ლექცია 7

3.3. პოტენციალთა თეორია

3.3.1. პოტენციალები. ვთქვათ, $\Omega \subset R^n$ შემოსაზღვრული არეა $A^{k,h}$, $k \geq 1$, კლასის საზღვრით და $u \in C^2(\overline{\Omega})$. მაშინ, როგორც ვაჩვენეთ, ნებისმიერ $\xi \in \Omega$ წერტილში u ფუნქციის მნიშვნელობა განისაზღვრება

$$u(\xi) = \int_{\Omega} E(x,\xi)\Delta u(x)dx + \int_{\partial\Omega}\left[u(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu} - E(x,\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]dS_x \tag{3.3.1}$$

ფორმულით, სადაც $E(x,\xi)$ ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნია პოლუსით ξ წერტილში. თუ

$$\Delta u = f(x), \tag{3.3.2}$$

მაშინ (3.3.2)-ის (3.3.1)-ში ჩასმით მივიღებთ, რომ

$$u(\xi) = \int_{\Omega} E(x,\xi) f(x)dx + \int_{\partial\Omega}\left[u(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu} - E(x,\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]dS_x\,. \tag{3.3.3}$$

ამ ფორმულაში შემავალ

$$U(x) = \int_{\Omega} f(x)E(x,\xi)dx\,,\ W(x) = \int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu}dS_x \ \text{ და } \ V(x) = \int_{\partial\Omega}\varphi(x)E(x,\xi)dS_x$$

ინტეგრალებს შესაბამისად მოცულობითი (ნიუტონის), ორმაგი ფენის და მარტივი ფენის პოტენციალი ეწოდება. $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს პოტენციალების სიმკვრივე ეწოდება.

3.3.2. მოცულობითი პოტენციალი. განვიხილოთ

$$U(x) = \int_{\Omega} f(\xi)E(x,\xi)d\xi$$

მოცულობითი პოტენციალი f სიმკვრივით. რადგან $E(x,\xi)$ ჰარმონიულია, როცა $x \neq \xi$, ამიტომ U მოცულობითი პოტენციალი ჰარმონიულია $R^n \setminus \overline{\Omega}$ არეში. ამასთან, რადგან $E(x,\xi) \sim |x-\xi|^{2-n}$, როცა $|x| \to \infty$, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $n \geq 3$ შემთხვევაში $u(x) \to \infty$, როცა $|x| \to \infty$.

თეორემა 3.3.1. *თუ f ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრულია Ω არეში, მაშინ U მოცულობითი პოტენციალი უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადია R^n -ში. ამასთან*

$$U_{,j}(x) = \int_{\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)d\xi\,,\ \ j = 1,2,\ldots,n\,. \tag{3.3.4}$$

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi) \sim |x-\xi|^{1-n}$, როცა $x \to \xi$, ამიტომ ეს არასაკუთრივი ინტეგრალი თანაბრად კრებადია.

თეორემა 3.3.2. *თუ f სიმკვრივეს Ω არეში შემოსაზღვრული და უწყვეტი პირველი რიგის წარმოებულები აქვს, მაშინ მოცულობით პოტენციალს აქვს უწყვეტი მეორე რიგის წარმოებულები Ω არეში და*

$$U_{,\underline{j}j}(x) = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)\cos(\nu_{\xi},\xi_{\underline{j}})dS_{\xi} - \int_{\Omega} f_{,\underline{j}}(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)d\xi\,, \tag{3.3.5}$$

სადაც ν_{ξ} არის $\partial\Omega$ ზედაპირისადმი ξ წერტილში გავლებული გარე ნორმალი.

დამტკიცება. ცხადია,

$$\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)=-\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)\,,$$

ამიტომ (3.3.4) ფორმულიდან მიიღება, რომ

$$U_{,j}(x)=-\int_{\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)d\xi$$

ნაწილობითი ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$U_{,j}(x)=-\int_{\partial\Omega} f(\xi)E(x,\xi)\cos\left(\nu_\xi,\xi_j\right)dS_\xi+\int_{\Omega} f_{,j}(\xi)E(x,\xi)d\xi\,. \qquad (3.3.6)$$

ადვილი დასანახია, რომ როცა $x\in\Omega$, მაშინ (3.3.6) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი წარმოებადია x_j-ს მიმართ, როგორც პარამეტრზე დამოკიდებული საკუთრივი ინტეგრალი და

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\partial\Omega} f(\xi)E(x,\xi)\cos\left(\nu_\xi,\xi_{\underline{j}}\right)dS_\xi=\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)\cos\left(\nu_\xi,\xi_{\underline{j}}\right)dS_\xi\,.$$

რაც შეეხება მარჯვენა მხარეში მდგომ მეორე ინტეგრალს, ესაა მოცულობითი პოტენციალი, რომლის სიმკვრივე $f_{,j}(\xi)$ შემოსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციაა Ω არეში. ამიტომ, წინა თეორემის თანახმად,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\Omega} f_{,j}(\xi)E(x,\xi)d\xi=\int_{\Omega} f_{,j}(\xi)\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)d\xi\,.$$

