# ლექცია 3

## 2.5. მეორე რიგის წრფივ კერძოწარმოებულიან განტოლებათა სისტემის კლასიფიკაცია

თუ ვიგულისხმებთ, რომ (2.3.1)-ში $A^{lm}$, $B^{l}$ და $C$ მოცემული $N$-ური რიგის მატრიცებია, $F:=\left(F_1,\ldots,F_N\right)$ მოცემული, ხოლო $u:=\left(u_1,\ldots,u_N\right)$ საძიებელი ვექტორია, მაშინ მიღებული სისტემა შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$L_i u:=A_{ij}^{lm}u_{j,lm}+B_{ij}^{l}u_{j,l}+C_{ij}u_j=F_i,\ \ i=\overline{1,N}, \tag{2.5.1}$$

სადაც

$$u_{j,lm}:=\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l\partial x_m}=\overset{2}{P}{}_{\alpha}^{j},\ \ j=\overline{1,N},\ \ l,m=\overline{1,n},\ \ \alpha_k=\begin{cases}0, & \text{როცა } k\neq l,\ m;\\ 1, & \text{როცა } k=l \text{ ან } k=m \text{ და } l\neq m;\\ 2, & \text{როცა } k=l=m.\end{cases}$$

ამდენად, ამ შემთხვევაში შემდეგი პირობა [იხ. (2.2.4) და (2.2.2)]

$$K\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right):=\det\sum_{|\alpha|=2}\left\|\frac{\partial L_i u}{\partial \overset{2}{P}{}_{\alpha}^{j}}\right\|\lambda^{\alpha}=\det\left\|A_{ij}^{lm}\right\|\lambda_l\lambda_m=\det\left(A^{lm}\lambda_l\lambda_m\right)\neq 0$$

ნებისმიერი ნამდვილი $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$-სთვის, რომლებიც ერთდროულად ნული არ ხდება, ნიშნავს სისტემის ელიფსურობას.

(2.5.1) სისტემას ეწოდება თანაბრად ელიფსური $\Omega$ არეში, თუ მოიძებნება ისეთი ერთ-ნაირნიშნა $k_0$ და $k_1$ მუდმივები, რომ

$$k_0\left(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^2\right)^N\leq K\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right):=\det\left(A^{lm}(x)\lambda_l\lambda_m\right)\leq k_1\left(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^2\right)^N$$

ყველგან $\Omega$ არეში, ხოლო – *ძლიერ ელიფსური, სომილიანას აზრით*, რაიმე $x\in\Omega$ წერტილში, თუ

$$\left(\vec{\eta}^{\,l},A^{lm}\vec{\eta}^{\,m}\right)>0, \tag{2.5.2}$$

სადაც $\vec{\eta}^{\,l}$-ები ნებისმიერი $N$-განზომილებიანი ნამდვილი ვექტორებია, რომლებიც ერთდრო-ულად ნული არ ხდება. ძლიერ ელიფსურობის ცნება მეორე რიგის სისტემებისთვის შემოღებულია სომილიანას მიერ, ხოლო მაღალი რიგის სისტემებისთვის მ. ვ. ვიშიკის მიერ. ადვილი დასანახია, რომ ძლიერ ელიფსური სისტემა ელიფსურია. მართლაც, თუ განვიხილავთ კერძო შემთხვევას, როცა $\eta_i^l=\lambda_l\mu_i$, ძლიერ ელიფსურობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\vec{\eta}^{\,l},A^{lm}\vec{\eta}^{\,m}\right)=A_{ij}^{lm}\eta_i^l\eta_j^m=A_{ij}^{lm}\lambda_l\lambda_m\mu_i\mu_j>0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $A^{lm}\lambda_l\lambda_m$ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია. ამისთვის კი, როგორც ალგებრიდანაა ცნობილი, სილვესტრის თეორემის თანახმად, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $A^{lm}\lambda_l\lambda_m$ მატრიცის ყველა მთავარი მინორი, ე. ი.,

$$\det\left(A^{lm}\lambda_l\lambda_m\right)\text{-იც}$$

მკაცრად დადებითი იყოს. ამდენად,

$$\det\left(A^{lm}\lambda_l\lambda_m\right)\neq 0,$$

რაც განმარტების თანახმად (2.5.1) სისტემის ელიფსურობას ნიშნავს. თუ სისტემა ძლიერ ელიფსურია ვიშიკის აზრით, $A^{lm}\lambda_l\lambda_m$ მატრიცის ყველა მთავარი მინორი, მათ შორის

