ლექცია 8

3.3.4. გაუსის ფორმულები. ვთქვათ, $\Omega \in R^n$ შემოსაზღვრული არეა $A^{k,h}$, $k \geq 1$, კლასის საზღვრით. განვიხილოთ ორმაგი ფენის პოტენციალი ერთის ტოლი სიმკვრივით. დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu_x}(x,\xi)dS_x = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \xi \in \Omega, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{თუ } \xi \in \partial\Omega, \\ 0, & \text{თუ } \xi \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \qquad (3.3.11)$$

სადაც ν_x გარე ნორმალია $\partial\Omega$-ს მიმართ.

როცა $\xi \notin \overline{\Omega}$, მაშინ $E(x,\xi)$ ფუნქცია ჰარმონიულია Ω არეში და ამიტომ, როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 3.1.1),

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu_x}(x,\xi)dS_x = 0 .$$

განვიხილოთ $\xi \in \overline{\Omega}$ შემთხვევა (იხ. ნახ. 3.3.2). ვთქვათ,

$$d_\xi^\varepsilon := \overline{\Omega} \cap \{|x-\xi| \leq \varepsilon\} \text{ და } \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus d_\xi^\varepsilon .$$

ადვილი დასანახია, რომ თუ $\varepsilon > 0$ საკმაოდ მცირე რიცხვია, მაშინ $\partial\Omega_\varepsilon$ საზღვარი შედგება:

ა) $\partial\Omega$-სგან და $S_\xi^\varepsilon := \partial d_\xi^\varepsilon$ სფეროსგან, როცა $\xi \in \Omega$;

ბ) $\partial\Omega$-ს σ_1 ნაწილისგან და $\partial d_\xi^\varepsilon$-ის σ_2 ნაწილისგან, როცა $\xi \in \partial\Omega$.

ცხადია, რომ Ω_ε არეში $E(x,\xi)$ x-ის მიმართ ჰარმონიული ფუნქციაა, ამიტომ $\partial\Omega_\varepsilon$ საზღვარზე ნორმალით წარმოებულისგან ინტეგრალი ნულის ტოლია. ცალ-ცალკე განვიხილოთ ორივე შემთხვევა:

ა) თუ $\xi \in \Omega$, მაშინ

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu}(x,\xi)dS_x + \int_{S_\xi^\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \nu^*}(x,\xi)dS_x = 0,$$

საიდანაც

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \nu}(x,\xi)dS_x = -\int_{S_\xi^\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \nu^*}(x,\xi)dS_x = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_\xi^\varepsilon} \frac{dS_x}{\varepsilon^{n-1}} = 1 .$$

სადაც ν^* არის S_ξ^ε-ის მიმართ შიგა ნორმალი.

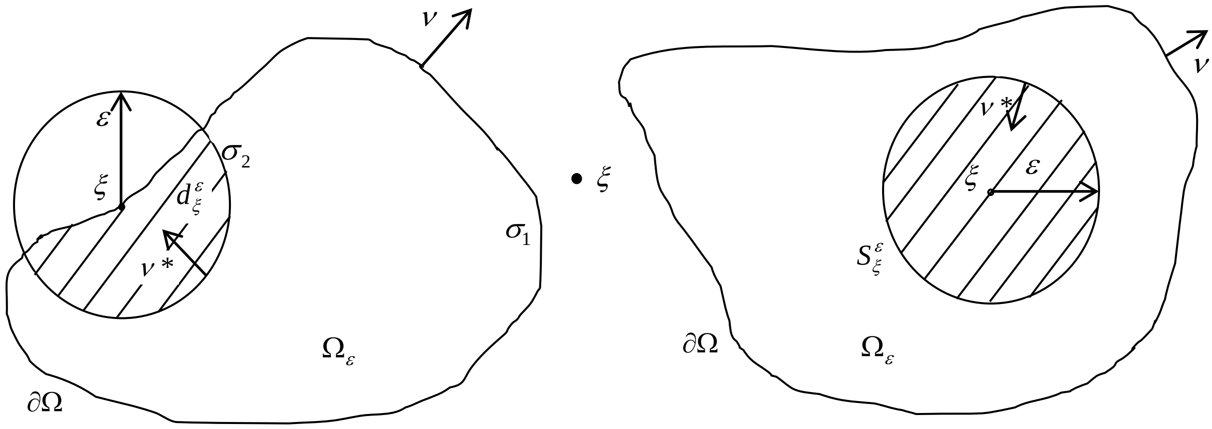
ბ) თუ $\xi \in \partial\Omega$, მაშინ

$$\int_{\sigma_1} \frac{\partial E}{\partial \nu}(x,\xi)dS_x + \int_{\sigma_2} \frac{\partial E}{\partial \nu^*}(x,\xi)dS_x = 0,$$

