ლექცია 2

2. კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიკაცია

2.1. კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ცნება

ბუნების მოვლენათა მათემატიკური მოდელების აგებას, როგორც წესი, მივყავართ კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევამდე.

$$\vec{F}\left(x,\ldots,\overset{k}{P}{}_{\alpha}^{j},\ldots\right)=0 \qquad (2.1.1)$$

სახის ვექტორულ ტოლობას, სადაც

$$\vec{F}:=\left(F_1,\ldots,F_N\right)$$

მოცემული $N\geq 1$ განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციაა,

$$x:=\left(x_1,\ldots x_n\right)\in\Omega\subset R^n,\ \ n>1,$$

Ω არეა,

$$\overset{k}{P}{}_{\alpha}^{j}:=\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha:=\left(\alpha_1,\ldots\alpha_n\right)$ მულტიინდექსია, მისი მოდული

$$\left|\alpha\right|:=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k\ ,$$

აქ $0\leq k\leq m$ და $m\geq 1$, α_i-ები იღებენ მთელ არაუარყოფით მნიშვნელობებს, ამასთან j, α და k-ს მნიშვნელობათა სიმრავლეები $\vec{F}$ ვექტორის სხვადასხვა კომპონენტებისთვის, საზოგადოდ, ერთმანეთს არ ემთხვევიან,

$$\vec{u}:=\left(u_1,\ldots,u_M\right),\quad M\geq 1,$$

ეწოდება *კერძოწარმოებულიან N დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა* (ან *კერძოწარმოებულიანი ვექტორული განტოლება*) M რაოდენობის $u_1,\ldots,u_M$ უცნობის მიმართ (ან $\vec{u}$ საძიებელი ვექტორის მიმართ) n დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. თუ $N=M=1$, მაშინ (2.1.1) განტოლება იქცევა ერთუცნობიან ერთ (სკალარულ) განტოლებად.

(2.1.1) სისტემიდან აღებულ განტოლებაში წარმოებულის მაქსიმალურ რიგს ეწოდება ამ *განტოლების* რიგი.

თუ $\vec{u}$-ს აქვს კლასიკური ან განზოგადებული აზრით წარმოებულები საჭირო რიგამდე და იგი (2.1.1) განტოლებას იგივეობად აქცევს, მაშინ მას (2.1.1) განტოლების კლასიკური ან შესაბამისად განზოგადებული ამონახსნი ეწოდება. განზოგადებული ამონახსნი შეიძლება სხვა აზრითაც განიმარტოს [იხ. ქვემოთ განზოგადებული (სუსტი) ამონახსნი ინტეგრალური აზრით].

თუ $\vec{F}$ წრფივადაა დამოკიდებული ყველა $\overset{k}{P}{}_{\alpha}^{j}$-ზე, მაშინ (2.1.1) განტოლებას *წრფივი განტოლება* ეწოდება.

2.2. ტიპებად დაყოფა. მახასიათებელი ზედაპირები

ჩვენ არ შევეხებით (2.1.1) განტოლების ზოგად შემთხვევაში ტიპებად კლასიფიკაციას და განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა $N=M$ და (2.1.1) სისტემაში შემავალი ყველა განტოლების რიგი m-ის ტოლია.

ვიგულისხმოთ, რომ საჭირო რიგამდე წარმოებულები არსებობენ და განვიხილოთ N-ური რიგის

$$\left\| \frac{\partial \overset{m}{F_i}}{\partial P_\alpha^j} \right\|, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{2.2.1}$$

მატრიცები, რომელთა რიცხვს განსაზღვრავს (2.1.1) სისტემაში შემავალი m-ური რიგის წარმოებულების შესაბამისი α მულტიინდექსების რაოდენობა. მათი საშუალებით შევადგინოთ ნამდვილი $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ პარამეტრების მიმართ Nm რიგის

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \det \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{\partial \overset{m}{F_i}}{\partial P_\alpha^j} \right\| \lambda^\alpha = \det \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{\partial \overset{m}{F_i}}{\partial P_\alpha^j} \lambda^\alpha \right\| \tag{2.2.2}$$

ფორმა*) (ერთგვაროვანი ფუნქცია**)), სადაც

$$\lambda^\alpha := \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_1^{\alpha_n}.$$

ვთქვათ, რაიმე $S \subset R^n$ $(n-1)$-განზომილებიანი ჰიპერზედაპირი C^1 კლასისაა და მოცემულია

$$\Phi(x) = 0$$

განტოლებით, სადაც Φ ისეთი ნამდვილი ფუნქციაა, რომ S-ზე

$$\nabla\Phi \neq 0, \quad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

S ჰიპერზედაპირს ეწოდება (2.1.1) სისტების *მახასიათებელი ჰიპერზედაპირი*, თუ მისი ყველა წერტილისთვის

$$\det \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{\partial \overset{m}{F_i}}{\partial P_\alpha^j} \right\| \Phi,_x^\alpha = 0, \tag{2.2.3}$$

სადაც

$$\Phi,_x^\alpha := \Phi,_1^{\alpha_1} \Phi,_2^{\alpha_2} \cdots \Phi,_n^{\alpha_n}$$

და მძიმის შემდეგ მითითებული რიცხვითი ინდექსი შესაბამისი ცვლადით გაწარმოებას ნიშნავს.

