ლექცია 9

4. ჰიპერბოლური განტოლებები

4.1. ტალღის განტოლება. კოშის ამოცანა

ტალღის განტოლება n სივრცითი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში ეწოდება

$$u_{,ii} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{t}^2} = 0 \tag{4.1.1}$$

განტოლებას, სადაც i-ს მიმართ აჯამვა 1-დან n-მდე ხდება.

(4.1.1) განტოლების კერძო შემთხვევებს წარმოადგენენ სიმის რხევის (იხ. §1.1) და მემბრანის რხევის (იხ. §1.2) განტოლებები. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მოვახდენთ

$$\tilde{t} = at\,, \;\; a := \sqrt{\frac{T}{\rho}} > 0\,, \tag{4.1.2}$$

გარდაქმნას. მართლაც, (4.1.2)-ის გამო

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.1.3}$$

და, მაგალითად, როცა $n = 1$, $x := x_1$, (4.1.1)-დან, (4.1.3)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ სიმის რხევის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1.4}$$

განტოლებას. (4.1.4) განტოლების მახასიათებელ განტოლებას

$$(dt)^2 - \frac{1}{a^2}(dx)^2 = 0$$

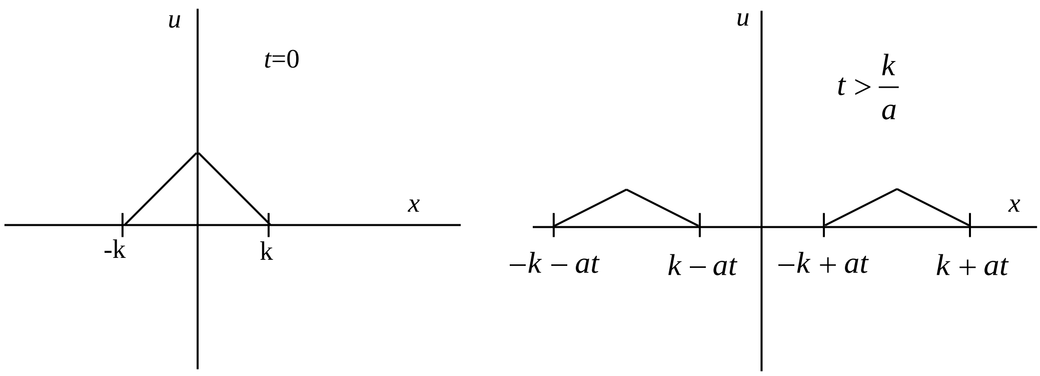
სახე აქვს. საიდანაც

$$dx = \pm a dt$$

და ამდენად

$$x = \pm at + c\,, \;\; c = \text{const}\,,$$

წრფეები წარმოადგენენ (4.1.4) განტოლების მახასიათებელ წირებს.



ნახ. 4.1.1

შემოვიღოთ ახალი

$$\xi = x - at\,, \;\; \eta = x + at \tag{4.1.5}$$

ცვლადები. მაშინ ან §2.6-ის ანალოგიურად, ან (4.1.5)-ის გარდაქმნით დავადგენთ, რომ (4.1.3) განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$u(x,t) = \psi_1(x-at) + \psi_2(x+at) \tag{4.1.6}$$

სახე აქვს, სადაც $\psi_\alpha \in C^2\left(R^1\right)$, $\alpha = 1,2$, ნებისმიერი ფუნქციებია. (4.1.6)-ს დალამბერის ფორმულა ეწოდება.

4.1.1. კოშის ამოცანა უსასრულო სიმისთვის. ვიპოვოთ (4.1.4) განტოლების ამონახსნი $\Omega := \{(x,t) : x \in]-\infty,+\infty[,\ t>0\}$ არეში, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x),\ x \in]-\infty,+\infty[,\ \varphi_0 \in C^2\left(R^1\right),\ \varphi_1 \in C^1\left(R^1\right), \tag{4.1.7}$$

კოშის პირობებს.

ჩავსვათ (4.1.6) გამოსახულება (4.1.7)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = \varphi_0(x), \tag{4.1.8}$$

$$-a\psi_1'(x) + a\psi_2'(x) = \varphi_1(x). \tag{4.1.9}$$

(4.1.9)-ის ინტეგრებით გვექნება

$$-a\psi_1(x) + a\psi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(\tau)d\tau + aC, \tag{4.1.10}$$

სადაც C ნაბისმიერი მუდმივია. თუ ამოვხსნით (4.1.8), (4.1.10) სისტემას, ცხადია,

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(\tau)d\tau - C\right],\\ \psi_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(\tau)d\tau + C\right].\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

თუ (4.1.11)-ს ჩავსვამთ (4.1.6)-ში, მივიღებთ, რომ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at) - \frac{1}{a}\int_0^{x-at}\varphi_1(\tau)d\tau - C + \varphi_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_0^{x+at}\varphi_1(\tau)d\tau + C\right],$$

საიდანაც, გამარტივების შემდეგ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\tau)d\tau\right]. \tag{4.1.12}$$

