ლექცია 6

3.2. გრინის ფუნქცია და დირიხლეს ამოცანის ამოხსნა ბირთვისა და ნახევარსიბრტყისთვის

3.2.2. გრინის ფუნქცია დირიხლეს ამოცანისთვის. ვთქვათ, $\Omega \in R^n$ უბან-უბან ლიაპუნოვის საზღვრით შემოსაზღვრული არეა. განვიხილოთ დირიხლეს შემდეგი ამოცანა პუასონის განტოლებისთვის

$$\begin{aligned} \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

სადაც $f \in C(\overline{\Omega})$ და $\varphi \in C(\partial\Omega)$. დავუშვათ, რომ $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ფუნქცია ამ ამოცანის ამონახსნია. მაშინ, $(3.1.9)$ წარმოდგენის თანახმად,

$$u(\xi) = \int_\Omega E(x,\xi) f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[\varphi(x) \frac{\partial E}{\partial \nu}(x,\xi) - E(x,\xi) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right] dS_x . \tag{3.2.2}$$

როგორც ვხედავთ, $(3.2.2)$ ფორმულის მარჯვენა მხარეში უცნობია მხოლოდ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}$.

განვიხილოთ Ω არეში ჰარმონიული $g(x,\xi) \in C^1(\overline{\Omega})$ ფუნქცია, მაშინ g და u ფუნქციებისთვის გრინის მეორე ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\int_\Omega g(x,\xi) f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[\varphi(x) \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \nu} - g(x,\xi) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right] dS_x = 0 . \tag{3.2.3}$$

ვთქვათ, g ფუნქცია ისეა შერჩეული, რომ ნებისმიერი $\xi \in \Omega$-სთვის

$$\left[g(x,\xi) + E(x,\xi) \right]\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 .$$

მაშინ (3.2.2) და (3.2.3) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ

$$u(\xi) = \int_\Omega \left[g(x,\xi) + E(x,\xi) \right] f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \nu} + \frac{E(x,\xi)}{\partial \nu} \right] \varphi(x) dS_x .$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$G(x,\xi) = g(x,\xi) + E(x,\xi),$$

მაშინ

$$u(\xi) = \int_\Omega G(x,\xi) f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu} \right] \varphi(x) dS_x . \tag{3.2.4}$$

G ფუნქციას, $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \Omega$, (3.2.1) სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქცია ეწოდება. როგორც ვხედავთ, გრინის ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი პირობებიდან:

1. $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)\ \forall \xi \in \Omega$, სადაც g ფუნქცია x-ის მიმართ ჰარმონიულია Ω-ში და უწყვეტია $\overline{\Omega}$-ზე;
2. $G(x,\xi)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad \forall \xi \in \Omega$.

თეორემა 3.2.1. გრინის $G(x,\xi)$ ფუნქცია არადადებითია ყველგან Ω არეში.

დამტკიცება. რადგან

$$\lim_{x \to \xi} G(x,\xi) = -\infty ,$$

ამიტომ საკმარისად მცირე ε-სთვის

$$G(x,\xi) < 0$$

B_ξ^ε ბირთვში. ამდენად $\Omega\setminus\left(B_\xi^\varepsilon \bigcup S_\xi^\varepsilon\right)$ არის საზღვარზე $G(x,\xi)\le 0$, საიდანაც ჰარმონიული ფუნქციისთვის ექსტრემუმის პრინციპის თანახმად $G(x,\xi)\le 0$ ყველა $x\in\Omega\setminus\left(B_\xi^\varepsilon \bigcup S_\xi^\varepsilon\right)$-სთვის. აქედან დავასკვნით, რომ $G(x,\xi)\le 0$ ყველა $x\in\overline{\Omega}$-სთვის.

თეორემა 3.2.2. *გრინის ფუნქცია სიმეტრიულია,* ე. ი.,

$$G(\xi,x)=G(x,\xi)\quad \forall \xi,x\in\Omega.$$

დამტკიცება. ავიღოთ $\varepsilon>0$ ისე მცირე, რომ $B_\xi^\varepsilon, B_x^\varepsilon\subset\Omega$, $B_\xi^\varepsilon\bigcap B_x^\varepsilon=\varnothing$ (იხ. ნახ. 3.2.1). განვიხილოთ $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\left(B_\xi^\varepsilon\bigcup B_x^\varepsilon\right)$ არე და ამ არეში გამოვიყენოთ გრინის მეორე ფორმულა

$$u(y)=G(y,x)\ \text{ და }\ v(y)=G(y,\xi) \tag{3.2.5}$$

ფუნქციებისთვის. მაშინ, რადგან

$$\Delta u=\Delta v=0$$

Ω_ε არეში და

$$u=v=0$$

$\partial\Omega$-ზე, მივიღებთ

$$\int\limits_{S_\xi^\varepsilon\bigcup S_x^\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS_y=0.$$