(2.2.2) გამოსახულებას ეწოდება (2.1.1) სისტების *მახასიათებელი ფორმა* (*დეტერმინანტი*), ხოლო (2.2.3) განტოლებას – *მახასიათებელი განტოლება*. წრფივ შემთხვევაში (2.2.2) ფორმის კოეფიციენტები მხოლოდ x წერტილზეა დამოკიდებული, ხოლო ზოგად შემთხვევაში გარდა x წერტილისა ისინი დამოკიდებულია აგრეთვე $\vec{u}$ ამონახსნზე და მის წარმოებულებზე, რომელთა რიგი m-ს არ აღემატება.

თუ Ω არის რაიმე Ω_0 ქვესიმრავლეზე (2.2.1) სახის ყველა მატრიცი ნულოვანია, მაშინ აღნიშნულ ქვესიმრავლეზე (2.1.1) სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიგი გვარდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა რიგი Ω_0 ქვესიმრავლეზე m-ზე ნაკლები ხდება, მაშინ, როდესაც მათი რიგი $\Omega \setminus \Omega_0$ სიმრავლეზე m-ის ტოლია. ასეთ სისტემებს ჩვენ სინგუ-

---

*) რაიმე k *რიგის ფორმა* ეწოდება მრავალი ცვლადის პოლინომს, რომლის თითოეული წევრის რიგი ერთობლიობაში ყველა ცვლადის მიმართ k-ს ტოლია. ფორმა ერთგვაროვანი ფუნქციის კერძო შემთხვევაა.

**) k *რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია* ეწოდება ფუნქციას, თუ

$$f(cx_1, cx_2, ..., cx_n) = c^k f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad k \in R^1,$$

ყველა შესაძლო $c = const$-სთვის.

ლარულ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებსაც ვუწოდებთ, რადგან სისტემაში შემავალი ყოველი განტოლების გაყოფით იმავე განტოლების m-ური რიგის წარმოებულების შემცველ წევრთა კოეფიციენტებიდან ერთ-ერთზე გამოსავალი სისტემა დავა ისეთ სისტემაზე, რომელსაც არ ექნება რიგის გადაგვარება, მაგრამ ექნება შემოუსაზღვრავი, ე. ი., სინგულარული კოეფიციენტები. დავუშვათ, რომ რიგის გადაგვარებას ადგილი არ აქვს.

ვთქვათ, (2.1.1) სისტემა წრფივია და $x \in \Omega$ ფიქსირებული წერტილისთვის არსებობს ცვლადთა ისეთი

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad i = \overline{1,n},$$

აფინური გარდაქმნა[*)], რომ მისი (2.2.2) ფორმაში ჩასმის შედეგად ის იქცევა ფორმად $\mu_1, \ldots, \mu_l$, $0 < l < n$, ცვლადების მიმართ, მაშინ ამბობენ, რომ (2.1.1) *სისტემა* x *წერტილში პარაბოლურად გვარდება.*

თუ დავუშვებთ, რომ x წერტილში პარაბოლურ გადაგვარებას ადგილი არ აქვს და ამასთან ერთად

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \qquad (2.2.4)$$

კონუსურ მრავალსახეობას გარდა $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ წერტილისა ნამდვილი წერტილები არ გააჩნია, მაშინ (2.1.1) სისტემას x *წერტილში ელიფსური სისტემა ეწოდება.* მას *ძლიერ ელიფსური ეწოდება*, თუ

$$\sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial \overset{m}{P}{}_\alpha^j} \right\| \lambda^\alpha$$

მატრიცა ნიშანგანსაზღვრულია. ეს განმარტება შემოღებულია მ. ვიშიკის მიერ.

თუ დავუშვებთ, რომ x წერტილში პარაბოლურ გადაგვარებას ადგილი არ აქვს და ამასთან ერთად $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ცვლადთა სივრცეში არსებობს ისეთი წრფე, რომ თუ მას საკოორდინატო ღერძად მივიღებთ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ცვლადების აფინური გარდაქმნის შედეგად მიღებულ ახალ $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ცვლადთა სივრცეში, მაშინ ამ ღერძის გასწვრივ ცვლადი კოორდინატის მიმართ გარდაქმნილ (2.2.4) განტოლებას, ე. ი.,

$$\tilde{K}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = 0$$

განტოლებას ექნება ზუსტად Nm რაოდენობის ფესვი (ჯერადი ფესვი იმდენ ფესვად უნდა ჩავთვალოთ, რამდენიცაა მისი ჯერადობა), როცა დანარჩენი კოორდინატები ნებისმიერადაა აღებული, (2.1.1) სისტემას x *წერტილში ჰიპერბოლური* ეწოდება.

ანალოგიურად ხდება (2.1.1) სისტემის ტიპებად კლასიფიკაცია არაწრფივ შემთხვევაშიც, მხოლოდ ამჯერად, როგორც ეს (2.2.2) მახასიათებელი ფორმის მიმართ ადრე შენიშნუ-

---

[*)] *აფინური გარდაქმნა* ეწოდება სიბრტყის ან სივრცის წერტილთა ისეთ ურთიერთცალსახა გარდაქმნას, როცა ერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილს გარდაქმნის შემდეგ შეესაბამება კვლავ ერთ წრფეზე მდებარე სამი წერტილი. აფინური გარდაქმნის დროს პარალელური წრფეები (სიბრტყეები) პარალელურ წრფეებში (სიბრტყეებში) გადადის, გადამკვეთი – გადამკვეთში. R^n-ში აფინური გარდაქმნა მოიცემა

$$\lambda_i = c_{ij}\mu_j + d_i$$

სახით, სადაც c_{ij}, d_i $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ მუდმივებია,

$$\det\left\| c_{ij} \right\| \neq 0$$

და ერთწევრში გამეორებული ინდექსის მიმართ იგულისხმება აჯამვა 1-.დან n-მდე.

