ლექცია 4

2.7. ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები ელიფსური განტოლებებისთვის, მათი ამოხსნადობა, ერთადერთობა, მდგრადობა. კოში-კოვალევსკაიას თეორემა

ვთქვათ, ახლა (2.3.1) ელიფსური განტოლებაა $\Omega \subset R^n$ არეში.

ამოცანა 2.7.1. ვიპოვოთ $u \in C^2(\Omega) \bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.3.1) განტოლებას Ω არეში და, თუ $\Omega \in C^1$ და $u(x)$-ს $\partial\Omega$ საზღვრის ყოველ წერტილში აქვს წარმოებული l მიმართულებით,

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial l} + \beta u = \varphi$$

პირობას $\partial\Omega$-ზე, სადაც α, β, φ $\partial\Omega$-ზე მოცემული ფუნქციებია და

$$|\alpha| + |\beta| > 0 .$$

კერძო შემთხვევებს ეწოდება:

ა) თუ $\alpha = 0$, $\beta = 1$, – დირიხლეს*) ან პირველი სასაზღვრო ამოცანა (ცხადია, ამ შემთხვევაში Ω არის საზღვრის სიგლუვის მოთხოვნა აუცილებელი არ არის);

ბ) თუ $\alpha = 1$, $\beta = 0$ და l მიმართულება ემთხვევა $\tilde{\nu}$ კონორმალის მიმართულებას, რომლის მიმმართველი კოსინუსებია $\tilde{\nu}_k := a^{-1} A^{kl} \nu_l$, $\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ შიგა ერთეულოვანი ნორმალია, ე. ი., $\tilde{\nu} = a^{-1} A \nu$, სადაც $A := \left\| A^{ij} \right\|$, $a^2 := \sum_{i=1}^{n} \left(A^{ij} \nu_j \right)^2$, – ნოიმანის**) ან მეორე სასაზღვრო ამოცანა;

გ) თუ $\alpha > 0$, $\cos(l, \nu) \geq c > 0$, $c = \text{const}$, $\partial\Omega$-ზე – დახრილ წარმოებულიანი, ან მესამე სასაზღვრო ამოცანა;

დ) თუ ამ პირობათაგან საზღვრის სხვადასხვა ნაწილზე სხვადასხვაა მოცემული, – შერეული სასაზღვრო ამოცანა.

განვიხილოთ უფრო ზოგადი ამოცანა.

ამოცანა 2.7.2. ვიპოვოთ $u \in C^2(\Omega)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.3.1) განტოლებას და შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0 \in \partial\Omega} \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} = \varphi(x_0), \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k .$$

ამ ამოცანას უწოდებენ ზოგად სასაზღვრო ამოცანას ან კიდევ V ამოცანას.

შევნიშნოთ, რომ პიკარის***) თეორემის თანახმად ანალიზურკოეფიციენტიანი ელიფსური განტოლების ამონახსნი C^2 კლასიდან ანალიზურიც არის და ამდენად ზემოაღნიშნულ სასაზღვრო პირობას აზრი აქვს.

თეორემა 2.7.3. თუ (2.3.1) განტოლების კოეფიციენტები შემოსაზღვრულია Ω-ში და $\det\left\| A^{ij} \right\|$ დისკრიმინანტს Ω არის შიგნით აქვს დადებითი ქვედა ზღვარი, $u \in C^2(\Omega) \bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$ და $C \leq 0$, მაშინ დირიხლეს ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი

---

*) პ. გ. ლ. დირიხლე (1805 – 1859) – გერმანელი მათემატიკოსი

**) ფ. ე. ნოიმანი (1798 – 1895) – გერმანელი ფიზიკოსი

***) შ. ე. პიკარი (1856 – 1941) – ფრანგი მათემატიკოსი

აქვს.

