ᲘᲕ. ᲯᲐᲕᲐᲮᲘᲨᲕᲘᲚᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲝᲑᲘᲡ ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲡᲐᲮᲔᲚᲛᲬᲘᲤᲝ ᲣᲜᲘᲕᲔᲠᲡᲘᲢᲔᲢᲘ
ᲖᲣᲡᲢ ᲓᲐ ᲡᲐᲑᲣᲜᲔᲑᲘᲡᲛᲔᲢᲧᲕᲔᲚᲝ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ ᲤᲐᲙᲣᲚᲢᲔᲢᲘ
ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲘᲡ ᲓᲔᲞᲐᲠᲢᲐᲛᲔᲜᲢᲘ

ᲝᲞᲢᲘᲛᲐᲚᲣᲠᲘ ᲛᲐᲠᲗᲕᲐ
(ლექციების კურსი)

ლექტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
თსუ სრული პროფესორი თამაზ თადუმაძე

ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘ - 2010

შინაარსი

შესავალი

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ მეტნაკლებად გვიხდება ფიქრი იმაზე , რომ დასაშვებ (შესაძლებელ) ვარიანტებიდან ავირჩიოთ ყველაზე საუკეთესო (ოპტიმალური) , რომ მივაღწიოთ დასახულ მიზანს. ეს შეიძლება იყოს მინიმალური დანახარჯებით ან მინიმალურ დროში სასურველ პუნქტამდე მისვლა, ჩვენს ხელთ არსებული ფინანსური შესაძლებლობების რაციონალურად გამოყენება და ა.შ. მათემატიკურად აღწერილი ასეთი ტიპის ამოცანების გამოკვლევა შეადგენს ვარიაციული აღრიცხვისა და ოპტიმალური მართვის თეორიის საგანს. ეს თეორია შეიცავს ფართო სპექტრს პრობლემებისა, რომლებიც დაკავშირებულია ფუნქციონალის ექსტრემუმის მოძებნასთან; სისტემების ოპტიმალურ მართვასთან; ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებასთან და ა.შ .

საქართველოში ვარიაციული აღრიცხვისა და ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარებას საფუძველი ჩაუყარეს ა. რაზმაძემ, რ. გამყრელიძემ და გ. ხარატიშვილმა.

კურსი მიზანია გააცნოს სტუდენტებს ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლები და გამოუმუშავოს მათ ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევისა და ამოხსნის უნარ-ჩვევები.

ლექციათა კურსში ფორმულების, თეორემების და ა.შ. დასანომრად გამოყენებულია ორციფრიანი ნუმერაცია: პირველი ციფრი მიუთითებს პარაგრაფის ნომერს, ხოლო მეორე ციფრი- ფორმულის, თეორემის და ა.შ. ნომერს. სალექციო კურსის შედგენისას ჩვენ ძირითადად ვსარგებლობდით [1]-[4] წიგნებით.

§ 1. სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა და მისი ამონახსნი. მართვების სიმრავლე

R_x^n-ით აღვნიშნოთ $x=(x^1,...,x^n)^T$ ვექტორების n- განზომილებიანი წრფივი (ვექტორული) სივრცე, სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირებას . x ვექტორის მოდული (სიგრძე) განიმარტება ფორმულით

$$|x|^2=\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 .$$

R_x^n სივრცეში x და y ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $x^T y$ და განიმარტება ფორმულით $x^T y=\sum_{i=1}^{n}x^i y^i$.

R_x^n სივრცეში გავიხილოთ $u\in R_u^r$ პარამეტრზე დამოკიდებული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (ვექტორული ფორმით ჩაწერილი)

$$\dot{x}=f(t,x,u)\,,\ \ x\in R_x^n, \tag{1.1}$$

სადაც

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \ f(t,x,u)=(f^1(t,x,u),...,f^n(t,x,u))^T,\ \ u=(u^1,...,u^r)^T\in R_u^r .$$

$u \in R_u^r$ პარამეტრს ეწოდება მართვა (მართვის პარამეტრი), ხოლო (1.1) განტოლებას სამართი დიფერენციალური განტოლება.

ვთქვა $I=[a,b]$ მოცემული მონაკვეთია. ვიტყვით, რომ $I \times R_x^n \times R_u^r$ პირდაპირ ნამრავლზე განსაზღვრული $f(t,x,u)$ ფუნქცია (განტოლების მარჯვენა მხარე) უწყვეტად წარმოებადია $x \in R_x^n$ ცვლადის მიმართ, თუ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f^i(t,x,u)}{\partial x^j}, \ i,j=\overline{1,n}$$

უწყვეტია სიმრავლეზე $I \times R_x^n \times R_u^r$.

განსაზღვრება 1.1. $x=x(t) \in R_x^n, t \in I$ ფუნქციას ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი, თუ იგი უწყვეტად წარმოებადია და ყოველი $t \in I$ წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u).$$

აქ იგულისხმება, რომ $\dot{x}(a)=\dot{x}(a+), \dot{x}(b)=\dot{x}(b-)$.

განსაზღვრება 1.2. ვთქვათ $(t_0,x_0) \in I \times R_x^n$ მოცემული წერტილია. $x(t), t \in I$ ფუნქციას ეწოდება

$$\begin{cases} \dot{x}=f(t,x,u), \\ x(t_0)=x_0, \end{cases}$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი, თუ იგი განტოლების ამონახსნია და ამავე დროს აკმაყოფილებს პირობას $x(t_0)=x_0$.

თეორემა 1.1. ვთქვათ ფუნქცია $f(t,x,u)$ უწყვეტია სიმრავლეზე $I \times R_x^n \times R_u^r$ და უწყეტად წარმოებადია x ცვლადის მიმართ. გარდა ამისა, ვთქვათ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f^i(t,x,u)}{\partial x^j}, \ i,j=\overline{1,n}$$

შემოსაზღვრულია ე.ი. არსებობს ისეთი რიცხვი $M>0$, რომ

$$\left|\frac{\partial f^i(t,x,u)}{\partial x^j}\right| \le M, i,j=\overline{1,n}, \forall (t,x,u) \in I \times R_x^n \times R_u^n.$$

მაშინ ნებისმიერი $(t_0,x_0,u) \in I \times R_x^n \times R_u^r$ წერტილისთვის არსებობს კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x}=f(t,x,u), \\ x(t_0)=x_0, \end{cases}$$

ერთადერთი ამონახსნი $x(t)$, რომელიც განმარტებულია მთელ I მონაკვეთზე.

მაგალითი 1.1. ვთქვათ ერთეული მასის $(m=1)$ მქონე სხეული F ძალის მოქმედებით მოძრაობს ჰორიზონტალურ წრფეზე (რიცხვით ღერძზე). იპოვეთ სხეულის მოძრაობის აღმწერი დიფერენციალური განტოლება, თუ მხედველობაში არ მიიღება გარეშე ძალები (ხახუნი, ქარი და ა.შ.). ნიუტონის მეორე კანონის $(ma=F)$ თანახმად სხეულის მოძრაობა აღიწერება მე-2 რიგის დიფერენციალური განტოლებით

$$\ddot{x} = F \,. \qquad (1.2)$$

(1.2) განტოლება დავიყვანოთ სისტემაზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x^1 = x, x^2 = \dot{x}$, მივიღებთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = F. \end{cases} \qquad (1.3)$$

ცხადია, F ძალის ცვლილების შესაბამისად, R_x^2 ფაზურ სივრცეში იცვლება (1.3) სისტემის ტრაექტორია. ამიტომ F ძალა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მართვის პარამეტრი ე.ი. $u = F$.

ამრიგად, სხეულის მოძრაობა R_x^2 ფაზურ სივრცეში აღიწერება შემდეგი სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u. \end{cases}$$

მართვის პარამეტრი u, როგორც წესი, დამოკიდებულია დროზე და აკმაყოფილებს გარკვეულ შეზღუდვებს. მათემატიკურად ეს ნიშნას, რომ $u = u(t), t \in I$ და იგი იღებს მნიშვნელობებს წინასწარ მოცემულ $U \subset R_u^r$ სიმრავლიდან. $u(t)$-ს ეწოდება მართვის ფუნქცია (მართვა), ხოლო U-ს მართვის არე.

ვთქვათ $u(t)$ უწყვეტი მართვაა, მაშინ არსებობს კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ერთადერთი ამონახსნი $x(t), t \in I.$

ვთქვათ $U \subset R_u^r$ მოცემული სიმრავლეა. Ω_1-თი აღვნიშნოთ უწყვეტი $u(t) \in U, t \in I$ მართვების ერთობლიობა. Ω_1-ს ეწოდება მართვების სიმრავლე.

ყოველ ელემენტს $w = (t_0, x_0, u) \in W_1 = I \times R_x^n \times \Omega_1$ შევუსაბამოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \qquad (1.4)$$

საწყისი პირობით

$$x(t_0) = x_0 \,. \qquad (1.5)$$

განსაზღვრება 1.3. $x(t) = x(t; w),\ t \in I,$ ფუნქციას ეწოდება $w \in W_1$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (1.5) პირობას. $x(t)$ ფუნქცია I მონაკვეთზე უწყვეტად წარმოებადია და ყოველ $t \in I$ წერტილში აკმაყოფილებს (1.4) დიფერენციალურ განტოლებას.

ყოველ $w \in W_1$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი $x(t; w)$.

კონკრეტული ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევა აჩვენებს, რომ ოპტიმალური მართვა, როგორც წესი, უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა. ამიტომ მიზანშეწონილია მართვის ფუნქციებად განვიხილოთ უბან-უბან უწყვეტი

ფუნქციები. $u(t) \in U, t \in I$ მართვას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი, თუ მონაკვეთი I შეიძლება დანაწილდეს სასრულ რაოდენობა $I_i, i=\overline{1,k}$ ქვეინტერვალებად, რომლებზეც $u(t)$ ფუნქცია უწყვეტია.

Ω-თი აღვნიშნოთ უბან-უბან უწყვეტი $u(t) \in U, t \in I$, მართვების სიმრავლე. ცხადია, რომ $\Omega_1 \subset \Omega$.

ვთქვათ $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია და $u(t) \in \Omega$. ავაგოთ $u(t)$-ს შესაბამისი ამონახსნი. ვთქვათ $s_1 > t_0$ პირველი წერტილია, რომელზეც $u(t)$ განიცდის წყვეტას. $[t_0, s_1]$ მონაკვეთზე განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

განტოლების მარჯვენა მხარე უწყვეტია $t \in [t_0, s_1]$ მონაკვეთზე. (1.6) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t), t \in [t_0, s_1]$. ვთქვათ $s_2 > s_1$ არის $u(t)$ მართვის მომდევნო წყვეტის წერტილი, მაშინ $[s_1, s_2]$ მონაკვეთზე კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u(t)) \\ x(s_1) = x_1(s_1) \end{cases}$$

ექნება ერთადერთი ამონახსნი $x_2(t), t \in [s_1, s_2]$. ფუნქციას

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in [t_0, s_1] \\ x_2(t), t \in [s_1, s_2] \end{cases}$$

ეწოდება (1.6) კოშის ამოცანის ამონახსნი $[t_0, s_2]$ მონაკვეთზე. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ t_0 წერტილის მარჯვნივ და მარცხნივ , მაშინ ჩვენ ავაგებთ $u(t)$ მართვის შესაბამის $x(t)$ ამონახსნს I მონკვეთზე.

აღსანიშნავია, რომ ასეთი წესით აგებული ამონახსნი ერთადერთია და მას , საზოგადოდ, $u(t)$ მართვის წყვეტის წერტილებში შეიძლება არ გააჩნდეს წარმოებული ე.ი. ამ წერტილებში იგი არ დააკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას.

ყოველ ელემენტს $w = (t_0, x_0, u) \in W = I \times R_x^r \times \Omega$ შევუსაბამოთ (1.4) დიფერენციალური განტოლება (1.5) საწყისი პირობით.

განსაზღვრება 1.4. $x(t) = x(t; w), t \in I,$ ფუნქციას ეწოდება $w \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (1.5) პირობას. $x(t)$ ფუნქცია I მონაკვეთზე უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი და ყოველ $t \in I$ წერტილში, გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა, აკმაყოფილებს (1.4) დიფერენციალურ განტოლებას.

ყოველ $w \in W$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი.

§ 2. ოპტიმალური ამოცანა ავტონომიური სისტემისთვის. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ავტონომიური, თუ მისი მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე. ვთქვათ $t_0 \in [a,b)$, $x_0 \in R_x^n, x_1 \in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო Ω უბან-უბან უწყვეტი $u(t) \in U, t \in I$ მართვების სიმრავლეა. ფუნქცია $f(x,u) = (f^1(x,u),...,f^n(x,u))^T$ აკმაყოფილებს თეორემა 1.1-ის პირობებს $R_x^n \times U$ სიმრავლეზე.

ყოველ $w = (t_1, u) \in W = (t_0, b] \times \Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ ავტონომიური დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = f(x,u), x \in R_x^n, t \in [t_0, t_1].$$

განსაზღვრება 2.1. $x(t) = x(t;w), t \in [t_0, t_1]$ უწყვეტ ფუნქციას ეწოდება w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი , თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას $x(t_0) = x_0$. ფუნქცია $x(t)$ უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ ყველგან $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე, გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

ყოველ w ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი (ტრაექტორია) $x(t)$.

განსაზღვრება 2.2. $w = (t_1, u(t)) \in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ტრაექტორია $x(t)$ აკმაყოფილებს პირობას $x(t_1) = x_1$.