თუ $d_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, მივიღებთ წრფივ არაგადაგვარებულ გარდაქმნას R^n-ში.

ლიდან გამომდინარეობს, განტოლების ტიპი დამოკიდებული იქნება ამონახსნზე, რადგან მახასიათებელი ფორმის კოეფიციენტებია ასეთი, და ამდენად ტიპებად კლასიფიკაცია შესაძლებელია მხოლოდ შერჩეული ამონახსნისთვის.

ჩვენ ვიტყვით, რომ Ω არეში (2.1.1) სისტემა პარაბოლურია, ელიფსურია ან ჰიპერბოლურია, თუ ის ამ არის ყოველ x წერტილში პარაბოლურად გვარდება, ელიფსურია ან ჰიპერბოლური. (2.1.1) სისტემას ეწოდება Ω არეში შერეული ტიპის სისტემა, თუ ის არის სხვადასხვა ნაწილში სხვადასხვა ტიპს განეკუთვნება.

2.3. მეორე რიგის წრფივი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიკაცია

აღნიშნული განტოლებები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$Lu := A^{lm}(x)u,_{lm} + B^{l}(x)u,_{l} + C(x)u = F(x)\,, \qquad (2.3.1)$$

სადაც $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, A^{lm}, B^l, C და F მოცემული ფუნქციებია, ხოლო u საძიებელი ფუნქციაა, ამასთან

$$(\cdots),_{i_1 \ldots i_k} := \frac{\partial^k (\cdots)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}\,,\ i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}\,.$$

ამბობენ, რომ (2.3.1) განტოლება თავისი განხილვის Ω არეში ერთგვაროვანია ანდა არაერთგვაროვანია იმისდა მიხედვით F იქ იგივურად ნულია თუ არა.

$$A^{lm}(x)u,_{lm}$$

გამოსახულებას ეწოდება (2.3.1) განტოლების მთავარი ნაწილი, ხოლო $\det\left\|A^{lm}\right\|$-ს – მისი *დისკრიმინანტი*. იმ წერტილებში, სადაც ყველა A^{lm} ნულია, როგორც ეს უკვე აღვნიშნეთ, ამბობენ, რომ გვარდება განტოლების რიგი. თუ განტოლების რიგი არ გვარდება, (2.3.1) განტოლების შემთხვევაში (2.2.2) მახასიათებელი ფორმა მიიღებს

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial Lu}{\partial u,_{lm}} = \sum_{l,m=1}^{n} \frac{\partial Lu}{\partial u,_{lm}} = A^{lm}(x)\lambda_l \lambda_m \qquad (2.3.2)$$

სახეს*). ალგებრიდან ცნობილია, რომ ფიქსირებული x-სთვის (2.3.2) კვადრატული ფორმა გარკვეული

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad i = \overline{1,n}\,, \qquad (2.3.3)$$

არაგადაგვარებული წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება ე. წ. კანონიკურ სახეზე:

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \widetilde{K}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \kappa_i \mu_i^2\,, \qquad (2.3.4)$$

სადაც κ_i, $i = \overline{1,n}$, მუდმივებია, რომლებიც $\left\|A^{lm}(x)\right\|$ მატრიცის *საკუთრივ* (*მახასიათებელ*) *რიცხვებს* წარმოადგენენ.

თუ ერთი მაინც κ_i-ებიდან ნულია, მაშინ $\widetilde{K}$-ის არგუმენტთა რიცხვი n-ზე ნაკლები იქნება, რაც განმარტების თანახმად იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნულ წერტილში (2.3.1) განტოლებას პარაბოლური გადაგვარება აქვს. შევნიშნოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში (2.3.4) კვადრატული ფორმა გადაგვარებული გახდება.

---

*) რადგან განსახილველ შემთხვევაში $\overset{m}{P}{}^{j}_{\alpha} = \overset{2}{P}{}^{1}_{\alpha} = u_{,lm}$, სადაც $u := u_1$, $\alpha_l = 1$, $\alpha_m = 1$, როცა $l \neq m$, $\alpha_l = 2$, როცა $l = m$, და $\alpha_i = 0$, როცა $i \neq l, m$, ხოლო $\sum\limits_{|\alpha|=2}$ უკვე ნიშნავს აჯამვას l-ისა და m-ის მიმართ 1-დან n-მდე.

თუ ყველა κ_i, $i=\overline{1,n}$, დადებითია ან ყველა უარყოფითია და μ_i-ებიდან ერთი მაინც არ უდრის ნულს, მაშინ (2.3.4)-ში არაუარყოფითი (არადადებითი) შესაკრებებიდან ერთი მაინც იქნება მკაცრად დადებითი (უარყოფითი), ე. ი., ჯამიც მკაცრად დადებითი (უარყოფითი) იქნება, ამდენად,

$$\tilde{K}(\mu_1,\ldots,\mu_n)>0 \quad (<0),$$

როცა $\mu_i \neq 0$ რაიმე ერთი ფიქსირებული i-სთვის მაინც, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\tilde{K}(\mu_1,\ldots,\mu_n)=0 \tag{2.3.5}$$

განტოლებას, ე. ი., რადგან არაგადაგვარებული (2.3.3) გარდაქმნა წრფივია,

$$K(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=0$$

განტოლებას გარდა ტრივიალურისა, ნამდვილი ამონახსნი არ აქვს. ამდენად, განმარტების თანახმად (2.3.1) ელიფსურია. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში (2.3.4) კვადრატული ფორმაა, ე. ი., (2.3.2) კვადრატული ფორმა ნიშანგანსაზღვრულია.