დამტკიცება. მართლაც, თუ u_1 და u_2 დირიხლეს ამოცანის ორი შესაძლო ამონახსნია, მაშინ მათი სხვაობა $u_1-u_2=:u\in C^2(\Omega)\bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$ და

$$Lu=0,\ \ x\in\Omega,$$
$$u=0,\ \ x\in\partial\Omega. \qquad (2.7.1)$$

რადგან ამ შემთხვევაში, (2.3.1) განტოლების სიწრფივის გამო, ამონახსნთა სხვაობისთვის $f\equiv 0$, ჰოპფის თეორემის თანახმად, $|u(x)|<\max\limits_{x\in\partial\Omega}|u(x)|$ Ω-ში და ამდენად, თუ გავითვალისწინებთ (2.7.1)-ს, $|u|\equiv 0$ Ω-ში.

თეორემა 2.7.4. თუ (2.3.1) განტოლების კოეფიციენტები შემოსაზღვრულია შემოსაზღვრულ $\Omega\in A^{(1,\lambda)}$ არის ჩაკეტვაზე, $u\in C^2(\Omega)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\det\left\|A^{ij}\right\|$ დისკრიმინანტს არის $\overline{\Omega}$ ჩაკეტვაზე აქვს დადებითი ქვედა ზღვარი და $C\le 0$, $\beta\le 0$, ამასთან $|C|+|\beta|>0$, მაშინ მეორე (ბ) და მესამე (გ) სასაზღვრო ამოცანებს აქვთ ერთადერთი ამონახსნი.

დამტკიცება. u სხვაობისთვის ადგილი ექნება

$$Lu=0,\ \ x\in\Omega,\ \ \alpha\frac{\partial u}{\partial l}+\beta u=0,\ \ x\in\partial\Omega, \qquad (2.7.2)$$

ტოლობებს, რადგან $u\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, ამიტომ, თუ $u\not\equiv\text{const}$, ამონახსნი უარყოფით მინიმუმს (დადებით მაქსიმუმს), ჰოპფის თეორემის ძალით, მხოლოდ საზღვარზე*) მიაღწევს; მაგრამ მაშინ, ზარემბა-ჟიროს თეორემის თანახმად,

$$\frac{\partial u}{\partial l}>0(<0)$$

და აქედან გამომდინარე

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial l}+\beta u>0(<0),$$

რაც (2.7.2) სასაზღვრო პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, $u\equiv const=0$, რადგან არანულოვანი მუდმივი არ დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას, თუ $\beta<0$, ან განტოლებას, თუ $C<0$. შევნიშნოთ, რომ, თუ $C\equiv 0$, $\beta\equiv 0$, მაშინ მეორე და მესამე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები განისაზღვრებიან მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

შენიშვნა 2.7.5. წინა თეორემები ძალაში რჩება შემოუსაზღვრავი არისთვის, თუ დამატებით სრულდება

$$\lim_{|x|\to+\infty}u(x)=0.$$

ადგილი აქვს არსებობის შემდეგ თეორემას (ის მტკიცდება ე. წ. ფუნდამენტური ამონახსნების გამოყენებით ინტეგრალურ განტოლებებზე დაყვანით):

თეორემა 2.7.6. თუ L ელიფსური ოპერატორია $\Omega\in C^{(1,\lambda)}$ არეში,

$$A^{ij}\in C^{(1,\lambda)}(\overline{\Omega}),\ \ B^i,C\in C^{(0,\lambda)}(\overline{\Omega});$$

გარდა ამისა, $f\in C^{(0,\lambda)}(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, $\varphi\in C(\partial\Omega)$ და $C\le 0$ Ω-ში, მაშინ დირიხლეს ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თუ უკანასკნელი პირობა დარღვეულია და

*) რადგან $u\not\equiv\text{const}$, ამიტომ საზღვარზე ერთ-ერთ მათგანს მაინც მიაღწევს.