შესაბამისი დეტერმინანტიც, ყველა დადებითია (თუ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია) ან კენტი რიგის მთავარი მინორები უარყოფითია, ლუწი რიგისა კი – დადებითი (თუ მატრიცა უარყოფითადაა განსაზღვრული). ეს მაშინ, როცა ელიფსურობის განმარტება მხოლოდ დასაშვები უმაღლესი რიგის მთავარი მინორის, ე. ი., $A^{lm}\lambda_l\lambda_m$ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის, დადებითობას ან უარყოფითობას ნიშნავს.

მეორე რიგის წრფივი სისტემის შემთხვევაში ვიშიკის

$$A_{ij}^{lm}\lambda_l\lambda_m\mu_i\mu_j > 0$$

და სომილიანას

$$A_{ij}^{lm}\eta_i^l\eta_j^m > 0$$

აზრით ძლიერი ელიფსურობის ცნებების შედარებისას ვნახავთ, რომ, თუ შემოვიღებთ

$$\eta_i^l := \lambda_l\mu_i$$

აღნიშვნას, მაშინ ისინი ერთმანეთს დაემთხვევიან. ამრიგად, თუ სრულდება სომილიანას პირობა, მაშინ შესრულდება ვიშიკის პირობაც. პირიქით კი – მხოლოდ კერძო $\eta_i^l$-სთვის. რაც იმას ნიშნავს, რომ ძლიერ ელიფსურობა სომილიანას აზრით უფრო ძლიერი მოთხოვნაა, ვიდრე ძლიერ ელიფსურობა ვიშიკის აზრით.

## 2.6. ექსტრემუმისა და ზარემბა*)-ჟიროს**) პრინციპები

**ექსტრემუმის პრინციპი 2.6.1**. თუ (2.3.1) განტოლება ელიფსურია $\Omega$ არეში, ამონახსნი $u \in C^2(\Omega)$ და იგივურად მუდმივი არ არის, გარდა ამისა, ან $C(x) < 0$, $F(x) \le 0$ (შესაბამისად $F(x) \ge 0$), ან $C(x) \le 0$, $F(x) < 0$ (შესაბამისად $F(x) > 0$), მაშინ $\Omega$ არის არცერთ წერტილში ამონახსნი ვერ მიაღწევს უარყოფით ფარდობით მინიმუმს (შესაბამისად დადებით ფარდობით მაქსიმუმს).

**შენიშვნა 2.6.2**. აქ ექსტრემუმის ფარდობითობა (პირობითობა) იმაში გამოიხატება, რომ ვეძებთ მინიმუმს იმ პირობით, რომ ის უარყოფითია და მაქსიმუმს იმ პირობით, რომ ის დადებითია. ე. ი., ვეძებთ $u(x)$, $x \in \Omega$, ფუნქციის ექსტრემუმს იმ პირობით, რომ $u\left(\overset{0}{x}\right) < 0$, $\overset{0}{x} \in \Omega$, მინიმუმის შემთხვევაში და $u\left(\overset{0}{x}\right) > 0$, $\overset{0}{x} \in \Omega$, მაქსიმუმის შემთხვევაში, სადაც $\overset{0}{x}$ ექსტრემუმის წერტილია.