თუ κ_i-ებიდან ნაწილი, მაგალითად, $\kappa_1,\ldots\kappa_l$ დადებითია, ხოლო დანარჩენი ნაწილი $\kappa_{l+1},\ldots,\kappa_n$ უარყოფითი, მაშინ (2.3.5) განტოლება, (2.3.4)-ის გამო, მიიღებს

$$\sum_{i=1}^{l}\kappa_i\mu_i^2=-\sum_{i=l+1}^{n}\kappa_i\mu_i^2\geq 0$$

სახეს, საიდანაც

$$\kappa_1\mu_1^2=-\sum_{i=l+1}^{n}\kappa_i\mu_i^2-\sum_{i=2}^{l}\kappa_i\mu_i^2\geq 0.$$

ამ განტოლებას კი μ_1-ის მიმართ, როცა $\mu_2,\ldots,\mu_n$ ნებისმიერ მნიშვნელობებს იღებენ, ორი ნამდვილი ამონახსნი აქვს. ამდენად, წინა პარაგრაფში მოყვანილი განმარტების თანახმად, (2.3.1) განტოლება ჰიპერბოლურია. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში კვადრატული ფორმა ნიშანცვლადია.

ამრიგად, იმისდა მიხედვით, მოცემულ წერტილში (2.3.2) კვადრატული ფორმა ნიშანგანსაზღვრულია (დადებითად ან უარყოფითად), ნიშანცვლადია თუ გადაგვარებული, ამბობენ, რომ (2.3.2) განტოლება შესაბამისად არის *ელიფსური*, *ჰიპერბოლური* ან *პარაბოლური ტიპის*.

თუ $\alpha(x)$-თ, $\beta(x)$-თ და $\gamma(x)$-თ აღვნიშნავთ განსახილველ x წერტილში $\left\|A^{lm}(x)\right\|$ მატრიცის დადებითი, უარყოფითი და ნულოვანი მახასიათებელი რიცხვების რაოდენობას (ჯერადობის გათვალისწინებით), მაშინ ამბობენ, რომ (2.3.1) განტოლება ამ წერტილში (α,β,γ) ტიპისაა.

2.4. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. მახასიათებელი წირები. კანონიკური სახე

თუ $n=2$, (2.3.1) განტოლება და (2.3.2) კვადრატული ფორმა შესაბამისად

$$A^{11}u,_{11}+2A^{12}u,_{12}+A^{22}u,_{22}+B^1u,_1+B^2u,_2+Cu=F \tag{2.4.1}$$

და

$$A^{11}\lambda_1^2+2A^{12}\lambda_1\lambda_2+A^{22}\lambda_2^2 \tag{2.4.2}$$

სახეს მიიღებს. (2.4.2) კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტს აქვს

$$\delta:=\begin{vmatrix}A^{11} & A^{12}\\ A^{21} & A^{22}\end{vmatrix}:=A^{11}A^{22}-\left(A^{12}\right)^2$$

სახე. რადგან განტოლების რიგი არ გვარდება, ზემოთ მოყვანილი განმარტების შესაბამისად (2.4.1) განტოლება ელიფსურია, ჰიპერბოლური ან პარაბოლური (წერტილში ან არის ყველა წერტილში), თუ იქ შესაბამისად $\delta > 0$, $\delta < 0$ ან $\delta = 0$. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს სილვესტრის*) თეორემიდან**). მართლაც, სილვესტრის თეორემის ძალით, მიუხედავად იმისა, კვადრატული ფორმა დადებითად არის განსაზღვრული თუ უარყოფითად (ორივე შემთხვევაში, განმარტების თანახმად, (2.4.1) განტოლება ელიფსურია), ყველა ლუწი რიგის მინორი და ამდენად δ მკაცრად დადებითია, ხოლო კენტი რიგის მინორი და ამდენად A^{11} მკაცრად დადებითია (როცა კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია) ან მკაცრად უარყოფითია (როცა კვადრატული ფორმა უარყოფითად განსაზღვრულია). ამრიგად, თუ (2.4.1) ელიფსური ტიპისაა, მაშინ $\delta > 0$, ე. ი., $\delta > 0$ პირობა (2.4.1) განტოლების ელიფსურობის და (2.4.2) კვადრატული ფორმის ნიშანგანსაზღვრულობის აუცილებელი პირობაა. ვაჩვენოთ მისი საკმარისობა. ვთქვათ, $\delta > 0$. მაშინ $A^{11} \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი., როცა $A^{11} = 0$, δ ან უარყოფითი იქნება (თუ $A^{12} \neq 0$), ან ნული იქნება (თუ $A^{12} = 0$). აქედან გამომდინარე ან $A^{11} > 0$ და ამდენად (2.4.2) კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, ან $A^{11} < 0$ და ამდენად (2.4.2) კვადრატული ფორმა უარყოფითად განსაზღვრულია სილვესტრის თეორემის ძალით. ამრიგად, განმარტების თანახმად (2.4.1) განტოლება ელიფსურია. თუ $\delta = 0$, მაშინ (2.4.2) კვადრატული ფორმა გადაგვარებულია, ამიტომ (2.4.1) განტოლება პარაბოლურია (ამ შემთხვევაში (2.4.2) კვადრატული ფორმა ან არაუარყოფითია, ან არადადებითი). თუ $\delta < 0$, მაშინ (2.4.2) კვადრატული ფორმა ნიშანცვლადია (თუ დავუშვებთ, რომ (2.4.1) ნიშანგანსაზღვრულია, მაშინ, როგორც ეს ზემოთ ვნახეთ, δ დადებითი იქნება; თუ დავუშვებთ, რომ (2.4.2) გადაგვარებულია, მაშინ $\delta = 0$ და ორივე შემთხვევაში მივიღებთ წინააღმდეგობას $\delta < 0$ პირობასთან. ამდენად, ორივე შემთხვევა გამორიცხულია), ე. ი., (2.4.1) განტოლება, განმარტების თანახმად, ჰიპერბოლურია.

ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ A^{11}, A^{12}, A^{22} კოეფიციენტების მიმართ საკმაოდ ზოგად შეზღუდვებში შეიძლება შევარჩიოთ დამოუკიდებელი ცვლადების ისეთი არაგადაგვარებული

$$x = x(x_1, x_2), \quad y = y(x_1, x_2) \tag{2.4.3}$$

გარდაქმნა (ე. ი., გარდაქმნის იაკობიანი

$$\left.\frac{D(x,y)}{D(x_1,x_2)} := x,_1 y,_2 - x,_2 y,_1 \neq 0\right),$$

რომ მთელ არეში, სადაც ან $\delta > 0$, ან $\delta < 0$, ან $\delta = 0$, (2.4.1) განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნას ერთ-ერთ შემდეგ სახეზე:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \tag{2.4.4}$$

თუ $\delta > 0$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{2.4.5}$$

ან

---

*) ჯ. ჯ. სილვესტრი (1814 – 1897) – ინგლისელი მათემატიკოსი

) **სილვესტრის თეორემა. იმისთვის, რომ ნამდვილი კვადრატული ფორმა იყოს დადებითად (შესაბამისად უარყოფითად) განსაზღვრული, აუცილებელი და საკმარისია, ყველა მთავარი მინორი იყოს მკაცრად დადებითი (შესაბამისად ყველა კენტი რიგის მთავარი მინორი იყოს მკაცრად უარყოფითი, ხოლო ყველა ლუწი რიგის მთავარი მინორი იყოს მკაცრად დადებითი).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y), \qquad (2.4.6)$$

თუ $\delta<0$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \qquad (2.4.7)$$

ან

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y), \qquad (2.4.8)$$

თუ $\delta=0$.

(dx_1,dx_2) ვექტორით, რომელიც

$$A^{11}(dx_2)^2-2A^{12}dx_2dx_1+A^{22}(dx_1)^2=0 \qquad (2.4.9)$$

მახასიათებელ განტოლებას აკმაყოფილებს, განსაზღვრულ მიმართულებას *მახასიათებელი მიმართულება* ეწოდება. ცხადია, (dx_1,dx_2) ემთხვევა მხებს იმ მახასიათებელი წირისა, რომელიც მოცემულია

$$\Phi(x_1,x_2)=0$$

განტოლებით, რომლის მარცხენა მხარე აკმაყოფილებს (იხ. (2.2.3))

$$A^{11}\Phi,_1^2+2A^{12}\Phi,_1\Phi,_2+A^{22}\Phi,_2^2=0 \qquad (2.4.10)$$

განტოლებას. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ $\Phi(x_1,x_2)$ აკმაყოფილებს (2.4.10)-ს, მაშინ $\frac{dx_2}{dx_1}$ (თუ $A^{11}\neq 0$ *)) ან $\frac{dx_1}{dx_2}$ (თუ $A^{22}\neq 0$), რადგან არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების ფორმულის თანახმად

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\Phi,_1}{\Phi,_2},\quad \frac{dx_1}{dx_2}=-\frac{\Phi,_2}{\Phi,_1},$$

აკმაყოფილებს (2.4.9)-ს და პირიქით.

როცა $A^{11}\neq 0$, (2.4.10) A^{11}-ზე გამრავლების შემდეგ შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\left[A^{11}\Phi,_1+\left(A^{12}+\sqrt{-\delta}\right)\Phi,_2\right]\left[A^{11}\Phi,_1+\left(A^{12}-\sqrt{-\delta}\right)\Phi,_2\right]=0, \qquad (2.4.11)$$

საიდანაც

$$A^{11}\Phi,_1+\left(A^{12}\pm\sqrt{-\delta}\right)\Phi,_2=0. \qquad (2.4.12)$$

ცხადია, (2.4.9)-ის, როგორც $\frac{dx_2}{dx_1}$-ის მიმართ კვადრატული განტოლების, ამონახსნს აქვს

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{A^{12}\pm\sqrt{-\delta}}{A^{11}} \qquad (2.4.13)$$

სახე და ამდენად ელიფსურობის არის არცერთ წერტილში (2.4.1) განტოლებას ნამდვილი მახასიათებელი მიმართულება არ აქვს, ჰიპერბოლურობის წერტილში აქვს ორი მახასიათე-

---

*) ამ შემთხვევაში $\Phi,_2\neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი., თუ $\Phi,_2=0$, (2.4.10)-დან გამომდინარეობს, რომ $A^{11}\Phi,_1^2=0$, საიდანაც $\Phi,_1=0$. ეს კი დაუშვებელია, რადგან $\nabla\Phi\neq 0$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\Phi,_1\neq 0$, როცა $A^{22}\neq 0$.

