს, ეწოდება **ერმიტის** საინტერპოლაციო მრავალწევრი $f(x)$ ფუნქციისათვის, m_i- რიცხვს კი ეწოდება x_i კვანძის ჯერადობა. სწორედ ამიტომ განხილულ ამოცანას უწოდებენ ინტერპოლებას ჯერადი კვანძებით.

ამოცანის დასმა მოკლედ შეიძლება ასე ჩავწეროთ: ვთქვათ, მოცემულია $(x_i, f^{(k)}(x_i))$, $k = \overline{0, m_i - 1}$; $i = \overline{0, n}$, სადაც $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. ვიპოვოთ $N = \sum_{i=0}^{n} m_i - 1$ რიგის პოლინომი, ისეთი რომ შესრულდეს პირობები:

$$H_N^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = \overline{0, m_i - 1}; \quad i = \overline{0, n}. \tag{7.18}$$

ჩავწეროთ $H_N(x)$ შემდეგი სახით

$$H_N(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N,$$

სადაც $a_0, \cdots, a_N$ უცნობი კოეფიციენტებია. დავამტკიცოთ, რომ მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელსაც $[a,b]$ სეგმენტზე სათანადო სიგლუვე გააჩნია, არსებობს ერთადერთი ერმიტის საინტერპოლაციო მრავალწევრი.

დებულება 7.7. ერმიტის საინტერპოლაციო პოლინომი არსებობს და ერთადერთია.

დამტკიცება: $H_N(x)$ წარმოადგენს N-ური რიგის მრავალწევრს:

$$H_N(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N.$$

[1] Charles Hermite (1822 –1901) - ფრანგი მათემატიკოსი, http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite

ინტერპოლების (7.18) პირობების გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $a_0, a_1, ..., a_N$ კოეფიციენტების მიმართ:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_N x_0^N = f(x_0) \\ a_1 + 2a_2x_0 + \cdots + Na_N x_0^{N-1} = f'(x_0) \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_N x_1^N = f(x_1) \\ a_1 + 2a_2x_1 + \cdots + Na_N x_1^{N-1} = f'(x_1) \\ \cdots\cdots \end{cases} \qquad (7.19)$$

(7.19) განტოლებათა სისტემაში განტოლებების რაოდენობა ტოლია უცნობების რაოდენობის, ანუ ($m_0 + m_1 + \cdots + m_n$)-ის. იმისათვის რომ დავამტკიცოთ (7.19) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (7.19)-ის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$.

განვიხილოთ (7.19)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა

$$H_N^{(k)}(x_i) = 0, \quad k = \overline{0, m_i - 1}; \quad i = \overline{0, n}. \qquad (7.20)$$

ცხადია (7.20) სისტემას აქვს ერთი ამონახსნი მაინც, კერძოდ, მას აკმაყოფილებს ტრივიალური ამონახსენი $a_0 = a_1 = \cdots a_N = 0$. ვაჩვენოთ, რომ ეს ამონახსენი ერთადერთია. (7.20) პირობები ნიშნავს, რომ x_i კვანძითი წერტილი წარმოადგენს $H_N(x)$ პოლინომის m_i ჯერადობის ფესვს. ანუ N რიგის პოლინომს უნდა გააჩნდეს $\sum_{i=0}^{n} m_i = N + 1$ რაოდენობის ნამდვილი ფესვი. ეს კი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა პოლინომი იგივურად ნულის ტოლია. რაც ასევე თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $a_i = 0, \quad i = \overline{0, N}$. ანუ (7.20) ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

შესაბამისად (7.20) არაერთგვაროვანი ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი არსებობს. ◢

ვეძიოთ ერმიტის საინტერპოლაციო პოლინომი შემდეგი სახით

$$H_N(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m_i - 1} y_i^k L_{ik}(x),$$

სადაც $y_i^k = f^{(k)}(x_i)$. ლაგრანჟის ფორმულის ანალოგიურად, $L_{ik}(x)$ პოლინომები ისე უნდა შეირჩეს, რომ შესრულდეს პირობა

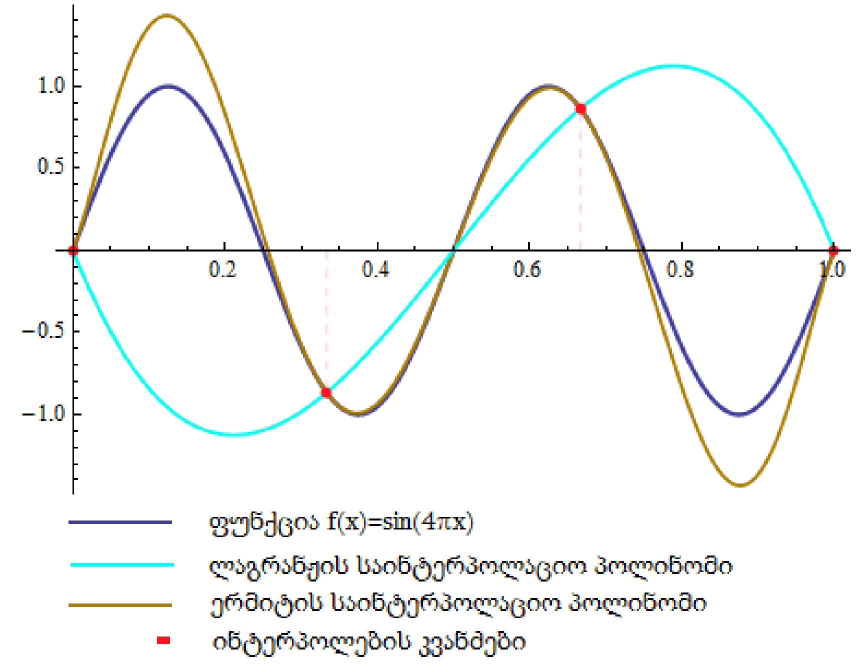
$$\frac{d^p}{dx^p} L_{ik}(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ და } k = p \\ 0, & \text{წ. შ.} \end{cases}.$$

თუ განვსაზღვრავთ პოლინომებს

$$l_{ij}(x) = \frac{(x - x_i)^j}{j!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)^{m_k}, \quad i = \overline{0, n} \quad j = \overline{0, m_i - 1},$$

და დავუშვებთ, რომ $L_{im_i - 1}(x) = l_{im_i - 1}(x), \quad i = \overline{0, n},$ მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას L_{ij} პოლინომებისთვის

$$L_{ij}(x)=l_{ij}(x)-\sum_{k=j+1}^{m_i-1} l_{ij}^{(k)}(x_i)L_{ik}(x), \qquad j=m_i-2,\, m_i-3, \cdots, 0\,.$$



ნახ. 7.10. ლაგრანჟის და ერმიტის საინტერპოლაციო ფუნქციები
n=3 შემთხვევაში f(x)=sin(4πx) ფუნქციისათვის [0,1] შუალედზე

დებულება 7.8. ვთქვათ, $f(x)\in C^{N+1}[a,b]$ და $H_N(x)$ არის (7.18) ამოცანის ამოხსნის შესაბამისი ერმიტის საინტერპოლაციო პოლინომი. მაშინ კვანძითი წერტილებისგან განსხვავებული ნებისმიერი x-თვის $[a,b]$ მონაკვეთიდან მოიძებნება ისეთი $\xi\in[a,b]$, რომ ერმიტის საინტერპოლაციო ფორმულის ცდომილებისათვის სამართლიანია ფორმულა:

$$R_{H,N}(x)\equiv f(x)-H_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\Omega_{N+1}(x)$$

$$\Omega_{N+1}(x)=(x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_n)^{m_n}$$

დამტკიცება: ჯერადი ინტერპოლების ამოცანის დასმიდან გამომდინარე ცხადია, რომ კვანძით წერტილებში ცდომილების ფუნქცია და მისი გარკვეული რიგის წარმოებულები იღებენ ნულის ტოლ მნიშვნელობას, ანუ გვაქვს $R^{(k)}{}_{H,N}(x_i)=0, \quad k=\overline{0,m_i-1}, \quad i=\overline{0,n}$. შევაფასოთ ცდომილება სხვა წერტილებში. ვთქვათ, $t\in[a,b]$ და t განსხვავებულია კვანძითი წერტილებისგან. განვსაზღვროთ C კონსტანტა შემდეგნაირად

$$C=\frac{f(t)-H_N(t)}{\Omega_{N+1}(t)}.$$

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=f(x)-H_N(x)-C\cdot\Omega_{N+1}(x)\,.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\varphi^{(k)}(x_i)=0, \quad k=\overline{0,m_i-1}; \quad i=\overline{0,n}$ და $\varphi(t)=0$. ანუ $\varphi(x)$ ფუნქცია ისეთნაირადაა განსაზღვრული, რომ $[a,b]$ მონაკვეთზე მას აქვს $N+2$ ფესვი. ამ ფაქტზე დაყრდნობით და როლის თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\varphi'(x)$ ფუნქციას გააჩნია N+1 ფესვი $[a,b]$ მონაკვეთზე. ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ,

რომ არსებობს ისეთი $\xi \in [a,b]$, რომ $\varphi^{(N+1)}(\xi)=0$. ცხადია, N რიგის პოლინომის N+1 რიგის წარმოებული არის ნული, ანუ $H_N^{(N+1)}(x)=0$; ერთის ტოლი მთავარი კოეფიციენტის მქონე N+1 რიგის პოლინომის N+1 რიგის წარმოებული არის (N+1)!, ანუ $\Omega_{N+1}^{(N+1)}(x)=(N+1)!$. ამრიგად გვაქვს

$$f^{(N+1)}(\xi)-C(N+1)!=0.$$

ჩავსვათ ამ უკანასკნელ ტოლობაში C და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $R_{H,N}(x)$ ფუნქციის მიმართ. შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას. ◢

მაგალითი 7.4. ვთქვათ, $x_0 < x_1$ ინტერპოლების კვანძებია $[a,b]$ სეგმენტზე, რომლებშიც მოცემულია მნიშვნელობები $f(x_0)=f_0$, $f(x_1)=f_1$ და $f'(x_1)=f_1'$. ავაგოთ ერმიტის მეორე რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრი $H_2(x)$, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$H_2(x_0)=f_0, \quad H_2(x_1)=f_1, \quad H_2'(x_1)=f_1'. \tag{7.21}$$

$H_2(x)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$H_2(x)=c_0(x)f_0+c_1(x)f_1+b_1(x)f_1', \tag{7.22}$$

სადაც $c_0(x)$, $c_1(x)$, $b_1(x)$ წარმოადგენს მეორე რიგის მრავალწევრებს. (7.22) სახის $H_2(x)$ მრავალწევრი დააკმაყოფილებს (7.21) პირობებს, თუ შესრულებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} &c_0(x_0)=1, \quad c_1(x_0)=0, \quad b_1(x_0)=0,\\ &c_0(x_1)=0, \quad c_1(x_1)=1, \quad b_1(x_1)=0,\\ &c_0'(x_1)=0, \quad c_1'(x_1)=0, \quad b_1'(x_1)=1. \end{aligned} \tag{7.23}$$

ამრიგად, უნდა ვიპოვოთ მეორე რიგის მრავალწევრები $c_0(x)$, $c_1(x)$, $b_1(x)$, რომლებიც აკმაყოფილებს (7.23) პირობებს.

ჯერ ავაგოთ $c_0(x)$ მრავალწევრი. ჩვენ ვხედავთ, რომ მას აქვს ორჯერადი ფესვი x_1. ამიტომ, ეს მრავალწევრი შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$c_0(x)=\lambda(x-x_1)^2.$$

$c_0(x_0)=1$ პირობიდან მივიღებთ, რომ $\lambda=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2}$, ე.ი. $c_0(x)$ მრავალწევრს, რომელიც აკმაყოფილებს (7.23) პირობებს, აქვს სახე

$$c_0(x)=\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}.$$

ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ $b_1(x)$ მრავალწევრი:

$$b_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)}.$$

რაც შეეხება $c_1(x)$ მრავალწევრს, ეს მრავალწევრი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$c_1(x)=(x-x_0)(\alpha x+\beta),$$

სადაც α და β მუდმივებია, რომელიც განისაზღვრება პირობებიდან:

$$c_1(x_1)=1, \quad c_1'(x_1)=0.$$

ეს უკანასკნელი პირობები გვაძლევს განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases}\alpha x_1+\beta=\dfrac{1}{(x_1-x_0)}\\ \alpha(2x_1-x_0)+\beta=0\end{cases}$$

რომლის ამოხსნითაც მივიღებთ:

$$\alpha=-\frac{1}{(x_1-x_0)^2},\qquad \beta=\frac{2x_1-x_0}{(x_1-x_0)^2}.$$

საბოლოოდ,

$$c_1(x)=\frac{(x-x_0)(2x_1-x_0-x)}{(x_1-x_0)^2}.$$

ამრიგად, საძიებელ ერმიტის მრავალწევრს აქვს შემდეგი სახე:

$$H_2(x)=\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(2x_1-x_0-x)}{(x_1-x_0)^2}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)}f'(x_1).$$

ერმიტის საინტერპოლაციო მრავალწევრის ნაშთითი წევრის ზოგადი გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$|f(x)-H_2(x)|\le\frac{M_3}{3!}\max_{x\in[a,b]}\left|(x-x_0)(x-x_1)^2\right|,\ \text{სადაც}\quad M_3=\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(3)}(\xi)\right|.$$

მაგალითი 7.7. ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი ცხრილი:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1	3	5
1	2	4	-

განუზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდით $f(x)$ ფუნქციისათვის ავაგოთ ერმიტის საინტერპოლაციო მრავალწევრი. რადგან $m_0=2$, $m_1=1$, $m_0+m_1-1=3-1=2$, ამიტომ ამ მონაცემებზე აიგება მეორე რიგის ერმიტის საინტერპოლაციო მრავალწევრი:

$$H_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.$$

ინტერპოლების პირობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\begin{cases}H_2(x_0)=f(x_0),\\ H_2'(x_0)=f'(x_0),\\ H_2(x_1)=f(x_1).\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=f(x_0),\\ a_1+2a_2x_0=f'(x_0),\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f(x_1).\end{cases}$$

თუ შევიტანთ ცხრილის მონაცემებს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას a_0, a_1, a_2 უცნობი კოეფიციენტების მიმართ:

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2=3,\\ a_1+2a_2=5,\\ a_0+2a_1+4a_2=4.\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad a_0=-6,\quad a_1=13,\quad a_2=-4.$$

ამრიგად, საძიებელ მეორე რიგის ერმიტის საინტერპოლაციო მრავალწევრს ექნება სახე:

$$H_2(x)=-6+13x-4x^2.$$

აგების თანახმად, იგი აკმაყოფილებს ცხრილურ მონაცემებს.