**დამტკიცება**. ვთქვათ, $\overset{0}{x} \in \Omega$ წერტილში აღწევს უარყოფით ფარდობით მინიმუმს. მაშინ

$$u_{,i}\left(\overset{0}{x}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.6.1}$$

და

---

*) ს. ზარემბა (1863 – 1942) – პოლონელი მათემატიკოსი

**) ჟ. ჟირო (1889 – 1943) – ფრანგი მათემატიკოსი

$$u_{,ij}\left(\overset{0}{x}\right)\lambda_i\lambda_j \geq 0\,^{*)}. \qquad (2.6.2)$$

განსახილველი განტოლების $\Omega$ არეში ელიფსურობის გამო, ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ (2.3.2) ფორმა დადებითად განსაზღვრულია [წინააღმდეგ შემთხვევაში (2.3.1)-ის ორივე მხარეს გავამრავლებთ (-1)-ზე]. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overset{0}{x}$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი არაგადაგვარებული

$$\mu_k = g_{ks}\lambda_s\,,\quad k = 1,\ldots,n\,,$$

წრფივი გარდაქმნა, რომელიც (2.3.2) ფორმას დაიყვანს კანონიკურ სახეზე. ე. ი.,

$$A^{ij}\left(\overset{0}{x}\right)\lambda_i\lambda_j = \mu_k\mu_k = g_{ki}\lambda_i g_{kj}\lambda_j = g_{ki}g_{kj}\lambda_i\lambda_j\,. \qquad (2.6.3)$$

(2.6.3)-დან ადვილად დავასკვნით, რომ

$$A^{ij}\left(\overset{0}{x}\right) = g_{ki}g_{kj}\,. \qquad (2.6.4)$$

(2.6.2)-ის თანახმად, ყოველი ფიქსირებული $k$-სთვის

$$u_{,ij}\left(\overset{0}{x}\right)g_{\underline{k}\,i}g_{kj} \geq 0$$

(ინდექსის ქვეშ ხაზი ნიშნავს იმას, რომ ამ ინდექსის მიმართ აჯამვა არ ხდება) და აქედან გამომდინარე $k$-ს მიმართ 1-დან $n$-მდე ჯამიც, ე. ი.,

$$u_{,ij}\left(\overset{0}{x}\right)g_{ki}g_{kj} \geq 0\,.$$

ამდენად, (2.6.4)-ის თანახმად,

$$A^{ij}\left(\overset{0}{x}\right)u_{,ij}\left(\overset{0}{x}\right) = u_{,ij}\left(\overset{0}{x}\right)g_{ki}g_{kj} \geq 0\,. \qquad (2.6.5)$$

(2.3.1), (2.6.1), (2.6.5)-დან, რადგან პირობის თანახმად $C(x) < 0$ ან $C(x) \leq 0$, გამომდინარეობს, რომ $Lu\left(\overset{0}{x}\right) > 0$ ან შესაბამისად $Lu\left(\overset{0}{x}\right) \geq 0$, რაც ეწინააღმდეგება იმას, რომ $Lu\left(\overset{0}{x}\right) = F(x) \leq 0$ ან შესაბამისად $Lu\left(\overset{0}{x}\right) = F(x) < 0$.

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ დადებითი მაქსიმუმის შემთხვევა, იმის გათვალისწინებით, რომ ამ შემთხვევაში (2.6.2)-ის ნაცვლად გვექნება

$$u_{,ij}\left(\overset{0}{x}\right)\lambda_i\lambda_j \leq 0$$

უტოლობა.

ჰოპფმა**) დაამტკიცა უფრო ზოგადი თეორემა.

---

*) რადგან მარცხენა მხარეში კვადრატული ფორმის უარყოფითად განსაზღვრულობა ან ნიშანცვლადობა გამორიცხულია [წინააღმდეგ შემთხვევაში შესრულდებოდა შესაბამისად ფუნქციის მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობა ან ექსტრემუმის არარსებობის პირობა, ჩვენ კი დავუშვით მინიმუმის არსებობა, ე. ი., რჩება კვადრატული ფორმის არაუარყოფითობა (დადებითობა)]

