ლექცია 5

3. ელიფსური განტოლებები

3.1. ჰარმონიული ფუნქციების ძირითადი თვისებები

$u(x)$ ფუნქციას ეწოდება $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, არეში *ჰარმონიული ფუნქცია*, თუ მას აქვს მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები Ω არეში და აკმაყოფილებს

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.1.1}$$

ლაპლასის განტოლებას, სადაც

$$\Delta(\cdot) := (\cdot)_{,ii} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_i^2}$$

ლაპლასის ოპერატორის სახელს ატარებს.

პირდაპირი შემოწმებით შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ, თუ $u(x)$ ჰარმონიულია Ω არეში, მაშინ

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

ფუნქცია ჰარმონიული იქნება ყველგან, სადაც ის განსაზღვრულია.

თუ Ω არე შეიცავს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილსაც, მაშინ ჰარმონიული ფუნქციის განმარტება დაზუსტებას მოითხოვს, რადგან უსასრულობაში წარმოებულის ცნებას აზრი არ აქვს.

$u(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ჰარმონიული უსასრულოდ დაშორებული წერტილის* მიდამოში (ე. ი., საკმარისად დიდი R რადიუსის მქონე $|x| \leq R$ ბირთვის გარეთ), თუ

$$v(y) = |y|^{2-n} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \tag{3.1.2}$$

ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობად $y = 0$ წერტილში მიღებულია $\lim\limits_{y \to 0} v(y)$, ჰარმონიულია $y = 0$ წერტილის მიდამოში.

ცვლადთა $y = \dfrac{x}{|x|^2}$ გარდაქმნის შემდეგ (3.1.2)-დან მივიღებთ, რომ

$$u(x) = |x|^{2-n} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

ამის შესაბამისად უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში (3.1.1) განტოლების რეგულარული ამონახსნი ეწოდება ამ მიდამოში, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის გარდა, ჰარმონიულ $u(x)$ ფუნქციას, რომელიც შემოსაზღვრული რჩება, როცა $|x| \to \infty$, $n = 2$ შემთხვევაში და მიისწრაფის 0-სკენ $n > 2$ შემთხვევაში $|x|^{2-n}$-ზე არანაკლები რიგით.

3.1.1. გრინის*) ფორმულები. ამბობენ, რომ $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, არე ეკუთვნის $A^{k,h}$ კლასს, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $\partial\Omega$ სიმრავლე შეიძლება დავფაროთ ისეთი n-განზომილებიანი არეებით, რომ ყოველ მათგანში $x \in \partial\Omega$ წერტილის კოორდინატები შეიძლება წარმოვადგინოთ

---

*) ჯ. გრინი (1793 – 1841) – ინგლისელი მათემატიკოსი

$$x_i = x_i(t_1,\ldots,t_{n-1}),\ i=1,\ldots,n,$$

პარამეტრული სახით, სადაც x_i ფუნქციები განსაზღვრულია $t_1,\ldots,t_{n-1}$ ცვლადების შემოსაზღვრულ δ არეში;

2. ეს ფუნქციები ამყარებენ ურთიერთცალსახა თანადობას δ არის $\overline{\delta}$ ჩაკეტვასა და $\partial\Omega$-ს შესაბამის ნაწილს შორის, ამასთან $x_i \in C^{k,h}(\overline{\delta})$, $k \geq 1$;

3. $J := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial(x_{i+1},\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_{i-1})}{\partial(t_1,\ldots,t_{n-1})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \neq 0$ δ-ში;

4. პარამეტრული წარმოდგენები ისეა შერჩეული, რომ $\partial\Omega$ ზედაპირის ν გარე ნორმალის მიმმართველი კოსინუსები განსაზღვრულია

$$\nu_i = \cos(\vec{\nu}, x_i) = \frac{1}{J} \frac{\partial(x_{i+1},\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_{i-1})}{\partial(t_1,\ldots,t_{n-1})},\ i=1,\ldots,n,$$

ტოლობებით.

$A^{1,k}$ კლასის Ω არის $\partial\Omega$ საზღვარს უწოდებენ ლიაპუნოვის ზედაპირს. ამ შემთხვევაში dS ფართითი ელემენტი წარმოიდგინება

$$dS = J dt_1 \ldots dt_{n-1}$$

სახით.