აქედან

$$\int\limits_{S_\xi^\varepsilon\bigcup S_x^\varepsilon}\left[E(y,x)+g(y,x)\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\left[E(y,\xi)+g(y,\xi)\right]dS_y$$

$$=\int\limits_{S_\xi^\varepsilon\bigcup S_x^\varepsilon}\left[E(y,\xi)+g(y,\xi)\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\left[E(y,x)+g(y,x)\right]dS_y. \tag{3.2.6}$$

განვიხილოთ (3.2.6) ტოლობის მარცხენა მხარე

$$\int\limits_{S_\xi^\varepsilon\bigcup S_x^\varepsilon}u(y)\left[\frac{\partial E}{\partial\nu}(y,\xi)+\frac{\partial g}{\partial\nu}(y,\xi)\right]dS_y=\int\limits_{S_\xi^\varepsilon}u(y)\frac{\partial E}{\partial\nu}(y,\xi)dS_y$$

$$+\int\limits_{S_\xi^\varepsilon}u(y)\frac{\partial g}{\partial\nu}(y,\xi)dS_y+\int\limits_{S_x^\varepsilon}u(y)\left[\frac{\partial E}{\partial\nu}(y,\xi)+\frac{\partial g}{\partial\nu}(y,\xi)\right]dS_y=I_1+I_2+I_3.$$

რადგან $G(y,\xi)$ ფუნქცია ჰარმონიულია $\Omega\setminus B_\xi^\varepsilon$-ში, ამიტომ $\dfrac{\partial G}{\partial\nu}(y,\xi)$ შემოსაზღვრულია S_x^ε-ზე. ამდენად ε რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართის ფორმულის გათვალისწინებით,

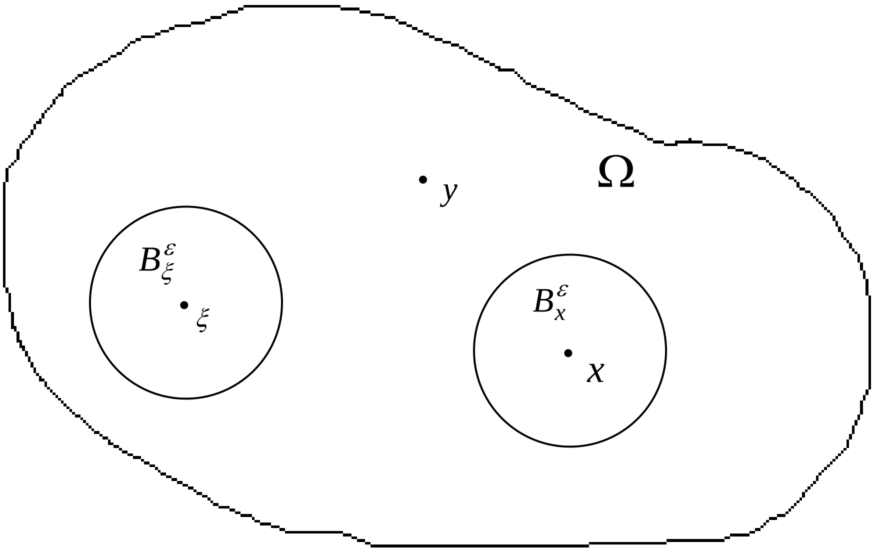
$$|I_3|=\left|\int\limits_{S_x^\varepsilon}u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(y,\xi)dS_y\right|\le M_1\left|\int\limits_{S_x^\varepsilon}E(y,x)dS_y\right|+M_1\left|\int\limits_{S_x^\varepsilon}g(y,x)dS_y\right|$$

$$\le M_2\left|\begin{cases}\varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1}, & \text{როცა } n>2\\ \ln\varepsilon\cdot\varepsilon, & \text{როცა } n=2\end{cases}\right|+M_3\varepsilon^{n-1}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0.$$

რადგან $g(y,\xi)$ ფუნქცია ჰარმონიულია Ω არეში, ამიტომ თვით ფუნქცია და მისი წარმოებულებიც შემოსაზღვრულია. ამდენად

$$|I_2|=\left|\int\limits_{S_\xi^\varepsilon}\left[E(y,x)+g(y,x)\right]\frac{\partial g}{\partial\nu}(y,\xi)dS_y\right|$$

$$\le M_4 \begin{cases} \varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1}, \text{ როცა } n>2 \\ \ln\varepsilon\cdot\varepsilon, \text{ როცა } n=2 \end{cases} + M_5\varepsilon^{n-1} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 .$$