ამრიგად, U ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია Ω არეში და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\begin{aligned}U_{,j\underline{j}}(x)&=-\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)\cos\left(\nu_\xi,\xi_{\underline{j}}\right)dS_\xi+\int_{\Omega} f_{,\underline{j}}(\xi)\frac{\partial E}{\partial x_j}(x,\xi)d\xi\\&=\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)\cos\left(\nu_\xi,\xi_{\underline{j}}\right)dS_\xi-\int_{\Omega} f_{,\underline{j}}(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)d\xi\,.\end{aligned}$$

3.3.3. პუასონის განტოლების ამოხსნა. თუ (3.3.5) ფორმულაში ავჯამავთ j-ს მიმართ 1-დან n-მდე, გვექნება

$$\Delta U(x)=\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)\cos\left(\nu_\xi,\xi_j\right)dS_\xi-\int_{\Omega} f_{,j}(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)d\xi\,.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta U(x)=\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega_\varepsilon} f_{,j}(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)d\xi\,, \qquad (3.3.7)$$

სადაც $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\overline{B}_x^\varepsilon$.

ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(f\frac{\partial E}{\partial \xi_j}\right)=f_{,j}(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}(x,\xi)+\sum_{j=1}^{n} f(\xi)\frac{\partial^2 E}{\partial \xi_j^2}(x,\xi)=f_{,j}(\xi)\frac{\partial E}{\partial \xi_j}\,,$$

რადგან Ω_ε არეში

$$\Delta E=0\,,$$

ამიტომ (3.3.7) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\Delta U(x)=\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(f\frac{\partial E}{\partial \xi_j}\right)d\xi\,.$$

ბოლო ინტეგრალში გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით და $(3.1.9)$ ფორმულის მიღების დროს გამოყენებული მსჯელობით გვექნება, რომ

$$\Delta U(x) = \int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\partial\Omega} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi - \int_{S_x^\varepsilon} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_x^\varepsilon} f(\xi)\frac{\partial E}{\partial \nu_\xi}(x,\xi)dS_\xi = f(x).$$

ამრიგად,

$$\Delta U(x) = f(x), \tag{3.3.8}$$

რითაც დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 3.3.3. *თეორემა 3.3.2-ის პირობებში ადგილი აქვს (3.3.8) ტოლობას, ე. ი. მოცულობითი პოტენციალი აკმაყოფილებს პუასონის (3.3.8) განტოლებას.*

თეორემა 3.3.4. *თუ $G(x,\xi)$ ფუნქცია არის Ω არეში ლაპლასის ოპერატორისთვის დირიხლეს ამოცანის გრინის ფუნქცია და f შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რომელსაც Ω არეში გააჩნია შემოსაზღვრული და უწყვეტი პირველი რიგის წარმოებულები, მაშინ*

$$u(x) = \int_\Omega f(\xi)G(x,\xi)d\xi \tag{3.3.9}$$

ტოლობით განსაზღვრული u ფუნქცია $A^{k,h}$, $k \ge 1$, კლასის Ω არეში წარმოადგენს პუასონის (3.3.8) განტოლების ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\lim_{\Omega\ni x\to x^0\in\partial\Omega} u(x) = 0 \tag{3.3.10}$$

სასაზღვრო პირობას.

დამტკიცება. რადგან

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi),$$

სადაც g ჰარმონიულია Ω არეში და

$$G(x,\xi)\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

თეორემა 3.3.3-ის თანახმად,

$$\Delta U(x) = \Delta\left[\int_\Omega f(\xi)E(x,\xi)d\xi\right] + \Delta\left[\int_\Omega f(\xi)g(x,\xi)d\xi\right] = \Delta\left[\int_\Omega f(\xi)E(x,\xi)d\xi\right] = f(\xi) \qquad \forall x\in\Omega.$$

მართალია, $G(x,\xi)\to 0$, როცა $x\to x^0\in\partial\Omega$, მაგრამ $(3.3.9)$ ფორმულაში პირდაპირ ზღვარზე ვერ გადავალთ, რადგან არ ვიცით, არის თუ არა ეს კრებადობა თანაბარი. ამიტომ u ფუნქცია წარმოვადგინოთ

$$u(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\xi)G(x,\xi)d\xi + \int_{d_\varepsilon} f(\xi)G(x,\xi)d\xi$$