დასაშვები ელემენტის შესაბამის ტრაექტორია აერთებს x_0 და x_1 წერტილებს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $u(t)$ მართვას გადაყავს x_0 წერტილი x_1 წერტილში $t_1 - t_0$ დროის განმავლობაში.

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ვთქვათ $f^0(x,u)$ სკალარული ფუნქცია უწყვეტია $R_x^n \times U$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადი x ცვლადის მიმართ.

განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(w) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt,$$

სადაც $x(t) = x(t;w)$.

ასახვას ეწოდება ფუნქციონალი, თუ მისი სახე რიცხვია.

განსაზღვრება 2.3. $w_0 = (t_{10}, u_0(t)) \in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w \in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(w_0) \le J(w).$$

ოპტიმალური ამოცანა მდგომარეობს ოპტიმალური w_0 ელემენტის მოძებნაში. $u_0(t)$-ს ეწოდება ოპტიმალური მართვა, $x_0(t) = x(t; w_0)$ ეწოდება ოპტიმალური ტრაექტორია, t_{10} ეწოდება ოპტიმალური მომენტი.

ოპტიმალური ამოცანა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ J(w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t))dt \to \min, \\ w = (t_1, u(t)) \in W = (t_0, b] \times \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

(2.1) ამოცანას ეწოდება ოპტიმალური ამოცანა დამაგრებული (ფიქსირებული) ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით.

ვთქვათ $f^0(x,u) \equiv 1$, მაშინ $J(w) = t_1 - t_0$. ამ შემთხვევაში ოპტიმალურ ამოცანას ეწოდება სწრაფქმედების ოპტიმლური ამოცანა.

(2.1) ამოცანისთვის, ელემენტის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების ჩამოსყალიბებლად ჩვენ დაგჭირდება შემდეგი აღნიშვნები:

$$\hat{\psi} = (\psi_0, \psi), \ \psi = (\psi_1, ..., \psi_n) \quad \hat{f} = (f^0, f)^T,$$

$$H(x,u,\hat{\psi}) = \hat{\psi}\,\hat{f}(x,u) = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f^j(x,u).$$

ვთქვათ $w = (t_1, u(t)) \in W$, ხოლო $x(t)$ შესაბამისი ამონახსნია. w ელემენტის შესაბამისი შეუღლებული განტოლება ეწოდება განტოლებას

$$\dot{\psi} = -H_x(x(t),u(t),\hat{\psi}) = -\hat{\psi}\,\hat{f}_x(x(t),u(t)), t \in [t_0, t_1].$$

კოორდინატებში ეს განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^j(x(t),u(t))}{\partial x^i} \psi_j, i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

(2.2) არის ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა. (2.2) განტოლებას ნებისმიერი უბან-უბან უწყვეტი $\psi_0(t)$ ფუნქციისთვის ყოველთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\psi_i(t), i = \overline{1,n}$, რომელიც უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი. $\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$ ეწოდება შეუღლებული განტოლების ამონახსნი, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x(t),u(t),\hat{\psi}(t))$$

ან რაც იგივეა

$$\dot{\psi}_i(t) = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^j(x(t),u(t))}{\partial x^i} \psi_j(t), i = \overline{1,n}.$$

თეორემა 2.1. ვთქვათ $w_0 = (t_{10}, u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)$ შესაბამისი ამონახსნი (ოპტიმალური ტრაექტორია). მაშინ არსებობს მისი შესაბამისი შეუღლებული განტოლების

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x_0(t),u_0(t),\hat{\psi}(t))$$

ისეთი არანულოვანი (არატრივიალური) ამონახსნი $\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$,

სადაც $\psi_0(t) = const \le 0$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) u ცვლადის ფუნქცია $H(x_0(t),u,\hat{\psi}(t))$ ყოველი $t\in[t_0,t_{10}]$ აღწევს თავის მაქსიმუმს $u=u_0(t)$ წერტილზე (გარკვეულობისთვის იგულისხმება, რომ $u_0(t)=u_0(t-)$) ე.ი. ყოველი $t\in[t_0,t_{10}]$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$H(x_0(t),u_0(t),\hat{\psi}(t))=\max_{u\in U}H(x_0(t),u,\hat{\psi}(t)). \qquad (2.4)$$

ბ) ოპტიმალურ t_{10} მომენტში შესრულებულია ტოლობა

$$H(x_0(t_{10}),u_0(t_{10}),\hat{\psi}(t_{10}))=0. \qquad (2.5)$$

(2.4) პირობას ეწოდება პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი.

ავტონომიური ოპტიმალური ამოცანისთვის $H(x_0(t),u_0(t),\hat{\psi}(t))=const.$

ვთქვათ $f^0(x,u)\equiv 1$, მაშინ $H(x,u,\hat{\psi})=\psi_0+\sum_{j=1}^{n}\psi_j f^j(x,u)=\psi_0+\psi f(x,u)$.

შეუღლებული განტოლება და (2.5) პირობა ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$\dot{\psi}=-\psi\, f_x(x_0(t),u_0(t)),$$

$$\psi_0(t_{10})+\psi(t_{10})f(x_0(t_{10}),u_0(t_{10}))=0. \qquad (2.6)$$

თუ $\psi(t)$ ამონახსნი რომელიმე $t=\hat{t}$ მომენტში ნოლის ტოლია, მაშინ ერთადერთობის გამო $\psi(t)\equiv 0$. (2.6)-დან მიიღება $\psi_0(t_{10})=0$ ე.ი. $\hat{\psi}(t)\equiv 0$. ეს ეწინააღმდეგება მაქსიმუმის პრინციპს. ამრიგად $\psi(t)\neq 0$ ყოველ $t\in[t_0,t_{10}]$ წერტილში. (2.6) ტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$\psi(t_{10})f(x_0(t_{10}),u_0(t_{10}))\geq 0.$$

ამრიგად სწრაფქმედების აზრით ოპტიმალური ამოცანისათვის გვექნება შემდეგი

თეორემა 2.2. ვთქვათ $w_0=(t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია. მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi}=-\psi\, f_x(x_0(t),u_0(t))$$

განტოლების ისეთი არატრივიალური ამონახსნი $\psi(t)$, რომ ადგილი აქვს

$$\psi(t)\, f(x_0(t),u_0(t))=\max_{u\in U}\psi(t)f(x_0(t),u), t\in[t_0,t_{10}],$$
$$\psi(t_{10})f(x_0(t_{10}),u_0(t_{10}))\geq 0.$$

§ 3. ოპტიმალური ამოცანა არაავტონომიური სისტემისთვის. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება არაავტონომიური, თუ მისი მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია t ცვლადზე. ვთქვათ $t_0\in[a,b)$, $x_0\in R_x^n, x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო Ω უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in U, t\in I$

მართვების სიმრავლეა. ფუნქცია $f(t,x,u)=(f^1(t,x,u),...,f^n(t,x,u))^T$ აკმაყოფილებს თეორემა 1.1-ის პირობებს $I\times R_x^n\times U$ სიმრავლეზე.

ყოველ $w=(t_1,u(t))\in W=(t_0,b]\times\Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ არაავტონომიური დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}=f(t,x,u), x\in R_x^n.$$

განსაზღვრება 3.1. $x(t)=x(t;w), t\in[t_0,t_1]$ უწყვეტ ფუნქციას ეწოდება w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობას $x(t_0)=x_0$. ფუნქცია $x(t)$ უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას $\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))$ ყველგან $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე, გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

ყოველ w ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი (ტრაექტორია) $x(t)$.

განსაზღვრება 3.2. $w=(t_1,u(t))\in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი ტრაექტორია $x(t)$ აკმაყოფილებს პირობას $x(t_1)=x_1$.

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ვთქვათ $f^0(t,x,u)$ სკალარული ფუნქცია უწყვეტია $I\times R_x^n\times U$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადი x ცვლადის მიმართ.

განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(w)=\int_{t_0}^{t_1}f^0(t,x(t),u(t))dt,$$

სადაც $x(t)=x(t;w)$.

განსაზღვრება 3.3. $w_0=(t_{10},u_0(t))\in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w\in W_0$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(w_0)\le J(w).$$

ოპტიმალური ამოცანა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x,u), u\in\Omega,\\ x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1,\\ J(w)=\int_{t_9}^{t_1}f^0(t,x(t),u(t))dt\to\min,\\ w=(t_1,u)\in W=(t_0,b]\times\Omega.\end{cases}\tag{3.1}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$H(t,x,u,\hat{\psi})=\hat{\psi}\,\hat{f}(t,x,u)=\sum_{j=0}^{n}\psi_j f^j(t,x,u).$$

თეორემა 3.1. ვთქვათ $w_0=(t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)$ შესაბამისი ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ არსებობს შეუღლებული განტოლების

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t,x_0(t),u_0(t),\hat{\psi}(t))$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, სადაც $\psi_0(t) = const \le 0$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. u ცვლადის ფუნქცია $H(t, x_0(t), u, \hat{\psi}(t))$ ყოველი $t \in [t_0, t_{10}]$ აღწევს თავის მაქსიმუმს $u = u_0(t)$ წერტილზე ე.ი. ყოველი $t \in [t_0, t_{10}]$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t)) = \max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \hat{\psi}(t)).$$

2. ოპტიმალურ t_{10} მომენტში შესრულებულია ტოლობა

$$H(t_{10}, x_0(t_{10}), u_0(t_{10}), \hat{\psi}(t_{10})) = 0.$$

თუ t_1 ფიქსირებულია, მაშინ (1) ამოცანას ეწოდება ოპტიმალური ამოცანა ფიქსირებული დროით, ამ შემთხვევაში $w = u$ და მეორე პირობა თეორემაში არ გვექნება.

ახლა განვიხილოთ სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), u \in \Omega, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ J(w) = t_1 - t_0 \to \min, \\ w = (t_1, u(t)) \in W, \end{cases}$$

თეორემა 3.2. ვთქვათ $w_0 = (t_{10}, u_0(t)$ ოპტიმალური ელემენტია. მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi} = -\psi \, f_x(t, x_0(t), u_0(t))$$

განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\psi(t)$, რომ ადგილი აქვს

$$\psi(t) \, f(t, x_0(t), u_0(t)) = \max_{u \in U} \psi(t) f(t, x_0(t), u), t \in [t_0, t_{10}],$$

$$\psi(t_{10}) f(t_{10}, x_0(t_{10}), u_0(t_{10})) \ge 0.$$

§ 4. ოპტიმალური ამოცანა თავისუფალი მარჯვენა ბოლოთი და ფიქსირებული დროით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა

R_x^n ფაზურ სივრცეში განვიხილოთ არაავტონომიური ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), u \in \Omega, \\ x(t_0) = x_0, \\ J(u) = \int\limits_{t_9}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \to \min, \end{cases}$$

სადაც t_1 ფიქსირებულია.

თეორემა 4.1. ვთქვათ $u_0(t)$ ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $x_0(t)$ ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ შეუღლებული განტოლების

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t)),$$

$\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$ ამონახსნისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\psi_0(t) \equiv -1$, $\psi(t_1) = 0$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t)) = M(t, x_0(t), \hat{\psi}(t)), t \in [t_1, t_1].$$

ავტონომიური ამოცანისთვის გვექნება შემდეგი

თეორემა 4.2. ვთქვათ $u_0(t)$ ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $x_0(t)$ ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ შეუღლებული განტოლების

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t)),$$

$\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$ ამონახსნისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\psi_0(t) \equiv -1$, $\psi(t_1) = 0$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$H(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t)) = \max_{u \in U} H(x_0(t), u, \hat{\psi}(t)) = const, t \in [t_0, t_1].$$

§ 5. იზოპერიმეტრული ოპტიმალური ამოცანა

განვიხილოთ ოპტიმალური ამოცანა

$$\dot{x} = f(x, u), u \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \tag{5.2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t))dt = \alpha, \tag{5.3}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \to \min, \tag{5.4}$$

სადაც $t_0, t_1 \in I, x_0, x_1 \in R_x^n$ ფიქსირებულია; სკალარული ფუნქცია $g(x,u)$ უწყვეტია $R_x^n \times R_u^r$ და უწყვეტად წარმოებადია x-ის მიმართ; α მოცემული რიცხვია.

(5.1)-(5.4)-ს ეწოდება იზოპერიმეტრული ამოცანა, იგი განსხვავდება §1-ში განხილული ამოცანისგან (5.3) ტოლობით.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$H(x, u, \hat{\psi}, \lambda) = \hat{\psi}\ \hat{f}(x, u) + \lambda\, g(x, u).$$

თეორემა 5.1. ვთქვათ $u_0(t)$ ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $x_0(t)$ ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ არსებობს შეუღლებული განტოლების

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t), \lambda)$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $(\hat{\psi}(t), \lambda) = (\psi_0(t), \psi(t), \lambda)$, სადაც $\psi_0(t) = const \le 0$, $\lambda = const$, რომ შესრულებულია შემდეგი ტოლობა

$$H(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t), \lambda) = \sup_{u \in U} H(x_0(t), u_0(t), \hat{\psi}(t), \lambda) = const, t \in [t_0, t_1].$$

სავარჯიშო 5.1. დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები შემდეგი ოპტიმალური ამოცანებისთვის:
5.1)

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = u, \ u \in U = [-1,1] \end{cases}$$

$$x^1(0) = x_0^1, x^2(0) = x_0^2, x^1(T) = x^2(T) = 0$$

$$T \to \min;$$

5.2)

$$\dot{x} = n(x,u), x \in R_x^1, u \in R_u^1$$
$$x(0) = x_0$$
$$\int_0^{t_1} n(x(t),u(t))dt = \alpha$$
$$\int_0^{t_1} n(x(t),u(t))M(x(t),u(t))dt \to \min .$$

§ 6. ზოგადი ოპტიმალური ამოცანა

ვთქვათ სკალარული ფუნქციები $q^i(t_0,t_1,x_0,x_1), i=\overline{0,l}$ უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი სიმრავლეზე $I \times I \times O \times O$, სადაც $I=[a,b]$,ხოლო $O \subset R_x^n$ ღია სიმრავლეა.