თუ $\partial\Omega$ შედგება $A^{k,h}$, $k \geq 1$, კლასის ზედაპირების სასრული რაოდენობისგან, რომელთაც შეერთების ადგილებში არ აქვთ უკუქცევის წერტილები და წიბოები (ასეთ ზედაპირს უბან-უბან ლიაპუნოვის[*)] ზედაპირი ეწოდება) და $p \in C^1(\overline{\Omega})$, მაშინ სამართლიანია

$$\int_{\Omega} p_{,i} dx = \int_{\partial\Omega} p\nu_i dS \qquad (3.1.3)$$

გაუს[**)]-ოსტროგრადსკის[***)] ფორმულა.

განვიხილოთ ნებისმიერი u და v ფუნქციები $C^2(\overline{\Omega})$ კლასიდან. ადვილი დასანახია, რომ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_{\Omega} v u_{,\underline{j}\underline{j}} dx = -\int_{\Omega} v_{,\underline{j}} u_{,\underline{j}} dx + \int_{S} v u_{,\underline{j}} \nu_{\underline{j}} dS, \qquad (3.1.4)$$

თუ (3.1.4) ფორმულაში j-ს მიმართ ავჯამავთ 1-დან n-მდე, მივიღებთ

$$\int_{\Omega} v u_{,jj} dx = -\int_{\Omega} v_{,j} u_{,j} dx + \int_{S} v u_{,j} \nu_j dS,$$

საიდანაც გამომდინარეობს *გრინის პირველი ფორმულა*

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = -\int_{\Omega} v_{,j} u_{,j} dx + \int_{S} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \qquad (3.1.5)$$

ცხადია, რომ ადგილი აქვს

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = -\int_{\Omega} u_{,j} v_{,j} dx + \int_{S} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS. \qquad (3.1.6)$$

ტოლობასაც. თუ (3.1.5) ტოლობას გამოვაკლებთ (3.1.6)-ს, მივიღებთ *გრინის მეორე ფორმულას*

[*)] ა. ა. ლიაპუნოვი (1911 –1073) – რუსი მათემატიკოსი

[**)] კ. ფ. გაუსი (1777 – 1855) – გერმანელი მათემატიკოსი

[***)] მ. ვ. ოსტროგრადსკი (1801 – 1861) – რუსი მათემატიკოსი

$$\int_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)dx=\int_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dS\,. \qquad (3.1.7)$$

გრინის ფორმულები ჩვენ გამოვიყვანეთ იმ შემთხვევისთვის, როცა $u,v\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. ვაჩვენოთ, რომ ფორმულები სამართლიანია იმ შემთვევაშიც, როცა $u,v\in C^2(\Omega)C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

ავაგოთ შემოსაზღვრულ არეთა მიმდევრობა $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$, რომელიც აკმაყოფილებს $\overline{\Omega}_m\subset\Omega_{m+1}\subset\Omega\quad\forall m$, $\bigcup_{m=1}^{\infty}\Omega_m=\Omega$ პირობებს, ამასთან $\partial\Omega_m$ საზღვარი გლუვია. ცხადია, რომ ნებისმიერი m-სთვის u და v ფუნქციები $C^2\left(\overline{\Omega}_m\right)$ კლასიდანაა და ამიტომ სამართლიანია გრინის პირველი ფორმულა

$$\int_{\Omega_m}v\Delta u dx=-\int_{\Omega_m}v_{,j}u_{,j}dx+\int_{S_m}v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS\,,$$

სადაც

$$S_m:=\partial\Omega_m\,.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში შეიძლება ზღვარზე გადასვლა, როცა $m\to+\infty$, რადგან u და $v\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. მაგრამ მაშინ არსებობს მარცხენა მხარის ზღვარიც და ჩვენს პირობებში გრინის პირველი ფორმულა სამართლიანია. ანალოგიურად დამტკიცდება გრინის მეორე ფორმულის სამართლიანობა.