**) ე. ჰოპფი (1902 – 1983) – გერმანელი მათემატიკოსი

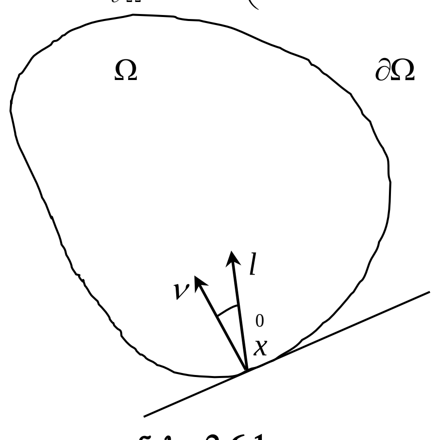
**ჰოპფის თეორემა 2.6.3**. ვთქვათ, (2.3.1) განტოლების კოეფიციენტები შემოსაზღვრულია $\Omega$ არეში*) და $\det\left\|A^{ij}\right\|$ დისკრიმინანტს $\Omega$ არის შიგნით*) აქვს დადებითი ქვედა ზღვარი. თუ $\Omega$ არეში $C \le 0$, $F \le 0$ (ან შესაბამისად $F \ge 0$), მაშინ (2.3.1) განტოლების არც ერთი რეგულარული ამონახსნი [ე. ი., $u \in C^2(\Omega)$] $\Omega$ არის შიგა $\overset{0}{x}$ წერტილში ვერ მიაღწევს უარყოფით ფარდობით მინიმუმს (შესაბამისად დადებით ფარდობით მაქსიმუმს), გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ის მუდმივია $\overset{0}{x}$-ის შემცველ ნებისმიერ არეში, სადაც

$$u(x) \ge u\left(\overset{0}{x}\right) \quad \left(\text{შესაბამისად } u(x) \le u\left(\overset{0}{x}\right)\right).$$

ადგილი აქვს შემდეგ პრინციპს:

**ზარემბა-ჟიროს თეორემა 2.6.4**. ვთქვათ, (2.3.1) განტოლების კოეფიციენტები შემოსაზღვრულია შემოსაზღვრული არის $\overline{\Omega}$ ჩაკეტვაზე, რომელიც $A^{(1,\lambda)}$ კლასისაა (ეს იმას ნიშნავს, რომ $\Omega$ არის საზღვრის პარამეტრულ წარმოდგენაში შემავალი ფუნქციების პირველი რიგის წარმოებულები აკმაყოფილებენ ჰიოლდერის**) პირობას $\lambda \in ]0,1]$ მაჩვენებლით), $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ (2.3.1) განტოლების რეგულარული ამონახსნია და იგი იგივურად მუდმივი არაა. გარდა ამისა, ვთქვათ, $\det\left\|A^{ij}\right\|$ დისკრიმინანტს არის $\overline{\Omega}$ ჩაკეტვაზე აქვს დადებითი ქვედა ზღვარი. თუ $C \le 0$, $F \le 0$ (ან შესაბამისად $F \ge 0$),

$$\min_{\partial\Omega} u \le 0 \quad \left(\text{შესაბამისად } \max_{\partial\Omega} u \ge 0\right),$$




**ნახ. 2.6.1**

მაშინ ყოველ $\overset{0}{x} \in \partial\Omega$ წერტილისთვის, სადაც $u$ მინიმუმს (მაქსიმუმს) აღწევს და ყოველი $l$ სხივისთვის, რომლისთვისაც $\cos(l,\nu) > 0$***) ($\nu$ $\partial\Omega$-ს შიგა ნორმალია) ადგილი აქვს

$$\frac{\partial u\left(\overset{0}{x}\right)}{\partial l} > 0 \quad \left(\text{შესაბამისად } \frac{\partial u\left(\overset{0}{x}\right)}{\partial l} < 0\right)$$

უტოლობას.

---

*) ე. ი., $\Omega$ არის ნებისმიერი ქვეარის ჩაკეტვაზე

**) ლ. ო. ჰიოლდერი (1859 – 1937) – გერმანელი მათემატიკოსი

***) ეს პირობა იმას ნიშნავს, რომ $l$ სხივს არ შეიძლება ჰქონდეს $\partial\Omega$ საზღვრის მხები მიმართულება და, რადგან $\nu$ შიგა ნორმალია, $l$ სხივი არის შიგნითაა მიმართული (იხ. ნახ. 2.6.1).