ყოველ $w=(t_0,t_1,x_0,u(t)) \in W = I \times I \times O \times \Omega$ ელემენტს, სადაც $t_0 < t_1$, შევუსაბამოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x} = f(t,x,u), x \in O \tag{6.1}$$

საწყისი პირობით

$$x(t_0) = x_0 . \tag{6.2}$$

განტოლების მარჯვენა მხარე $f(t,x,u)$, $I \times O \times U$ სიმრავლეზე აკმაყოფილებს § 1-ში მოთხოვნილ პირობებს, იქვე იხილეთ U და Ω სიმრავლეების შესახებ.

განსაზღვრება 6.1. $w=(t_0,t_1,x_0,u(t)) \in W = I \times I \times O \times \Omega$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t)=x(t;w), t \in [t_0,t_1]$ იღებს მნიშვნელობებს O სიმრავლიდან და აკმაყოფილებს პირობებს

$$q^i(t_0,t_1,x_0,x(t_1)) = 0, i=\overline{1,l} . \tag{6.3}$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

განსაზღვრება 6.2. $w_0 = (t_{00}, t_{10}, x_{00}, u_0(t)) \in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w = (t_0, t_1, x_0, u) \in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0(t_{00}, t_{10}, x_{00}, x_0(t_{10})) \le q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1)), \tag{6.4}$$

სადაც $x_0(t) = x(t; w_0), x(t) = x(t; w)$.

(6.1)-(6.4) ამოცანას ეწოდება ზოგადი ოპტიმალური ამოცანა. წინა პარაგრაფებში განხილული ყველა ამოცანა წარმოადგენს (6.1)-(6.4) ამოცანის კერძო შემთხვევას (**შეამოწმეთ**).

მოკლედ ზოგადი ამოცანა ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), t \in [t_0, t_1] \subset I, u \in \Omega \\ x(t_0) = x_0 \\ q^i(t_0, t_1, x_0, x_1) = 0, i = \overline{1, l} \\ q^0(t_0, t_1, x_0, x_1) \to \min \end{cases}$$

თეორემა 6.1. ვთქვათ $w_0 = (t_{00}, t_{10}, x_{00}, u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, $t_0, t_1 \in (a, b)$. მაშინ არსებობს არანულოვანი ვექტორი $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l)$, $\pi_0 \le 0$ და შეუღლებული განტოლების

$$\dot{\psi} = -\psi\, f_x(t, x_0(t), u_0(t))$$

ისეთი ამონახსნი $\psi(t)$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

6.1) მაქსიმუმის პრინციპი

$$\psi(t)\, f(t, x_0(t), u_0(t)) = \max_{u \in U} \psi(t)\, f(t, x_0(t), u), t \in [t_{00}, t_{10}];$$

6.2) პირობა $\psi(t)$ ფუნქციისა და π ვექტორისთვის (ტრანსვერსალობის პირობა)

$$\psi(t_{10}) = \pi Q^0_{x_1}, \psi(t_{00}) = -\pi Q^0_{x_0},\ Q = (q^0, ..., q^l)^T, Q^0_x = Q_x\,(t_{00}, t_{10}, x_0(t_{00}), x_0(t_{10}));$$

6.3) პირობები t_0 და t_1 მომენტებისთვის

$$\pi Q^0_{t_0} = \psi(t_{00})\, f(t_{00}, x_0(t_{00}), u_0(t_{00})),\ \pi Q^0_{t_1} = \psi(t_{10})\, f(t_{10}, x_0(t_{10}), u_0(t_{10})).$$

შენიშვნა 6.1. თუ

$$(Q^0_{t_0}\, Q^0_{t_1}\, Q^0_{t_0}\, Q^0_{t_1})$$

მატრიცის რანგი ტოლია $1 + l$ მაშინ , $\psi(t)$ ამონახსნი არატრივიალურია.

მართლაც, ვთქვათ $\psi(t)\equiv 0$, მაშინ 6.2) და 6.3) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} \pi Q^0_{x_0} = 0 \\ \pi Q^0_{x_1} = 0 \\ \pi Q^0_{t_0} = 0 \\ \pi Q^0_{t_1} = 0 \end{cases}$$

ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $\pi=(\pi_0,...,\pi_l)$ უცნობის მიმართ. რადგანაც მატრიცის რანგი ტოლია $1+l$ ამიტომ ამ სისტემიდან გამომდინრეობს, რომ $\pi=0$ (**რატომ**). ეს ეწინააღმდეგება თეორემას.

ახლა თეორამა 6.1-ის გამოყენებით დავამტკიცოთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები ოპტიმალური ამოცანისთვის არავტონომიური სისტემისათვის.

განვიხილოთ ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), u\in\Omega, \\ x(t_0)=\hat{x}_0, x(t_1)=\hat{x}_1, \\ J(w)=\int\limits_{t_9}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))dt \to \min, \\ w=(t_1,u)\in(t_0,b]\times\Omega \end{cases} \tag{6.5}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x^0(t)=\int\limits_{t_0}^{t} f(s,x(s),u(s))ds,$$

მაშინ (6.5) ამოცანა ექვივალენტურია შემდეგი ამოცანის (**რატომ**)

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}^0 = f^0(t,x,u) \\ \dot{x} = f(t,x,u) \end{cases} \\ x^0(t_0)=0, x(t_0)=\hat{x}_0, x(t_1)=\hat{x}_1 \\ x^0(t_1)\to\min \\ w=(t_1,u)\in(t_0,b]\times\Omega \end{cases} \tag{6.6}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\bar{x}=(x^0,x)^T$, $\hat{f}(t,\bar{x},u)=(f^0(t,x,u), f(t,x,u))^T$.
(6.6) ამოცანა $R^{1+n}_{\bar{x}}$ სივრცეში, რომელშიც შემოღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \hat{f}(t,\bar{x},u) \\ \bar{x}(t_0)=\bar{x}_0=(0,\hat{x}_0)^T,\ \bar{x}(t_1)=(x^0(t_1),\hat{x}_1)^T\in L \\ x^0(t_1)\to\min \\ w=(t_1,u)\in(t_0,b]\times\Omega \end{cases} \tag{6.7}$$

სადაც L არის $R_{\bar{x}}^{1+n}$ სივრცეში $(0,\hat{x}_1)^T \in R_{\bar{x}}^{1+n}$ წერტილზე გამავალი წრფე, რომელიც პარალელურია x^0 ღერძის. გეომეტრიულად ამოცანა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ. ვიპოვოთ ისეთი ელემენტი w, რომელსაც $\bar{x}_1 \in R_{\bar{x}}^{1+n}$ წერტილი გადაყავს L წრფის ისეთ წერტილში, რომლის პირველი კოორდინატი არის მინიმალური.

ვისარგებლოთ თეორემა 6.1-ით (6.7) ამოცანისთვის. პირველ რიგში დავადგინოთ $q^i(t_0,t_1,\bar{x}_0,\bar{x}_1), i=\overline{0,l}$ ფუნქციების სახე, სადაც $\bar{x}_0=(x_0^0,x_0^1,...,x_0^n)^T$, $\bar{x}_1=(x_1^0,x_1^1,...,x_1^n)^T$ და ვიპოვოთ l-ის მნიშვნელობა. გვექნება:

$$q^0(t_0,t_1,\bar{x}_0,\bar{x}_1)=x_1^0,\quad q^1(t_0,t_1,\bar{x}_0,\bar{x}_1)=x_0^0,\quad q^{1+i}(t_0,t_1,\bar{x}_0,\bar{x}_1)=x_0^i-\hat{x}_0^i, i=\overline{1,n},$$
$$q^{n+1+j}(t_0,t_1,\bar{x}_0,\bar{x}_1)=x_1^i-\hat{x}_1^i,\ j=\overline{1,n}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $l=2n+2$ და

$$q^0(t_0,t_1,\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))=x^0(t_1),\quad q^1(t_0,t_1,\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))=x^0(t_0),$$
$$q^{1+i}(t_0,t_1,\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))=x^i(t_0)-\hat{x}_0^i, i=\overline{1,n},\quad q^{n+1+j}(t_0,t_1,\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))=x_1^j-\hat{x}_1^j,\ j=\overline{1,n}.$$

ვექტორი $\pi=(\pi_0,...,\pi_{2n+1})\neq 0, \pi_0 \le 0$. შეუღლებული განტოლებას ექნება სახე

$$\dot{\hat{\psi}}=-\hat{\psi}\,\hat{f}_{\bar{x}}(t,x_0(t),u_0(t)),\quad \hat{\psi}=(\psi_0,\psi),\psi=(\psi_1,...,\psi_n). \tag{6.8}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\hat{f}_{\bar{x}}(t,\bar{x}_0(t),u_0(t))=(\Theta_{n\times 1}\ \hat{f}_x(t,x_0(t),u_0(t)), \tag{6.9}$$

სადაც $\Theta_{n\times 1}=(0,...,0)^T \in R_x^n$.

(6.9) ტოლობის გათვალისწინებით (6.8) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases}\dot{\psi}_0=0,\\ \dot{\psi}=-\hat{\psi}\,\hat{f}_x(t,x_0(t),u_0(t)).\end{cases}$$

ტრანსვერსალობის პირობა მიიღებს სახეს

$$\hat{\psi}(t_{10})=\pi\hat{Q}_{\bar{x}_1}^0, \hat{\psi}(t_{00})=-\pi\hat{Q}_{\bar{x}_0}^0,\quad \hat{Q}=(q^0,...,q^{2n+1})^T, \hat{Q}_x^0=\hat{Q}_x\ (t_{00},t_{10},x_0(t_{00}),x_0(t_{10})).$$

გამოვთვალოთ მატრიცები $\hat{Q}_{x_1}^0,\hat{Q}_{x_0}^0$. გვექნება

$$\hat{Q}^0_{x_1} = \begin{pmatrix} 1\ 0.........0 \\ 0\ 0........0 \\ .... \\ 0\,0.........0 \\ 1\ 0.........0 \\ .... \\ 0\ 0.........1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{Q}^0_{\bar{x}_0} = \begin{pmatrix} 0\ 0........0 \\ 1\ 0.........0 \\ 01.........0 \\ .... \\ 0\,0.........1 \\ 0\,0.........0 \\ .... \\ 0\,0.........0 \end{pmatrix}.$$

ამის გათვალისწინებით ტრანსვერსალობის პირობიდან მივიღებთ

$$\hat{\psi}(t_{10}) = \pi\hat{Q}^0_{\bar{x}_1} = (\pi_0, \pi^{(2)}), \quad \pi^{(2)} = (\pi_{n+2}, ..., \pi_{2n+2}),$$
$$\hat{\psi}(t_{00}) = -\pi\hat{Q}^0_{\bar{x}_0} = -\pi^{(1)}, \qquad \pi^{(1)} = (\pi_1, ..., \pi_{n+1}).$$

აქედა გამომდინარეობს

$$\psi_0(t_{10}) = \pi_0, \psi(t_{00}) = -\pi_1, \ \psi(t_{10}) = \pi^{(2)}, \psi(t_{00}) = (\pi_2, ..., \pi_{n+1}).$$

შეუღლებული განტოლებიდან დავასკვნით, რომ $\psi_0(t) = const$, ე.ი. $\psi_0(t) \equiv \pi_0 \le 0$. თუ $\hat{\psi}(t) \equiv 0$, მაშინ $\pi = (\pi_0, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}) = 0$ რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. ამრიგად $\hat{\psi}(t)$ არანულოვანი ამონახსნია.

ცხადია, რომ $\hat{Q}^0_{t_1} = 0$, ამიტომ t_{10} მომენტისთვის გვექნება პირობა $\hat{\psi}(t_{10})\hat{f}(t_{10}, x_0(t_{10}), u_0(t_{10})) = 0$. t_0 მომენტი ფიქსირებულია და მისთვის პირობა არ არის საჭირო. მაქსიმუმის პრინციპი მიიღებს სახეს

$$\hat{\psi}(t)\hat{f}(t, x_0(t), u_0(t)) = \max_{u \in U} \hat{\psi}(t)\hat{f}(t, x_0(t), u), t \in [t_0, t_{10}].$$

სავარჯიშო 6.1. ზოგადი თეორემის გამოყენებით მიიღეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები შემდეგი ამოცანებისთვის:

6.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), u \in \Omega, \\ x(t_0) = \hat{x}_0, x(t_1) = \hat{x}_1, \\ t_1 - t_0 \to mn. \end{cases}$$

6.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), u \in \Omega, \\ x(t_0) = \hat{x}_0, \\ J(u) = \int\limits_{t_9}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt \to \min, \\ \end{cases}$$

t_1-ფიქსირებულია.

6.3)

$$\dot{x} = f(x,u), u \in \Omega,$$
$$x(t_0) = \hat{x}_0, x(t_1) = \hat{x}_1,$$
$$\int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t))dt = \alpha ,$$
$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t))dt \to \min .$$

§ 7. წრფივი სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანა

განვიხილოთ ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, u \in \Omega, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ t_1 - t_0 \to \min, \\ w = (t_1, u) \in (t_0, b] \times \Omega, \end{cases}$$

სადაც $A = (a_i^j)_{i,j=1}^n$ არის $n \times n$ განზომილებიანი მატრიცი, ხოლო $B = (b_i^j), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}$, არის $n \times r$ განზომილებიანი მატრიცი.