ბელი მიმართულება, ხოლო პარაბოლურობის წერტილში – მხოლოდ ერთი მახასიათებელი მიმართულება.

შევნიშნოთ, რომ (2.4.12) უშუალოდ გამომდინარეობს (2.4.13)-დანაც, თუ ამ უკანასკნელის მარცხენა მხარეში ჩავსვამთ

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\Phi,_1}{\Phi,_2}$$

გამოსახულებას და გამოვიყენებთ პროპორციის ძირითად თვისებას.

ვთქვათ, $A^{\alpha\beta} \in C^2(\Omega)$, $\alpha, \beta = 1,2$, მაშინ, როცა $\delta < 0$ ან $\delta = 0$, რადგანაც $A^{11}\left(x_1^0, x_2^0\right) \neq 0$, $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in \Omega$, (2.4.13)-ის ინტეგრების შემდეგ, შესაბამისად, მივიღებთ

$$\Phi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1, x_2) \pm \psi_2(x_1, x_2) = C = \text{const}, \tag{2.4.14}$$

$$\Phi(x_1, x_2) = C = \text{const}, \tag{2.4.15}$$

სადაც მარცხენა მხარეები, რომლებსაც, როგორც ცნობილია, ექნებათ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები $\left(x_1^0, x_2^0\right)$-ის მიდამოში, დააკმაყოფილებენ (2.4.12) განტოლებებს და (2.4.3) გარდაქმნას, შესაბამისად, ექნება

$$x = \psi_1(x_1, x_2) + \psi_2(x_1, x_2),\ \ y = \psi_1(x_1, x_2) - \psi_2(x_1, x_2) \ \ (\delta > 0),$$

$$x = x_1{}^{*)},\ \ y = \Phi(x_1, x_2) \ \ (\delta = 0),$$

სახე, ხოლო როცა $\delta > 0$, კოში-კოვალევსკაიას[**)] თეორემის (იხ. ქვემოთ) თანახმად, თუ მოვითხოვთ $A^{\alpha\beta}$-ს, $\alpha, \beta = 1,2$, ანალიზურობას, (2.4.13)-ის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) \pm i\varphi_2(x_1, x_2) = C = \text{const}, \tag{2.4.16}$$

რომლის მარცხენა მხარე ანალიზური იქნება (x_0, y_0)-ის მიდამოში $[(\Phi,_1)^2 + (\Phi,_2)^2 \neq 0]$, დააკმაყოფილებს (2.4.10) განტოლებას და (2.4.3) გარდაქმნას ექნება

$$x = \varphi_1(x_1, x_2),\ \ y = \varphi_2(x_1, x_2)$$

სახე. მართლაც, თუ მოვახდენთ (2.4.3) გარდაქმნას, მაშინ (2.4.1) მიიღებს

$$\underline{A}^{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\underline{A}^{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \underline{A}^{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underline{B}^1\frac{\partial u}{\partial x} + \underline{B}^2\frac{\partial u}{\partial y} + \underline{C}u = \underline{F} \tag{2.4.17}$$

სახეს, სადაც $\underline{B}^1$, $\underline{B}^2$, $\underline{C}$ და $\underline{F}$ გარკვეული ფუნქციებია, ხოლო

$$\underline{A}^{11} := A^{11}(x,_1)^2 + 2A^{12}x,_1 x,_2 + A^{22}(x,_2)^2, \tag{2.4.18}$$

$$\underline{A}^{12} := A^{11}x,_1 y,_1 + A^{12}(x,_1 y,_2 + x,_2 y,_1) + A^{22}x,_2 y,_2, \tag{2.4.19}$$

$$\underline{A}^{22} := A^{11}(y,_1)^2 + 2A^{12}y,_1 y,_2 + A^{22}(y,_2)^2. \tag{2.4.20}$$

ამასთან უშუალო ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\left(\underline{A}^{12}\right)^2 - \underline{A}^{11}\underline{A}^{22} = \left[\left(A^{12}\right)^2 - A^{11}A^{22}\right](x,_1 y,_2 - x,_2 y,_1)^2.$$

[*)] შევნიშნოთ, რომ $x = x_1$-ის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი $x = x(x_1, x_2)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია ისეთი, რომ განსახილველ მიდამოში (2.4.3) გარდაქმნა იყოს არაგადაგვარებული, ე. ი., გარდაქმნის იაკობიანი

$$\frac{D(x, y)}{D(x_1, x_2)} \neq 0.$$

[**)] ს. ვ. კოვალევსკაია (1850 – 1891) – რუსი მათემატიკოსი ქალი, აგრეთვე მწერალი და პუბლიცისტი

რაც იმას ნიშნავს, რომ არაგადაგვარებული გარდაქმნის დროს განტოლების ტიპი არ იცვლება.