7.12. ინტერპოლება რაციონალური ფუნქციებით

ზოგიერთ შემთხვევაში ხელსაყრელია ინტერპოლანტის როლში არა პოლინომის, არამედ რაციონალური ფუნქციის გამოყენება. რაციონალური ფუნქციებით ინტერპოლების ამოცანა შემდეგნაირად ყალიბდება:

მოცემული k და l ნატურალური რიცხვებისათვის ვიპოვოთ რაციონალური ფუნქცია

$$\varphi_{kl}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{l-1} x^{l-1} + x^l} \tag{7.24}$$

ისეთი, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\varphi_{kl}(x_i) = f(x_i), \qquad i = \overline{0,n}, \qquad a < x_0 < \cdots < x_n = b \tag{7.25}$$

დავადგინოთ თანაფარდობა k, l და n-ს შორის. $\varphi_{kl}(x)$ ცალსახად განისაზღვრება a_i, $i = \overline{0,k}$ და b_i, $i = \overline{0,l-1}$ კოეფიციენტებით, ანუ სულ გვაქვს $1+k+l$ კოეფიციენტი. ამ კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის მოცემული გვაქვს $n+1$ პირობა. მაშასადამე, მოცემული პირობების შესაბამისად k და l უნდა შეირჩეს ისე, რომ შესრულდეს $k+l=n$ ტოლობა.

გადავწეროთ (7.25) სისტემა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის სახით. ამისათვის გავამრავლოთ ორივე მხარე $\varphi_{kl}(x_i)$-ს მნიშვნელზე და დავაჯგუფოთ უცნობების შემცველი წევრები მარცხენა მხარეში, ხოლო ცნობილი წევრები მარჯვენა მხარეში. შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{m=0}^{k} a_m x_i^m + \sum_{m=0}^{l-1} b_m x_i^m f(x_i) = x_i^l \cdot f(x_i), \qquad i = \overline{0,n}\ . \tag{7.26}$$

(7.26) ამოხსნის შედეგად მიღებული a_m, $m = \overline{0,k}$ და b_m, $m = \overline{0,l-1}$ კოეფიციენტები განსაზღვრავენ $\varphi_{kl}(x)$ ინტერპოლანტს. აქვე ყურადღება უნდა მიექცეს შემდეგ საკითხებს:

1. იმისათვის, რომ $\varphi_{kl}(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული იყოს $[a,b]$ მონაკვეთზე b_m, $m = \overline{0,l-1}$ კოეფიციენტები უნდა იყოს ისეთი, რომ $\varphi_{kl}(x)$ ფუნქციის მნიშვნელი არ ხდებოდეს ნულის ტოლი $[a,b]$ მონაკვეთზე. ცხადია, ეს თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $x^l + \sum_{m=0}^{l-1} b_m x^m$ ნიშანგანსაზღვრულია $[a,b]$ მონაკვეთზე.

2. $k>l$ შემთხვევაში პოლინომი $\sum_{m=0}^{k} a_m x^m$ არ უნდა იყოფოდეს უნაშთოდ $x^l + \sum_{m=0}^{l-1} b_m x^m$ პოლინომზე, რადგან ამ შემთხვევაში რაციონალური ფუნქციებით ინტერპოლების ამოცანა დაიყვანება პოლინომიალური ინტერპოლების ამოცანაზე და ინტერპოლანტის $\varphi_{kl}(x)$ სახით ძიებას აზრი არა აქვს.

3. იმ შემთხვევაში, თუ პოლინომებს $x^l + \sum_{m=0}^{l-1} b_m x^m$ და $\sum_{m=0}^{k} a_m x^m$ გააჩნიათ საერთო გამყოფი, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ k და l მნიშვნელობები გადასახედია, იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ $\varphi_{kl}(x)$ ფუნქციის მრიცხველის და მნიშვნელის გამოსათვლელად გაუმართლებლად მაღალი რიგის პოლინომების გამოყენება.

7.13. პადეს[2] აპროქსიმაცია რაციონალური ფუნქციებით

ამოცანის დასმა: ცნობილია სიდიდეები $f(x_0), f'(x_0), \cdots, f^n(x_0)$. ვიპოვოთ რაციონალური ფუნქცია

$$P_l^k(x) = \frac{a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_k(x-x_0)^k}{1 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_l(x-x_0)^l}, \quad k + l = n, \tag{7.27}$$

რომელიც განაზოგადებს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის წაკვეთილ ტეილორის მწკრივს იგივე რაოდენობის კოეფიციენტებით:

$$T_{k+l}(x) = \sum_{j=0}^{k+l} d_j (x-x_0)^j, \tag{7.28}$$

სადაც d_i ტეილორის მწკრივის ცნობილი კოეფიციენტებია. ვითხოვთ, რომ შესრულდეს პირობა

$$T_n(x) - P_k^l(x) = O(x-x_0)^{n+1}. \tag{7.29}$$

((7.27) და (7.28) გამოსახულებები ერთი და იგივე იქნება, როცა k = 0). წაკვეთილი ტეილორის მწკრივის (7.28) გამოსახულებიდან განისაზღვრება შესაბამისი პადეს კოეფიციენტები. მართლაც, (7.29) გადავწეროთ სახით:

$$\frac{a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_k(x-x_0)^k}{1 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_l(x-x_0)^l} = \sum_{j=0}^{k+l} d_j (x-x_0)^j + O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

და ამოვწეროთ განტოლებები a_i, $i = \overline{0,k}$ და b_i, $i = \overline{1,l}$ უცნობი კოეფიციენტების საპოვნელად. ამისათვის გავამრავლოთ მარჯვენა მხარე $1 + \sum_{i=1}^{l} b_i (x-x_0)^i$-ზე და დავაჯგუფოთ წევრები $(x-x_0)$-ის ხარისხების მიხედვით. ჩანაწერის გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა: $z = x - x_0$. შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i z^i = \left(1 + \sum_{i=1}^{l} b_i z^i\right) \sum_{i=0}^{n} d_i z^i + O\left(z^{n+1}\right).$$

გავუტოლოთ ტოლობის ორივე მხარის კოეფიციენტები. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} a_0 = d_0 \\ a_1 = d_1 + d_0 b_1 \\ a_2 = d_2 + d_1 b_1 + d_0 b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k = d_k + d_{k-1} b_1 + \cdots + d_0 b_k \end{cases} \tag{7.30}$$

$$\begin{cases} d_{k+1} + d_k b_1 + \cdots + d_{k-l+1} b_l = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{k+l} + d_{k+l-1} b_1 + \cdots + d_k b_l = 0 \end{cases} \tag{7.31}$$

[2] Henri Padé (1863 –1953) - ფრანგი მათემატიკოსი, http://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Padé

კოეფიციენტების საპოვნელად თავდაპირველად იხსნება (7.31) სისტემა კვადრატული მატრიცით $b_1,\cdots,b_l$ უცნობების მიმართ, ხოლო შემდეგ ნაპოვნი მნიშვნელობები ისმება (7.30)-ში, საიდანაც ცხადად განისაზღვრება $a_1,\cdots,a_k$ კოეფიციენტები.

მაგალითი 7.6. მოცემულია $T_5(x)$, $x_0=0$. ააგეთ $P_3^2(x)$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში k = 3, l = 2. მოვითხოვოთ, რომ შესრულდეს პირობა:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}=d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+d_4x^4+d_5x^5+O(x^6).$$

გავამრავლოთ წილადის მნიშვნელი მარჯვენა მხარეზე და ერთმანეთს გავუტოლოთ ტოლობის ორივე მხარის კოეფიციენტები (x^5-ის ჩათვლით). მივიღებთ შემდეგ 6 განტოლებას:

$$\begin{cases}a_0=d_0\\ a_1=d_1+d_0b_1\\ a_2=d_2+d_1b_1+d_0b_2\end{cases}$$

$$-----------------$$

$$\begin{cases}d_3+d_2b_1+d_1b_2+d_0b_3=0\\ d_4+d_3b_1+d_2b_2+d_1b_3=0\\ d_5+d_4b_1+d_3b_2+d_2b_3=0\end{cases}$$

რადგან d-ები ცნობილია, ამიტომ ქვედა სამი განტოლება წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას b-ების მიმართ განტოლებებისა და უცნობების ტოლი რაოდენობით. ამ სისტემის ამოხსნის შემდეგ a-ები ცხადი ფორმულებით გამოითვლება ზედა სამი განტოლებიდან.

ამოხსნის იგივე სტრატეგია მუშაობს k და l-ის ნებისმიერი მნიშვნელობებისთვის (კერძოდ, b-ების მიმართ ყოველთვის შეიძლება წრფივ განტოლებათა სისტემის მიღება განტოლებებისა და უცნობების ტოლი რაოდენობით).

7.11 ნახაზზე მოყვანილია სხვადასხვა რიგის პადეს აპროქსიმანტი $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}\Big/\sqrt{2\pi}$ ფუნქციისათვის, როცა x_0=0.

მაგალითი 7.7. ავაგოთ $f(x)=e^x$ ფუნქციის პადეს აპროქსიმანტი, როცა $k=2,\ \ l=3,\ \ x_0=0$. ამისთვის დაგვჭირდება ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები მეხუთე ($k+l=2+3$) რიგის ჩათვლით. ცხადია, $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(5)}(0)=1$, ამიტომ $f(x)=e^x$ ფუნქციის შესაბამის წაკვეთილ ტეილორის მწკრივს ექნება სახე:

$$T_5(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+O(x^6).$$

მოვითხოვოთ, რომ შესრულდეს პირობა:

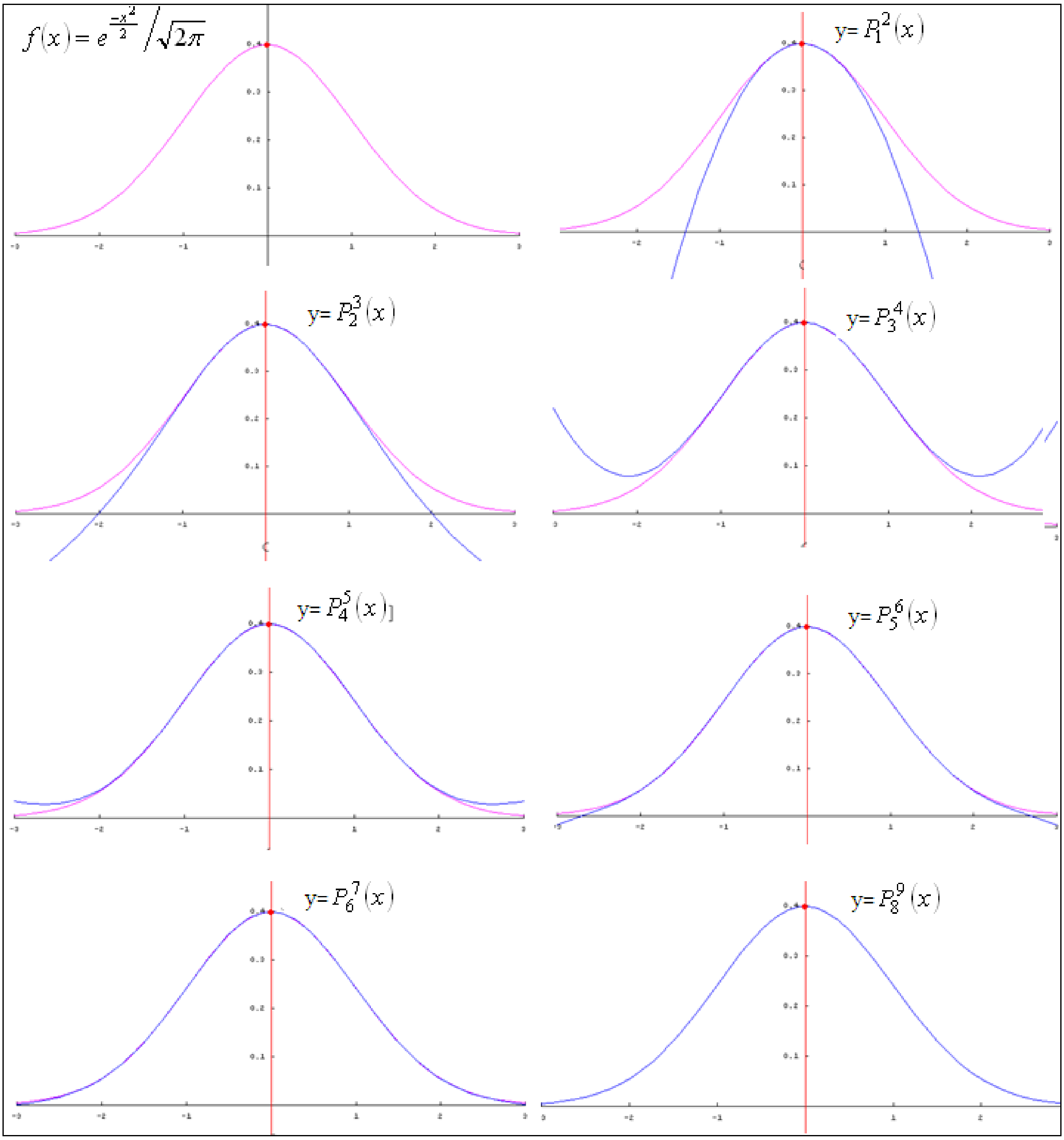
$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+O(x^6).$$