3.1.2. ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი. განვიხილოთ ლაპლასის (3.1.1) განტოლება და ვეძებოთ მისი ამონახსნი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ $|x|$-ზე: $u(x)=\varphi(|x|)$. ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{\partial\varphi(|x|)}{\partial x_j}=\frac{d\varphi(|x|)}{d|x|}\cdot\frac{x_j}{|x|}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(|x|)}{\partial x_j^2}=\frac{d^2\varphi(|x|)}{d|x|^2}\cdot\frac{x_j^2}{|x|^2}+\left(\frac{1}{|x|}-\frac{x_j^2}{|x|^3}\right)\frac{d\varphi(|x|)}{d|x|}\,.$$

ამ უკანასკნელის ლაპლასის (3.1.1) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d^2\varphi(|x|)}{d|x|^2}+\frac{n-1}{|x|}\frac{d\varphi(|x|)}{d|x|}=0\,.$$

მაშასადამე, $\varphi(t)$ ფუნქცია, როცა $t\neq0$, აკმაყოფილებს

$$\varphi''(t)+\frac{n-1}{t}\varphi'(t)=0$$

ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$\varphi(t)=\begin{cases}C_1+C_2t^{2-n}, & n\geq3,\\ C_1+C_2\ln t, & n=2,\end{cases}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ამრიგად, ლაპლასის განტოლების მხოლოდ $|x|$-ზე დამოკიდებული ამონახსნი მოიცემა

$$u(x)=\begin{cases}C_1+C_2|x|^{2-n}, & n\geq3,\\ C_1+C_2\ln|x|, & n=2,\end{cases}$$

ფორმულით.

ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი პოლუსით $x=\xi$ წერტილში ეწოდება E ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება

$$E(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2-n)\omega_n}|x-\xi|^{2-n}, & n\geq 3,\\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, & n=2,\end{cases}$$

ტოლობით, სადაც

$$\omega_n=2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)$$

ერთეულრადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართია,

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt$$

ეილერის გამა ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ r რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართი გამოისახება $r^{n-1}\omega_n$ ფორმულით;

$$\omega_3=2\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=2\pi^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}=4\pi,$$

რადგან

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

ცხადია, რომ

$$E(x,\xi)=E(\xi,x)=E(x-\xi,0).$$

3.1.3. $C^2(\overline{\Omega})$ **კლასის ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენა**. ვთქვათ, $\Omega\subset R^n$ შემოსაზღვრული არეა და $u\in C^2(\overline{\Omega})$. განვიხილოთ ლაპლასის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი E პოლუსით ξ წერტილში. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Omega_\varepsilon:=\Omega\setminus B_\xi^\varepsilon,$$

სადაც B_ξ^ε არის ε-რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით ξ წერტილში. მაშინ გრინის მეორე ფორმულის თანახმად

$$\int_{\Omega_\varepsilon}(E\Delta u-u\Delta E)dx=\int_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial E}{\partial\nu}\right)dS_x+\int_{S_\xi^\varepsilon}\left(E\frac{\partial u}{\partial\nu'}-u\frac{\partial E}{\partial\nu'}\right)dS_x,$$

სადაც $\vec{\nu}$ არის $\partial\Omega$-ს გარე ნორმალი, ხოლო $\vec{\nu}'$ კი – S_ξ^ε სფეროს შიგა ნორმალი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ Ω_ε არეში $\Delta E=0$, ზღვარზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}E\Delta u dx=\int_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial E}{\partial\nu}\right)dS_x+u(\xi),$$

რადგან

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\xi^\varepsilon}\left(E\frac{\partial u}{\partial\nu'}-u\frac{\partial E}{\partial\nu'}\right)dS_x=u(\xi).$$

მართლაც, რადგანაც $\left|\dfrac{\partial u}{\partial\nu'}\right|\leq\sum_{j=1}^n|u_{,j}|$ ადვილი დასანახია, რომ $\left(B_\xi^\varepsilon\subset B_1\subset\Omega\right)$

$$\left|\int_{S_\xi^\varepsilon} E\frac{\partial u}{\partial \nu'}dS_x\right| \le \sum_{j=1}^{n}\max_{B_1}\left|u,_j(x)\right|\frac{\varepsilon^{2-n}}{(n-2)\omega_n}\cdot\int_{S_\xi^\varepsilon}dS_x = C_1\varepsilon \to 0, \quad n\ge 3;$$

$$\int_{S_\xi^\varepsilon} E\frac{\partial u}{\partial \nu'}dS_x \le \sum_{j=1}^{n}\max_{B_1}\left|u,_j(x)\right|\frac{\ln\varepsilon}{2\pi}\cdot\int_{S_\xi^\varepsilon}dS_x = C_2\varepsilon\ln\varepsilon \to 0, \quad n=2\,,$$