როცა $\delta > 0$, $(2.4.16)$-ის თანახმად,

$$\Phi(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1,x_2) \pm i\varphi_2(x_1,x_2)$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს $(2.4.10)$ განტოლებას, ე. ი.,

$$A^{11}\left(\varphi_{1,1} \pm i\varphi_{2,1}\right)^2 + 2A^{12}\left(\varphi_{1,1} \pm i\varphi_{2,1}\right)\left(\varphi_{1,2} \pm i\varphi_{2,2}\right) + A^{22}\left(\varphi_{1,2} \pm i\varphi_{2,2}\right)^2 = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელის მარცხენა მხარეში ნულს გავუტოლებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ, რომ

$$A^{11}\left(\varphi_{1,1}\right)^2 + 2A^{12}\varphi_{1,1}\varphi_{1,2} + A^{22}\left(\varphi_{1,2}\right)^2 = A^{11}\left(\varphi_{2,1}\right)^2 + 2A^{12}\varphi_{2,1}\varphi_{2,2} + A^{22}\left(\varphi_{2,2}\right)^2,$$

$$\pm 2A^{11}\varphi_{1,1}\varphi_{2,1} + 2A^{12}\left(\pm\varphi_{1,1}\varphi_{2,2} \pm \varphi_{2,1}\varphi_{1,2}\right) \pm 2A^{22}\varphi_{1,2}\varphi_{2,2} = 0.$$

რაც, $(2.4.3)$-ის, სადაც

$$x(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1,x_2), \quad y(x_1,x_2) = \varphi_2(x_1,x_2),$$

და $(2.4.18)$ – $(2.4.20)$-ის ძალით, ნიშნავს იმას, რომ

$$\underline{A}^{11} = \underline{A}^{22}, \quad \underline{A}^{12} = 0.$$

ამდენად, $(2.4.17)$-ის ორივე მხარის $\underline{A}^{11}$-ზე გაყოფით (ცხადია, $\underline{A}^{11} \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ განტოლების რიგი გვარდება) მივიღებთ $(2.4.4)$-ს, სადაც

$$a(x,y) = \frac{\underline{B}^1(x,y)}{\underline{A}^{11}(x,y)}, \quad b(x,y) = \frac{\underline{B}^2(x,y)}{\underline{A}^{11}(x,y)}, \quad c(x,y) = \frac{\underline{C}(x,y)}{\underline{A}^{11}(x,y)}, \quad f(x,y) = \frac{\underline{F}(x,y)}{\underline{A}^{11}(x,y)}.$$

როცა $\delta < 0$, მაშინ $(2.4.14)$-ის თანახმად, როგორც

$$x(x_1,x_2) := \psi_1(x_1,x_2) + \psi_2(x_1,x_2),$$

ასევე

$$y(x_1,x_2) := \psi_1(x_1,x_2) - \psi_2(x_1,x_2)$$

აკმაყოფილებს $(2.4.10)$-ს, რაც, $(2.4.18)$-ის და $(2.4.20)$-ის გათვალისწინებით, იმას ნიშნავს, რომ

$$\underline{A}^{11} = 0 \quad \text{და} \quad \underline{A}^{22} = 0.$$

ასე, რომ $(2.4.17)$-ის ორივე მხარის $2\underline{A}^{12}$-ზე ($\underline{A}^{12} \neq 0$, რადგან განტოლების რიგი არ გვარდება) გაყოფის შემდეგ მივიღებთ $(2.4.5)$ კანონიკურ სახეს. თუ მოვახდენთ

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

არაგადაგვარებულ ცვლადთა გარდაქმნას, $(1.4.5)$ დავა $(1.4.6)$ კანონიკურ სახეზე.

როცა $\delta = 0$, ე. ი.,

$$\left(A^{12}\right)^2 = A^{11}A^{22}, \tag{2.4.21}$$

$(2.4.11)$ და $(2.4.12)$, შესაბამისად, შეიძლება შემდეგი სახით გადმოვწეროთ

$$\left(A^{11}\Phi,_1 + A^{12}\Phi,_2\right)^2 = 0 \tag{2.4.22}$$

და

$$A^{11}\Phi,_1 + A^{12}\Phi,_2 = 0, \quad A^{12}\Phi,_1 + A^{22}\Phi,_2 = 0. \tag{2.4.23}$$

ეს უკანასკნელი წინა ორიდან გამომდინარეობს, თუ გავითვალისწინებთ $(2.4.21)$-ს. მართლაც, ცხადია,

$$\left(A^{11}\right)^2\left(\Phi,_1\right)^2 + 2A^{11}A^{12}\Phi,_1\Phi,_2 + \left(A^{12}\right)^2\left(\Phi,_2\right)^2 = 0,$$

$$A^{11}\Phi,_1\left(A^{11}\Phi,_1+A^{12}\Phi,_2\right)+A^{11}A^{12}\Phi,_1\Phi,_2+A^{11}A^{22}\left(\Phi,_2\right)^2=0,$$
$$A^{11}\Phi,_2\left(A^{12}\Phi,_1+A^{22}\Phi,_2\right)=0.$$

ამ უკანასკნელიდან, ტოლობის ორივე მხარის $A^{11}\Phi,_2^2$-ზე გაყოფით, გამომდინარეობს (2.4.23)-ის მეორე ტოლობა. რადგან, (2.4.15)-ის გამო, $y=\Phi(x_1,x_2)$ წარმოადგენს (2.4.10)-ის, ე. ი., (2.4.11)-ის ან, $\delta=0$-ის გამო, (2.4.22)-ის ამონახსნს და ამდენად (2.4.23)-ის ამონახსნსაც, ამიტომ (2.4.20)-დან და (2.4.19)-დან, შესაბამისად (2.4.10)-ისა და (2.4.23)-ის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ

$$\underline{A}^{22}=A^{11}\Phi,_1^2+2A^{12}\Phi,_1\Phi,_2+A^{22}\Phi,_2^2=0$$

და

$$\underline{A}^{12}=A^{11}x,_1\Phi,_1+A^{12}\left(x,_1\Phi,_2+x,_2\Phi,_1\right)+A^{22}x,_2\Phi,_2$$
$$=x,_1\left(A^{11}\Phi,_1+A^{12}\Phi,_2\right)+x,_2\left(A^{12}\Phi,_1+A^{22}\Phi,_2\right)=0.$$

ამრიგად, (2.4.17)-ის ორივე მხარის $\underline{A}^{11}$-ზე გაყოფით მივიღებთ (2.4.8)-ს.