გავამრავლოთ წილადის მნიშვნელი მარჯვენა მხარეზე:

$$a_0+a_1x+a_2x^2=(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 + (1 + b_1)x + \left(\frac{1}{2} + b_1 + b_2\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}b_1 + b_2 + b_3\right)x^3 +$$

$$+\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3\right)x^4 + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{24}b_1 + \frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_3\right)x^5 + (\cdots)x^6 + (\cdots)x^7 + (\cdots)x^8.$$



ნახ. 7.11. $e^{\frac{-x^2}{2}} \Big/ \sqrt{2\pi}$ ფუნქციის (წითელი ხაზი) და პადეს აპროქსიმანტის (ლურჯი ხაზი) გრაფიკი სხვადასხვა k და l-სთვის, როცა $x_0=0$.

ერთმანეთს გავუტოლოთ ტოლობის ორივე მხარის კოეფიციენტები (x^5-ის ჩათვლით), $O\left(x^6\right)$ რიგის წევრებს უგულებელვყოფთ. მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 + b_1 \\ a_2 = \frac{1}{2} + b_1 + b_2 \end{cases}$$

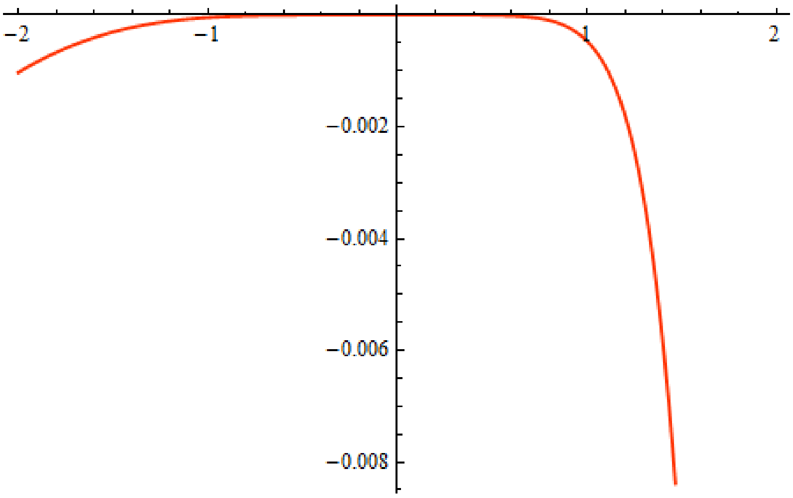
–––––––––––––––––––

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 = \frac{1}{24} + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 \\ 0 = \frac{1}{120} + \frac{1}{24}b_1 + \frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \end{cases}$$

ქვედა სისტემიდან ვიპოვით b_1, b_2, b_3 კოეფიციენტებს: $b_1 = -\frac{3}{5}, b_2 = \frac{3}{20}, b_3 = -\frac{1}{60}$, ხოლო $a_0 = 1, a_1 = \frac{2}{5}, a_2 = \frac{1}{20}$. მაშინ შესაბამის პადეს აპროქსიმანტს ექნება სახე:

$$P_3^2(x) = \frac{1 + \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{20}}{1 - \frac{3x}{5} + \frac{3x^2}{20} - \frac{x^3}{60}}.$$

ქვემოთ მოყვანილია ცდომილების გრაფიკი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ, $x_0=0$ წერტილის მიდამოში e^x ფუნქციის და $P_3^2(x)$ პადეს აპროქსიმანტის გრაფიკები ერთმანეთს, ფაქტიურად, ემთხვევა.



ნახ. 7.12. ცდომილების გრაფიკი ©^{x}-ის პადეს აპროქსიმანტისათვის, როცა k=2, l=3, x_0=0.

7.14. უბან-უბან ინტერპოლება

ნაშთითი წევრის შეფასება (იხ.დებულება 7.4 და მისი შედეგი) მიღებულია იმ დაშვებებში, რომ $f(x)$ ფუნქცია არის $(n+1)$-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი. თუმცა ყოველთვის არა გვაქვს საქმე ასეთი სიგლუვის მქონე ფუნქციებთან. სწორედ ამ მიზეზით გამოიყენება უბან-უბან ინტერპოლება. მისი არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ფუნქციის მიახლოების გამოსათვლელად x წერტილში იგება დაბალი რიგის პოლინომი ცხრილის იმ წერტილებზე, რომლებიც ახლოს არის x-თან. მოვიყვანოთ ზოგიერთი შემთხვევა.

ა) **უბან-უბან წრფივი ინტერპოლება.** ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ $f(x)$-ის მნიშვნელობა $x \in [x_i, x_{i+1}]$ წერტილში. გამოიყენება წრფივი მიახლოება

$$f(x) \approx f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) = L_1^{(i-1)}(x) \ .$$

ცხადია, $[a,b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია შეიცვლება $\varphi(x)$ ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

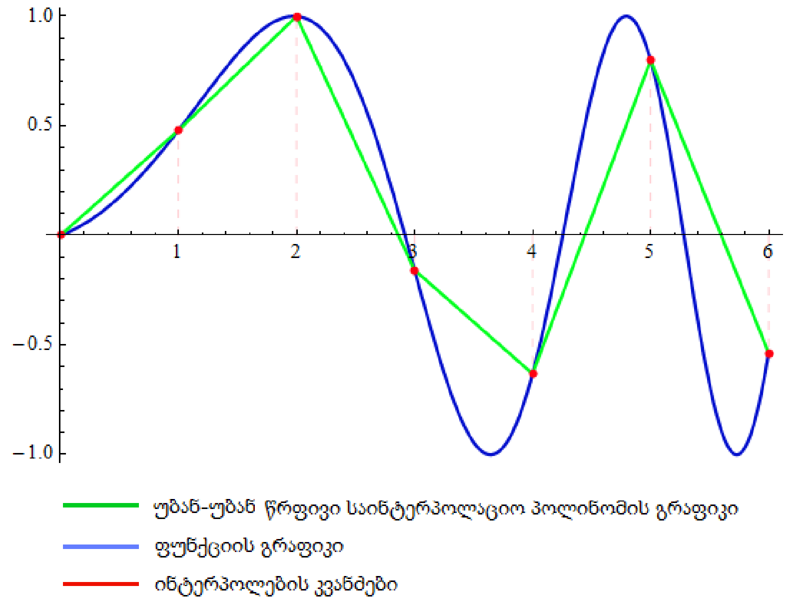
$$\varphi(x) = \begin{cases} L_1^{(0)}(x), & \text{თუ} \quad x \in [x_0, x_1], \ x_0 = a. \\ L_1^{(1)}(x), & \text{თუ} \quad x \in [x_1, x_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ L_1^{(n-1)}(x), & \text{თუ} \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \ x_n = b. \end{cases}$$

ცდომილების ფუნქცია განსაზღვრული იქნება შემდეგნაირად:

$$R(x) = \begin{cases} R_1^{(0)}(x), & \text{თუ} \quad x \in [x_0, x_1], \ x_0 = a. \\ R_1^{(1)}(x), & \text{თუ} \quad x \in [x_1, x_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ R_1^{(n-1)}(x), & \text{თუ} \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \ x_n = b. \end{cases}$$

სადაც $R_1^{(i)}(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$.

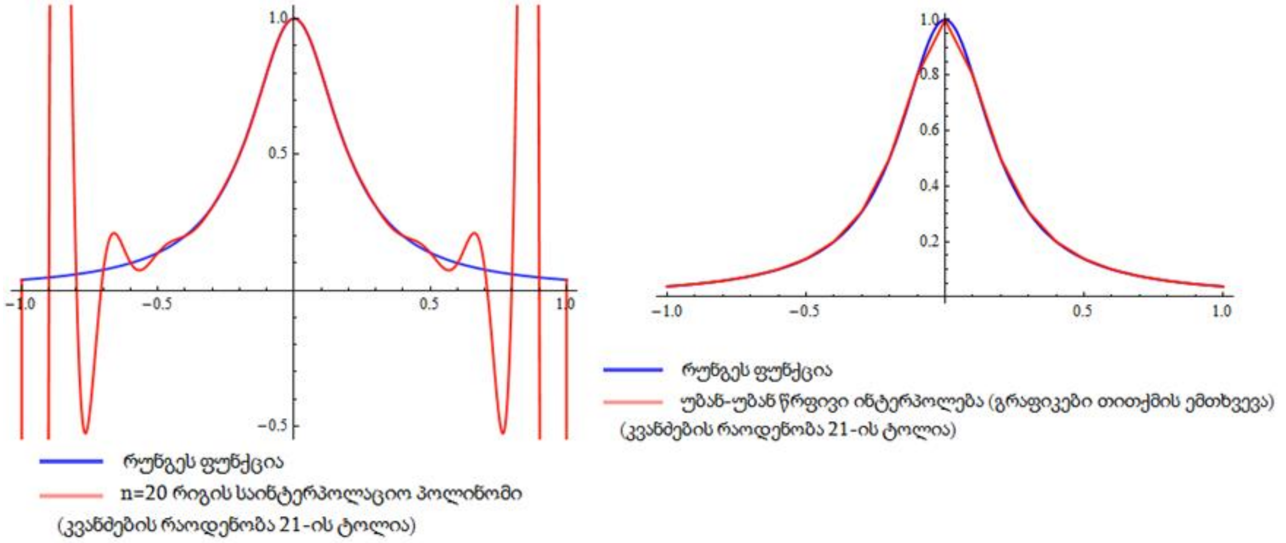
მოვიყვანოთ წრფივი ინტერპოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:



ნახ.7.13. უბან-უბან წრფივი საინტერპოლაციო პოლინომი

ამ შემთხვევაში ყოველ ქვეშუალედში მოცემული ფუნქცია იცვლება წრფივი ფუნქციით, ხოლო $[a,b]$ სეგმენტზე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი შეიცვლება $y=\varphi(x)$ ტეხილით.

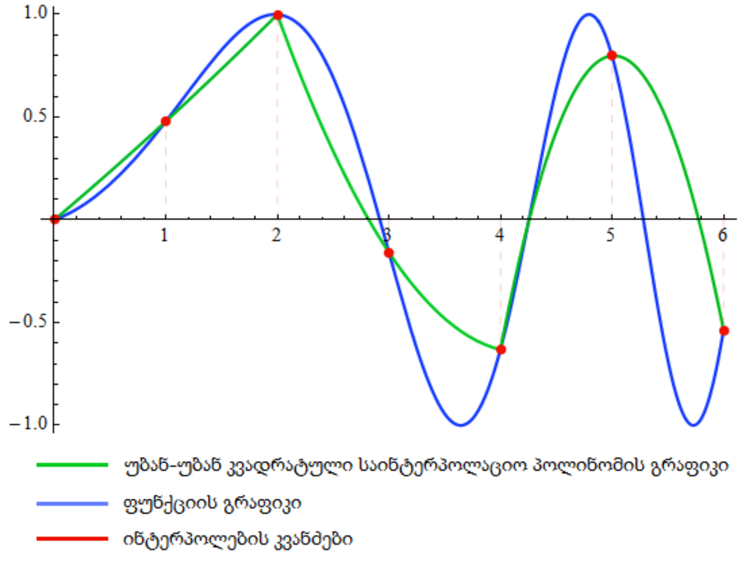
უბან-უბან წრფივი ინტერპოლება საკმაოდ კარგ შედეგს გვაძლევს ე.წ. „ცუდი" უწყვეტი ფუნქციებისათვის (იხ. ფაბერის თეორემა), როცა მაღალი რიგის პოლინომიალური ინტერპოლება დიდ ცდომილებას იძლევა. მაგალითისათვის განვიხილოთ რუნგეს ფუნქცია $f(x)=1/(1+25x^2)$ (იხ, ნახაზი).