სახით, სადაც

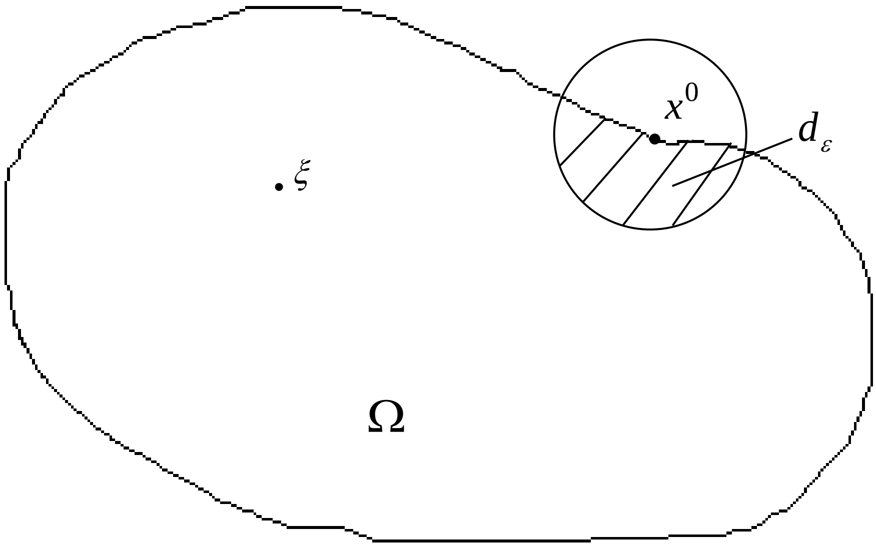
$$d_\varepsilon := \Omega\bigcap\left\{\left|x^0-\xi\right|<\varepsilon\right\} \text{ და } \Omega_\varepsilon = \Omega\setminus\bar{d}_\varepsilon$$

(იხ. ნახ. $3.3.1$). რადგან პირველი ინტეგრალი საკუთრივი ინტეგრალია, როცა

$$x\in\Omega\bigcap\left\{\left|x^0-x\right|\le\varepsilon^0<\varepsilon\right\} \text{ და } \xi\in\overline{\Omega}_\varepsilon,$$

ამასთან არგუმენტების იმავე მნიშვნელობებისთვის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უწყვეტია (x,ξ)-ის მიმართ, ამიტომ პირველ ინტეგრალში ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შეიძლება:

$$\lim_{x\to x^0}\int_{\Omega_\varepsilon} f(\xi)G(x,\xi)d\xi = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\xi)\lim_{x\to x^0}G(x,\xi)d\xi = 0.$$



ნახ. 3.3.1

ვაჩვენოთ, რომ მეორე ინტეგრალიც ნულისკენაა კრებადი.

ავიღოთ S_ξ^R სფერო იმდენად დიდი რადიუსით, რომ ნებისმიერი $\xi \in \Omega$-სთვის Ω მოხვდეს B_ξ^R ბირთვის შიგნით. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$w(x,\xi) = E(x,\xi) - E(y,\xi), \quad |y-\xi| = R.$$

ცხადია, როცა $x \in B_\xi^R$ ბირთვს,

$$w(x,\xi) \le 0,$$

ხოლო როცა $x \in \partial\Omega$-ს,

$$G(x,\xi) - w(x,\xi)\big|_{x\in\partial\Omega} = -w(x,\xi)\big|_{x\in\partial\Omega} \ge 0.$$

მაგრამ Ω არეში $G(x,\xi) - w(x,\xi)$ ფუნქცია ჰარმონიულია. მაშინ მაქსიმუმის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ

$$G(x,\xi) - w(x,\xi) \ge 0 \Rightarrow -w(x,\xi) \ge -G(x,\xi) \ge 0,$$

რადგან

$$G(x,\xi) \le 0.$$

ამდენად,

$$0 \le \int_{d_\varepsilon} \left[-G(x,\xi)\right] d\xi \le \int_{d_\varepsilon} \left[-w(x,\xi)\right] d\xi, \text{ როცა } x \in d_\varepsilon.$$

მაგრამ რამდენადაც $w(x,\xi)$ ფუნქციის ინტეგრალი d_ε არეზე თანაბრად კრებადია, ამიტომ

$$\int_{d_\varepsilon} \left[-w(x,\xi)\right] d\xi \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

ე. ი.,

$$\int_{d_\varepsilon} \left[-G(x,\xi)\right] d\xi \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

საიდანაც $f(\xi)$-ს შემოსაზღვრულობის გამო

$$\int\limits_{d_\varepsilon} f(\xi)\left[-G(x,\xi)\right]d\xi \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \,.$$

მაშასადამე, მეორე ინტეგრალიც ნულისკენ არის კრებადი და ამიტომ $U(x)\to 0$, როცა $x\to x^0\in\partial\Omega$. ■

როგორც ამ თეორემიდან ჩანს, თუ გრინის ფუნქცია ცნობილია, მაშინ მოცულობითი პოტენციალი გვაძლევს დირიხლეს ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს პუასონის განტოლებისთვის. თუ სასაზღვრო პირობა ერთგვაროვანი არაა,

$$\lim_{x\to x^0\in\partial\Omega} u(x)=\varphi\left(x^0\right),$$

მაშინ უნდა ავარჩიოთ ისეთი $v\in C^2(\Omega)$ ფუნქცია, რომელიც სასაზღვრო პირობას დააკმაყოფილებს. ამის მერე განვიხილოთ

$$w(x)=u(x)-v(x)$$

ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას და

$$\Delta w(x)=f(x)-\Delta v(x)$$

განტოლებას. ამდენად, მივედით უკვე ცხადად ამოხსნილ ამოცანამდე.