თუ ჰოპფის თეორემის პირობებში დამატებით ვიგულისხმებთ, რომ $F(x) \equiv 0$ და $u \in C(\overline{\Omega})$, მაშინ, ამ თეორემის თანახმად, როცა $u$ იგივურად მუდმივი არაა, $\Omega$ არეში

$$|u(x)| < \max_{\partial\Omega} |u(x)| .$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $|u|$ მაქსიმუმს აღწევს $\Omega$-ს რაიმე წერტილში, მაშინ, როცა იქ $u$ დადებითია, გამოვა, რომ $u$ აღწევს დადებით მაქსიმუმს არის შიგნით, ხოლო თუ უარყოფითია, – უარყოფით მინიმუმს, რაც არ შეიძლება მოხდეს ჰოპფის თეორემის თანახმად. ამავე პირობებში, რადგან ერთი მხრივ არის $\overline{\Omega}$ ჩაკეტვაზე უწყვეტი ფუნქცია იქ თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობას აღწევს, ხოლო მეორე მხრივ $|u(x)|$ თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას $\Omega$-ში ვერ იღებს, ის მაქსიმუმს $\partial\Omega$ საზღვარზე მიაღწევს, ე.ი.,

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{\partial\Omega} |u(x)| .$$

ცხადია, ამ უკანასკნელს ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $u \equiv const$. თუ ამასთან $C(x) \equiv 0$, მაშინ ჰოპფის თეორემიდან გამომდინარე შეგვიძლია, ამოვიღოთ სიტყვები "უარყოფითი" და "დადებითი" და ამდენად $\Omega$ არეში ვიღებთ

$$\min_{\partial\Omega} u(x) < u(x) < \max_{\partial\Omega} u(x)$$

შეფასებებს. ეს უკანასკნელი იქიდან გამომდინარეობს, რომ რადგან $C \equiv 0$, $u$-სთან ერთად (2.3.1) განტოლების ამონახსნია $u + \mathrm{const}$-იც. მართლაც, თუ

$$M := \max_{\overline{\Omega}} |u| ,$$

მაშინ

$$\left.\begin{aligned} &\Omega\text{-ში } u + M > 0 \Rightarrow \Omega\text{-ში } u + M < \max_{\partial\Omega}(u+M) \Rightarrow u + M < \max_{\partial\Omega} u + M \Rightarrow u < \max_{\partial\Omega} u \\ &\Omega\text{-ში } u - M < 0 \Rightarrow \Omega\text{-ში } u - M > \min_{\partial\Omega}(u-M) \Rightarrow u - M > \min_{\partial\Omega} u - M \Rightarrow u > \min_{\partial\Omega} u \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \quad \Omega\text{-ში}.$$

ცხადია, (2.4.24) – (2.4.26) განტოლებებისთვის ჰოპფის თეორემა სამართლიანია, ხოლო ზარემბა-ჟიროს პრინციპი დაზუსტებას მოითხოვს.

ექსტრემუმის პრინციპი ელიფსური განტოლებებისთვის არსებითად განსხვავდება ექს-ტრემუმის პრინციპისგან პარაბოლური და ჰიპერბოლური განტოლებებისთვის. ამის სა-ილუსტრაციოდ განვიხილოთ ზოგიერთი პარაბოლური და ჰიპერბოლური განტოლების შემთხვევაც.

განვიხილოთ შემდეგი პარაბოლური განტოლება

$$A^{ij}u_{,ij} + B^{i}u_{,i} + C(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = F ,$$