თეორემა 7.1. ვთქვათ $w_0 = (t_{10}, u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi} = -\psi A$$

განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\psi(t), t \in [t_0, t_{10}]$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

7.1) ყოველი $t \in [t_0, t_{10}]$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\psi(t)Bu_0(t) = \max_{u \in U} \psi(t)Bu;$$

7.2) t_{10} მომენტში ადგილი აქვს უტოლობას

$$\psi(t_{10})[Ax_0(t_{10}) + Bu_0(t_{10})] \geq 0.$$

დამტკიცება. ვისარგებლოთ თეორემა 2.2-ით სადაც დავუშვათ, რომ $f(x,u) = Ax + Bu$. მაშინ შეუღლებული განტოლება მიიღებს სახეს

$$\dot{\psi} = -\psi f_x(x_0(t), u_0(t)) = -\psi A.$$

მაქსიმუმის პრინციპიდან გამომდინარეობს

$$\psi(t)[Ax_0(t)+Bu_0(t)]=\max_{u\in U}\psi(t)[Ax_0(t)+Bu],$$

აქედან მივიღებთ 7.1) პირობას.
t_{10} მომენტისთვის გვექნება

$$\psi(t_{10})f(x_0(t_{10}),u_0(t_{10}))=\psi(t_{10})[Ax_0(t_{10})+Bu_0(t_{10})]\geq 0.$$

სავარჯიშო 7.3. ანალოგიური სქემით დაამტკიცეთ აუცილებელი პირობები შემდეგი ამოცანებისთვის:

7.1)

$$\begin{cases} \dot{x}=A(t)x+B(t)u, u\in\Omega, \\ x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \\ t_1-t_0\rightarrow \min, \\ w=(t_1,u)\in(t_0,b]\times\Omega, \end{cases}$$

სადაც $A(t)$ და $B(t)$ უწყვეტი მატრიც-ფუნქციებია.

7.2)

$$\begin{cases} \dot{x}=A(t)x+B(t)u, u\in\Omega, \\ x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \\ J(w)=\int_{t_9}^{t_1}[a_0(t)x(t)+b_0(t)u(t)]dt\rightarrow \min, \\ w=(t_1,u)\in W_1, \end{cases}$$

სადაც $a_0(t)=(a_0^1(t),...,a_0^n(t))$ და $b_0(t)=(b_0^1(t),...,b_0^r(t))$ უწყვეტი ვექტორ ფუნქციებია.

7.3)

$$\begin{cases} \dot{x}=A(t)x+B(t)u, u\in\Omega, \\ x(t_0)=x_0, \\ J(w)=\int_{t_9}^{t_1}[a_0(t)x(t)+b_0(t)u(t)]dt\rightarrow \min, \end{cases}$$

სადაც t_1 ფიქსირებულია.

§ 8. სისტემის ზოგადი მდგომარეობის პირობა. თეორემა ოპტიმალური მართვის სტრუქტურისა და ერთადერთობის შესახებ

განვიხილოთ წრფივი სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, u \in \Omega, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ t_1 - t_0 \to \min, \\ w = (t_1, u) \in (t_0, b] \times \Omega. \end{cases} \qquad (8.1)$$

ვთქვათ მართვების მნიშვნელობათა არე $U \subset R_u^r$ არის r განზომილებიანი პარალელეპიპედი ე.ი.

$$U = \left\{ u = (u^1, ..., u^r)^T \in R_u^r ; \alpha_i \le u^i \le \beta_i, i = \overline{1, r} \right\}.$$

თუ $r = 1$ მაშინ U იქნება $[\alpha_1, \beta_1]$ სეგმენტი. თუ $r = 2$ მაშინ U იქნება მართკუთხედი

$$U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R_u^2 : \alpha_1 \le u^1 \le \beta_1, \alpha_2 \le u^2 \le \beta_2 \right\}.$$

განსაზღვრება 8.1. ვიტყვით რომ სისტემა აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას, თუ U პარალელეპიპედის წიბოს პარალელური ნებისმიერი P ვექტორისთვის, ვექტორთა სისტემა

$$BP, ABP, ..., A^{n-1}BP$$

R_x^n სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემა 8.1. ვთქვათ სისტემა (8.1) აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას, მაშინ $u_0(t), t \in [t_0, t_{10}]$ ოპტიმალური მართვა უბან-უბან მუდმივია და მისი მნიშველობებია U პარალელეპიპედის წვეროები.

თეორემა 8.2. ვთქვათ $u_0(t) = (u_0^1(t), ..., u_0^r(t))^T, t \in [t_0, t_{10}]$ ოპტიმალური მართვაა. ვთქვათ სისტემა (8.1) აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას,ხოლო A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია, მაშინ $u_0^i(t)$ ფუნქციას $[t_0, t_{10}]$ მონაკვეთზე აქვს არაუმეტეს $n-1$ წყვეტის (გადართვის) წერტილი და იგი იღებს α_i ან β_i მნიშვნელობებს.

თეორემა 8.3. ვთქვათ სისტემა (8.1) აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას, მაშინ ოპტიმალური მართვა ერთადერთია.

§ 9. ᲬᲠᲤᲘᲕᲘ ᲡᲐᲛᲐᲠᲗᲘ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲘᲡ ᲛᲘᲦᲬᲔᲕᲐᲓᲝᲑᲘᲡ ᲡᲘᲛᲠᲐᲕᲚᲔ ᲓᲐ ᲛᲘᲡᲘ ᲗᲕᲘᲡᲔᲑᲔᲑᲘ

R_x^n ფაზურ სივრცეში განვიხილოთ წრფივი სამართი სისტემა

$$\dot{x} = Ax + Bu\,,\ \ u \in \Omega, \qquad (9.1)$$

საწყისი პირობით

$$x(t_0) = x_0\,.$$

ყოველ $u \in \Omega$ მართვას შეესაბამება კოშის ამოცანის ერთადერთი $x(t;u)$ ამონახსნი, რომელიც განმარტებულია ყოველი $t \geq t_0$.

ყოველი ფიქსირებული $t_1 \geq t_0$ შემოვიღოთ სიმრავლე

$$X(t_1) = \{x(t_1;u) : u \in \Omega\}.$$

$X(t_1)$ ეწოდება მიღწევადობის სიმრავლე.

თეორემა 9.1. ვთქვათ მართვების მნიშვნელობათა არე $U \subset R_u^r$ ამოზნექილია, მაშინ მიღწევადობის სიმრავლე $X(t_1)$ ამოზნექილია.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_1, x_2 \in X(t_1)$ ნებისმიერი წერტილებია. მიღწევადობის სიმრავლის განმარტების თანახმად არსებობს მართვები $u_1, u_2 \in \Omega$, რომ მათი შესაბამისი ამონახსნები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$x_1(t_1) = x(t_1;u_1) = x_1, x_2(t_1) = x(t_1;u_2) = x_2\,.$$

ცხადია ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = Ax_2(t) + Bu_2(t).$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}[\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t)] = A[\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t)] + B[\lambda u_1(t) + (1-\lambda)u_2(t)]\,, \forall \lambda \in [0,1].$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u_\lambda(t) = \lambda u_1(t) + (1-\lambda)u_2(t)\,,\ \ x_\lambda(t) = \lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t)\,.$$

U სიმრავლის ამოზნექილობის გამო $u_\lambda(t) \in U$ ე.ი. $u_\lambda \in \Omega$. ადვილი მისახვედრია, რომ $x_\lambda(t) = x(t;u_\lambda)$ და $x_\lambda(t_1) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

ცხადია, რომ $x_\lambda(t_1) \in X(t_1)$ ე.ი. $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X(t_1)\,, \forall \lambda \in [0,1]$. აქედან გამომდინარეობს $X(t_1)$ სიმრავლის ამოზნექილობა.

თეორემა 9.2. ვთქვათ U სიმრავლე შემსაზღვრულია, მაშინ მიღწევადობის სიმრავლეც $X(t_1)$ იქნება შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ (9.1) სისტემისთვის კოშის ფორმულით

$$x(t)=\Phi(t)[x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Bu(s)ds], \qquad (9.2)$$

სადაც $\Phi(t)$ ფუნდამენტური მატრიცაა, ხოლო $\Phi^{-1}(t)$ მისი შებრუნებული.

არსებობს რიცხვი $M>0$, რომ $|u|\le M, \forall u\in U$. ცხადია ნორმები

$$\|\Phi\|=\max_{t\in[t_0,t_1]}|\Phi(t)| \quad , \qquad \|\Phi^{-1}B\|=\max_{t\in[t_0,t_1]}|\Phi^{-1}(t)B|$$

შემოსაზღვრულია.

(9.2) ტოლობიდან მიიღება შემდეგი შეფასება

$$|x(t_1)|\le\|\Phi\|\left\{|x_0|+\|\Phi^{-1}B\|M(t_1-t_0)\right\}.$$

ეს ნიშნავს $X(t_1)$ სიმრავლის შემოსაზღვრულობას.

თეორემა 9.3. ვთქვათ U ამოზნექილი კომპაქტია, ხოლო Ω არის ზომადი მართვების სიმრავლე. მაშინ მიღწევადობის სიმრავლე $X(t_1)$ ამოზნექილი კომპაქტია.

შენიშვნა 9.1. მიღწევადობის სიმრავლის თვისებები გმოიყენება ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას და ოპტიმალური მართვის მოძებნის მიახლოებითი მეთოდების დამუშავებისას.

სავარჯიშო 9.1.

9.1) კოშის ფორმულის გამოყენებით დაამტკიცეთ თეორემა 9.1.

9.2) ვთქვათ $x_0=0$ და $0\in U$. დაამტკიცეთ, რომ $X(t_1)\subset X(t_2)$, როცა $t_1<t_2$.

§ 10. ოპტიმალური მართვის არსებობის თეორემა

განვიხილოთ სწრაფქმედების არაწრფივი ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x,u), u\in\Omega,\\ x(t_0)=\hat{x}_0, x(t_1)=\hat{x}_1,\\ t_1-t_0\to\min,\\ w=(t_1,u)\in W=(t_0,b]\times\Omega,\end{cases}$$

სადაც Ω არის ზომადი $u(t), t\in I$ ფუნქციების სიმრავლე მნიშვნელობებით კომპაქტურ U სიმრავლიდან. როგორც ყოველთვის დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

შემოვიღოთ სიმრავლე

$$P(t,x)=\left\{f(t,x,u): u\in U\right\}.$$

თეორემა 10.1. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) $W_0 \neq \varnothing$;

ბ) ყოველი $(t,x) \in [t_0,b] \times R_x^n$ სიმრავლე $P(t,x)$ ამოზნექილია;

გ) არსებობს რიცხვი $M > 0$ ისეთი, რომ $\forall w \in W_0$

$$|x(t;w)| \leq M, t \in [t_0,t_1].$$

მაშინ არსებობს ოპტიმალური ელემენტი $w_0 \in W_0$.

ზოგიერთი კომენტარი. ა) პირობა ნიშნავს, რომ არსებობს ერთი მაინც დასაშვები ელემენტი. თუ $W_0 \neq \varnothing$ მაშინ ამბობენ, რომ სისტემა მართვადია. ბ) პირობა ყოველთვის სრულდება, თუ

$$f(t,x,u) = g(t,x) + B(t,x)u$$

და U ამოზნექილი სიმრავლეა **(შეამოწმეთ)**.
გ) პირობა სრულდება, თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t,x,u)| \leq K, \ \ K > 0,$$

(შეამოწმეთ).

შენიშვნა 10.1. კოშის ამოცანის

$$\dot{x} = f(t,x,u(t)), \qquad (10.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad (10.2)$$

ამონახსნი, როცა მართვა $u(t)$ უბან-უბან უწყვეტია განმარტებული იყო §1-ში. თუ მართვა $u(t), t \in [t_0,t_1]$ ზომადია, მაშინ კოშის ამოცანის ამონახსნი ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტ $x(t), t \in [t_0,t_1]$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (10.2) პირობას, ხოლო (10.1) განტოლებას თითქმის ყველა t-თვის. უკანასკნელი ნიშნავს, რომ ტოლობას

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$$

ადგილი აქვს $[t_0,b]$ მონაკვეთზე ყველგან, გარდა ნულ ზომის (ლებეგის აზრით) სიმრავლეზე.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა ინტეგრალური ფუნქციონალით

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), u \in \Omega, \\ x(t_0) = \hat{x}_0, x(t_1) = \hat{x}_1, \\ J(w) = \int\limits_{t_9}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))dt \to \min, \\ w = (t_1,u) \in W = (t_0,b] \times \Omega. \end{cases}$$

თეორემა 10.2. ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) $W_0 \neq \varnothing$;

ბ) ყოველი $(t,x)\in[t_0,b]\times R_x^n$ სიმრავლე

$$P(t,x)=\left\{\ \hat{f}(t,x,u):u\in U\ \right\},\ \ \hat{f}(t,x,u)=(f^0(t,x,u),f(t,x,u))^T$$

ამოზნექილია;

გ) არსებობს რიცხვი $M>0$ ისეთი, რომ $\forall w\in W_0$

$$|x(t;w)|\le M,t\in[t_0,t_1].$$

მაშინ არსებობს ოპტიმალური ელემენტი $w_0\in W_0$.