როცა

$$\varepsilon\to 0\,.$$

მეორე მხრივ კი, რადგან $u(x)$ უწყვეტია Ω-ში, ამიტომ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$u(x)=u(\xi)+\eta(x)\,,\quad x\in S_\xi^\varepsilon\,,$$

სახით, სადაც

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta(x)=0\,,$$

ე. ი.,

$$|\eta(x)|<\varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1>0 \text{ რაგინდ მცირეა}).$$

ვინაიდან $\overrightarrow{x-\xi}$ რადიუს-ვექტორს S_ξ^ε სფეროს გარე ნორმალის მიმართულება აქვს, ამი-ტომ

$$\frac{\partial E}{\partial \nu'}=-\frac{\partial E}{\partial|x-\xi|}\,.$$

ამდენად

$$\begin{aligned}-\int_{S_\xi^\varepsilon}u(x)\frac{\partial E}{\partial\nu'}(x,\xi)dS_x &= \int_{S_\xi^\varepsilon}u(x)\frac{1}{(2-n)\omega_n}(2-n)|x-\xi|^{1-n}dS_x\\ &=\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int_{S_\xi^\varepsilon}\left[u(\xi)+\eta(x)\right]dS_x = u(\xi)+\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int_{S_\xi^\varepsilon}\eta(x)dSx.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

საიდანაც, რადგან

$$\left|\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int_{S_\xi^\varepsilon}\eta(x)dS_x\right|\le\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\varepsilon_1\cdot\omega_n\varepsilon^{n-1}=\varepsilon_1\,.$$

მივიღებთ, რომ

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\xi^\varepsilon}u(x)\frac{\partial E}{\partial\nu'}(x,\xi)dS_x=u(\xi)\,.$$

ამრიგად, მივიღეთ ფორმულა, რომელიც გვაძლევს $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ კლასის ფუნქციის შემდეგ ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$u(\xi)=\int_\Omega E(x,\xi)\Delta u(x)dx-\int_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial E}{\partial\nu}\right)dS_x\,. \tag{3.1.9}$$

თეორემა 3.1.1 (ნაკადის თეორემა). თუ $u\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ ფუნქცია ჰარმონიულია Ω არეში, მაშინ

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=0\,. \tag{3.1.10}$$

დამტკიცება. თუ გრინის პირველ

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx = -\int_{\Omega} v_{,j}u_{,j}dx + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$$

ფორმულაში ავიღებთ $v \equiv 1$, რადგან $\Delta u = 0$, მივიღებთ $(3.1.10)$-ს. ■

ამ თეორემას გარკვეული ფიზიკური შინაარსი აქვს. თუ u ტემპერატურის სტაციონარული განაწილებაა, მაშინ $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$ ინტეგრალი $\partial\Omega$ ზედაპირზე გამავალი სითბოს ნაკადია და ეს ნაკადი ნულის ტოლია.

ვთქვათ, $B_{\xi}^{\varepsilon_1} \subset B_{\xi}^{\varepsilon_2} \subset \Omega$. გამოვიყენოთ $E(\cdot,\xi)$ ფუნქციისთვის $(3.1.10)$ ტოლობა $B_{\xi}^{\varepsilon_2} \setminus B_{\xi}^{\varepsilon_1}$ არეში, მაშინ

$$\int_{S_{\xi}^{\varepsilon_1}} \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu}dS_x = \int_{S_{\xi}^{\varepsilon_2}} \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \nu}dS_x ,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $E(\cdot,\xi)$ ფუნქციით გამოწვეული სითბოს ნაკადი ნებისმიერ სფეროზე ცენტრით ξ-ში მუდმივია.