ნახ. 3.2.1

(3.1.9) წარმოდგენის მიღების დროს ჩატარებული გამოთვლების გამოყენებით გვექნება

$$\lim_{\xi\to 0} I_1 = \lim_{\xi\to 0}\int_{S_x^\varepsilon} u(y)\frac{\partial E}{\partial\nu}(y,\xi)dS_y = \lim_{\xi\to 0}\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int_{S_\xi^\varepsilon} u(\xi)dS_y = u(\xi) .$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ (3.2.6) ტოლობის მარჯვენა მხარის ზღვარი, როცა $\varepsilon\to 0$, არის $v(x)$. მაშასადამე,

$$u(\xi)=v(x) ,$$

რაც, (3.2.5)-ის თანახმად, იმას ნიშნავს, რომ

$$G(\xi,x)=G(x,\xi) .$$

3.2.3. გრინის ფუნქციის აგება ბირთვული არისთვის. $\Omega\in R^n$ შემოსაზღვრულ არეში განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანა ლაპლასის განტოლებისთვის

$$\Delta u = 0, \quad x\in\Omega , \tag{3.2.7}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) . \tag{3.2.8}$$

წინა პარაგრაფში მიღებული (3.2.4) ფორმულის თანახმად

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi(\xi)dS_\xi \quad \forall x\in\Omega . \tag{3.2.9}$$

საიდანაც ნათელია, რომ თუ ცხადი სახით ავაგებთ გრინის ფუნქციას, დირიხლეს ამოცანის ამონახსნიც ცხადი სახით აგებული გვექნება.

ვთქვათ, $\Omega = B_0^R$ ბირთვია ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში (იხ. ნახ. 3.2.2). ავიღოთ ნებისმიერი $x\in B_0^R$ და აღვნიშნოთ $\rho := |x|$. ავიღოთ

$$y = x\frac{R^2}{|x|^2}$$

წერტილი ბირთვის გარეთ, მაშინ, თუ

$$r := |y| ,$$

გვექნება, რომ

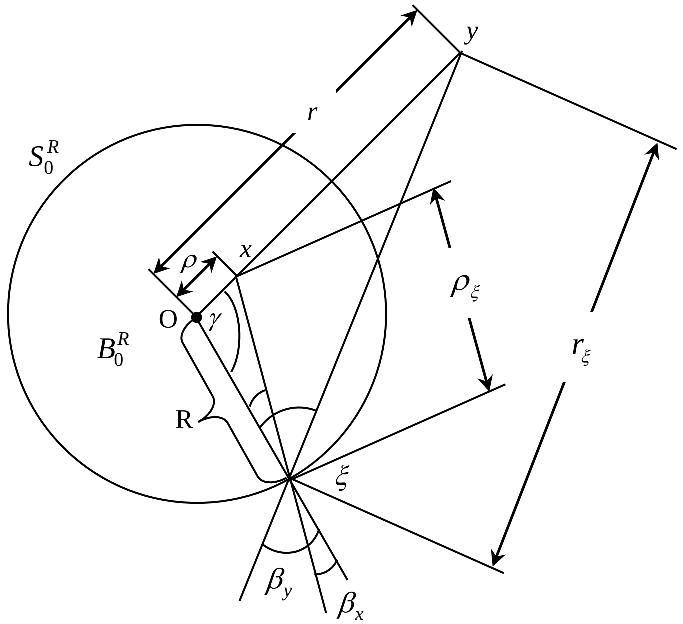
$$\rho \cdot r = R^2 \tag{3.2.10}$$

(ასეთ y წერტილს სფეროს მიმართ x-ის სიმეტრიული წერტილი ეწოდება). ვაჩვენოთ, რომ

$$G(x,\xi) = \varepsilon\left(|x-\xi|\right) - \varepsilon\left(\frac{\rho}{R}|y-\xi|\right),$$