სავარჯიშო 10.1. ჩამოაყალიბეთ არსებობის თეორემა იზოპერიმეტრული ამოცანისთვის

$$\dot{x}=f(x,u),u\in\Omega,$$
$$x(t_0)=\hat{x}_0,x(t_1)=\hat{x}_1,$$
$$\int_{t_0}^{t_1}g(x(t),u(t))dt=\alpha\ ,$$
$$\int_{t_0}^{t_1}f^0(x(t),u(t))dt\to\min\ .$$

§ 11. ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა. ეილერის განტოლება

ვთქვათ $t_0,t_1\in I,x_0,x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია. Δ-თი აღვნიშნოთ უწყვეტი და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $x(t)\in R_x^n,t\in[t_0,t_1]$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1.$$

Δ სიმრავლეზე განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}g(t,x(t),\dot{x}(t))dt\,,$$

სადაც სკალარული ფუნქცია $g(t,x,y)$ უწყვეტია $I\times R_x^n\times R_x^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ.

განსაზღვრება 11.1. $x_0(\cdot)\in\Delta$ ეწოდება ექსტრემალი, თუ ნებისმიერი $x(\cdot)\in\Delta$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(x_0(\cdot))\le J(x(\cdot)).$$

ვარიაციული ამოცანა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \end{cases} \qquad (11.1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $u(t) = \dot{x}(t)$, სადაც $x(\cdot) \in \Delta$.
განვიხილოთ ოპტიმალური ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = u,\ u \in \Omega, \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ J_1(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t))dt \to \min, \end{cases} \qquad (11.2)$$

სადაც Ω არის უბან-უბან უწყვეტ $u(t), t \in [t_0, t_1]$ მართვების სიმრავლე, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობებს R_u^r სიმრავლიდან ე.ი. ამ შემთხვევაში $U = R_u^r$.

თეორემა 11.1. ამოცანები (11.1) და (11.2) ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_0(t)$ ექსტრემალია. ვაჩვენოთ, რომ $u_0(t) = \dot{x}_0(t)$ ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $x_0(t)$ ოპტიმალური ტრაექტორია. დავუშვათ საწინააღმდეგო ე.ი. არსებობს ისეთი დასაშვები $u_1(t)$ მართვა (ამ შემთხვევაში $w = u$), რომ ადგილი აქვს უტოლობას $J_1(u_1(\cdot)) < J_1(u_0(\cdot))$. ცხადია, რომ $x_1(t) = x(t : u_1)$ ტრაექტორიისთვის გვექნება

$$J(x_1(\cdot)) = J_1(u_1(\cdot)) < J_1(u_0(\cdot)) = J(x_0(\cdot)).$$

ეს ეწინააღმეგება $x_0(t)$ ექსტრემალურობას.
ვთქვათ $u_0(t)$ ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $x_0(t)$ ოპტიმალური ტრაექტორია. ვაჩვენოთ, რომ $x_0(t)$ ექსტრემალია. დავუშვათ საწინააღმდეგო ე.ი. არსებობს ისეთი $x_1(\cdot) \in \Delta$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას $J(x_1(\cdot)) < J(x_0(\cdot))$. მაშინ მივიღებთ

$$J_1(u_1(\cdot)) = J(x_1(\cdot)) < J(x_0(\cdot)) = J_1(u_0(\cdot)),$$

სადაც $u_1(t) = \dot{x}_1(t)$. ეს ეწინააღმდეგება $u_0(t)$ ოპტიმალურობას.
თეორემა დამტკიცებულია.

(11.2) ამოცანისთვის ვისარგებლოთ თეორემა 3.1-ით. ვთქვათ $u_0(t)$ ოპტიმალური მრთვაა, ხოლო $x_0(t)$ ოპტიმალური ტრაექტორია, მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi} = -\psi_0 g_x(t, x_0(t), u_0(t)) \qquad (11.3)$$

განტოლების ისეთი არანულოვანი (არატრივიალური) ამონახსნი $(\psi_0(t), \psi(t))$, სადაც $\psi_0(t) = \psi_0 = const \le 0$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\psi_0 g(t,x_0(t),u_0(t))+\psi(t)u_0(t)=\max_{u\in R_u^r}[\psi_0 g(t,x_0(t),u)+\psi(t)u]. \qquad (11.4)$$

(11.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს (ფერმას თეორემის ძალით)

$$\psi_0 g_u(t,x_0(t),u_0(t))+\psi(t)=0. \qquad (11.5)$$

ვთქვათ $\psi_0=0$, მაშინ (11.5) ტოლობიდან მივიღებთ $\psi(t)\equiv 0$. ეს კი ეწინააღმდეგება $(\psi_0(t),\psi(t))$ ამონახსნის არატრივიალურობას. ამრიგად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\psi_0(t)\equiv -1$. ამ უკანასკნელის გათვალიწინებით მივიღებთ (იხ. (11.3) და (11.5))

$$\dot{\psi}=g_x(t,x_0(t),u_0(t)), \qquad (11.6)$$

$$\psi(t)=g_u(t,x_0(t),u_0(t)). \qquad (11.7)$$

ვაინტეგროთ (11.6) განტოლება მივიღებთ

$$\psi(t)-\psi(t_0)=\int_{t_0}^{t} g_x(s,x_0(s),u_0(s))ds.$$

აქედან დავასკვნით

$$\psi(t)=c+\int_{t_0}^{t} g_x(s,x_0(s),u_0(s))ds, c=\psi(t_0). \qquad (11.8)$$

(11.7) და (11.8) ტოლობებიდან მიიღება

$$g_u(t,x_0(t),u_0(t))=c+\int_{t_0}^{t} g_x(s,x_0(s),u_0(s))ds.$$

ეს ტოლობა $u_0(t)=\dot{x}_0(t)$ გათვალისწინებით შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$g_{\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))=c+\int_{t_0}^{t} g_x(s,x_0(s),\dot{x}_0(s))ds, \qquad (11.9)$$

სადაც $\dot{x}$ გაწარმოება ნიშნავს y ცვლადით გაწარმოებას.
(11.9) ტოლობას ეწოდება ეილერის ინტეგრალური განტოლება.

თეორემა 11.2. თუ $x_0(t)$ არის (11.1) ამოცანის ექსტრემალი, მაშინ იგი აკმაყოფილებს (11.9) ინტეგრალურ განტოლებას.

(11.9) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\frac{d}{dt}g_{\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))=g_x(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)). \qquad (11.10)$$

(11.10) ეწოდება ეილერის დიფერენციალური განტოლება.
(11.7) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\psi(t)=g_{\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)).$$

$\psi(t)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ უწყვეტი იქნება $g_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ ფუნქციაც. ამრიგად, $\dot{x}_0(t)$ ფუნქციის წყვეტის $\theta \in (t_0, t_1)$ წერტილში შესრულდება ტოლობა

$$g_{\dot{x}}(\theta, x_0(\theta), \dot{x}_0(\theta-)) = g_{\dot{x}}(\theta, x_0(\theta), \dot{x}_0(\theta+)),$$

რომელსაც ეწოდება ვეიერშტრას-ერდმანის პირობა.

§ 12. დიფერენციალური განტოლება დაგვიანებული არგუმენტით

დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობებზე t და წინა $t-\tau$ მომენტებში , სადაც τ დადებითი რიცხვია, ეწოდება დიფერენციალ ური განტოლება დაგვიანებული არგუმენტით ანუ დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება.

არაწრფივი დაგვიანებულარგუმენტიანი განტოლებათა სისტემაა

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad x(t) \in R_x^n. \tag{12.1}$$

(12.1) განტოლების კერძო შემთხვევაა განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t) \in R_x^n.$$

ვთქვათ $t_0 \in [a,b)$ და $\varphi(t) \in R_x^n, t \in [t_0 - \tau, t_0]$ უწყვეტი ფუნქციაა.
$\varphi(t)$-ს ეწოდება საწყისი ფუნქცია.

განსაზღვრება 12.1. $x(t) \in R_x^n, t \in [t_0 - \tau, t_1]$ ფუნქციას**,** სადაც $t_1 \in (t_0, b]$, ეწოდება კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \tag{12.2}$$

ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობებს:
12.1) $[t_0 - \tau, t_0]$ მონაკვეთზე $x(t) = \varphi(t)$;
12.2) $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე $x(t)$ უწყვეტად წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)).$$

(12.1) ამოცანას ეწოდება კოშის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით.
გარკვეულ პირობებში, ბიჯის მეთოდით შეიძლება აგებული იქნას (12.1) ამოცანის ამონახსნი.
$[t_0, t_0 + \tau]$ მონაკვეთზე (12.2) ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varphi(t-\tau)), \\ x(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases} \tag{12.3}$$

ვთქვათ $[t_0, t_0+\tau]$ მონაკვეთზე არსებობს (12.3) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t)$. ახლა განვიხილოთ მონაკვეთი $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$. ამ მონაკვეთზე (12.2) ამოცანა ეკვივალენტურია ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, x_1(t-\tau)), \\ x(t_0+\tau) = x_1(t_0+\tau). \end{cases} \tag{12.4}$$

ვთქვათ არსებობს ამონახსნი $x_2(t), t \in [t_0+\tau, t_0+2\tau]$. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in [t_0, t_0+\tau], \\ x_2(t), t \in [t_0+\tau, t_0+2\tau]. \end{cases}$$

ცხადია

$$\dot{x}(t_0+\tau-) = \dot{x}_1(t_0+\tau-) = f(t_0+\tau, x_1(t_0+\tau), \varphi(t_0)) =$$
$$f(t_0+\tau, x_2(t_0+\tau), x_1(t_0)) = \dot{x}_2(t_0+\tau+) = \dot{x}(t_0+\tau+).$$

ამრიგად ფუნქცია $x(t)$ უწყვეტად წარმოებადია $t_0+\tau$ წერტილში,
ამიტომ იგი არის $[t_0, t_0+2\tau]$ მონაკვეთზე (12.2) კოშის ამოცანის ამონახსნი.

ვთქვათ $x_0 \in R_x^n$ და $\varphi(t_0) \neq x_0$. ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0-\tau, t_0), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{12.5}$$

ეწოდება კოშის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით.

განსაზღვრება 12.2. $x(t) \in R_x^n, t \in [t_0-\tau, t_1]$ ფუნქციას**,** სადაც $t_1 \in (t_0, b]$, ეწოდება (12.5) კოშის ამოცანის ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობებს:

12.3) $x(t) = \varphi(t), t \in [t_0-\tau, t_0), x(t_0) = x_0;$;

12.4) $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე $x(t)$ უწყვეტია და უბან-უბან უწვეტად წარმოებადი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$$

ყველგან გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

თეორემა 12.1. ვთქვათ ფუნქცია $f(t, x, y)$ უწყვეტია $[t_0, b] \times R_x^n \times R_y^n$ სიმრავლეზე და უწყეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ.
გარდა ამისა,

$$\left|f_x(t,x,y)\right|+\left|f_y(t,x,y)\right|\le M,\forall(t,x,y)\in[t_0,b]\times R_x^n\times R_y^n \quad , \quad M>0.$$

მაშინ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\varphi(t),t\in[t_0-\tau,t_0]\end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t),t\in[t_0,b]$.

თეორემა 12.2. ვთქვათ ფუნქცია $f(t,x,y)$ უწყვეტია $[t_0,b]\times R_x^n\times R_y^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ.
გარდა ამისა,

$$\left|f_x(t,x,y)\right|+\left|f_y(t,x,y)\right|\le M,\forall(t,x,y)\in[t_0,b]\times R_x^n\times R_y^n \quad , \quad M>0.$$

მაშინ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\varphi(t),t\in[t_0-\tau,t_0),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t),t\in[t_0,b]$.

სავარჯიშო 12.1. ბიჯის მეთოდით აჩვენეთ, რომ $[t_0,t_0+2\tau]$ მონაკვეთზე

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\varphi(t),t\in[t_0-\tau,t_0),\\ x(t_0)=x_0\ne\varphi(t_0),\end{cases}$$

ამოცანის ამონახსნი $x(t)$ უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადია.

§ 13. ოპტიმალური ამოცანა დაგვიანებული არგუმენტით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

ვთქვათ $t_0\in(a,b)\,,x_0\in R_x^n,x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო Ω უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in U,t\in I=[a,b]$ მართვების სიმრავლეა; ფუნქცია $f(t,x,y,u)=(f^1(t,x,y,u),...,f^n(t,x,y,u))^T$ უწყვეტია $I\times R_x^n\times R_y^n\times U$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ; $\varphi(t)\in R_x^n$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$, უწყვეტი საწყისი ფუნქციაა; $\tau>0$ მოცემული რიცხვია.

ყოველ $w=(t_1,u)\in W=(t_0,b]\times\Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ დაგვიანებულარგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), \qquad (13.1)$$

განსაზღვრება 13.1. $x(t) = x(t; w), t \in [t_0 - \tau, t_1]$ ფუნქციას ეწოდება $w = (t_1, u) \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), x(t_0) = x_0 . \qquad (13.2)$$

გარდა ამის, $x(t)$ უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე, და აკმაყოფილებს ტოლობას $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), u(t))$ ყველგან $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

თუ ფუნქცია $f(t, x, y, u)$ დამატებით აკმაყოფილებს პირობას

$$|f_x(t, x, y)| + |f_y(t, x, y)| \le M, \forall (t, x, y) \in I \times R_x^n \times R_y^n, M > 0,$$

მაშინ ნებისმიერ w ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი (იხ. თეორემა 12.2).