ნახ.7.14. უბან–უბან წრფივი და მაღალი რიგის საინტერპოლაციო პოლინომების შედარება რუნგეს ფუნქციისთვის

ბ) უბან-უბან კვადრატული ინტერპოლება. ქვეშუალედზე გამოიყენება კიდევ ერთი ცხრილური მონაცემი x_{i-1} ან x_{i+2} და აიგება მეორე რიგის მრავალწევრი. მაგალითად,

$$f(x)\approx f(x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}(x-x_i)+\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{2h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1}).$$



ნახ.7.15. უბან-უბან კვადრატული საინტერპოლაციო პოლინომი

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ უფრო მაღალი რიგის უბან-უბან პოლინომიალური ინტერპოლება.

7.18. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი

მოცემულია

- $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$
- კვანძითი წერტილების გარკვეული სიმრავლე $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$
- ფუნქციის მნიშვნელობები კვანძით წერტილებში: $f(x_0),\ f(x_1), \ldots,\ f(x_n)$.

საჭიროა ავაგოთ ფუნქცია არსებული მონაცემების შესაბამისად.

$m = n$ შემთხვევისთვის განხილული იყო ინტერპოლების ამოცანა, რომელსაც აქვს ერთადერთი ამოხსნა. კონკრეტული ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე მიზანშეწონილია განვიხილოთ n-ზე ნაკლები რიგის მქონე განზოგადოებული მრავალწევრები, რომელთა მნიშვნელობებიც კვანძით წერტილებში არ ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს, მაგრამ ამავდროულად გარკვეული აზრით "ახლოა" $f(x)$ ფუნქციასთან. ეს პრობლემა განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს იმ შემთხვევაში, როდესაც ცხრილის სახით მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ექსპერიმენტის შედეგად არის მიღებული და შეიცავს ცდომილებებს. ასეთ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებისა და განზოგადოებული მრავალწევრების მნიშვნელობების კვანძით წერტილებში ზუსტი დამთხვევის მოთხოვნა აზრს კარგავს.

$m < n$ შემთხვევაში ინტერპოლების ამოცანის შესაბამის განტოლებათა სისტემას $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ კოეფიციენტებისათვის, საზოგადოდ, არ ექნება ამოხსნა, რადგან განტოლებათა რაოდენობა მეტია უცნობთა რაოდენობაზე.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე ცხადია, რომ საჭიროა ამოცანის სხვა სახით ფორმულირება იმისთვის, რომ ფუნქციის მიახლოების აგება შევძლოთ $m < n$ შემთხვევაშიც. კარძოდ, განვიხილოთ საუკეთესო მიახლოების განზოგადებული მრავალწევრის აგების ამოცანა.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T, \qquad y_i = f(x_i), i = 0,1,.., n,$$

$$\vec{\varphi}_k = (\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), .., \varphi_k(x_n))^T, \quad k = 0,1,\ldots,m;$$

m-ური რიგის განზოგადებული მრავალწევრი:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x); \tag{7.18}$$

ცდომილების $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n)^T$ ვექტორი:

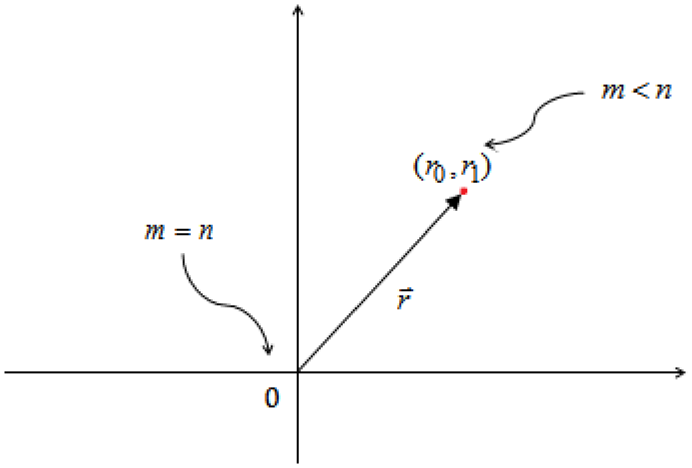
$$r_k = \varphi(x_k) - f(x_k), \qquad k = 0,1,\ldots,n.$$

ცდომილების ვექტორისათვის განვიხილოთ ნორმები:

$$\|r\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{n} [\varphi(x_k) - f(x_k)]^2\right)^{\frac{1}{2}} = <r, r>^{\frac{1}{2}}, \tag{7.19}$$

$$\|r\|_\infty = \max_{0 \le k \le n} |r_k| = \max_{0 \le k \le n} |\varphi(x_k) - f(x_k)|, \tag{7.20}$$

ინტერპოლების ამოცანის შემთხვევაში $(m = n)$ (7.19) და (7.20) ფორმულებით განსაზღვრული ცდომილება ნულის ტოლია. $m < n$ შემთხვევაში, როგორც წესი, ცდომილების ვექტორი არანულოვანია. $n = 1$ შემთხვევაში გვაქვს ამ ფაქტის შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:



ნახ. 7.16

ბუნებრივია, რაც უფრო მცირეა (r_0, r_1) წერტილის დაცილება კოორდინატთა სათავიდან, მით უფრო კარგია $\varphi(x)$ –ით განსაზღვრული მიახლოება. მანძილი (r_0, r_1) წერტილსა და კოორდინატთა სათავეს შორის ტოლია $\|r\|_2$ –ის. ამრიგად, თუ ჩვენ გვსურს ავაგოთ ისეთი საუკეთესო $\varphi(x)$ მიახლოება, რომლის შესაბამისი ცდომილება მინიმალურად იქნება დაცილებული იდეალურ შემთხვევას – კოორდინატთა სათავეს ($r = 0$), უნდა მოვახდინოთ $a_0, \dots, a_m$ კოეფიციენტების შერჩევა ისე, რომ მინიმალური იყოს $\|r\|_2$. შესაბამისად, ფუნქციისათვის საუკეთესო მიახლოების განზოგადებული მრავალწევრის აგების **ამოცანა** მდგომარეობს შემდეგში:

ვიპოვოთ (7.18) სახის განზოგადებული მრავალწევრი (რაც ეკვივალენტურია $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ კოეფიციენტების პოვნისა), რომელიც მინიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს r ვექტორის ერთ-ერთ ნორმას.

იმის მიხედვით, თუ რა ნორმას ავირჩევთ, მივიღებთ სხვადასხვა ამოცანას. მაგალითად, (7.19) ნორმის შემთხვევაში ჩვენ გვექნება ამოცანა საშუალო კვადრატული მიახლოების აგების შესახებ, ხოლო (7.20) ნორმის შემთხვევაში – ამოცანა საუკეთესო თანაბარი მიახლოების აგების შესახებ.

როცა $m = n$, მაშინ ნორმის არჩევის მიუხედავად, საუკეთესო მიახლოების ელემენტს წარმოადგენს საინტერპოლაციო მრავალწევრი, რომლის მნიშვნელობებიც კვანძით წერტილებში ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს: $\varphi(x_k) = f(x_k)$, $k = 0,1,2,\dots,n$ და $\|r\|_2 = 0$, რაც წარმოადგენს r ვექტორის ნორმის მინიმალურ მნიშვნელობას, ე.ი. ამ შემთხვევში საუკეთესო მიახლოების ელემენტის აგების ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ეს ამონახსნი შესაბამისი საინტერპოლაციო მრავალწევრია.

განვიხილოთ შემთხვევა $m < n$. ვისარგებლოთ (7.19) ნორმით, ე.ი. ვიპოვოთ m-ური რიგის განზოგადოებული მრავალწევრი (7.18), რომელიც მინიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს შემდეგ ფუნქციონალს

$$\left(\sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2 \right)^{1/2}. \tag{7.21}$$

$$\min_{a_i} \left(\sum_{i=0}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2 \right)^{1/2} = \min_{a_i} \left(\sum_{i=0}^{n} (r_i)^2 \right)^{1/2} = \min_{a_i} (r, r)^{1/2} = \min_{a_i} \| r \|_2 ,$$

(7.21) გამოსახულება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\|r\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} \left(a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + \ldots + a_m\varphi_m(x_i) - y_i \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right)^2\right)^{1/2},$$

ან

$$\|r\|_2^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right)^2. \qquad (7.22)$$

ამრიგად, მივიღეთ $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ $(m+1)$ ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ამოცანა. ცხადია $\|r\|_2$ წარმოადგენს თავისი არგუმენტების, $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ კოეფიციენტების, გლუვ ფუნქციას. a_k $(k = 0,1,2,\ldots,m)$ კოეფიციენტების ისეთი მნიშვნელობების საპოვნელად, რომლის დროსაც $\|r\|_2^2$ აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას, ვისარგებლოთ ფუნქციის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობით: ვიპოვოთ $\|r\|_2^2$-ის კერძო წარმოებულები a_k ცვლადების მიმართ და გავუტოლოთ 0-ს. მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\|r\|_2^2 = \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right)^2\right) = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right)\varphi_k(x_i) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) - \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_k(x_i)\right) = 2\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) - \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_k(x_i)\right) = \qquad (7.23)$$

$$= 2\left(\sum_{j=0}^{m} a_j(\vec{\varphi}_j, \vec{\varphi}_k) - (y, \vec{\varphi}_k)\right) = 0,$$

(7.23)-ის ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{j=0}^{m} a_j(\vec{\varphi}_j, \vec{\varphi}_k) = (y, \vec{\varphi}_k), \quad k = 0,1,\ldots,m \quad , \qquad (7.24)$$

რომელიც წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას a_k $(k = 0,1,2,\ldots,m)$ კოეფიციენტების მიმართ. მატრიცული ფორმით (7.23) იწერება $Ma = b$ სახით, სადაც M მატრიცის ელემენტები განისაზღვრება ფორმულით $m_{kj} = (\vec{\varphi}_k, \vec{\varphi}_j)$, ხოლო მარჯვენა მხარე $b_k = (y, \vec{\varphi}_k)$, $k = 0,1,..,m$. მტკიცდება, რომ ამ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ან რაც იგივეა ცდომილების $\|r\|_2$ ნორმას აქვს მხოლოდ ერთი მინიმუმი.

საბოლოოდ, (7.19) ნორმის აზრით საუკეთესო მიახლოების განზოგადებული მრავალწევრს აქვს სახე

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{a}_0\varphi_0(x) + \bar{a}_1\varphi_1(x) + \cdots + \bar{a}_m\varphi_m(x), \qquad (7.25)$$

სადაც $\bar{a}_k$ $(k = 0,1,\ldots,m)$ კოეფიციენტები წარმოადგენს (7.24) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.

ამრიგად, საუკეთესო მიახლოების განზოგადებული მრავალწევრის მოძებნის ალგორითმი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

I. M მატრიცის $m_{kj} = (\vec{\varphi}_k, \vec{\varphi}_j),$, $k, j = 0,1,2,\ldots,m$ ელემენტების გამოთვლა.

II. $(\vec{\varphi}_k, y)$, $k = 0,1,\ldots,m$, მარჯვენა მხარეების დათვლა.

III. (7.24) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, ე. ი. $\bar{a} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ ვექტორის პოვნა.

IV. $\bar{\varphi} = \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k\varphi_k$ ჯამის (საუკეთესო მიახლოების) შედგენა.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $\varphi_i(x) = x^i$, $i = \overline{0,m}$, და, შესაბამისად, $\varphi(x)$ ფუნქციის როლში არის m-ური რიგის პოლინომი

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \ .$$

ამ შემთხვევაში პოლინომის კოეფიციენტები უნდა შეირჩეს

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} [P_m(x_i) - y_i]^2$$

ფუნქციის მინიმუმის პირობიდან. გამოვითვალოთ $S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$–ის კერძო წარმოებულები და გავუტოლოთ ნულს:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{n} [P_m(x_i) - y_i] x_i^k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

$P_m(x_i)$ მნიშვნელობების ჩასმისა და შესაკრებთა დაჯგუფების შემდეგ მიიღება

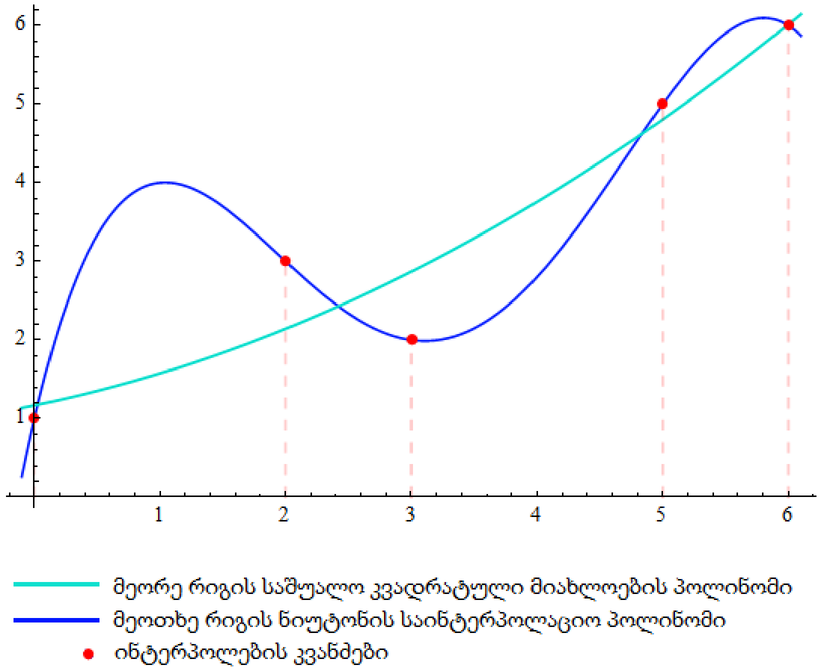
$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+1} + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+m} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k, \quad k = 0,1,\ldots,m.$$

რაც წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ჩაკეტილ სისტემას უცნობი $a_0, a_1, \ldots, a_m$ კოეფიციენტების მიმართ.