საიდანაც

$$\int_{\sigma_1} \frac{\partial E}{\partial \nu}(x,\xi)dS_x = -\int_{\sigma_2} \frac{\partial E}{\partial \nu^*}(x,\xi)dS_x = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}\int_{\sigma_2} dS_x . \qquad (3.3.12)$$

ადვილი დასანახია (იხ. ნახ. 3.3.3), რომ, როცა $\varepsilon \to 0$, მაშინ σ_2 მიისწრაფვის ნახევარსფეროსკენ. მაშასადამე,

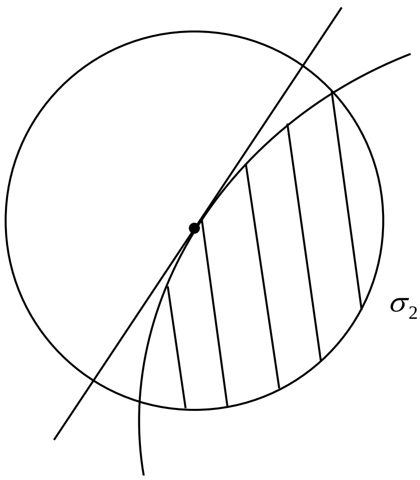


ნახ. 3.3.2

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\sigma_2} dS_x = \frac{\omega_n}{2}\varepsilon^{n-1}.$$

ამიტომ, თუ (3.3.12)-ში ε-ს ნულისკენ მივასწრაფებთ,

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial E}{\partial\nu_x}(x,\xi)dS_x = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\sigma_1}\frac{\partial E}{\partial\nu_x}(x,\xi)dS_x = \frac{1}{2}.$$



ნახ. 3.3.3

ამით *გაუსის* (3.3.11) *ფორმულა* დამტკიცებულია.

განვიხილოთ

$$U(x) = \int_\Omega f(\xi)E(x,\xi)d\xi$$

მოცულობითი პოტენციალი. ვთქვათ, $\tilde\Omega\subset R^n$ შემოსაზღვრული არეა $A^{k,h}$, $k\ge1$, კლასის საზღვრით. მაშინ, რადგანაც

$$\frac{\partial U}{\partial\nu}(x) = \int_\Omega f(\xi)\frac{\partial E}{\partial\nu}(x,\xi)d\xi\,,$$

ამიტომ

$$\int_{\partial\tilde\Omega}\frac{\partial U}{\partial\nu}(x)dS_x = \int_{\partial\tilde\Omega}dS\int_\Omega f(\xi)\frac{\partial E}{\partial\nu}(x,\xi)d\xi = \int_\Omega f(\xi)d\xi\int_{\partial\tilde\Omega}\frac{\partial E}{\partial\nu}(x,\xi)dS_x$$

$$= \int_{\Omega\cap\tilde\Omega} f(\xi)d\xi\int_{\partial\tilde\Omega}\frac{\partial E}{\partial\nu}(x,\xi)dS_x + \int_{\Omega^*} f(\xi)d\xi\int_{\partial\tilde\Omega}\frac{\partial E}{\partial\nu}(x,\xi)dS_x\,,$$

სადაც

$$\Omega^* := \Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}},$$

მაგრამ, (3.3.11) ფორმულის თანახმად, აქ შემავალი მეორე ინტეგრალი $\partial\tilde{\Omega}$-ზე ნულის ტოლია, ხოლო პირველი ინტეგრალი $\partial\tilde{\Omega}$-ზე ერთის ტოლია, ამიტომ

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \frac{\partial U}{\partial \nu}(x)dS_x = \int_{\Omega\cap\tilde{\Omega}} f(\xi)d\xi,$$

რომელსაც ასევე *გაუსის ფორმულა* ეწოდება.