შემთხვევას, როცა $A^{11}=0$, მაგრამ $A^{22}\neq 0$, ანალოგიურად განვიხილავთ. თუ $A^{11}=0$, $A^{22}=0$, მაშინ $A^{12}\neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში საქმე გვექნება განტოლებასთან რიგის გადაგვარებით, რაც ჩვენ გამოვრიცხეთ. ცხადია, ამ შემთხვევაში განტოლება ჰიპერბოლურია და (2.4.1) განტოლების ორივე მხარის A^{12}-ზე გაყოფით მივიღებთ (2.4.5) კანონიკურ სახეს.

როცა ცვლადთა რიცხვი $n>2$, განტოლების კანონიკურ სახეზე დაყვანა განტოლების განხილვის მთელ არეში, გარდა მუდმივკოეფიციენტიან განტოლებათა შემთხვევისა, საზოგადოდ, ვერ ხერხდება.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა Ω არის შიგნით განტოლებას აქვს პარაბოლური გადაგვარება რაიმე მარტივ (ანალიზურ) σ წირზე. თუ ამ წირზე $\delta(x_1,x_2)$ ფუნქცია (დისკრიმინანტი) და მისი ყველა წარმოებული $m-1$ რიგამდე ჩათვლით ნულის ტოლია, ხოლო m-ური რიგის წარმოებულებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ σ წირის მიდამოში

$$\delta(x_1,x_2)=H^m(x_1,x_2)G(x_1,x_2),$$

სადაც

$$H(x_1,x_2)=0$$

არის σ წირის განტოლება, ხოლო ამ წირის გასწვრივ

$$G(x_1,x_2)\not\equiv 0.$$

აღვნიშნოთ $\alpha(x_1,x_2)$-ით უმცირესი კუთხე σ წირისადმი (x_1,x_2) წერტილში გავლებულ მხებსა და ამ წერტილიდან გამომავალ მახასიათებელს შორის (ის ერთადერთია, რადგან (x_1,x_2) წერტილში განტოლებას აქვს პარაბოლური გადაგვარება). ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ σ წირის რაიმე σ_1 ნაწილზე ყველგან ან

$$\alpha(x_1,x_2)\neq 0,$$

ე.ი., σ_1 არამახასიათებელი წირია, ან

$$\alpha(x_1,x_2)=0,$$

ე.ი., σ_1 მახასიათებელი წირია.

თუ დავუშვებთ, რომ განტოლების კოეფიციენტები ანალიზურია, მაშინ σ_1 წირის მომცველ Δ_1 არეში არაგადაგვარებული (2.4.3) სახის*) გარდაქმნით (2.4.1) განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ ერთ-ერთ შემდეგ სახეზე

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \; m>0, \; \alpha \neq 0, \quad (2.4.24)$$

ან

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \; m>0, \; \alpha = 0. \quad (2.4.25)$$

(2.4.24) განტოლებას ეწოდება *განტოლება არამახასიათებელი გადაგვარებით,* ხოლო (2.4.25) განტოლებას - *განტოლება მახასიათებელი გადაგვარებით.*

იმ შემთხვევაში, როცა რაიმე სიმრავლეზე გვარდება განტოლების რიგი, მახასიათებელი ფორმა, როგორც უკვე აღნიშნული იყო, ამ სიმრავლეზე იგივურად ნულია და ამიტომ აზრს ვერ მივცემთ ტიპებად დაყოფას, თუ განტოლება წინასწარ არ გარდავქმენით იმ სიმრავლეზე გადაგვარებული გარდაქმნით, სადაც განტოლების რიგი გვარდება. თუ ამგვარად გარდაქმნილი განტოლებისთვის აზრი აქვს მახასიათებელ ფორმას, მაშინ უკვე შესაძლებელი ხდება ტიპის განსაზღვრა. ასეთ შემთხვევაში ზოგჯერ შეიძლება შეირჩეს ისეთი (2.4.3) გარდაქმნა, რომ (2.4.1) განტოლება დავიდეს

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \quad m,n>0 \quad (2.4.26)$$

სახეზე. ამიტომ ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ გვარდება განტოლების როგორც ტიპი, ასევე რიგი.

---

*) მაგალითად, როცა $\alpha \neq 0$, ვიღებთ, რომ

$$y(x_1, x_2) = H(x,y),$$

ხოლო $x(x_1, x_2)$ ცვლადს ისე ვირჩევთ, რომ შესრულდეს

$$x_{,1}\left(A^{11}H_{,1} + A^{12}H_{,2}\right) + x_{,2}\left(A^{12}H_{,1} + A^{22}H_{,2}\right) = 0$$

ტოლობა.