ცხადია, (4.1.12) აკმაყოფილებს (4.1.4) განტოლებას Ω არეში და (4.1.7) საწყის პირობებს. აგების ხერხიდან გამომდინარე, (4.1.12) ამონახსნი ერთადერთია. დავამტკიცოთ ამონახსნის მდგრადობა დროის ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული $0 \le t \le t_0$ მონაკვეთისთვის. მართლაც, ნებისმიერი რაგინდ მცირე $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება ისეთი $\delta < \dfrac{\varepsilon}{1+t_0}$, რომ, როცა

$$\left|\varphi_0(x) - \varphi_0^{(1)}(x)\right| < \delta,\ \left|\varphi_1(x) - \varphi_1^{(1)}(x)\right| < \delta, \tag{4.1.13}$$

სადაც $\varphi_0^{(1)}(x)$ და $\varphi_1^{(1)}(x)$ ახალი საწყისი მონაცემებია, (4.1.12)-ის გათვალისწინებით, შესაბამის ამონახსნთა შემდეგი სხვაობა

$$\left|u(x,t) - u^{(1)}(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\Bigg[\left|\varphi_0(x-at) - \varphi_0^{(1)}(x-at)\right| + \left|\varphi_0(x+at) - \varphi_0^{(1)}(x+at)\right|$$

$$+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\left|\varphi_1(\tau) - \varphi_1^{(1)}(\tau)\right|d\tau\Bigg] \le \frac{1}{2}\left(\delta + \delta + \frac{\delta}{a}\int_{x-at}^{x+at}d\tau\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(2\delta + \frac{\delta}{a} 2at\right) \le \delta(1+t) \le \delta(1+t_0) < \varepsilon .$$

ამრიგად, საწყისი მონაცემების საკმარისად მცირე ცვლილება იწვევს კოშის ამოცანის ამონახსნის რაგინდ მცირე ცვლილებას, რაც სწორედ ამონახსნის მდგრადობას ნიშნავს. ასე, რომ განხილული ამოცანა კორექტულია.

გავერკვეთ ამოცანის ფიზიკურ შინაარსში. ჯერ დავუშვათ, რომ

$$\varphi_1(x) \equiv 0, \;\; \varphi_0(x) \begin{cases} \equiv 0, \; \text{როცა} \; x \in]-\infty, -k[\cup]k, +\infty[; \\ \not\equiv 0, \; \text{როცა} \; x \in [-k, k]. \end{cases} \tag{4.1.14}$$

ამ შემთხვევაში (4.1.12) მიიღებს

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)\right]$$

სახეს. $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ წარმოადგენს მუდმივი ფორმის მქონე შეშფოთებას, რომელიც a სიჩქარით მოძრაობს x ღერძის დადებითი მიმართულებით. ეს ნათელი გახდება, თუ დამკვირვებელი საწყის $t=0$ მომენტში $x=\xi$ წერტილიდან გამოვა და a სიჩქარით გადაადგილდება x ღერძის დადებითი მიმართულებით, ე. ი., t მომენტში მისი აბსცისა $x=\xi+at$, რაც იგივეა, $\xi = x - at$. ასეთი დამკვირვებლისთვის სიმის $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ გადახრა დარჩება მუდმივად, რადგან ეს გადახრა $\frac{1}{2}\varphi_0(\xi)$-ს ტოლი იქნება დროის ნებისმიერ t მომენტში. ანალოგიურად, $\frac{1}{2}\varphi_0(x+at)$ შესაკრები იგივე ფორმის შეშფოთება იქნება, მხოლოდ საწინააღმდეგო მიმართულებით გავრცელდება. ამ შეშფოთებებს ტალღები ეწოდებათ. პირველს – პირდაპირი, ხოლო მეორეს უკუ (შებრუნებული) ტალღა ეწოდება. თავიდან ხდება ტალღების ერთმანეთზე ზედდება, შემდეგ ისინი ერთმანეთს უფრო და უფრო შორდებიან. სიმის ყოველ ნაწილში ორივე ტალღის გავლის შემდეგ (საწყისი შეშფოთების არის მიღმა კი მხოლოდ ერთი ტალღის გავლის შემდეგ) მოსვენებული მდგომარეობა ისადგურებს. შეშფოთებული სიმი სქემატურადაა გამოსახული ნახ. 4.1.1-ზე.