$\varphi \equiv 0$, მაშინ სამართლიანია ფრედჰოლმის*) ალტერნატივა, ე. ი., თუ ამოცანას, როცა $f \equiv 0$, აქვს მხოლოდ ტრივიალური (ნულოვანი) ამონახსნი, მაშინ, როცა $f \not\equiv 0$, ამოცანა ცალსახად ამოხსნადი იქნება.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა (2.1.1) სისტემას შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე

$$\frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial x_n^{m_i}} = f_i\left(x, \cdots, \overset{k}{P}{}_{\alpha}^{j}, \cdots\right), \quad i = \overline{1,N} \quad (k = 0,1,\cdots, \quad j = \overline{1,N}) \tag{2.7.3}$$

სადაც $\overset{k}{P}{}_{\alpha}^{j}$, $j = \overline{1,N}$, გამოსახულებაში $\alpha_n < m_j$, $k = |\alpha| \le m_j$ (თუ განმეორებულ ინდექსებიდან ერთ-ერთს ხაზი აქვს ქვემოდან გასმული, მაშინ მის მიმართ ჯამვა არ ხდება) **).

დავსვათ შემდეგი ამოცანა: *ვიპოვოთ* $u_1(x), \ldots, u_N(x)$ *ფუნქციები, რომლებიც* x_n^0*-თან საკმარისად ახლო* x_n*-ებისთვის აკმაყოფილებენ (2.7.3) სისტემას, ხოლო როცა* $x_n = x_n^0$*, შემდეგ საწყის პირობებს*

$$\frac{\partial^l u_i}{\partial x_n^l} = \varphi_{il}(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad i = \overline{1,N}, \quad l = \overline{0, m_i - 1}. \tag{2.7.4}$$

ამ ამოცანას *კოშის ამოცანას* უწოდებენ.

კოში-კოვალევსკაიას თეორემა 2.7.7. ვთქვათ, φ_{il} საწყისი მონაცემები ანალიზურია რაიმე $\left(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0\right)$ წერტილის მიდამოში, ხოლო f_i ფუნქციები ანალიზურია

$$\left(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0, \ldots, \left.\frac{\partial^{k-\alpha_n} \varphi_{j\alpha_n}(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}\right|_{x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0}, \ldots\right)$$

არგუმენტების მნიშვნელობათა მიდამოში. მაშინ არსებობს (2.7.3), (2.7.4) კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $\overset{0}{x} := (x_1^0, \ldots, x_n^0)$-ის რაიმე მიდამოში, სადაც ის ანალიზურია x-ის მიმართ.

როგორც ვხედავთ, ამოცანის და თეორემის ფორმულირებაში არსად არ ფიგურირებს სისტემის ტიპი, ე. ი., კოში-კოვალევსკაიას თეორემა სამართლიანია (2.7.3) სისტემის ტიპის მიუხედავად. ხაზი გავუსვათ იმ ფაქტსაც, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში ამოცანა ლოკალურადაა ამოხსნილი ($x_n = x_n^0$ ჰიპერსიბრტყის საკმარისად მცირე მიდამოში).

კოში-კოვალევსკაიას თეორემა ამტკიცებს მხოლოდ ლოკალური ანალიზური ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას და არ იძლევა პასუხს იმაზე, აქვს თუ არა დასმულ ამოცანას არაანალიზური ამონახსნიც, რაც ამონახსნების უფრო ფართო კლასში

---

*) ე. ი. ფრედჰოლმი (1866 – 1927) – შვედი მათემატიკოსი

**) სხვა სიტყვებით, f_i, $i = \overline{1,N}$, ნამდვილი ფუნქციები, საზოგადოდ, დამოკიდებულია $x_1, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელ ცვლადებზე, უცნობ u_j, $j = \overline{1,N}$, ფუნქციებზე და მათ წარმოებულებზე $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ m_j რიგამდე, ამასთან x_n-ის მიმართ წარმოებულის რიგი არ უნდა აღემატებოდეს $(m_j - 1)$-ს

ერთადერთობის დარღვევის ტოლფასი იქნებოდა. ამაზე პასუხს იძლევა *ჰოლმგრენის თეორემა*, რომელიც, *საზოგადოდ, არაანალიზური მონაცემების პირობებში ამტკიცებს, საზოგადოდ არაანალიზური ამონახსნის ლოკალურად არსებობას და ერთადერთობას.*

ყველა სასაზღვრო, საწყისი თუ შერეული ამოცანა ზოგადად ოპერატორულად შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ: *რაიმე X ფუნქციონალურ კლასში* (*სივრცეში*) *ვეძებთ*

$$Eu = g \tag{2.7.5}$$

განტოლების რაიმე აზრით u ამონახსნს Ω არეში, რომელიც Ω არის საზღვარზე ან მის ნაწილზე რაიმე აზრით აკმაყოფილებს

$$Bu\big|_{\Gamma} = f \tag{2.7.6}$$

დამატებით პირობას.