განსაზღვრება 13.2. $w = (t_1, u(t)) \in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი $x(t) \in [t_0 - \tau, t_1]$ ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას

$$x(t_1) = x_1 . \qquad (13.3)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ვთქვათ სკალარული ფუნქცია $f^0(t, x, y, u)$ ამაყოფილებს ყველა იმ პირობებს რასაც აკმაყოფილებდა $f(t, x, y, u)$ ფუნქცია.

განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(w) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), x(t-\tau), u(t)) dt .$$

განსაზღვრება 13.3. $w_0 = (t_{10}, u_0(t)) \in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w \in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(w_0) = \int_{t_0}^{t_{10}} f^0(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) dt \le J(w), x_0(t) = x(t; w_0) . \qquad (13.4)$$

(13.1)-(13.4) ამოცანას ეწოდება დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა. მოკლედ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), u(t) \in \Omega, \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ J(w) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), x(t-\tau), u(t)) dt \to \min, \\ w = (t_1, u(t)) \in W = (t_0, b] \times \Omega. \end{cases}$$

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\hat{f} = (f^0, f)^T \quad , \quad H(t,x,y,u,\hat{\psi}) = \hat{\psi}\ \hat{f}(t,x,y,u) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(t,x,y,u)\,,$$
$$M(t,x,y,\hat{\psi}) = \sup_{u\in U} H(t,x,y,u,\hat{\psi}).$$

თეორემა 13.1. ვთქვათ $w_0 = (t_{10}, u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, $x_0(t)$-ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\hat{\psi}}(t) = -\hat{\psi}(t)\,\hat{f}_x(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) - \hat{\psi}(t+\tau)\,\hat{f}_y(t+\tau, x_0(t+\tau), x_0(t), u_0(t+\tau)) =$$
$$-H_x(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t), \hat{\psi}(t)) - H_y(t+\tau, x_0(t+\tau), x_0(t), u_0(t+\tau), \hat{\psi}(t+\tau))\,, t\in[t_0, t_{10}],$$
$$\hat{\psi}(t) = 0, t > t_{10}.$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $(\psi_0(t), \psi(t))$, სადაც $\psi_0(t) = const \le 0$, რომ შესრულებულია პირობები:

13.1) მაქსიმუმის პრინციპი

$$H(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t), \hat{\psi}(t)) = M(t, x_0(t), x_0(t-\tau), \hat{\psi}(t)), t\in[t_0, t_{10}]\,,$$

13.2) პირობა t_{10} მომენტისთვის

$$M(t_{10}, x_0(t_{10}), x_0(t_{10}-\tau), \hat{\psi}(t_{10})) = 0.$$

ვთქვათ $f^0 \equiv 1$, მაშინ მივიღებთ სწრაფქმედების ოპტიმალურ ამოცანას, რომელიც მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), u(t)\in\Omega, \\ x(t) = \varphi(t), t\in[t_0-\tau, t_0), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ t_1 - t_0 \to \min \\ w = (t_1, u) \in W = (t_0, b]\times\Omega.. \end{cases}$$

თეორემა 13.2. ვთქვათ $w_0 = (t_{10}, u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, $x_0(t)$-ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)\,f_x(x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) - \psi(t+\tau)\,f_y(t+\tau, x_0(t+\tau), x_0(t), u_0(t+\tau))$$
$$\psi(t) = 0, t\in[t_{10}, t_{10}+\tau]$$

განტოლების ისეთი არატრივიალური ამონახსნი $\psi(t)$, რომ ადგილი აქვს

13.3) მაქსიმუმის პრინციპი

$$\psi(t)\,f(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) = \max_{u\in U} \psi(t)\,f(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u), t\in[t_0, t_{10}],$$

13.4) პირობა t_{10} მომენტისთვის

$$\psi(t_{10})f(t_{10},x_0(t_{10}),x_0(t_{10}-\tau),u_0(t_{10}))\geq 0.$$

სავარჯიშო 13.1.

13.5) დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები წრფივი ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანისთვის

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)u(t), u(t)\in\Omega, \\ x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0), x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \\ t_1-t_0\to\min \\ w=(t_1,u)\in W=(t_0,b]\times\Omega.. \end{cases}$$

13.6) დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები წრფივი ოპტიმალური ამოცანისთვის

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)u(t), u(t)\in\Omega, \\ x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0), x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \\ J(w)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[a^0(t)x(t)+b^0(t)x(t-\tau)+c^0(t)u(t)]dt\to\min, \\ w=(t_1,u)\in W=(t_0,b]\times\Omega. \end{cases}$$

§ 14. დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა არაფიქსირებული დროის მომენტებით და უწყვეტი საწყისი პირობით

ვთქვათ $x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილია, ხოლო Ω უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in U, t\in I=[a,b]$ მართვების სიმრავლეა; ფუნქცია $f(t,x,y,u)=(f^1(t,x,y,u),...,f^n(t,x,y,u))^T$ უწყვეტია $I\times R_x^n\times R_y^n\times U$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ; $\varphi(t)\in R_x^n$, $t\in[a-\tau,b]$, უწყვეტად წარმოებადი საწყისი ფუნქციაა; $\tau>0$ მოცემული რიცხვია. ყოველ $w=(t_0,t_1,u)\in W=(a,b)\times(a,b)\times\Omega, t_0<t_1$, ელემენტს შევუსაბამოთ დაგვიანებულარგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),u(t)), \qquad (14.1)$$

განსაზღვრება 14.1. $x(t)=x(t;w), t\in[t_0-\tau,t_1]$ ფუნქციას ეწოდება $w=(t_0,t_1,u)\in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს უწყვეტ საწყის პირობას

$$x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0]. \qquad (14.2)$$

გარდა ამის, $x(t)$ უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე, და აკმაყოფილებს ტოლობას $\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-\tau),u(t))$ ყველგან $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

განსაზღვრება 14.2. $w=(t_0,t_1,u(t))\in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი $x(t)\in[t_0-\tau,t_1]$ ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას

$$x(t_1)=x_1\,. \qquad (14.3)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ვთქვათ სკალარული ფუნქცია $f^0(t,x,y,u)$ ამაყოფილებს ყველა იმ პირობებს რასაც აკმაყოფილებდა $f(t,x,y,u)$ ფუნქცია.

განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(w)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),x(t-\tau),u(t))dt\,.$$

განსაზღვრება 14.3. $w_0=(t_{00},t_{10},u_0(t))\in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w\in W_0$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(w_0)=\int_{t_0}^{t_{10}} f^0(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t))dt\le J(w),x_0(t)=x(t;w_0)\,. \qquad (14.4)$$

(14.1)-(14.4) ამოცანას ეწოდება დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით. მოკლედ

$$\begin{cases}\dot x(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),u(t)),u(t)\in\Omega,\\ x(t)=\varphi(t),t\in[t_0-\tau,t_0],x(t_1)=x_1,\\ J(w)=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),x(t-\tau),u(t))dt\to\min,\\ w=(t_0,t_1,u)\in W.\end{cases}$$

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$\hat f=(f^0,f)^T\quad,\quad H(t,x,y,u,\hat\psi)=\hat\psi\,\hat f(t,x,y,u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(t,x,y,u)\,,$$
$$M(t,x,y,\hat\psi)=\sup_{u\in U}H(t,x,y,u,\hat\psi).$$

თეორემა 14.1. ვთქვათ $w_0=(t_{00},t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, $x_0(t)$- ოპტიმალური ტრაექტორია. მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot\psi(t)=-H_x(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t),\hat\psi(t))-$$
$$H_y(t+\tau,x_0(t+\tau),x_0(t),u_0(t+\tau),\hat\psi(t+\tau)),t\in[t_0,t_{10}],$$
$$\hat\psi(t)=0,t>t_{10}.$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat\psi(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, სადაც $\psi_0(t)=const\le 0$, რომ შესრულებულია პირობები:

14.1) მაქსიმუმის პრინციპი

$$H(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t), \hat{\psi}(t)) = M(t, x_0(t), x_0(t-\tau), \hat{\psi}(t)), t \in [t_0, t_{10}],$$

14.2) პირობა t_{00} წერტილში

$$\hat{\psi}(t_{00})[\hat{f}(t_{00}, x_0(t_{00}), x_0(t_{00}-\tau)), u_0(t_{00})) - (0, \dot{\varphi}(t_{00}))^T] = 0,$$

14.3) პირობა t_{10} მომენტისთვის

$$M(t_{10}, x_0(t_{10}), x_0(t_{10}-\tau), \hat{\psi}(t_{10})) = 0.$$

სავარჯიშო 14.1. დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები უწყვეტი საწყისი პირობის შემცველი წრფივი ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანისთვის

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)u(t), u \in \Omega, \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], x(t_1) = x_1, \\ t_1 - t_0 \to \min \\ w = (t_0, t_1, u) \in W = (a,b) \times (a,b) \times \Omega.. \end{cases}$$

§ 15. დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა არაფიქსირებული დროის მომენტებით და წყვეტილი საწყისი პირობით

ვთქვათ $x_0, x_1 \in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო Ω უბან-უბან უწყვეტი $u(t) \in U, t \in I = [a,b]$ მართვების სიმრავლეა; ფუნქცია $f(t,x,y,u) = (f^1(t,x,y,u),...,f^n(t,x,y,u))^T$ უწყვეტია $I \times R_x^n \times R_y^n \times U$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ; $\varphi(t) \in R_x^n$, $t \in [a-\tau, b]$, უწყვეტი საწყისი ფუნქციაა; $\tau > 0$ მოცემული რიცხვია.

ყოველ $w = (t_0, t_1, u) \in W = (a,b) \times (a,b) \times \Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ დაგვიანებულარგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), \qquad (15.1)$$

განსაზღვრება 15.1. $x(t) = x(t;w), t \in [t_0 - \tau, t_1]$ ფუნქციას ეწოდება $w = (t_0, t_1, u) \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს წყვეტილ საწყის პირობას

$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), x(t_0) = x_0. \qquad (15.2)$$

გარდა ამის, $x(t)$ უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე, და აკმაყოფილებს ტოლობას $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), u(t))$ ყველგან $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

განსაზღვრება 15.2. $w=(t_0,t_1,u(t))\in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი $x(t), t\in[t_0-\tau,t_1]$ ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას

$$x(t_1)=x_1. \qquad (15.3)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ვთქვათ სკალარული ფუნქცია $f^0(t,x,y,u)$ ამაყოფილებს ყველა იმ პირობებს რასაც აკმაყოფილებდა $f(t,x,y,u)$ ფუნქცია.

განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(w)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),x(t-\tau),u(t))dt.$$

განსაზღვრება 15.3. $w_0=(t_{00},t_{10},u_0(t))\in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w\in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(w_0)=\int_{t_0}^{t_{10}} f^0(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t))dt\le J(w), x_0(t)=x(t;w_0). \qquad (15.4)$$

(15.1)-(15.4) ამოცანას ეწოდება დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით. მოკლედ

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),u(t)), u\in\Omega, \\ x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0), x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \\ J(w)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),x(t-\tau),u(t))dt\to\min, \\ w=(t_0,t_1,u)\in W. \end{cases}$$

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$\hat{f}=(f^0,f)^T \quad , \quad H(t,x,y,u,\hat{\psi})=\hat{\psi}\,\hat{f}(t,x,y,u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(t,x,y,u),$$
$$M(t,x,y,\hat{\psi})=\sup_{u\in U}H(t,x,y,u,\hat{\psi}).$$

თეორემა 15.1. ვთქვათ $w_0=(t_{00},t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, $x_0(t)$- ოპტიმალური ტრაექტორია. გარდა ამისა, ვთქვათ შესრულებულია პირობები: $t_{00}+\tau<t_{10}$, ფუნქცია $u_0(t+\tau)$ უწყვეტია t_{00} წერტილში. მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t),\hat{\psi}(t))-$$
$$H_y(t+\tau,x_0(t+\tau),x_0(t),u_0(t+\tau),\hat{\psi}(t+\tau)), t\in[t_0,t_{10}],$$
$$\hat{\psi}(t)=0, t>t_{10}.$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, სადაც $\psi_0(t)=const\le 0$, რომ შესრულებულია პირობები:

15.1) მაქსიმუმის პრინციპი

$$H(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t),\hat{\psi}(t)) = M(t,x_0(t),x_0(t-\tau),\hat{\psi}(t)), t\in[t_0,t_{10}],$$

15.2) პირობა t_{00} წერტილში

$$\hat{\psi}(t_{00})\hat{f}(t_{00},x_0(t_{00}),x_0(t_{00}-\tau),u_0(t_{00}))+$$
$$\hat{\psi}(t_{00}+\tau)[\hat{f}(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),x_0,u_0(t_{00}+\tau))-\hat{f}(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),\varphi(t_{00}),u_0(t_{00}+\tau))]=0,$$

15.3) პირობა t_{10} მომენტისთვის

$$M(t_{10},x_0(t_{10}),x_0(t_{10}-\tau),\hat{\psi}(t_{10}))=0.$$

სავარჯიშო 15.1. დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები წყვეტილი საწყისი პირობის შემცველი წრფივი ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანისათვის

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)u(t), u(t)\in\Omega, \\ x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0), x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, \\ t_1-t_0\to\min \\ w=(t_0,t_1,u(t))\in W=(a,b)\times(a,b)\times\Omega.. \end{cases}$$

§ 16. დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა არაფიქსირებული დროის მომენტებით და შერეული საწყისი პირობით

ვთქვათ $p_0\in R_p^k, x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო Ω უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in U, t\in I=[a,b]$ მართვების სიმრავლეა; ფუნქცია $f(t,x,y,u)=f(t,x,p,z,u)\in R_x^n$, სადაც $y=(p,z)^T, p\in R_p^k, z\in R_z^e$, $n=k+e$, უწყვეტია $I\times R_x^n\times R_y^n\times U$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ; $\varphi(t)\in R_p^k, t\in[a-\tau,b]$, უწყვეტი საწყისი ფუნქციაა, $g(t)\in R_z^e, t\in[a-\tau,b]$, უწყვეტად წარმოებადი საწყისი ფუნქციაა; $\tau>0$ მოცემული რიცხვია.