3.3.5. ორმაგი ფენის პოტენციალი. განვიხილოთ $\Omega \subset R^n$ შემოსაზღვრული არე $A^{k,h}$, $k \geq 1$, კლასის საზღვრით და ორმაგი ფენის

$$W(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) \frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi$$

პოტენციალი. რადგან $\xi \in \partial\Omega$ და $E(x,\xi)$ ჰარმონიულია ყველგან, სადაც $\xi \neq x$, ამიტომ W ფუნქცია ჰარმონიულია $R^n \setminus \partial\Omega$-ში. ამასთან, რადგან

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi) \to 0, \text{ როცა } |x| \to \infty,$$

ამიტომ

$$W(x) \to 0, \text{ როცა } |x| \to \infty.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\Omega^+ := \Omega \text{ და } \Omega^- := R^n \setminus \overline{\Omega}.$$

გამოვიკვლიოთ W ფუნქციის ყოფაქცევა $\partial\Omega$ საზღვარზე და მის მახლობლად. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა, მაშინ ორმაგი ფენის პოტენციალი შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \ln|x-\xi| dS_\xi, \tag{3.3.13}$$

სადაც $\partial\Omega$ ჩაკეტილი მარტივი წირია უწყვეტი სიმრუდით, ხოლო φ უწყვეტი ფუნქციაა. გაუსის (3.3.11) ფორმულის გამოყენებით მტკიცდება, რომ

$$\begin{aligned} W^+\left(x^0\right) &= \frac{1}{2}\varphi\left(x^0\right) + W\left(x^0\right), \\ W^-\left(x^0\right) &= -\frac{1}{2}\varphi\left(x^0\right) + W\left(x^0\right), \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

სადაც

$$W^+\left(x^0\right) := \lim_{\Omega^+ \ni x \to x^0} W(x), \quad W^-\left(x^0\right) := \lim_{\Omega^- \ni x \to x^0} W(x).$$

(3.3.14) ფორმულებიდან ცხადია, რომ, როცა $x \to x^0 \in \partial\Omega$, ორმაგი ფენის პოტენციალი წყვეტას განიცდის. აღსანიშნავია, რომ ორმაგი ფენის პოტენციალის ნორმალური წარმოებული ამ დროს წყვეტას არ განიცდის.

(3.3.14)-ში თუ პირველს გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ, რომ

$$W^+\left(x^0\right) - W^-\left(x^0\right) = \varphi\left(x^0\right).$$

ამ ფორმულას *ნახტომის ფორმულა* ეწოდება.

განვიხილოთ დირიხლეს

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega^\pm,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = g,$$

ამოცანა [(+) შეესაბამება შიგა, ხოლო (-) – გარე ამოცანას. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში დამატებით ვითხოვთ ამონახსნის შემოსაზღვრულობას უსასრულობაში (როცა $n \geq 3$, ეს პირობა უსასრულობაში ქრობის პირობით იცვლება)], სადაც $\partial\Omega$ წირს უწყვეტი სიმრუდე აქვს და g უწყვეტი ფუნქციაა. ვეძებოთ ამ ამოცანის ამონახსნი ორმაგი ფენის

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \ln|x-\xi| dS_\xi$$

პოტენციალის სახით. რადგან ორმაგი ფენის პოტენციალი ჰარმონიულია Ω არეში, ამიტომ საჭიროა, შემოწმდეს მხოლოდ სასაზღვრო პირობის შესრულება. მაშინ, (3.3.14) ფორმულების თანახმად, φ ფუნქციისთვის მიიღება

$$u^{\pm}\left(x^0\right) = \pm\frac{1}{2}\varphi\left(x^0\right) + u\left(x^0\right)$$

განტოლება, რომელიც ჩაიწერება ე. წ. ფრედჰოლმის მეორე გვარის შემდეგი ინტეგრალური განტოლების სახით

$$\pm\frac{1}{2}\varphi\left(x^0\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \ln\left|x^0-\xi\right| dS_\xi = g\left(x^0\right). \tag{3.3.15}$$

ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ (3.3.15) განტოლება ამოხსნადია, თუ მის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი (ამას *ფრედჰოლმის ალტერნატივა* ეწოდება). მაგრამ დირიხლეს ერთგვაროვან ამოცანას, როგორც ვიცით, მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი აქვს. ერთგვაროვან ამოცანას კი ერთგვაროვანი $\left[g(x)=0\right]$ (3.3.15) განტოლება შეესაბამება. ე. ი., ამ უკანასკნელსაც მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი აქვს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (3.3.15) არაერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება ცალსახად ამოხსნადია.