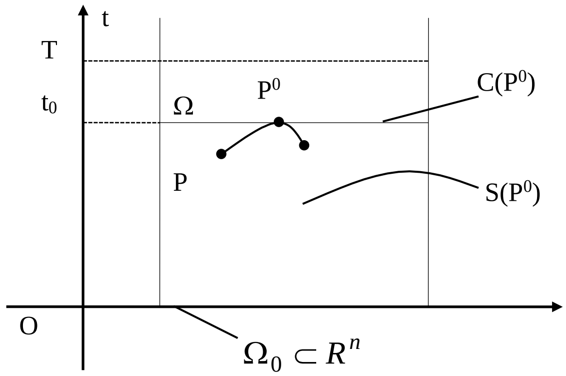
სადაც სივრცითი ცვლადების მიმართ ოპერატორი ელიფსურია, ე. ი.,

$$A^{ij}\xi_i\xi_i > 0, \;\; \vec{\xi} \neq 0 ,$$

$A^{ij}, B^{i}, C$ შემოსაზღვრულია და

$$C(x,t) \leq 0 \quad \Omega\text{-ში},$$

ხოლო $u \in C^2(\Omega_0) \bigcap C^1([0,T])$, სადაც $\Omega$ არის არე, შემოსაზღვრული $t=0$ და $t=T$ ჰიპერსიბრტყეებით და $t$ ღერძის პარალელური ცილინდრული ზედაპირით; $\Omega_0 := \overline{\Omega} \bigcap \{t=0\}$. $C(P^0) := \Omega \bigcap \{t=t_0\}$ (იხ. ნახ. 2.6.2).




ნახ. 2.6.2

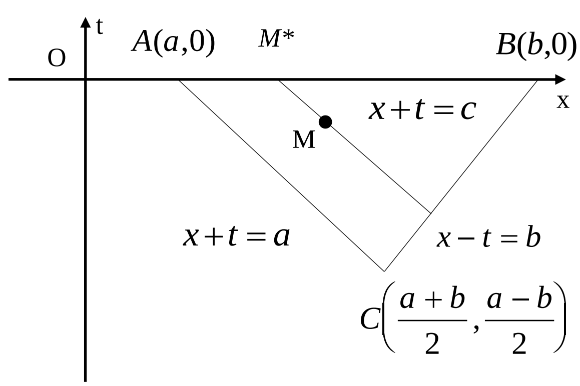
**თეორემა 2.6.5.** თუ $F \geq 0$ (შესაბამისად $F \leq 0$) $\Omega$-ში და $P^0 \in \Omega$ წერტილში აღწევს დადებით ფარდობით მაქსიმუმს (შესაბამისად უარყოფით ფარდობით მინიმუმს), მაშინ $u(P) = u(P^0)$ ყველა $P \in S(P^0)$ წერტილში, სადაც $S(P^0)$ არის $\Omega$ არის ყველა ისეთ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც შეიძლება დავაკავშიროთ $P^0$ წერტილთან $\Omega$-ში მდებარე ისეთი უწყვეტი წირით, რომლის გასწვრივაც $t$ კოორდინატი არ მცირდება $P$-დან $P^0$-სკენ მოძრაობის დროს.

ამრიგად, ამონახსნი ექსტრემუმს აღწევს $\partial\Omega \setminus \{t=T\}$ სიმრავლეზე, თუ $u \in C(\overline{\Omega})$.

თუ $F(x) \equiv 0$ და $C \equiv 0$, მაშინ, $u$-სთან ერთად, ცხადია, $u + const$-იც ამონახსნია. ამიტომ უკანასკნელი დასკვნა ძალაში დარჩება არადადებითი მაქსიმუმისთვისაც (შესაბამისად არაუარყოფითი მინიმუმისთვისაც), რადგან ადიტიური მუდმივის, ე. ი., მუდმივი შესაკრების სათანადოდ შერჩევით, ელიფსური განტოლების შემთხვევის მსგავსად, დავალთ უკვე განხილულ შემთხვევაზე.

ახლა განვიხილოთ $\Omega \equiv ABC$ სამკუთხედში (იხ. ნახ. 2.6.3) შემდეგი უმარტივესი ჰიპერბოლური განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \qquad (2.6.6)$$




ნახ. 2.6.3

მის მახასიათებელ განტოლებას აქვს
$$dt^2 - dx^2 = 0$$
სახე, საიდანაც
$$\pm dt = dx$$
და ინტეგრებით მივიღებთ, რომ
$$\pm t = x + \text{const}$$
მახასიათებელი წრფეებია.