(2.7.5), (2.7.6) *ამოცანას კორექტულს* ვუწოდებთ, თუ არსებობს მისი ამონახსნი, იგი ერთადერთია და შესაბამისი სივრცეების აზრით უწყვეტად არის დამოკიდებული g-სა და f-ზე. ეს უკანასკნელი, რასაც *ამონახსნის მდგრადობას* უწოდებენ, იმას ნიშნავს, რომ $\forall \varepsilon > 0$-სთვის $\exists \delta(\varepsilon)$ ისეთი, რომ რაიმე ნორმით

$$\left\| u - \tilde{u} \right\|_{*} < \varepsilon ,$$

როცა რაიმე ნორმებით

$$\left\| g - \tilde{g} \right\|_{**} < \delta \quad \text{და} \quad \left\| f - \tilde{f} \right\|_{***} < \delta ,$$

სადაც $\tilde{u}$-ით აღნიშნულია (2.7.5), (2.7.6) ამოცანის ამონახსნი, როცა g და f შეცვლილია $\tilde{g}$-ითა და $\tilde{f}$-ით.

მოვიყვანოთ არაკორექტულად დასმული ამოცანის მაგალითი.

ადამარის*) მაგალითი. განვიხილოთ $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y \in]0, \infty[$, ნახევარზოლში

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.7.7}$$

ლაპლასის განტოლება შემდეგი სასაზღვრო და საწყისი პირობებით:

$$u\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0; \quad u(x,0) = 0 , \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = e^{-\sqrt{n}} \cos nx . \tag{2.7.8}$$

უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ ამ შერეულ ამოცანის ამონახსნს აქვს

$$u = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny \tag{2.7.9}$$

სახე, სადაც n კენტია. მართლაც, რადგან

$$\operatorname{sh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{ch} y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}, \quad \frac{d\operatorname{sh} y}{dy} = \operatorname{ch} y \quad \text{და} \quad \frac{d\operatorname{ch} y}{dy} = \operatorname{sh} y ,$$

გვექნება, რომ

$$u_{xx} = -ne^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny , \quad u_{yy} = ne^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny ,$$
$$\operatorname{sh}(n \cdot 0) = 0 , \quad \operatorname{ch}(n \cdot 0) = 1;$$

გარდა ამისა,

*) ჟ. ს. ადამარი (1865 – 1963) – ფრანგი მათემატიკოსი

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}n\right)=0,\ \text{როცა}\ n\ \text{კენტია.}$$

აქედან ცხადია, რომ (2.7.9) დააკმაყოფილებს (2.7.7) განტოლებას და (2.7.8) სასაზღვრო პირობებს.

მტკიცდება, რომ (2.7.9) ამონახსნი ერთადერთია. მაგრამ საკმარისად დიდი n-ებისთვის

$$e^{-\sqrt{n}}\cos nx$$

რაგინდ მცირეა, მაშინ, როდესაც (2.7.9) სიდიდე $\mathrm{sh}\,ny$-ის ხარჯზე რაგინდ დიდი ხდება. მართლაც,

$$\lim_{n\to+\infty}e^{-\sqrt{n}}\cos nx=0;$$

$$\lim_{n\to+\infty}=\frac{1}{n}e^{-\sqrt{n}}\,\frac{e^{ny}-e^{-ny}}{2}\cos nx=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}\cdot e^{ny}}{2n}\cos nx=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n(y-\frac{1}{\sqrt{n}})}}{2n}\cos nx=+\infty.$$

ამრიგად, ამოცანის ამონახსნი უწყვეტად არ არის დამოკიდებული საწყის მონაცემზე, ე. ი., ამონახსნი არ არის მდგრადი და ამდენად არც კორექტულადაა დასმული.