საუკეთესო საშუალო კვადრატული მიახლოების პოვნა განსაკუთრებით მარტივია იმ შემთხვევაში, როცა გასხვავებულ ბაზისურ ვექტორთა სისტემა ორთონორმირებულია, ე.ი.

$$(\vec{\varphi}_k, \vec{\varphi}_j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}.$$

შედეგად, (7.24) განტოლებათა სისტემის M მატრიცა ემთხვევა ერთეულოვან მატრიცას და საუკეთესო საშუალო კვადრატული მიახლოების კოეფიციენტები ცხადად განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით $(\vec{\varphi}_k, y)$, $\quad k = 0,1,\ldots,m$.



ნახ. 7.17. საშუალო კვადრატული მიახლოების პოლინომი (m=2, ხუთი კვანძი, ბაზისი 1, x, x^2) და ნიუტონის პოლინომი (მაგ.7.2-ის მონაცემები)

თავი VIII. რიცხვითი ინტეგრება

8.1. ვთქვათ, $[a,b]$ მონაკვეთზე მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ წერტილებით $[a,b]$ მონაკვეთი დავყოთ n ელემენტარულ მონაკვეთად $[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$, ამასთან $x_0=a,\ x_n=b.$ თითოეულ ამ შუალედზე შევარჩიოთ ნებისმიერი წერტილი $t_i\ (x_{i-1}\le t_i\le x_i)$ და ვიპოვოთ ამ წერტილში ფუნქციის $f(t_i)$ მნიშვნელობისა და ელემენტარული მონაკვეთის სიგრძის $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ნამრავლი s_i:

$$s_i = f(t_i)\Delta x_i\ . \tag{8.1}$$

შევადგინოთ ყველა ასეთი ნამრავლის ჯამი:

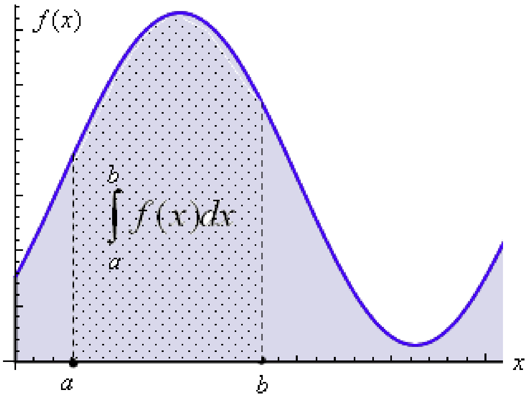
$$S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i\ . \tag{8.2}$$

S_n ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება. $[a,b]$ მონაკვეთზე $f(x)$ ფუნქციის **განსაზღვრული ინტეგრალი** $\int_a^b f(x)dx$ ეწოდება ინტეგრალური ჯამის ზღვარს, როცა დაყოფის წერტილების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება, ამასთან ელემენტარული მონაკვეთებიდან უდიდესის სიგრძე მიისწრაფის ნულისაკენ:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i\ . \tag{8.3}$$

განსაზღვრული ინტეგრალის არსებობის შესახებ სამართლიანია შემდეგი **თეორემა:** თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არსებობს და დამოკიდებული არ არის არც $[a,b]$ მონაკვეთის ელემენტარულ მონაკვეთებად დაყოფის წესზე, არც t_i წერტილების შერჩევაზე.

მოყვანილი განსაზღვრებების გეომეტრიული შინაარსი $f(x)>0$ შემთხვევაში ასეთია: (8.1) გამოსახულებები, $i=\overline{1,n}$, წარმოადგენს ელემენტარული მართკუთხედების ფართობებს, (8.2) ინტეგრალური ჯამი კი ასეთი მართკუთხედებისაგან შედგენილი ფიგურის ფართობია. დაყოფის წერტილების რაოდენობის უსასრულოდ გაზრდის და ყველა Δx_i ელემენტის ნულისკენ სწრაფვის დროს ამ ფიგურის ზედა საზღვარი (ტეხილი) გადადის $y=f(x)$ წირში. მიღებული ფიგურის (მრუდწირული ტრაპეციის, რომელიც შემოსაზღვრულია x ღერძით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით) ფართობი კი $\int_a^b f(x)dx$ განსაზღვრული ინტეგრალის ტოლია.



ნახ. 8.1

რატომ არის საჭირო ინტეგრალის გამოთვლა მიახლოებით?

როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მოცემულია ანალიზური სახით, განსაზღვრული ინტეგრალი შეიძლება გამოითვალოს ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულით:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).,$$

სადაც $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველყოფილს. ეს ფორმულა პრაქტიკულად იშვიათად გამოიყენება, რადგან ცოტაა ისეთი $f(x)$ ფუნქციები, რომელთათვისაც პირველყოფილი გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. გარდა ამისა, $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილის სახითაც.

(8.3) ტოლობის გამო, $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის შეცვლა (8.2) ინტეგრალური ჯამით ხსნის ინტეგრალის ნებისმიერი სიზუსტით პოვნის ამოცანას. მაგრამ ეს ხერხი პრაქტიკულად გამოუსადეგარია, რადგან, საზოგადოდ, შეუძლებელია მივუთითოთ n-ის ის მნიშვნელობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოვთვალოთ ინტეგრალი მოცემული სიზუსტით. გარდა ამისა, S_n ინტეგრალური ჯამები ძალიან ნელა იკრიბება $\int_a^b f(x)dx$-სკენ.

როგორ გამოვთვალოთ ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა?

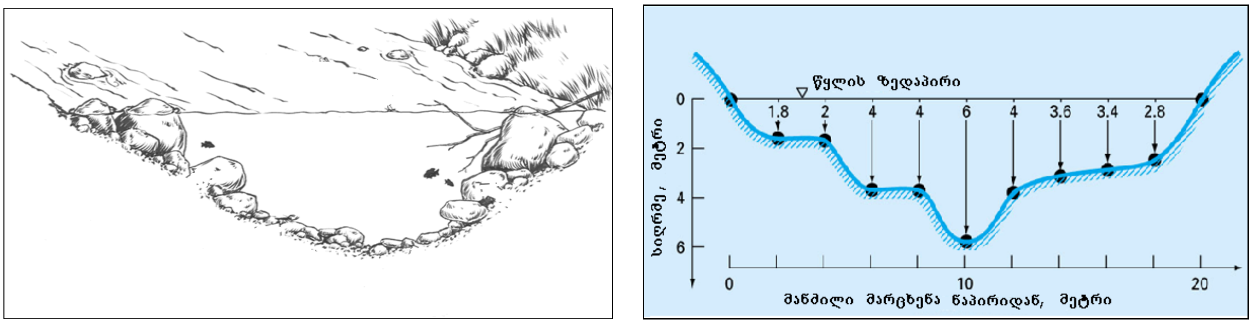
ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ჩავანაცვლოთ მასთან “ახლოს მდგომი” ისეთი ფუნქციით, რომლიდანაც ინტეგრალი ზუსტად გამოითვლება.

გამოყენების თვალსაზრისით ყველაზე გავრცელებულია კვადრატურული ფორმულები, რომლებიც საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა წრფივი კომბინაციის საშუალებით:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i \,, \qquad (8.4)$$

სადაც y_i - ფუნქციის მნიშვნელობებია ინტერპოლების კვანძებში, ხოლო α_i - რიცხვითი კოეფიციენტებია (წონები). $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i$ ჯამს ვუწოდებთ **კვადრატურულ ჯამს**, (8.4) ფორმულას კი - **რიცხვითი ინტეგრების** ან **კვადრატურულ ფორმულას.** მისი გამოთვლის ხერხებიდან გამომდინარე მიიღება რიცხვითი ინტეგრების სხვადასხვა ფორმულები (კვადრატურული ფორმულები) - მართკუთხედების, ტრაპეციის, სიმპსონის და სხვა.

შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლაზე დადის მრავალი პრაქტიკული ამოცანა, მაგ. ფიგურათა ფართობის გამოთვლა.



ნახ. 8.2

8.2. რიცხვითი ინტეგრების ამოცანის დასმა. საინტერპოლაციო ტიპის კვადრატურული ფორმულები

- მოცემულია $[a,b]$ მონაკვეთზე ინტეგრებადი ფუნქცია
- ვიპოვოთ ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა წინასწარ დასახელებული ε სიზუსტით

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx. \quad \text{აღვნიშნოთ:} \quad I_n(f)=\int_a^b f_n(x)dx, \quad n\ge 0.$$

მაშინ ცდომილება $E_n(f)=I(f)-I_n(f), \quad f\in C^0([a,b])$, შეიძლება შევაფასოთ ასე:

$$|E_n(f)|\le\int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx\le(b-a)\|f-f_n\|_\infty,$$

სადაც $\|f-f_n\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|$. თუ $\|f-f_n\|_\infty<\varepsilon$, მაშინ $|E_n(f)|\le\varepsilon(b-a)$.

შევისწავლოთ კვადრატურული ფორმულები, რომლებიც ეფუძნება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის აპროქსიმაციას საინტერპოლაციო მრავალწევრებით.

ამრიგად,

- საინტეგრებელი ფუნქცია იცვლება შესაბამისი საინტერპოლაციო პოლინომით;
- პოლინომის ინტეგრება ზუსტად არის შესაძლებელი;
- საინტერპოლაციო პოლინომიდან ინტეგრალის ზუსტად დათვლა ტოლფასია საწყისი ინტეგრალის მიახლოებით გამოვთვლისა;
- ცდომილება შეფასდება ასე: გამოითვლება ინტეგრალი საინტერპოლაციო ფორმულის ცდომილებიდან.

კვადრატურული ფორმულა შეიძლება დახასიათდეს შემდეგი პარამეტრებით:

- კვანძები x_i;
- კვანძების რაოდენობა n;
- α_i წონები.

მაგალითი . ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის გამოყენება:

$$I(f)\approx I_n(f)=\int_a^b\sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)dx=\sum_{i=0}^n f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx.$$

თუ შევადარებთ ფორმულას $I_n(f)=\sum\limits_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$, მივიღებთ, რომ წონები ტოლია:

$$\alpha_i=\int_a^b l_i(x)dx\ , \quad \text{სადაც} \quad l_i(x)=\frac{\prod\limits_{j=0,\, j\ne i}^n (x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\ne i}^n (x_i-x_j)}.$$

8.3. საინტერპოლაციო ტიპის კვადრატურული ფორმულის ცდომილება

საინტერპოლაციო ტიპის კვადრატურული ფორმულის ცდომილების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ინტერპოლების ცდომილების ფორმულა:

$$|E_n(f)|=|I(f)-I_n(f)|=|\int_a^b (f(x)-L_n(x))dx|\le\int_a^b |f(x)-L_n(x)|dx=$$

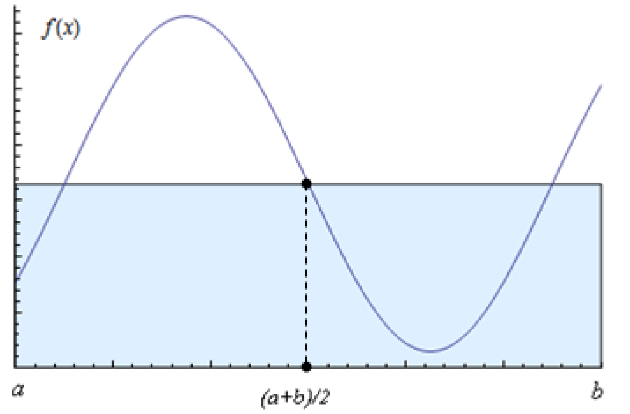
$$=\int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!}|\varpi(x)|dx\le\frac{\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\int_a^b|\varpi(x)|dx$$

ამრიგად,

$$|E_n(f)|\le\frac{\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\int_a^b|\varpi(x)|dx \qquad (8.5)$$

8.4. მართკუთხედის ფორმულა

რიცხვითი ინტეგრების უმარტივესი მეთოდია მართკუთხედის მეთოდი. მართკუთხედის კვადრატურული ფორმულა მიიღება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის შეცვლით ნულოვანი რიგის საინტერპოლაციო პოლინომით, რომელიც იყენებს ფუნქციის მნიშვნელობას $[a,b]$ მონაკვეთის შუა წერტილში:



ნახ. 8.3. მართკუთხედის მეთოდი

ნახაზიდან კარგად ჩანს, თუ რისი ტოლია ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა, მიახლოებითი მნიშვნელობა და ცდომილება.

$$I_0(f)=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx= f(\frac{a+b}{2})\int_a^b dx=f(\frac{a+b}{2})\cdot x\Big|_a^b$$

$$I_0(f)=(b-a)f(\frac{a+b}{2}). \qquad (8.6)$$

(8.6) ფორმულაში წონა (კოეფიციენტი) ფუნქციის მნიშვნელობასთან არის $\alpha_0=b-a$, ხოლო ინტერპოლებისთვის გამოიყენება ერთი კვანძი: $\frac{a+b}{2}$.