სადაც

$$\varepsilon\left(|x-\xi|\right) := E(x,\xi).$$



ნახ. 3.2.2

ცხადია, რომ $\varepsilon\left(\frac{\rho}{R}|y-\xi|\right)$ ფუნქცია B_0^R არეში ჰარმონიულია ξ-ის მიმართ. ამიტომ და-სამტკიცებელი დარჩა მხოლოდ ის, რომ ნებისმიერი $x \in B_0^R$-სთვის

$$G(x,\xi) = 0, \text{ როცა } \xi \in S_0^R.$$

განვიხილოთ $xO\xi$ და $yO\xi$ სამკუთხედები. ისინი მსგავსია, რადგან $yO\xi$ კუთხე მათ საერთო აქვთ, ხოლო (3.2.10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{r} \tag{3.2.11}$$

ე. ი.,

$$\frac{|Ox|}{|O\xi|} = \frac{|O\xi|}{|Oy|}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{r} = \frac{\rho_\xi}{r_\xi},$$

სადაც

$$\rho_\xi = |x-\xi| \text{ და } r_\xi = |y-\xi|.$$

ამდენად, როცა $\xi \in S_0^R$, მაშინ

$$\rho_\xi = \frac{\rho}{R} r_\xi . \tag{3.2.12}$$

ამიტომ

$$G(x,\xi)\big|_{\xi\in S_0^R}=\varepsilon\left(\rho_\xi\right)-\varepsilon\left(\frac{\rho}{R}r_\xi\right)=\varepsilon\left(\rho_\xi\right)-\varepsilon\left(\rho_\xi\right)=0\,. \qquad (3.2.13)$$

ამრიგად, გრინის ფუნქცია აგებულია. (3.2.13)-ის თანახმად, როცა $\xi\in S_0^R$, ცხადია,

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right|_{\xi\in S_0^R}=\varepsilon'\left(|x-\xi|\right)\frac{\partial|x-\xi|}{\partial\nu_\xi}-\varepsilon'\left(|x-\xi|\right)\frac{\rho}{R}\frac{\partial|y-\xi|}{\partial\nu_\xi}$$

$$=\varepsilon'\left(|x-\xi|\right)\left[\frac{\partial|x-\xi|}{\partial\nu_\xi}-\frac{\rho}{R}\frac{\partial|y-\xi|}{\partial\nu_\xi}\right]=\varepsilon'\left(|x-\xi|\right)\left(\cos\beta_x-\cos\beta_y\cdot\frac{\rho}{R}\right). \quad (3.2.14)$$

რადგან, ერთი მხრივ,

$$\frac{\partial|x-\xi|}{\partial\nu_\xi}=\frac{\left(x_i-\xi_i\right)}{|x-\xi|}\cos\left(\nu_\xi,\xi_i\right)$$

წარმოადგენს

$$\left(\frac{x_1-\xi_1}{|x-\xi|},\cdots,\frac{x_n-\xi_n}{|x-\xi|}\right)\ \text{და}\ \ \nu_\xi:=\left(\cos\left(\nu_\xi,\xi_1\right),\cdots,\cos\left(\nu_\xi,\xi_n\right)\right)$$

ვექტორების სკალარულ ნამრავლს, ხოლო, მეორე მხრივ, ამ ორი ერთეულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათ შორის კუთხის კოსინუსის ტოლია (იხ. ნახ. 3.2.2)[*]), ე. ი.,

$$\frac{\partial|x-\xi|}{\partial\nu_\xi}=\cos\beta_x\,.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{\partial|y-\xi|}{\partial\nu_\xi}=\cos\beta_y\,.$$

$\cos\beta_x$-ისა და $\cos\beta_y$-ს, კოსინუსების თეორემის თვისების თანახმად, ვპოულობთ შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\rho^2=R^2+\rho_\xi^2-2R\rho_\xi\cos\beta_x\,,$$

$$r^2=R^2+r_\xi^2-2Rr_\xi\cos\beta_y\,.$$

რისი გათვალისწინებითაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ (3.2.12)-ს და (3.2.11)-ს, ფორმულა (3.2.14) შემდეგი სახით გადმოიწერება:

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right|_{\xi\in S_0^R}=\varepsilon'\left(r_\xi\right)\left[\frac{R^2+\rho_\xi^2-\rho^2}{2R\rho_\xi}-\frac{R^2+r_\xi^2-r^2}{2Rr_\xi}\cdot\frac{\rho}{R}\right]$$

---

[*]) ორ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორს შორის კუთხეს თუ θ-თი აღვნიშნავთ, როგორც ეს ანალიზური გეომეტრიდანაა ცნობილი, ორ- და სამგანზომილებიან შემთხვევაში,

$$\cos\theta=\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{\left|\vec{P}\right|\cdot\left|\vec{Q}\right|}\,.$$