$A(a,0)$ და $B(b,0)$ წერტილებზე გამავალ შესაბამისად
$$x+t=a \quad \text{და} \quad x-t=b$$
მახასიათებელი წრფეების თანაკვეთის $C$ წერტილის $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$ კოორდინატებს გვაძლევს
$$x+t=a,$$
$$x-t=b,$$
სისტემის ამონახსნი.

**თეორემა 2.6.6.** (2.6.6) განტოლების $AC$ მახასიათებელზე (ან $BC$ მახასიათებელზე) ქრობადი $\Omega$ (იხ. ნახ. 2.6.3) არეში რეგულარული, ე.ი. $C^2(\Omega)$ კლასის, $u(x,t) \subset C(\overline{\Omega})$ ამონახსნი $\overline{\Omega}$-ზე თავის მაქსიმუმს აღწევს $AB$ მონაკვეთზე.

**დამტკიცება.** შემოვიღოთ ახალი ცვლადები:
$$\xi = x+t, \ \ \eta = x-t\,.$$
მაშინ, რადგან
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
მათი (2.6.6)-ში ჩასმით, გვექნება, რომ
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0\,.$$
ამ უკანასკნელის ინტეგრებით მივიღებთ, რომ
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$$
და
$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x+t) + f_2(x-t)\,, \tag{2.6.7}$$
სადაც $f \in C^1$ და $f_1, f_2 \in C^2$ ნებისმიერი ფუნქციებია. აქედან, თუ განვიხილავთ $AC$-ზე, ე. ი., როცა
$$t = a - x\,,$$
ქრობად ამონახსნს, გამომდინარეობს, რომ
$$u(x, a-x) = f_1(a) + f_2(2x-a) = 0\,.$$
ამისთვის კი, რადგან ეს უკანასკნელი ნებისმიერი $x$-სთვის, $x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, უნდა შესრულდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის
$$f_2(\cdot) \equiv -f_1(a)\,. \tag{2.6.8}$$
ე. ი., (2.6.7)-დან, (2.6.8)-ის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ
$$u(x,t) = f_1(x+t) - f_1(a)\,, \quad f_1 \in C^2\,.$$

ცხადია, $f_1 \in C^2$-ის ნებისმიერობის გამო ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $f_1(a)=0$. ამისათვის საკმარისია $f_1$-ის ნაცვლად განვიხილოთ $f_1(\cdot)-f_1(a)$ ფუნქცია, რომელსაც ისევ $f_1$-ით აღვნიშნავთ. ამდენად,

$$u(x,t)=f_1(x+t),$$

ამასთან $f_1(a)=0.$ აქედან ნათელია, რომ თუ $u$ ფუნქცია $M$ წერტილში (იხ. ნახ. 2.6.3) აღწევს მაქსიმუმს (მინიმუმს), მაშინ ის იმავე მნიშვნელობას მიიღებს $M$ წერტილზე გამავალ $x+t=c$ მახასიათებელ წრფეზე, ე. ი., ამ წრფის $AB$ მონაკვეთთან თანაკვეთის $M^*$ წერტილშიც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ $u(x,t)$ ამონახსნი $\Omega$ არეში იღებს რაიმე მნიშვნელობას, მათ შორის ექსტრემალურს, ის იმავე მნიშვნელობას მიიღებს $AB$ მონაკვეთზეც.

ამრიგად, ექსტრემუმის პრინციპი ელიფსური განტოლებისთვის იზოტროპულია (რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ამონახსნი არის რაიმე შიგა წერტილში აღწევს ექსტრემუმს, მაშინ ის ამ წერტილიდან ყველა მიმართულებით მოძრაობის დროს მუდმივია), ხოლო როგორც პარაბოლური, ასევე ჰიპერბოლური განტოლებებისთვის – ანიზოტროპული (რაც იმას ნიშნავს, რომ ექსტრემუმის წერტილიდან რაიმე გარკვეული მიმართულებით მოძრაობის დროს ის მუდმივია, ხოლო სხვა მიმართულებებით კი შეიძლება მუდმივი არ იყოს).