ვთქვათ, ახლა $\varphi_0(x) \equiv 0$, ხოლო $\varphi_1(x)$-ს (4.1.14) სახე აქვს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სიმს აქვს მხოლოდ საწყისი იმპულსი და არ აქვს საწყისი შეშფოთება. თუ $\varphi_1(x)$ ფუნქციის პირველყოფილს აღვნიშნავთ $\Phi_1(x)$-ით, მაშინ (იხ. ნახ. 4.1.2)

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0, \; \text{როცა} \; x \in]-\infty, -k[; \\ \int\limits_{-k}^{x} \varphi_1(\tau) d\tau, \; \text{როცა} \; x \in [-k, k]; \\ \int\limits_{-k}^{k} \varphi_1(\tau) d\tau, \; \text{როცა} \; x \in]k, +\infty[, \end{cases} \tag{4.1.15}$$

ხოლო (4.1.12) ფორმულა მიიღებს

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\left[\Phi_1(x+at) - \Phi_1(x-at)\right] \tag{4.1.16}$$

სახეს. ამ შემთხვევაშიც სიმში ვრცელდება ორი ტალღა: ერთი – პირდაპირი და მეორე – უკუ (შებრუნებული) ტალღა. იქ, სადაც ორივე ტალღამ გაიარა, სიმი მოსვენებულ მდგომარეობაში მოვა, მაგრამ, საზოგადოდ, საწყის მდგომარეობას არ დაუბრუნდება, რადგან

დროის საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისთვის $x+at>k$ და $\Phi_1(x+at)$ ფუნქცია მუდმივის, ხოლო $x-at<-k$ და $\Phi_1(x-at)$ ნულის ტოლი იქნება (იხ. ნახ. 4.1.2). მართლაც, როცა $t>\dfrac{k}{a}$, თუ $k_1\geq k$ და განვიხილავთ $x=k_1+at$ წერტილს, მისი (4.1.16)-ში ჩასმისა და (4.1.15)-ის გათვალისწინების შემდეგ მივიღებთ:

$$u(k_1+at,t)=\frac{1}{2a}\left[\Phi_1(k_1+2at)-\Phi_1(k_1)\right]=\frac{1}{2a}\left[\int_{-k}^{k}\varphi_1(\tau)d\tau-\int_{-k}^{k}\varphi_1(\tau)d\tau\right]=0\,.$$

ახლა განვიხილოთ $x=-k_1-at$ წერტილი, მაშინ

$$u(-k_1-at,t)=\frac{1}{2a}\left[\Phi_1(-k_1)-\Phi_1(-k_1-2at)\right]=\frac{1}{2a}(0-0)=0\,.$$

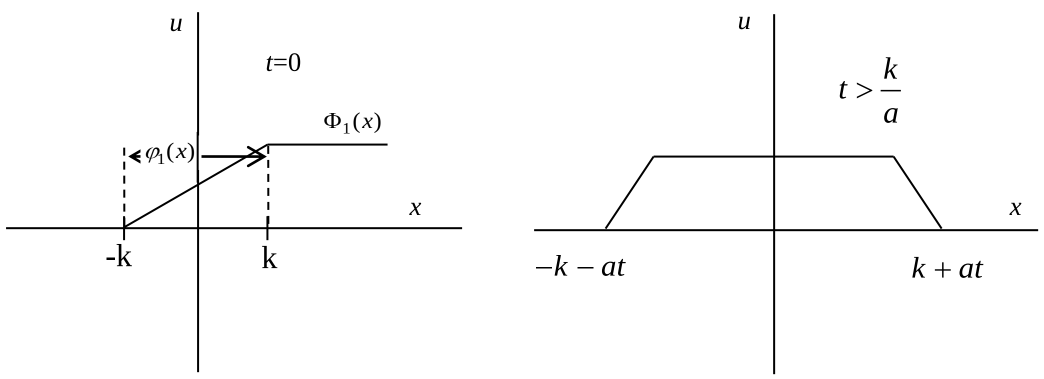
თუ $x=0$, რადგან $t>\dfrac{k}{a}$, ე. ი., $at>k$ და $-at<-k$, ცხადია,

$$u(0,t)=\frac{1}{2a}\left[\Phi_1(at)-\Phi_1(-at)\right]=\frac{1}{2a}\left[\int_{-k}^{k}\varphi_1(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{2a}\int_{-k}^{k}\varphi_1(\tau)d\tau\,.$$

$x=0$-ის რაიმე მიდამოში $u(x,t)$ იმავე მუდმივის ტოლია, ხოლო $x=k+at$-ს რაიმე მარცხენა და $x=-k-at$-ს რაიმე მარჯვენა მიდამოში, შესაბამისად, $x=k_2+at$ და $x=-k_2-at$, $0<k_2\leq k$ და

$$u(k_2+at,t)=\frac{1}{2a}\left[\Phi_1(k_2+2at)-\Phi_1(k_2)\right]=\frac{1}{2a}\left[\int_{-k}^{k}\varphi_1(\tau)d\tau-\int_{-k}^{k_2}\varphi_1(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{2a}\int_{k_2}^{k}\varphi_1(\tau)d\tau\,,$$

$$u(-k_2-at,t)=\frac{1}{2a}\left[\Phi_1(-k_2)-\Phi_1(-k_2-at)\right]=\frac{1}{2a}\left[\int_{-k}^{-k_2}\varphi_1(\tau)d\tau-0\right]=\frac{1}{2a}\int_{-k}^{-k_2}\varphi_1(\tau)d\tau\,.$$



ნახ. 4.1.2