თეორემა 3.1.2 (საშუალო მნიშვნელობა სფეროზე). *თუ* u *ფუნქცია ჰარმონიულია* $B_{\xi}^{R} \subset R^n$, $n \geq 2$, *ბირთვში და უწყვეტია* $\overline{B}_{\xi}^{R}$ *-ში, მაშინ*

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S_{\xi}^{R}} u dS_x . \tag{3.1.11}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\rho < R$. გამოვიყენოთ C^2 კლასის ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენის $(3.1.9)$ ფორმულა და გავითვალისწინოთ u ფუნქციის ჰარმონიულობა, მაშინ

$$u(\xi) = \int_{B_{\xi}^{\rho}} E(x,\xi)\Delta u(x)dx + \int_{S_{\xi}^{\rho}}\left(u\frac{\partial E}{\partial \nu} - E\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS_x = \int_{S_{\xi}^{\rho}}\left(u\frac{\partial E}{\partial \nu} - E\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS_x .$$

მაგრამ, რადგან S_{ξ}^{ρ} -ზე

$$|x-\xi| = \rho \qquad \text{და} \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \rho} ,$$

ამიტომ

$$E\Big|_{S_{\xi}^{\rho}} = \text{const} \quad \text{და} \quad \frac{\partial E}{\partial \nu}\Big|_{S_{\xi}^{\rho}} = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} .$$

ამდენად, $(3.1.10)$-ის თანახმად,

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}}\int_{S_{\xi}^{\rho}} u(x)dS_x , \tag{3.1.12}$$

საიდანაც ზღვარზე ($\rho \to R$) გადასვლის შემდეგ მივიღებთ $(3.1.11)$ ფორმულას.

თეორემა 3.1.3 (საშუალო მნიშვნელობა ბირთვში). *თუ* u *ფუნქცია ჰარმონიულია* $B_{\xi}^{R} \subset R^n$, $n \geq 2$, *ბირთვში და უწყვეტია* $\overline{B}_{\xi}^{R}$ *-ში, მაშინ*

$$u(\xi) = \frac{1}{\kappa_n R^n}\int_{B_{\xi}^{R}} u(x)dx , \tag{3.1.13}$$

სადაც

$$\kappa_n = \frac{\omega_n}{n}$$

არის ერთეულოვანი ბირთვის მოცულობა R^n სივრცეში (შევნიშნოთ, რომ $\kappa_n R^n$ გამოსახავს R რადიუსიანი ბირთვის მოცულობას).

დამტკიცება. განვიხილოთ ისევ $\rho < R$. გავამრავლოთ (3.1.12) ფორმულის ორივე მხარე $\omega_n \rho^{n-1}$-ზე და ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა ρ-ს მიმართ 0-დან R-მდე:

$$\int_0^R \omega_n \rho^{n-1} u(\xi) d\rho = \int_0^R \int_{S_\xi^\rho} u(x) dS d\rho. \tag{3.1.14}$$

მაგრამ

$$\int_0^R \omega_n \rho^{n-1} u(\xi) d\rho = u(\xi) \int_0^R \omega_n \rho^{n-1} d\rho = u(\xi) \kappa_n R^n, \tag{3.1.15}$$

$$\int_0^R \int_{S_\xi^\rho} u(x) dS d\rho = \int_{B_\xi^R} u(x) dx. \tag{3.1.16}$$

თუ (3.1.15)-სა და (3.1.16)-ს ჩავსვამთ (3.1.14)-ში, $\kappa_n R^n$-ზე ტოლობის ორივე მხარის გაყოფის შემდეგ მივიღებთ (3.1.13) ტოლობას.

3.1.4. ჰარმონიული ფუნქციისთვის მაქსიმუმის პრინციპი გამომდინარეობს ჰოპფის თეორემიდან და მისი შედეგებიდან: ვთქვათ, $\Omega \subset R^n$ შემოსაზღვრული არეა, u ფუნქცია ჰარმონიულია Ω არეში და უწყვეტია $\overline{\Omega}$-ზე, მაშინ ნებისმიერი $x \in \overline{\Omega}$-სთვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს

$$\min_{\partial\Omega} u(x) \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u(x).$$

ამასთან, თუ მოიძებნა ისეთი $\xi \in \Omega$, რომ u ფუნქცია ამ წერტილში იღებს ლოკალურ მინიმუმს ან მაქსიმუმს, მაშინ

$$u(x) \equiv \text{const}.$$

ეს პრინციპი ბირთვისთვის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით უშუალოდაც ადვილად მტკიცდება.

ცხადია, ზარემბა-ჟიროს თეორემა ვრცელდება ჰარმონიულ ფუნქციებზეც, როგორც კერძო შემთხვევაზე.