ყოველ $w=(t_0,t_1,u)\in W=(a,b)\times(a,b)\times\Omega, t_0<t_1$ ელემენტს შევუსაბამოთ დაგვიანებულარგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),u(t))=f(t,x(t),p(t-\tau),z(t-\tau),u(t)), \qquad (16.1)$$

განსაზღვრება 16.1. $x(t)=x(t;w), t\in[t_0-\tau,t_1]$ ფუნქციას ეწოდება $w=(t_0,t_1,u)\in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს შერეულ საწყის პირობას

$$x(t)=(p(t),z(t))^T=(\varphi(t),g(t))^T, t\in[t_0-\tau,t_0), x(t_0)=(p_0,g(t_0))^T. \qquad (16.2)$$

გარდა ამის, $x(t)$ უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე, და აკმაყოფილებს ტოლობას $\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-\tau),u(t))$ ყველგან $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

განსაზღვრება 16.2. $w=(t_0,t_1,u(t))\in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი $x(t)\in[t_0-\tau,t_1]$ ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას

$$x(t_1)=x_1. \qquad (16.3)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ვთქვათ სკალარული ფუნქცია $f^0(t,x,y,u)=f^0(t,x,p,z,u)$ ამაყოფილებს ყველა იმ პირობებს რასაც აკმაყოფილებდა $f(t,x,y,u)$ ფუნქცია.

განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(w)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),p(t-\tau),z(t-\tau),u(t))dt.$$

განსაზღვრება 16.3. $w_0=(t_{00},t_{10},u_0(t))\in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w\in W_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(w_0)=\int_{t_0}^{t_{10}} f^0(t,x_0(t),p_0(t-\tau),z_0(t-\tau),u_0(t))dt\le J(w), x_0(t)=x(t;w_0). \quad (16.4)$$

(16.1)-(16.4) ამოცანას ეწოდება დაგვიანებულარგუმენტიანი ოპტიმალური ამოცანა შერეული საწყისი პირობით. მოკლედ

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),p(t-\tau),z(t-\tau),u(t)),u(t)\in\Omega,\\ x(t)=(p(t),z(t))=(\varphi(t),g(t)),t\in[t_0-\tau,t_0),x(t_0)=(p_0,g(t_0)),x(t_1)=x_1,\\ J(w)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),p(t-\tau),z(t-\tau),u(t))dt\to\min,\\ w=(t_0,t_1,u(t))\in W.\end{cases}$$

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$\hat{f}=(f^0,f)^T \quad , \quad H(t,x,y,u,\hat{\psi})=\hat{\psi}\,\hat{f}(t,x,y,u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(t,x,y,u),$$

$$M(t,x,y,\hat{\psi})=\sup_{u\in U}H(t,x,y,u,\hat{\psi}).$$

თეორემა 16.1. ვთქვათ $w_0=(t_{00},t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, $x_0(t)$-ოპტიმალური ტრაექტორია. გარდა ამისა, ვთქვათ შესრულებულია პირობები: $t_{00}+\tau<t_{10}$, ფუნქცია $u_0(t+\tau)$ უწყვეტია t_{00} წერტილში.

მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t),\hat{\psi}(t))-$$
$$H_y(t+\tau,x_0(t+\tau),x_0(t),u_0(t+\tau),\hat{\psi}(t+\tau)),t\in[t_0,t_{10}],$$
$$\hat{\psi}(t)=0,t>t_{10}.$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, სადაც $\psi_0(t)=const\leq 0$, რომ შესრულებულია პირობები:

16.1) მაქსიმუმის პრინციპი

$$H(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t),\hat{\psi}(t))=M(t,x_0(t),x_0(t-\tau),\hat{\psi}(t)),t\in[t_0,t_{10}],$$

16.2) პირობა t_{00} წერტილში

$$\hat{\psi}(t_{00})[\hat{f}(t_{00},x_0(t_{00}),x_0(t_{00}-\tau),u_0(t_{00}))-(0,\dot{g}(t_{00}))^T]+$$
$$\hat{\psi}(t_{00}+\tau)[\hat{f}(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),p_0,z_0(t_{00}),u_0(t_{00}+\tau))-$$
$$\hat{f}(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),\varphi(t_{00}),z_0(t_{00}),u_0(t_{00}+\tau))]=0,$$

16.3) პირობა t_{10} მომენტისთვის

$$M(t_{10},x_0(t_{10}),x_0(t_{10}-\tau),\hat{\psi}(t_{10}))=0.$$

სავარჯიშო 16.1. დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები შერეული საწყისი პირობის შემცველი წრფივი ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანისათვის

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B_1(t)p(t-\tau)+B_2(t)z(t-\tau)+C(t)u(t),u\in\Omega,\\ x(t)=(\varphi(t),g(t))^T,t\in[t_0-\tau,t_0),x(t_0)=(p_0,g(t_0))^T,x(t_1)=x_1,\\ t_1-t_0\to\min\\ w=(t_0,t_1,u)\in W=(a,b)\times(a,b)\times\Omega..\end{cases}$$

§ 17. დაგვიანებულარგუმენტიანი ვარიაციული ამოცანა არაფიქსირებული დროის მომენტებით და უწყვეტი საწყისი პირობით

ვთქვათ $x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილია. Δ-თი აღვნიშნოთ
უწყვეტი და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $x(t)\in R_x^n,t\in I=[a,b]$ ფუნქციების სიმრავლე; სკალარული ფუნქცია $F(t,x,y,z)$ უწყვეტია $I\times R_x^n\times R_y^n\times R_z^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x, y და z ცვლადების მიმართ; $\varphi(t)\in R_x^n$, $t\in[a-\tau,b]$, უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა; $\tau>0$ მოცემული რიცხვია.

განსაზღვრება 17.1. $v=(t_0,t_1,x(\cdot))\in V=I\times I\times\Delta$ ელემენტს, სადაც $t_0<t_1$, ეწოდება დასაშვები, თუ შესრულებულია პირობები

$$x(t_0)=\varphi(t_0),\quad x(t_1)=x_1. \qquad (17.1)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშოთ V_0-ით.

განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$J(v)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),x_{t_0}(t-\tau),\dot{x}(t))dt\ ,$$

სადაც

$$x_{t_0}(t)=\begin{cases}\varphi(t),t\in[t_0-\tau,t_0),\\ x(t),t\in[t_0,b].\end{cases}$$

განსაზღვრება 17.2. $v_0=(t_0,t_1,x(\cdot))\in V_0$ ელემენტს ეწოდება ექსტრემალი, თუ ნებისმიერი $v\in V_0$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(v_0)\le J(v). \qquad (17.2)$$

(17.1), (17..2) ამოცანას ეწოდება ვარიაციული ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით, იგი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases}J(v)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),x_{t_0}(t),\dot{x}(t))dt\to\min.\\ x(t_0)=\varphi(t_0),x(t_1)=x_1,\\ v\in V\end{cases} \qquad (17.3)$$

(17.1), (17.2) ვარიაციული ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი ოპტიმალური ამოცანის

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=u(t),u\in\Omega,\\ x(t)=\varphi(t),t\in[t_0-\tau,t_0],x(t_1)=x_1,\\ J_1(w)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),x(t-\tau),u(t))dt,\\ w=(t_0,t_1,u)\in W=I\times I\times\Omega,\end{cases} \qquad (17.4)$$

სადაც $U=R_u^r$, იხ. Ω სიმრავლის განმარტება, (დაამტკიცეთ).

ვისარგებლოთ § 14-ში მოყვანილი თეორემით. ვთქვათ $w_0=(t_{00},t_{10},u_0)$ ოპტიმალური ელემენტია, მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi}(t)=-\psi_0(t)F_x(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t))-\psi_0(t+\tau)F_y(t+\tau,x_0(t+\tau),x_0(t),u_0(t+\tau)), \qquad (17.5)$$
$$t\in[t_{00},t_{10}],$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t)),t\in[t_{00},t_{10}],\hat{\psi}(t)=0,t>t_{10}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) პირობა $u_0(t)$ ფუნქციისთვის

$$\psi_0(t)F(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t))+\psi(t)u_0(t)=\sup_{u\in R_u^r}[\psi_0(t)F(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u)+\psi(t)u];$$

ბ) პირობა t_{00} მომენტისათვის

$$\psi_0(t_{00})F(t_{00},x_0(t_{00}),x_0(t_{00}-\tau),u_0(t_{00}))+\psi(t_{00})[u_0(t_{00})-\dot{\varphi}(t_{00})]=0;$$

გ) პირობა t_{10} მომეტისათვის

$$\psi_0(t_{10})F(t_{10},x_0(t_{10}),x_0(t_{10}-\tau),u_0(t_{10}))+\psi(t_{10})u_0(t_{10})=0.$$

სტანდარტული გზით დავამტკიცებთ, რომ $\psi_0(t)=-1, t\in[t_{00},t_{10}]$.

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\rho(t)=\begin{cases}1, t\in[t_{00},t_{10}],\\ 0, t>t_{10}.\end{cases}$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით და (17.5) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\psi(t)=\psi(t_{00})+\int_{t_{00}}^{t}[F_x(s,x_0(s),x_0(s-\tau),u_0(s))+\rho(s+\tau)F_y(s+\tau,x_0(s+\tau),x_0(s),u_0(s+\tau))]ds,$$

$$t\in[t_{00},t_{10}]. \qquad (17.6)$$

ა) პირობიდან, ფერმას თეორემის ძალით გვექნება

$$\psi(t)=F_u(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t)), t\in[t_{00},t_{10}]. \qquad (17.7)$$

ბ), გ) და (17.6) პირობები, (17.7) ტოლობის გამოყენებით, ჩავწეროთ ვარიაციული ამოცანის ტერმინებში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&-F(t_{00},x_0(t_{00}),x_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))+\\&F_{\dot{x}}(t_{00},x_0(t_{00}-\tau),x_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))[\dot{x}_0(t_{00})-\dot{\varphi}(t_{00})]=0,\end{aligned} \qquad (17.8)$$

$$-F(t_{10},x_0(t_{10}),x_{0t_{00}}(t_{10}-\tau),\dot{x}_0(t_{10}))+F_{\dot{x}}(t_{10},x_0(t_{10}-\tau),x_{0t_{00}}(t_{10}-\tau),\dot{x}_0(t_{10}))\dot{x}_0(t_{10})=0, \qquad (17.9)$$

$$F_{\dot{x}}(t,x_0(t),x_{0t_{00}}(t-\tau),\dot{x}_0(t))=F_{\dot{x}}(t_{00},x_0(t_{00}),x_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))+$$
$$\int_{t_{00}}^{t}[F_x(s,x_0(s),x_{0t_{00}}(s-\tau),\dot{x}_0(s))+\rho(s+\tau)F_y(s+\tau,x_0(s+\tau),x_{0t_{00}}(s),\dot{x}_0(s+\tau))]ds. \quad (10)$$

თეორემა 17.1. ვთქვათ $v_0=(t_{00},t_{10},x_0(\cdot))$ ელემენტი (17.1), (17.2) ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალია. მაშინ ადგილი აქვს (17.8)-(17.10) პირობებს.

§ 18. დაგვიანებულარგუმენტიანი ვარიაციული ამოცანა არაფიქსირებული დროის მომენტებით და წყვეტილი საწყისი პირობით

ვთქვათ $x_0, x_1 \in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია. Δ-თი აღვნიშნოთ უწყვეტი და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $x(t) \in R_x^n, t \in I = [a,b]$ ფუნქციების სიმრავლე; სკალარული ფუნქცია $F(t,x,y,z)$ უწყვეტია $I \times R_x^n \times R_y^n \times R_z^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია $x\,, y$ და z ცვლადების მიმართ; $\varphi(t) \in R_x^n$, $t \in [a-\tau, b]$, უწყვეტი ფუნქციაა; $\tau > 0$ მოცემული რიცხვია.

განსაზღვრება 18.1. $v = (t_0, t_1, x(\cdot)) \in V = I \times I \times \Delta$ ელემენტს, სადაც $t_0 < t_1$, ეწოდება დასაშვები, თუ შესრულებულია პირობები

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{18.1}$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშოთ V_0-ით.

განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x_{t_0}(t-\tau), \dot{x}(t))dt\,,$$

სადაც

$$x_{t_0}(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), \\ x(t), t \in [t_0, b]. \end{cases}$$

განსაზღვრება 18.2. $v_0 = (t_0, t_1, x(\cdot)) \in V_0$ ელემენტს ეწოდება ექსტრემალი, თუ ნებსმიერი $v \in V_0$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(v_0) \le J(v). \tag{18.2}$$

(18.1), (18.2) ამოცანას ეწოდება ვარიაციული ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით, იგი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} J(v) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x_{t_0}(t), \dot{x}(t))dt \to \min. \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ v \in V \end{cases} \tag{18.3}$$

(18.1), (18.2) ვარიაციული ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი ოპტიმალური ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), u \in \Omega, \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ J_1(w) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x(t-\tau), u(t))dt, \\ w = (t_0, t_1, u) \in W = I \times I \times \Omega, \end{cases} \tag{18.4}$$

ვისარგებლოთ § 15-ში მოყვანილი თეორემით. ვთქვათ $w_0 = (t_{00}, t_{10}, u_0)$ ოპტიმალური ელემენტია, $t_{00} + \tau < t_{10}$ და ფუნქცია $u_0(t+\tau)$ უწყვეტია t_{00} წერტილში. მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi}(t) = -\psi_0(t)F_x(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) - \psi_0(t+\tau)F_y(t+\tau, x_0(t+\tau), x_0(t), u_0(t+\tau)), \tag{18.5}$$
$$t \in [t_{00}, t_{10}],$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t)), t \in [t_{00}, t_{10}], \hat{\psi}(t) = 0, t > t_{10}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) პირობა $u_0(t)$ ფუნქციისთვის

$$\psi_0(t)F(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) + \psi(t)u_0(t) = \sup_{u \in R_u^r}[\psi_0(t)F(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u) + \psi(t)u];$$

ბ) პირობა t_{00} მომენტისათვის

$$\psi_0(t_{00})F(t_{00}, x_0(t_{00}), x_0(t_{00}-\tau), u_0(t_{00})) + \psi(t_{00})u_0(t_{00}) +$$
$$\psi_0(t_{00}+\tau)[F(t_{00}+\tau, x_0(t_{00}+\tau), x_0, u_0(t_{00}+\tau)) - F(t_{00}+\tau, x_0(t_{00}+\tau), \varphi(t_{00}), u_0(t_{00}+\tau))] = 0;$$

გ) პირობა t_{10} მომეტისათვის

$$\psi_0(t_{10})F(t_{10}, x_0(t_{10}), x_0(t_{10}-\tau), u_0(t_{10})) + \psi(t_{10})u_0(t_{10}) = 0.$$

სტანდარტული გზით დავამტკიცებთ, რომ $\psi_0(t) = -1, t \in [t_{00}, t_{10}]$.
შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\rho(t) = \begin{cases} 1, t \in [t_{00}, t_{10}], \\ 0, t > t_{10}. \end{cases}$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით და (18.5) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\psi(t) = \psi(t_{00}) + \int_{t_{00}}^{t} [F_x(s, x_0(s), x_0(s-\tau), u_0(s)) + \rho(s+\tau)F_y(s+\tau, x_0(s+\tau), x_0(s), u_0(s+\tau))]ds,$$
$$t \in [t_{00}, t_{10}]. \tag{18.6}$$

ბ) პირობიდან, ფერმას თეორემის ძალით გვექნება

$$\psi(t) = F_u(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)), t \in [t_{00}, t_{10}]. \tag{18.7}$$

ბ), გ) და (18.6) პირობები, (18.7) ტოლობის გამოყენებით, ჩავწეროთ ვარიაციული ამოცანის ტერმინებში, მივიღებთ:

$$-F(t_{00},x_0(t_{00}),x_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))+F_{\dot{x}}(t_{00},x_0(t_{00}-\tau),x_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))\dot{x}_0(t_{10})-$$
$$[F(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),x_0,\dot{x}_0(t_{00}+\tau))-F(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),\varphi(t_{00}),\dot{x}_0(t_{00}+\tau))]=0; \quad (18.8)$$

$$-F(t_{10},x_0(t_{10}),x_{0t_{00}}(t_{10}-\tau),\dot{x}_0(t_{10}))+F_{\dot{x}}(t_{10},x_0(t_{10}-\tau),x_{0t_{00}}(t_{10}-\tau),\dot{x}_0(t_{10}))\dot{x}_0(t_{10})=0\,, \quad (18.9)$$

$$F_{\dot{x}}(t,x_0(t),x_{0t_{00}}(t-\tau),\dot{x}_0(t))=F_{\dot{x}}(t_{00},x_0(t_{00}),x_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))+$$
$$\int_{t_{00}}^{t}[F_x(s,x_0(s),x_{0t_{00}}(s-\tau),\dot{x}_0(s))+\rho(s+\tau)F_y(s+\tau,x_0(s+\tau),x_{0t_{00}}(s),\dot{x}_0(s+\tau))]ds. \quad (18..10)$$

თეორემა 18.1. ვთქვათ $v_0=(t_{00},t_{10},x_0(\cdot))$ ელემენტი (18.1), (18.2) ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალია, $t_{00}+\tau<t_{10}$ და ფუნქცია $\dot{x}_0(t+\tau)$ უწყვეტია t_{00} წერტილში. მაშინ ადგილი აქვს (18.8)-(18.10) პირობებს.

§19. დაგვიანებულარგუმენტიანი ვარიაციული ამოცანა არაფიქსირებული დროის მომენტებით და შერეული საწყისი პირობით

ვთქვათ $p_0\in R_p^k, x_1\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილებია. Δ-თი აღვნიშნოთ უწყვეტი და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი $x(t)\in R_x^n, t\in I=[a,b]$ ფუნქციების სიმრავლე; სკალარული ფუნქცია $F(t,x,y,\upsilon)=F(t,x,p,z,\varsigma)$,
სადაც $y=(p,z)^T\in R_y^n, p\in R_p^k, z\in R_z^e, n=k+e,$ უწყვეტია $I\times R_x^n\times R_y^n\times R_\varsigma^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x, y და υ ცვლადების მიმართ; $\varphi(t)\in R_p^k$, $t\in[a-\tau,b]$, უწყვეტი ფუნქციაა, $g(t)\in R_z^e, t\in[a-\tau.b]$,
უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა; $\tau>0$ მოცემული რიცხვია.

განსაზღვრება 19.1. $v=(t_0,t_1,x(\cdot))\in V=I\times I\times\Delta$ ელემენტს, სადაც $t_0<t_1$, ეწოდება დასაშვები, თუ შესრულებულია პირობები

$$x(t_0)=(p_0,g(t_0))^T,\quad x(t_1)=x_1. \quad (19.1)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშოთ V_0-ით.
განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$J(v)=\int F(t,x(t),x_{t_0}(t-\tau),\dot{x}(t))=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),p_{t_0}(t-\tau),z_{t_0}(t-\tau),\dot{x}(t))dt, x_{t_0}(t)=(p_{t_0}(t),z_{t_0}(t))^T,$$

სადაც

$$p_{t_0}(t)=\begin{cases}\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0),\\ p(t), t\in[t_0,b],\end{cases}\qquad z_{t_0}(t)=\begin{cases}g(t), t\in[t_0-\tau,t_0),\\ z(t), t\in[t_0,b].\end{cases}$$

განსაზღვრება 19.2. $v_0 = (t_0, t_1, x(\cdot)) \in V_0$ ელემენტს ეწოდება ექსტრემალი, თუ ნებსმიერი $v \in V_0$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(v_0) \le J(v). \tag{19.2}$$

(19.1), (19.2) ამოცანას ეწოდება ვარიაციული ამოცანა შერეული საწყისი პირობით, იგი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} J(v) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), p_{t_0}(t-\tau), z_{t_0}(t-\tau), \dot{x}(t))dt \to \min . \\ x(t_0) = (p_0, g(t_0))^T, x(t_1) = x_1, \\ v \in V \end{cases} \tag{19.3}$$

(19.1), (19.2) ვარიაციული ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი ოპტიმალური ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), u \in \Omega, \\ x(t) = (\varphi(t), g(t))^T, t \in [t_0 - \tau, t_0), x(t_0) = (p_0, g(t_0))^T, x(t_1) = x_1, \\ J_1(w) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), p(t-\tau), z(t-\tau), u(t))dt, \\ w = (t_0, t_1, u) \in W = I \times I \times \Omega, \end{cases} \tag{19.4}$$

ვისარგებლოთ § 16-ში მოყვანილი თეორემით. ვთქვათ $w_0 = (t_{00}, t_{10}, u_0)$ ოპტიმალური ელემენტია, $t_{00} + \tau < t_{10}$ და ფუნქცია $u_0(t+\tau)$ უწყვეტია t_{00} წერტილში. მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi}(t) = -\psi_0(t) F_x(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) - \psi_0(t+\tau) F_y(t+\tau, x_0(t+\tau), x_0(t), u_0(t+\tau)), \tag{19.5}$$
$$t \in [t_{00}, t_{10}],$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t)), t \in [t_{00}, t_{10}], \hat{\psi}(t) = 0, t > t_{10}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) პირობა $u_0(t)$ ფუნქციისთვის

$$\psi_0(t) F(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u_0(t)) + \psi(t) u_0(t) = \sup_{u \in R_u^r} [\psi_0(t) F(t, x_0(t), x_0(t-\tau), u) + \psi(t) u];$$

ბ) პირობა t_{00} მომენტისათვის

$$\begin{aligned} &\psi_0(t_{00}) F(t_{00}, x_0(t_{00}), x_0(t_{00} - \tau), u_0(t_{00})) + \psi(t_{00})[u_0(t_{00}) - (0_{k\times 1}, \dot{g}(t_{00}))^T] + \\ &\psi_0(t_{00} + \tau)[F(t_{00} + \tau, x_0(t_{00} + \tau), p_0, z_0(t_{00}), u_0(t_{00} + \tau)) - \\ &F(t_{00} + \tau, x_0(t_{00} + \tau), \varphi(t_{00} + \tau), u_0(t_{00} + \tau))] = 0, \end{aligned}$$

სადაც $0_{k\times 1}$ არის k განზომილებიანი ნულოვანი სვეტ-ვექტორი;

გ) პირობა t_{10} მომენტისათვის

$$\psi_0(t_{10})F(t_{10},x_0(t_{10}),x_0(t_{10}-\tau),u_0(t_{10}))+\psi(t_{10})u_0(t_{10})=0\,.$$

სტანდარტული გზით დავამტკიცებთ, რომ $\psi_0(t)=-1, t\in[t_{00},t_{10}]$.
შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\rho(t)=\begin{cases}1, t\in[t_{00},t_{10}],\\ 0, t>t_{10}.\end{cases}$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით და (19.5) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\psi(t)=\psi(t_{00})+\int_{t_{00}}^{t}[F_x(s,x_0(s),x_0(s-\tau),u_0(s))+\rho(s+\tau)F_y(s+\tau,x_0(s+\tau),x_0(s),u_0(s+\tau))]ds\,,$$

$$t\in[t_{00},t_{10}]\,. \qquad (19.6)$$

ა) პირობიდან, ფერმას თეორემის ძალით გვექნება

$$\psi(t)=F_u(t,x_0(t),x_0(t-\tau),u_0(t)), t\in[t_{00},t_{10}]\,. \qquad (19.7)$$

ბ), გ) და (19.6) პირობები, (19.7) ტოლობის გამოყენებით, ჩავწეროთ ვარიაციული ამოცანის ტერმინებში, მივიღებთ:

$$\begin{gathered}-F(t_{00},x_0(t_{00}),p_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),z_{0t_{00}}(t_{00}-\tau)\dot{x}_0(t_{00}))+\\ F_{\dot{x}}(t_{00},x_0(t_{00}-\tau),p_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),z_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{00}))[\dot{x}_0(t_{00})-(0_{k\times 1},\dot{g}(t_{00})^T]-\\ [F(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),p_0,z_{0t_{00}}(t_{00}),\dot{x}_0(t_{00}+\tau))-\\ F(t_{00}+\tau,x_0(t_{00}+\tau),\varphi(t_{00}),z_{0t_{00}}(t_{00}),\dot{x}_0(t_{00}+\tau))]=0;\end{gathered} \qquad (19.8)$$

$$\begin{gathered}-F(t_{10},x_0(t_{10}),p_{0t_{00}}(t_{10}-\tau),z_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{10}))+\\ F_{\dot{x}}(t_{10},x_0(t_{10}-\tau),p_{0t_{00}}(t_{10}-\tau),z_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(t_{10}))\dot{x}_0(t_{10})=0\end{gathered}, \qquad (19.9)$$

$$\begin{gathered}F_{\dot{x}}(t,x_0(t),p_{0t_{00}}(t-\tau),z_{0t_{00}}(t-\tau),\dot{x}_0(t))=F_{\dot{x}}(t_{00},x_0(t_{00}),p_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),z_{0t_{00}}(t_{00}-\tau)\dot{x}_0(t_{00}))+\\ \int_{t_{00}}^{t}[F_x(s,x_0(s),x_{0t_{00}}(s-\tau),z_{0t_{00}}(t_{00}-\tau),\dot{x}_0(s))+\\ \rho(s+\tau)F_y(s+\tau,x_0(s+\tau),x_{0t_{00}}(s),z_{0t_{00}}(s),\dot{x}_0(s+\tau))]ds\,.\end{gathered} \qquad (19.10)$$

თეორემა 19.1. ვთქვათ $v_0=(t_{00},t_{10},x_0(\cdot))$ ელემენტი (19.1), (19.2) ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალია, $t_{00}+\tau<t_{10}$ და ფუნქცია $\dot{x}_0(t+\tau)$ უწყვეტია t_{00} წერტილში. მაშინ ადგილი აქვს (19.8)-(19.10) პირობებს.

ლიტერატურა

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.-М. Наука, 1983.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.Наука, 1969.
3. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральное уравнение.М.Наука, 1966.
4. Коша А. Вариационное исчисление. М. Высшая Школа, 1983.

დამატებითი ლიტერატურა

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М.,Фомин С.В., Оптимальное управление.М.Наука,1979
2 Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.Наука, 1984.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.-М. Наука, 1974.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.Наука,1971.
5. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси, Тб. Ун.-т, 1977.
6. Kharatishvili G. and Tadumadze T. Variation formulas of solutions and optimal control problems for differential equations with retarded argument. J. Math. Sci. (NY) , v.104, No. 1(2007), 1-175.