შევაფასოთ (8.6) მართკუთხედის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი. ვთქვათ, $f(x)\in C^2[a,b]$. $f(x)$ ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად[1] $\frac{a+b}{2}$ წერტილის მიდამოში, მივიღებთ:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+(x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2})+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2}f''(\xi(x)), \qquad \xi(x)\in[a,b]\,. \qquad (8.7)$$

(8.7) ტოლობის ორივე მხარე ვაინტეგროთ $[a,b]$-სეგმენტზე, ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ

$$\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx=\left[\frac{1}{2}f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})^2\right]_a^b=$$

$$=\frac{1}{2}f'(\frac{a+b}{2})\left\{(b-\frac{a+b}{2})^2-(a-\frac{a+b}{2})^2\right\}=0.$$

მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\xi(x))dx\,.$$

ამ უკანასკნელ ტოლობის გათვალისწინებით მართკუთხედის (8.6) ფორმულის ნაშთითი წევრი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$E_0(f)=\frac{1}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\xi(x))dx.$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის[2] გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$E_0(f)=\frac{\mu}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{(b-a)^3}{24}\mu,$$

სადაც $\mu=f''(\bar{\xi})$. მართლაც, რადგან $f(x)\in C^2[a,b]$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\bar{\xi}\in[a,b]$ წერტილი, რომ ადგილი ექნება $f''(\bar{\xi})=\mu$ ტოლობას. ამრიგად, მართკუთხედის ფორმულის ნაშთითი წევრის გამოსახულება მიიღებს სახეს:

---

[1] **ტეილორის ფორმულა.** ვთქვათ, $f(x)$ არის $[c,d]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $(n+1)$-ჯერ დიფერენცირებადი ფუნქცია. ავიღოთ ამ სეგმენტზე ნებისმიერი ორი a და x წერტილი, $a<x$. მაშინ $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს ტეილორის მწკრივად

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

სადაც $R_n(x)$ სიდიდეს ეწოდება ნაშთითი წევრი და იგი ტოლია

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)), \qquad 0<\theta<1.$$

[2] **თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ** ინტეგრალურ აღრიცხვაში: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ მონაკვეთზე, ხოლო $\varphi(x)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, მაშინ არსებობს წერტილი $c\in(a,b)$, ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(c)\int_a^b\varphi(x)dx.$$

კერძოდ, თუ $\varphi(x)=1$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

$$E_0(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\bar{\xi}),\qquad \bar{\xi}\in[a,b]. \tag{8.8}$$

8.5. მართკუთხედების შედგენილი ფორმულა

ინტეგრალი $[a,b]$ მონაკვეთზე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ქვეინტერვალებზე აღებული ინტეგრალების ჯამით:

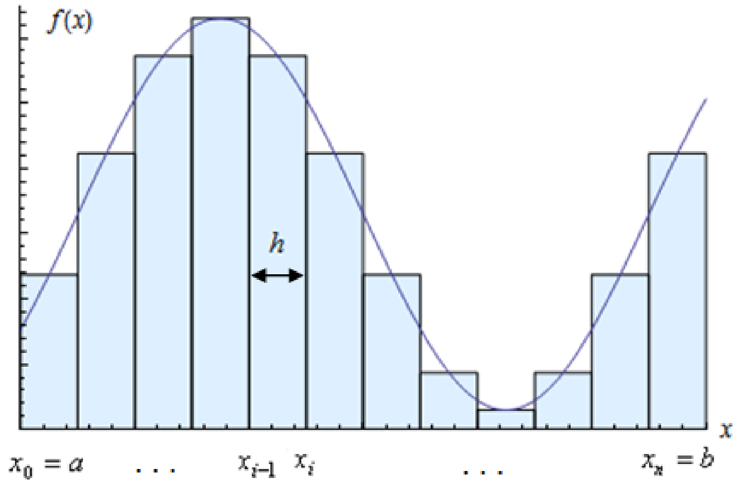
$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

თითოეულ ქვეინტერვალზე გამოვიყენოთ მართკუთხედის კვადრატურული ფორმულა, გავითვალისწინოთ, რომ ყოველი ქვეშუალედის სიგრძეა $h=\dfrac{b-a}{n}$ და ავჯამოთ. მივიღებთ მართკუთხედების შედგენილ ფორმულას:

$$\begin{aligned}I_{0,n}(f)&=h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]=\\&=h\left[f(a+\frac{h}{2})+f(a+\frac{3h}{2})+\ldots+f(a+\frac{2n-1}{2}h)\right]\end{aligned} \tag{8.9}$$

ან

$$I_{0,n}(f)=h\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_k+\frac{h}{2}\right),\quad n\ge 1.$$



ნახ. 8.4. მართკუთხედების შედგენილი ფორმულა გეომეტრიულად

გამოვთვალოთ მართკუთხედების შედგენილი ფორმულის ცდომილება, როგორც ცალკეულ ქვეშუალედზე აღებული მართკუთხედის ფორმულის ცდომილებათა ჯამი:

$$I_{0,n}(f)=I(f)-I_{0,n}(f),$$

$$I_{0,n}(f)=\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k)(h/2)^3/3=\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k)\frac{h^2}{24}\frac{b-a}{n},$$

სადაც

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad i = 1,2,\ldots, n.$$

განვიხილოთ გამოსახულება:

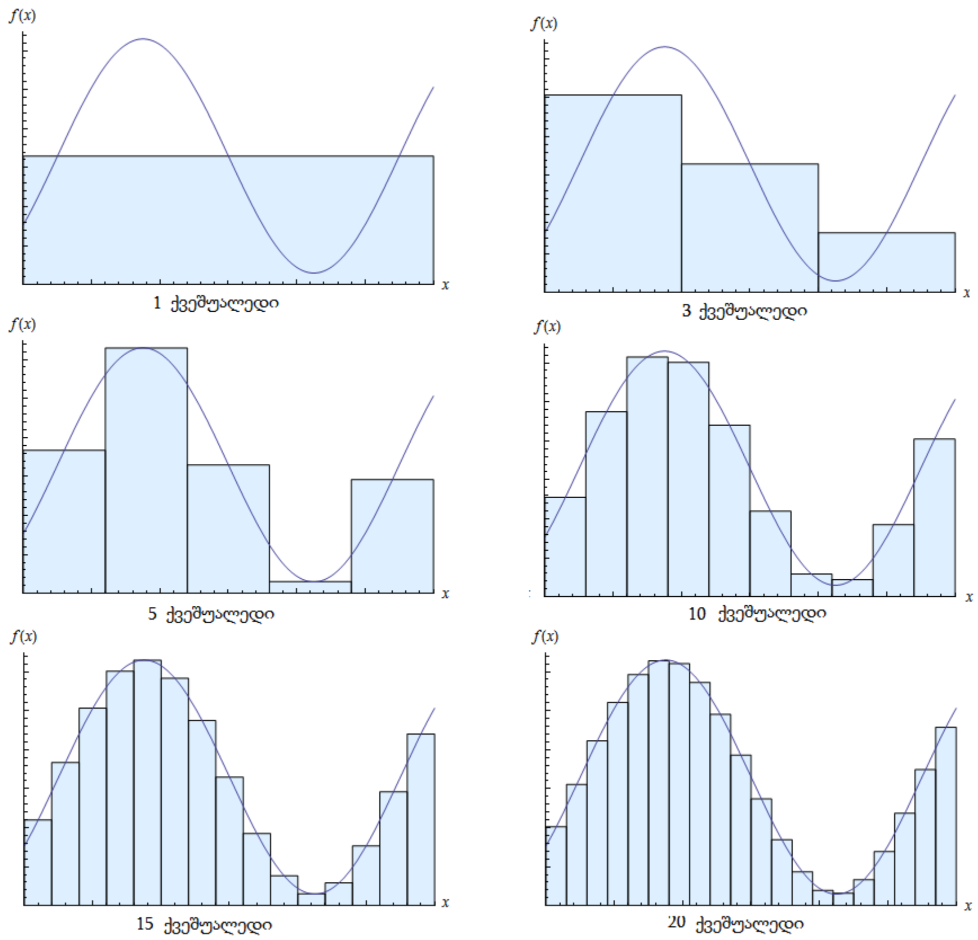
$$\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \ldots + f''(\xi_n)}{n}.$$

$f''(\xi_1), f''(\xi_2),\ldots, f''(\xi_m)$ რიცხვების საშუალო არითმეტიკულის მნიშვნელობა მოთავსებულია ამ რიცხვებიდან უდიდესსა და უმცირესს შორის. $f''(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო მოიძებნება ისეთი $\xi \in (a,b)$ წერტილი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება ტოლობას

$$\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \ldots + f''(\xi_n)}{n} = f''(\xi).$$

ამრიგად,

$$E_{0,n}(f) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi). \tag{8.10}$$



ნახ. 8.5. მართკუთხედების შედგენილი ფორმულა სხვადასხვა რაოდენობის ქვეშუალედებისათვის

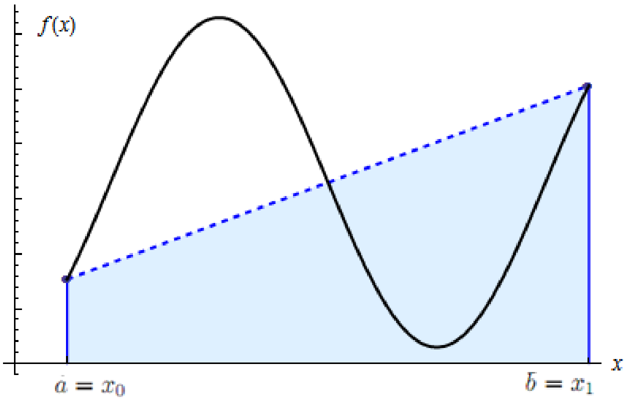
8.8. ტრაპეციის ფორმულა

ტრაპეციის ფორმულა მიიღება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის შეცვლით პირველი რიგის საინტერპოლაციო პოლინომით, რომელშიც ინტერპოლების კვანძებად აღებულია ინტეგრების შუალედის საზღვრითი წერტილები a და b. ამ შემთხვევაში $y = f(x)$ წირი $[a,b]$ მონაკვეთზე იცვლება ქორდით, რომელიც აერთებს $(a, f(a))$; $(b, f(b))$ წერტილებს.

ინტეგრალი საინტერპოლაციო მრავალწევრიდან ტოლია ტრაპეციის ფართობისა , ამიტომ შესაბამის კვადრატურულ ფორმულას **ტრაპეციის ფორმულა** ეწოდება:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]. \qquad (8.11)$$

(8.11) ფორმულაში წონები (კოეფიციენტები) ფუნქციის მნიშვნელობებთან არის $\alpha_0 = \alpha_1 = (b-a)/2$, ხოლო ინტერპოლებისთვის გამოიყენება ორი კვანძი: $x_0 = a$ და $x_1 = b$.



ნახ. 8.6. ტრაპეციის მეთოდი

ვთქვათ, $f(x) \in C^2[a,b]$. (8.11) ფორმულის ნაშთით წევრს აქვს სახე (ინტეგრალი პირველი რიგის საინტერპოლაციო ფორმულის ნაშთითი წევრიდან):

$$E_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-a)(x-b)dx.,$$

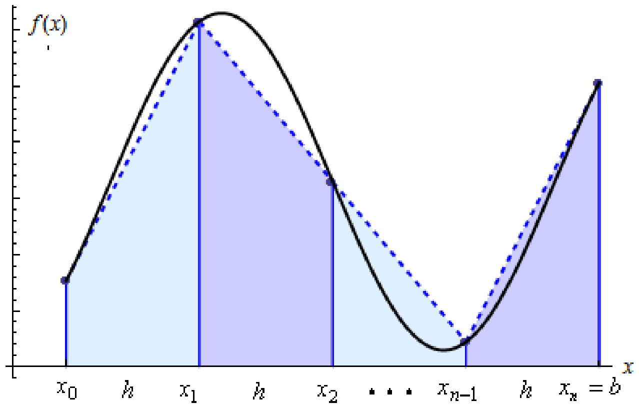
სადაც $\xi(x)$ წერტილი ეკუთვნის $[a, b]$ შუალედს. შევნიშნოთ, რომ (a,b) შუალედზე $(x-a)(x-b) < 0$. თუ გავითვალისწინებთ ამ შენიშვნას და ტოლობის მარჯვენა მხარეში გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას, მივიღებთ,

$$E_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a,b). \qquad (8.12)$$

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad h = b - a.$$

8.7. ტრაპეციის შედგენილი ფორმულა

ტრაპეციის ფორმულის ცდომილება შეიძლება მნიშვნელოვნად შევამციროთ, თუ ტრაპეციის ფორმულას გამოვიყენებთ არა მთლიანად $[a,b]$ შუალედზე, არამედ, ინტეგრების შუალედს წინასწარ დავყოფთ ერთმანეთის ტოლ ქვეშუალედებად, რომელთა სიგრძეა $h = \frac{b-a}{n}$, და შემდეგ თითოეულ ამ ქვეშუალედზე გამოვიყენებთ (8.11) ფორმულას. მაშინ მივიღებთ:



ნახ. 8.7. ტრაპეციის შედგენილი ფორმულა გეომეტრიულად

$$h=(b-a)/n, \qquad x_k = a+kh,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

$$I_{1,n}(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(f_k + f_{k+1}), \qquad n \geq 1,\ldots$$

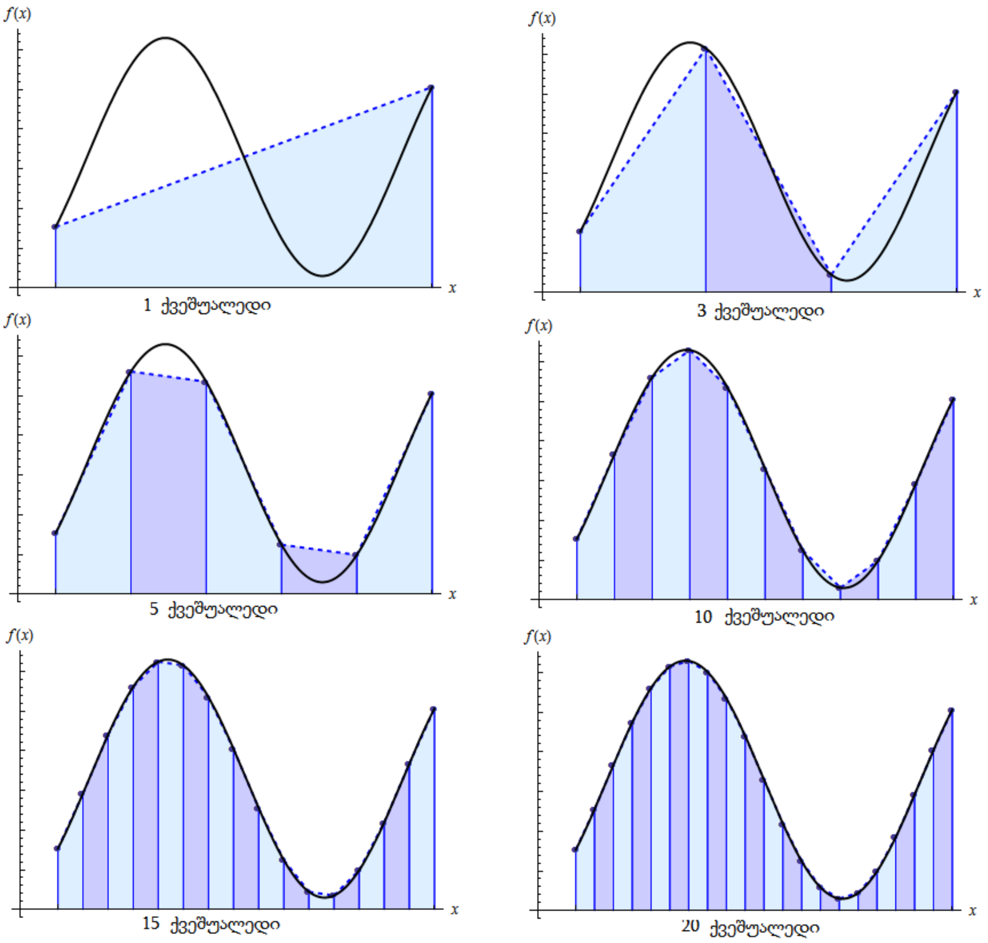
$$I_{1,n}(f) = h\cdot\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]. \tag{8.13}$$

თუ ამ კვადრატურული ფორმულის ნაშთით წევრს გარდავქმნით მართკუთხედების შედგენილი კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$E_{n,1}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)\ . \tag{8.14}$$

ცხადია, ტრაპეციის შედგენილი ფორმულის ნაშთითი წევრი ტოლია $E_{n,1}(f) = 0(h^2)$.

მტკიცდება, რომ (8.9) და (8.13) ფორმულების მარჯვენა მხარეში მდგომი ჯამები წარმოადგენს ინტეგრალურ ჯამებს, ამიტომ რიცხვითი ინტეგრების განხილული მეთოდები კრებადია ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციისათვის და მათი ზღვარი ემთხვევა ინტეგრალის ზუსტ მნიშვნელობას. ამის გამო შესაძლებელია ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციიდან ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა წინასწარ დასახელებული ε სიზუსტით, (საკმაოდ დიდი *n*–სა და, შესაბამისად, საკმაოდ მცირე *h*=(*b*-*a*)/*n*–ის შერჩევის ხარჯზე). შევნიშნოთ, რომ (8.10) და (8.14) შეფასებების მისაღებად *f(x)* ფუნქციას, ინტეგრებადობის გარდა, უნდა დაედოს დამატებითი შეზღუდვა. კერძოდ, იგი უნდა იყოს ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი. მართკუთხედებისა და ტრაპეციების მეთოდები არის *h*–ის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებისათვის.



ნახ. 8.8. ტრაპეციის შედგენილი ფორმულა სხვადასხვა რაოდენობის ქვეშუალედებისათვის

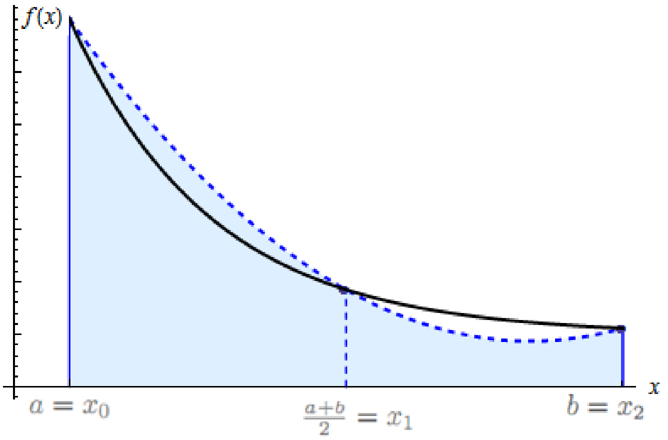
8.8. სიმპსონის ფორმულა

როგორც ვნახეთ, ბიჯის შემცირებით შეიძლება უფრო მეტ სიზუსტეს მივაღწიოთ. თუმცა წერტილების რაოდენობის გაზრდა ყოველთვის არ არის შესაძლებელი (მაგალითად, თუ ფუნქცია ცხრილის სახით არის მოცემული). ასეთ შემთხვევაში უფრო მაღალი სიზუსტე მიიღწევა გამოყენებული საინტერპოლაციო მრავალწევრების რიგის გაზრდით.

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შევცვალოთ მეორე რიგის საინტერპოლაციო პოლინომით. ამ შემთხვევაში საინტერპოლაციო მრავალწევრის ასაგებად იყენებენ კვანძით წერტილებს: a, $\frac{a+b}{2}$, b. ცხადია, რომ შესაბამისი საინტერპოლაციო მრავალწევრი მეორე რიგისაა:

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})}f(b).$$

$y=L_2(x)$ მრავალწევრის გრაფიკს წარმოადგენს პარაბოლა, რომელიც გადის $(a,f(a))$, $(\frac{a+b}{2},f(\frac{a+b}{2}))$ და $(b,f(b))$ წერტილებზე.



ნახ. 8.9. სიმპსონის ფორმულა გეომეტრიულად

თუ ამ მრავალწევრს ვაინტეგრებთ $[a,b]$ სეგმენტზე, მივიღებთ შემდეგ საინტერპოლაციო კვადრატურულ ფორმულას:

$$I_2(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right], \tag{8.15}$$

რომელსაც **სიმპსონის** კვადრატურული ფორმულა ეწოდება (მარტივი გამოთვლების შემდეგ ადვილად დავრწმუნდებით ამ ტოლობის სისწორეში). სიმპსონის ფორმულაში წონები ფუნქციის მნიშვნელობებთან ტოლია

$$\alpha_0=\alpha_2=(b-a)/6 \quad \text{და} \quad \alpha_1=4(b-a)/6.$$

სიმპსონის ფორმულას გააჩნია საკმარისად მაღალი სიზუსტე, აქვს მარტივი ფორმა და ამიტომ იგი ყველაზე უფრო ხშირად გამოიყენება განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად.

ვთქვათ, $f(x)\in C^4[a,b]$. შევაფასოთ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი:

$$E_2(f)=\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}dx. \tag{8.16}$$

რადგან $[a,b]$ სეგმენტზე $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$ გამოსახულება ინარჩუნებს ნიშანს, ამიტომ (8.16) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემა, მაშინ, მივიღებთ,

$$E_2(f)=\frac{\mu}{24}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx,$$

სადაც, $\mu.=f^{(4)}(\bar{\xi})$ (რადგან $f(x)\in C^4[a,b]$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\bar{\xi}\in[a,b]$ წერტილი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება ამ ტოლობას). ამრიგად, სიმპსონის ფორმულის ნაშთით წევრის გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$E_2(f)=\frac{f^{(4)}(\bar{\xi})}{24}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx.$$

თუ გამოვთვლით ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალს, მივიღებთ:

$$E_2(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(IV)}(\bar{\xi}). \tag{8.17}$$

8.9. სიმპსონის შედგენილი ფორმულა

ინტეგრების $[a,b]$ შუალედი დავყოთ ერთმანეთის ტოლ ქვეშუალედებად, რომელთა სიგრძეა $h=\frac{b-a}{n}$ და შემდეგ, სიმპსონის (8.15) ფორმულა ფორმულა გამოვიყენოთ ყოველ $2h$ სიგრძის ქვეშუალედზე:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I_{2,n}(f)=\frac{2h}{6}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+\frac{2h}{6}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+\cdots+$$

$$+\frac{2h}{6}[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+$$

$$+4f(x_{2i-1})+2f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

ამრიგად,

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6n}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+\ldots$$
$$+4f(a+(2n-1)h)+f(b)]+E_{2,n}(f), \quad (8.18)$$

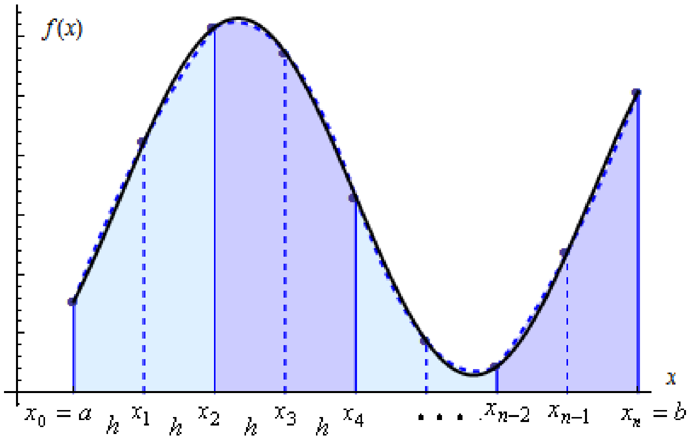
სადაც,

$$E_{2,n}=-\frac{1}{2880}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)+\ldots f^{(4)}(\xi_n)\right]=-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}f^{(4)}(\xi),\ \ \xi\in(a,b). \quad (8.19)$$

(8.18)-ს უწოდებენ **სიმპსონის შედგენილ ფორმულას.** იგი შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

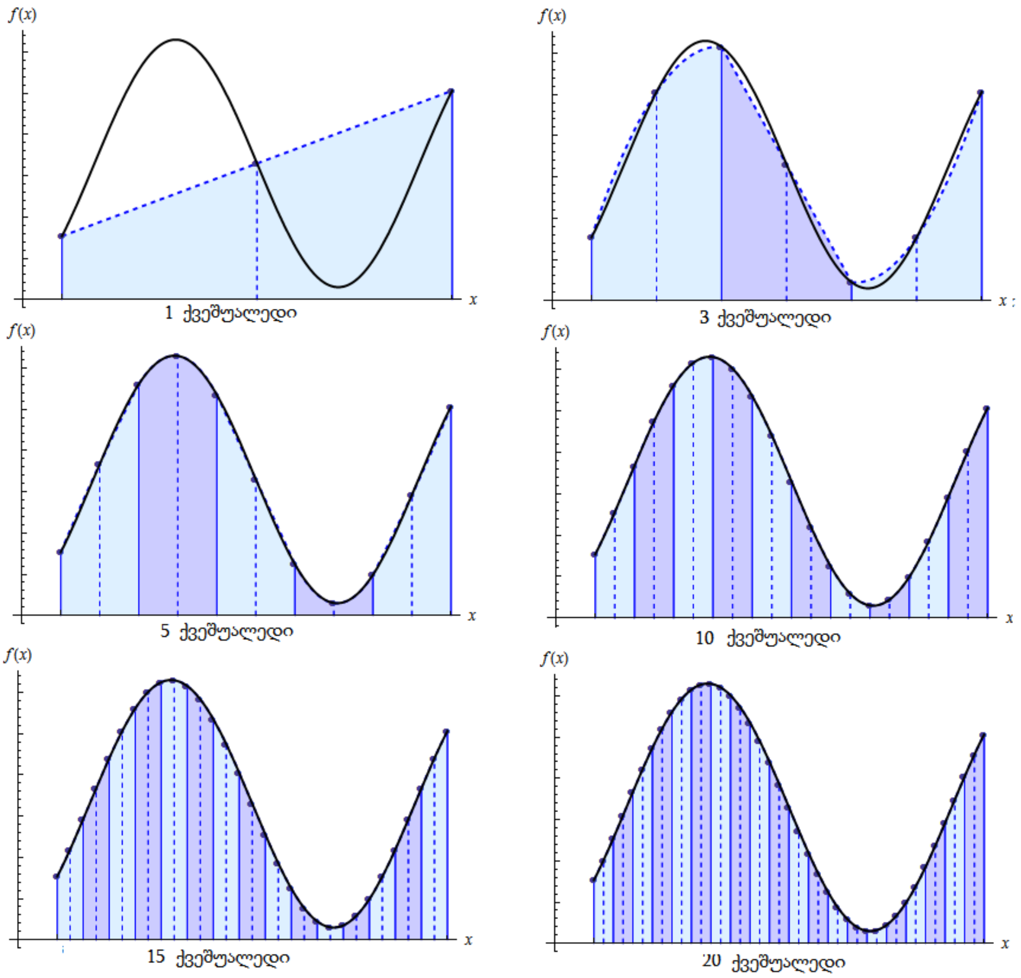
$$I_{2,n}=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+2\sum_{r=1}^{n-1}f(x_{2r})+4\sum_{s=1}^{n-1}f(x_{2s+1})+f(x_{2n})\right],$$

$$E_{2,n}=-\frac{b-a}{180}\left(h/2\right)^4 f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b).$$



ნახ. 8.10. სიმპსონის შედგენილი ფორმულა გეომეტრიულად

მტკიცდება, რომ (8.18) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მდგომი ჯამი წარმოადგენს ინტეგრალურ ჯამს, ამიტომ სიმპსონის მეთოდი კრებადია ნებისმიერი ინტეგრებადი ფუნქციისათვის და მისი ზღვარი ემთხვევა ინტეგრალის ზუსტ მნიშვნელობას. სიმპსონის მეთოდი არის h–ის მიმართ მეოთხე რიგის სიზუსტის, თუ $f(x)\in C^4[a,b]$.