3.3.6. მარტივი ფენის პოტენციალი. განვიხილოთ შემოსაზღვრული $\Omega \subset R^n$ არე $A^{k,h}$, $k \geq 1$, კლასის საზღვრით, φ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $\partial\Omega$-ზე, და

$$V(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) E(x,\xi) dS_\xi$$

მარტივი ფენის პოტენციალი.

ცხადია, რომ $R^n \setminus \partial\Omega$-ში V ჰარმონიული ფუნქციაა, რადგან ამ შემთხვევაში $x \neq \xi$. ამასთან, თუ $n \geq 3$, მაშინ $u(x) \to 0$, როცა $|x| \to \infty$. თუ $n = 2$, მაშინ

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \ln\frac{|x-\xi|}{|x|} \varphi(\xi) dS_\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \ln|x| \varphi(\xi) dS_\xi\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $V(x) \to 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) dS_\xi = 0\,.$$

შემოვიფარგლოთ წინა ქვეპუნქტის პირობებში $n = 2$ შემთხვევით. გაუსის (3.3.11) ფორმულის გამოყენებით მტკიცდება, რომ მარტივი ფენის პოტენციალი უწყვეტია $\partial\Omega$ საზღვარზე გავლისას, ხოლო მისი $\dfrac{\partial V(x,\xi)}{\partial \nu_{x^0}}$ ნორმალური წარმოებული წყვეტას განიცდის, ამასთან

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu_{x^0}}\right)^{+}\left(x^0\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(x^0\right) + \frac{\partial V}{\partial \nu_{x^0}}\left(x^0\right),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu_{x^0}}\right)^{-}\left(x^0\right)=-\frac{1}{2}\varphi\left(x^0\right)+\frac{\partial V}{\partial \nu_{x^0}}\left(x^0\right).$$

განვიხილოთ ნოიმანის

$$\Delta u(x)=0\,,\quad x\in\Omega^{\pm}\,,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_{x^0}}(x)\right|_{x=x^0\in\partial\Omega}=g(x^0)\,,$$

ამოცანა და მისი $u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ ამონახსნი ვეძებოთ მარტივი ფენის

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\varphi(\xi)\ln\left|x-\xi\right|dS_{\xi}$$

პოტენციალის სახით. რადგან მარტივი ფენის პოტენციალი ჰარმონიულია, როცა $x\in R^n\setminus\partial\Omega$, ამიტომ საჭიროა, შემოწმდეს მხოლოდ სასაზღვრო პირობის შესრულება. მაშინ φ ფუნქციისთვის მიიღება

$$\pm\frac{1}{2}\varphi(x^0)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\ln\left|x^0-\xi\right|}{\partial\nu_{x^0}}\varphi(\xi)dS_{\xi}=g(x^0)$$

ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლება.

ნოიმანის ამოცანის ამონახსნი, ცხადია, განისაზღვრება მუდმივი შესაკრების სიზუსტით და ამონახსნის არსებობისთვის აუცილებელია შესრულდეს (იხ. თეორემა 3.1.1)

$$\int_{\partial\Omega}g(x)dS=0$$

პირობა. ინტეგრალურ განტოლებათა ფრედჰოლმის თეორიაზე დაყრდნობით მტკიცდება, რომ ეს პირობა საკმარისიცაა ამონახსნის არსებობისთვის.

შევნიშნოთ, რომ ზოგადი სახის მეორე რიგის ელიფსური განტოლებებისთვის n დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში შეიძლება, აიგოს განზოგადებულ პოტენციალთა თეორია, რომელსაც არსებობის თეორემების დამტკიცება, ბუნებრივია, ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებაზე დაყავს.