$n>3$ შემთხვევაში ამ უკანასკნელი ტოლობით განსაზღვრულ θ კუთხეს ეწოდება კუთხე ორ n-განზომილებიან ვექტორს შორის. თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ $0\le\theta\le\pi$, მაშინ ის ცალსახად იქნება განსაზღვრული.

$$= \varepsilon'(r_\xi)\left[\frac{R^2+\rho_\xi^2-\rho^2}{2R\rho_\xi} - \frac{R^2+\frac{R^2}{\rho^2}\rho_\xi^2-r^2}{2R\rho_\xi}\frac{\rho^2}{R^2}\right]$$

$$= \varepsilon'(r_\xi)\frac{R^2-\rho^2}{R\rho_\xi} = \frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-\rho^2}{\rho_\xi^n},$$

სადაც ω_n ერთეულოვან რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართია. ამ უკანასკნელის (3.2.9)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{S_0^R}\frac{R^2-\rho^2}{\rho_\xi^n}\varphi(\xi)dS_\xi = \frac{1}{\omega_n R}\int_{S_0^R}\frac{(R^2-\rho^2)\varphi(\xi)dS_\xi}{\left(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma\right)^{\frac{n}{2}}}, \tag{3.2.15}$$

სადაც γ კუთხეა Ox და $O\xi$ ვექტორებს შორის. ამ ფორმულას პუასონის ფორმულა ეწოდება.

ამრიგად, თუ ბირთვისთვის დირიხლეს ამოცანა ამოხსნადია, ის (3.2.15)-ის სახით წარმოიდგინება. მაგრამ უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ (3.2.15) აკმაყოფილებს (3.2.7) განტოლებას და (3.2.8) სასაზღვრო პირობას. ამით ამონახსნის არსებობაც დამტკიცდება. ამონახსნის ერთადერთობა უფრო ზოგად შემთხვევაში ადრე გვქონდა დამტკიცებული.

3.2.4. გრინის ფუნქციის აგება ნახევარსივრცისთვის. ვთქვათ, $\Omega := \{x \in R^n : x_n > 0\}$ ნახევარსივრცეა (იხ. ნახ. 3.2.3). განვიხილოთ

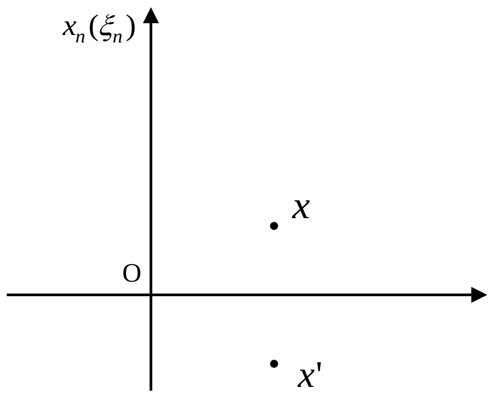
$$\Delta u(x) = 0, \quad x_n > 0, \tag{3.2.16}$$

$$u\big|_{x_n=0} = \varphi(x), \quad \varphi \in C^1(\partial\Omega). \tag{3.2.17}$$

დირიხლეს ამოცანა. ვეძებოთ მისი შემოსაზღვრული ამონახსნი. განვიხილოთ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $x_n = 0$ ჰიპერსიბრტყისადმი მისი სიმეტრიული $x' = (x_1, x_2, \ldots, -x_n)$ წერტილი. ადვილი დასანახია, რომ

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) - E(x',\xi)$$

ფუნქცია წარმოადგენს (3.2.16), (3.2.17) ამოცანის გრინის ფუნქციას.



ნახ. 3.2.3

ცხადია,

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi} = -\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_n} = -\frac{1}{\omega_n}\frac{\xi_n - x_n}{|\xi - x|^n} + \frac{1}{\omega_n}\frac{\xi_n + x_n}{|\xi - x'|^n}.$$

საიდანაც

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\right|_{\xi_n=0} = \frac{2x_n}{\omega_n\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\xi_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

ახლა, თუ მოვითხოვთ, რომ საკმარისად დიდი $A := \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$ -სთვის

$$|\varphi| < \frac{const}{A^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

მაშინ უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} x_n \int\limits_{\xi_n=0} \varphi(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \xi_i)^2 + x_n^2\right]^{-\frac{n}{2}} d\xi_1,\dots,d\xi_{n-1} \qquad (3.2.18)$$

აკმაყოფილებს (3.2.16) განტოლებას და (3.2.17) სასაზღვრო პირობას. (3.2.18) ფორმულას ეწოდება პუასონის ფორმულა ნახევარსივრცისთვის.