ნახ. 8.11. სიმპსონის შედგენილი ფორმულა სხვადასხვა რაოდენობის ქვეშუალედებისათვის

8.10. ლუწი კვადრატურული ფორმულები. ლუწი კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის დაზუსტება

განსაზღვრება 8.1. კვადრატურული ფორმულის ალგებრული სიზუსტის რიგი არის r თუ ფორმულა ზუსტია ნებისმიერი r-ური რიგის f პოლინომისთვის

$$I_n(f)=I(f),\quad \forall f\in P_r$$

და არ არის ზუსტი $(r+1)$ რიგის პოლინომისთვის (P_r - r-ური რიგის პოლინომების სიმრავლეა).

ზოგიერთი კვადრატურული ფორმულისთვის ცდომილების (8.5) შეფასება უხეშია, რადგან იგი არ ითვალისწინებს ფორმულის სიმეტრიას.

კვადრატურული ფორმულა **ლუწია,** თუ

- პოლინომის რიგი n არის ლუწი (კვანძების რაოდენობა იქნება $(n+1)$)
- კვანძითი წერტილები სიმეტრიულადაა განლაგებული ცენტრალური კვანძითი წერტილის $x_{n/2}=(a+b)/2$-ის მიმართ, ე.ი.

$$\frac{a+b}{2}-x_k=x_{n-k}-\frac{a+b}{2},\quad k=0,1,\dots,n/2\,.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში სიმეტრიული იქნება კვადრატურული ფორმულის წონებიც:

$$\alpha_k = \alpha_{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n/2 .$$

მაგალითები:

- მართკუთხედების, სიმპსონის ფორმულები - ლუწი კვადრატურული ფორმულებია
- ტრაპეციის ფორმულა - არა

თეორემა 8.1. თუ საინტერპოლაციო ტიპის კვადრატურული ფორმულა ლუწია და ზუსტია ნებისმიერი n-ური რიგის პოლინომისთვის, მაშინ იგი ზუსტი იქნება ნებისმიერი $(n+1)$ რიგის პოლინომისთვისაც.

დამტკიცება:

$$|E_n(f)| = |I(f) - I_n(f)| = \left|\int_a^b (f(x) - L_n(x))dx\right| = \left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\varpi(x)dx\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left|\int_a^b (f^{(n+1)}(\xi(x)) - f^{(n+1)}(x_{n/2}) + f^{(n+1)}(x_{n/2}))\varpi(x)dx\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left|\int_a^b (f^{(n+1)}(\xi(x)) - f^{(n+1)}(x_{n/2}))\varpi(x)dx + f^{(n+1)}(x_{n/2})\int_a^b \varpi(x)dx\right|$$

რადგან $\varpi(x)$ პოლინომი კენტი $(n+1)$ რიგისაა, ხოლო მისი კვანძები სიმეტრიულად არის განლაგებული ცენტრალური კვანძითი წერტილის $x_{n/2} = (a+b)/2$-ის მიმართ, ამიტომ $\int_a^b \varpi(x)dx = 0$. მივიღებთ

$$|E_n(f)| = \frac{1}{(n+1)!}\left|\int_a^b (f^{(n+1)}(\xi(x)) - f^{(n+1)}(x_{n/2}))\varpi(x)dx\right| .$$

თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას საშუალო მნიშვნელობის შესახებ[3], უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება:

$$|E_n(f)| = \frac{1}{(n+1)!}\left|\int_a^b f^{(n+2)}(\zeta(x))(\xi(x) - x_{n/2})\varpi(x)dx\right| \le \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+2)}(x)|}{(n+1)!}\int_a^b |(\xi(x) - x_{n/2})\varpi(x)|dx .$$

$$|E_n(f)| \le \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+2)}(x)|}{(n+1)!}\int_a^b |(\xi(x) - x_{n/2})\varpi(x)|dx \le \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+2)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+3} .$$

ცხადია, თუ $f(x)$ (n+1) რიგის პოლინომია, მაშინ ცდომილება 0-ის ტოლი იქნება და კვადრატურული ფორმულა მისთვის ზუსტი იქნება. ◢

ამრიგად, კენტი რაოდენობის კვანძით წერტილებიან კვადრატურულ ფორმულებს აქვთ სიზუსტის უფრო მაღალი რიგი, ვიდრე ლუწი რაოდენობის კვანძით წერტილებიან კვადრატურულ ფორმულებს: კენტი რაოდენობის კვანძით წერტილებიანი კვადრატურული ფორმულის სიზუსტის რიგი კვანძების რაოდენობის ტოლია, ხოლო ლუწი რაოდენობის

[3] **ლაგრანჟის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ მონაკვეთზე და დიფერენცირებადია (a,b) ინტერვალზე, მაშინ მოიძებნება ისეთი წერტილი $c\in(a,b)$, რომ $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$.

კვანძით წერტილებიანი კვადრატურული ფორმულის სიზუსტის რიგი ერთით ნაკლებია კვანძების რაოდენობაზე.

8.11. ცდომილების აპოსტერიორული შეფასების რუნგეს მეთოდი. ინტეგრების ბიჯის ავტომატური შერჩევა

რიცხვითი ინტეგრების ცდომილების სიდიდე დამოკიდებულია როგორც ბადის h ბიჯზე, ისე ინტეგრალქვეშა ფუნქციის სიგლუვეზე. თუ რომელიმე ქვეშუალედზე ცდომილება დიდია, მისი შემცირება შეიძლება ამ ქვეშუალედზე ბადის ბიჯის შემცირებით. შევაფასოთ ცდომილება აპოსტერიორულად რუნგეს მეთოდის გამოყენებით. რუნგეს მეთოდი ავხსნათ ტრაპეციის ფორმულის მაგალითზე.

ვთვათ, $[a,b]$ შუალედი დაყოფილია საზოგადოდ სხვადასხვა სიგრძის ქვეშუალედებად $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\dots,N$, $x_0 = a$, $x_N = b$. ქვეშუალედის სიგრძე აღვნიშნოთ $h_i = x_i - x_{i-1}$. ყოველ ქვეშუალედზე ინტეგრალის მიახლოებით გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ტრაპეციის ფორმულა:

$$I_{exact,i}(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$I_{h,i}(f) = (x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

ნაშთითი წევრისთვის გვექნება შეფასება:

$$E_{h,i}(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{(2)}(\xi_i(x))}{2!}(x - x_{i-1})(x - x_i)dx \approx c_i(x_i - x_{i-1})^3,$$

ანუ

$$I_{exact,i}(f) - I_{h_i,i}(f) \approx c_i h_i^3, \tag{8.20}$$

სადაც c_i მუდმივა $f(x)$ ფუნქციის სიგლუვეზეა დამოკიდებული. $[x_{i-1}, x_i]$ ქვეშუალედზე ბადის ბიჯი შევამციროთ ორჯერ და გამოთვლები ჩავატაროთ $h_i / 2$ ბიჯით:

$$I_{h/2,i}(f) = (x_i - x_{i-1/2})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1/2})}{2} + (x_{i-1/2} - x_{i-1})\frac{f(x_{i-1/2}) + f(x_{i-1})}{2} =$$

$$= (f(x_i) + 2f(x_{i-1/2}) + f(x_{i-1}))\frac{h_i}{4},$$

$$E_{h/2,i}(f) \approx c_i(h_i/2)^3.$$

შევაფასოთ $I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f)$ სხვაობა $(I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f))$-ის საშუალებით. განვიხილოთ შემდეგი ორი ტოლობის სხვაობა:

$$I_{exact,i}(f) - I_{h_i,i}(f) \approx c_i h_i^3 \tag{8.21}$$

$$I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f) \approx c_i h_i^3/8 \tag{8.22}$$

გვექნება:

$$I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f) \approx \frac{7}{8}c_i h_i^3 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{7}(I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f)) \approx \frac{1}{8}c_i h_i^3 \approx I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f).$$

ამრიგად, $I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f) \approx \frac{1}{7}(I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f))$.

რა თქმა უნდა, რუნგეს მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა კვადრატურული ფორმულების ცდომილების შესაფასებლადაც. ვთქვათ, რომელიმე კვადრატურულ ფორმულის ცდომილება $[x_{i-1}, x_i]$ ქვეშუალედზე h-ის მიმართ m რიგისაა:

$$I_{exact,i}(f) - I_{h_i,i}(f) \approx c_i h_i^m .$$

მაშინ

$$I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f) \approx c_i h_i^m / 2^m \quad .$$

უკანასკნელი ორი ტოლობების სხვაობიდან გვექნება:

$$I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f) \approx \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) c_i h_i^m = \frac{2^m - 1}{2^m} c_i h_i^m \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2^m - 1}(I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f)) \approx \frac{1}{2^m} c_i h_i^m \approx I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f) .$$

ამრიგად, $I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f) \approx \frac{1}{2^m - 1}(I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f))$.

ცდომილების აპოსტერიორული შეფასება საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ინტეგრალი წინასწარ დასახელებული ε სიზუსტით, ინტეგრების ბიჯის ავტომატური შერჩევის ხარჯზე. ვთქვათ, მოცემული ε-სთვის სრულდება უტოლობა:

$$| I_{exact,i}(f) - I_{h/2_i,i}(f) | \approx \frac{1}{2^m - 1} | I_{h/2,i}(f) - I_{h_i,i}(f) | \le \frac{\varepsilon h_i}{b - a} \qquad (8.23)$$

$$i = 1,2,..N;$$

მაშინ გვექნება:

$$| I_{exact}(f) - I_{h/2}(f) | \le \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon h_i}{b - a} = \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{N} h_i = \varepsilon$$

და დასახელებული სიზუსტე მიღწეული იქნება. ამრიგად, ქვეინტერვალის დაყოფა შეწყდება, როცა შესრულდება უტოლობა:

$$\frac{| I_h(f) - I_{h/2}(f) |}{2^m - 1} \le \varepsilon .$$

თუ რომელიმე ქვეინტერვალზე (8.23) შეფასება არ სრულდება, მაშინ ამ ქვეინტერვალზე ბიჯი კიდევ ორჯერ უნდა შევამციროთ და კვლავ შევაფასოთ ცდომილება. ქვეინტერვალზე ბიჯი მანამ უნდა შევამციროთ, სანამ (8.23) შეფასება არ შესრულდება. შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთი $f(x)$ ფუნქციისთვის ასეთი დაყოფა შეიძლება ძალიან დიდხანს გაგრძელდეს, ამიტომ შესაბამის პროგრამაში ზემოდან უნდა შემოვსაზღვროთ დაყოფათა რიცხვი, ასევე უნდა გავითვალისწინოთ ε-ის გაზრდის შესაძლებლობა.

ამრიგად, ინტეგრების ბიჯის ავტომატური შერჩევას მივყავართ იქამდე, რომ ინტეგრება ხდება დიდი ბიჯით $f(x)$ ფუნქციის ნელი ცვლილების უბნებზე და მცირე ბიჯით -- $f(x)$ ფუნქციის სწრაფი ცვლილების უბნებზე. ეს საშუალებას გვაძლევს მოცემული ε სიზუსტისთვის შევამციროთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლის რიცხვი თანაბარბიჯიან ბადესთან შედარებით. შევნიშნოთ, რომ $I_{h/2}(f)$ ჯამების გამოთვლისას საჭირო არ არის ფუნქციის მნიშვნელობების ყველა კვანძში გამოთვლა -- საკმარისია $f(x)$ ფუნქცია მხოლოდ ახალ კვანძებში გამოვთვალოთ.