ლექცია 15

8. მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების გამოკვლევის ძირითადი მეთოდები

8.1. ცვლადთა განცალების მეთოდი

ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნა სიმის რხევის განტოლებისთვის. სიმის რხევის თეორიაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{8.1.1}$$

განტოლების ამონახსნები, რომლებიც

$$u(x,t) = v(x)w(t) \tag{8.1.2}$$

სახითაა წარმოდგენილი და *მდგარი ტალღები* ეწოდებათ.

თუ $u(x,t)$-ს $(8.1.2)$ გამოსახულებას $(8.1.1)$ განტოლების მარცხენა მხარეში ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$v''(x)w(t) - v(x)w''(t) = 0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)}. \tag{8.1.3}$$

რადგან (8.1.3)-ის მარცხენა მხარე არ არის დამოკიდებული t-ზე, ხოლო მარჯვენა მხარე – x-ზე, ამიტომ

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = \text{const}. \tag{8.1.4}$$

$(8.1.4)$-ის მარჯვენა მხარეში მუდმივი აღვნიშნოთ $-\lambda$-თი და ეს ტოლობები ჩავწეროთ

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0 \tag{8.1.5}$$

და

$$w''(x) + \lambda w(x) = 0 \tag{8.1.6}$$

სახით, რომლებიც მეორე რიგის ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს წარმოადგენენ მუდმივი კოეფიციენტებით.

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების კურსიდან ცნობილია, რომ (8.1.5) განტოლების $v(x)$ ზოგად ამონახსნს აქვს

$$v = c_1 x + c_2 \tag{8.1.7}$$

სახე, როცა $\lambda = 0$,

$$v = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \tag{8.1.8}$$

როცა $\lambda > 0$,

$$v = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \tag{8.1.9}$$

როცა $\lambda < 0$, სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

ზუსტად ასევე, იმისდა მიხედვით, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ თუ $\lambda < 0$, (8.1.6) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება

$$\begin{aligned} w &= c_3 t + c_4, \\ w &= c_3 \cos\sqrt{\lambda}t + c_4 \sin\sqrt{\lambda}t, \\ w &= c_3 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda}t}, \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

სახით, სადაც c_3 და c_4 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ (8.1.1) განტოლების არატრივიალური (იგივურად ნულის არატოლი) $u(x,t)$ ამონახსნი, რომელიც რეგულარულია $0 < x < \pi$, $t > 0$, ნახევარზოლში, უწყვეტია, როცა $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, და აკმაყოფილებს

$$u(0,t) = 0\,,\ u(\pi,t) = 0\,,\ t \ge 0\,, \tag{8.1.11}$$

სასაზღვრო პირობებს.

ვეძებოთ (8.1.1), (8.1.11) ამოცანის ამონახსნები (8.1.2) მდგარი ტალღის სახით. მაშინ $v(x)$ და $w(x)$ ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილონ შესაბამისად (8.1.5) და (8.1.6) განტოლებები და

$$v(0)w(t) = v(\pi)w(t) = 0$$

ან, რაც იგივეა,

$$v(0) = 0\,,\ v(\pi) = 0 \tag{8.1.12}$$

პირობები.

(8.1.5) განტოლების $v(x)$ არატრივიალური ამონახსნის, რომელიც (8.1.12) პირობებს აკმაყოფილებს, მოძებნის ამოცანა ე. წ. *ზოგადი სპექტრული ამოცანის* ანუ *შტურმ*[*]*-ლიუვილის*[**] *ამოცანის* კერძო შემთხვევაა.

λ-ს მნიშვნელობას, რომლისთვისაც (8.1.5) განტოლებას $v(x)$ არატრივიალური ამონახსნი აქვს, რომელიც (8.1.12) პირობებს აკმაყოფილებს, ეწოდება *საკუთრივი რიცხვი*, ხოლო თვით $v(x)$ ამონახსნს – λ*-ს შესაბამისი საკუთრივი ფუნქცია.*

(8.1.5), (8.1.12) ამოცანის (8.1.7) და (8.1.9) სახის არატრივიალური ამონახსნები არ არსებობენ, რადგან თუ $v(x)$-ის (8.1.7) და (8.1.9) გამოსახულებას (8.1.12)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$c_2 = 0\,,\ \pi c_1 + c_2 = 0$$

პირველ შემთხვევაში და

$$c_1 + c_2 = 0\,,\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi}c_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}c_2 = 0$$

მეორე შემთხვევაში, ე. ი. ორივე შემთხვევაში

$$c_1 = c_2 = 0\,.$$

ახლა, თუ (8.1.8) გამოსახულებას (8.1.12)-ში ჩავსვამთ, გვექნება

$$c_1 = 0\,,\ c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0\,.$$

აქედან ჩანს, რომ თუ $\lambda \ne 0$ [$\lambda = 0$ შემთხვევაში, როგორც ეს (8.1.8)-დან გამომდინარეობს, $v \equiv 0$] (8.1.5), (8.1.12) ამოცანას (8.1.8) სახის არატრივიალური ამონახსნი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0\,,$$

ე. ი., როცა

$$\lambda = n^2\,,$$

სადაც n ნულისგან განსხვავებული მთელი რიცხვია.

იმის გამო, რომ $\sin nx$ და $\sin(-n)x = -\sin nx$ წრფივად დამოკიდებული ფუნქციებია, ბუნებრივია, n-ის მხოლოდ 1, 2, … ნატურალური მნიშვნელობებით შემოვიფარგლებით.

ამგვარად, მივედით იმ დასკვნამდე, რომ

$$\lambda = n^2\,,\ n = 1,2,\ldots,$$

რიცხვები (8.1.5), (8.1.12) ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია, ხოლო $c_n \sin nx$, $n = 1,2,\ldots$, ფუნქციები მათი შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია, სადაც c_n-ები ნულისგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

---

[*] ჟ. შ. ფ. შტურმი (1803 – 1855) – ფრანგი მათემატიკოსი

[**] ჟ. ლიუვილი (1809 – 1882) – ფრანგი მათემატიკოსი

თუ დავუშვებთ, რომ
$$c_n = 1, \ \ n = 1,2,\dots,$$
მაშინ საკუთრივი ფუნქციების სისტემა ჩაიწერება
$$v_n(x) = \sin nx, \ \ n = 1,2,\dots,$$
სახით. მაშასადამე, (8.1.5), (8.1.12) *ერთგვაროვან ამოცანას აქვს*
$$u_n(x,t) = \sin nx \cdot w_n(t), \ \ n = 1,2,\dots,$$
წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, სადაც, (8.1.10)*-ის ძალით,*
$$w_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$
ხოლო a_n *და* b_n *ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.*

(8.1.10) განტოლების ამონახსნების
$$\sin nx \cdot \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right), \ \ n = 1,2,\dots, \qquad (8.1.13)$$
ერთობლიობა საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ შემდეგი *ძირითადი შერეული ამოცანის* ამონახსნი: *უნდა განისაზღვროს* (8.1.1) *განტოლების* $u(x,t)$ *ამონახსნი, რომელიც რეგულარულია* $0 < x < \pi$, $t > 0$, *ნახევარზოლში, უწყვეტია, როცა* $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, *და აკმაყოფილებს* (8.1.11) *სასაზღვრო და*
$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (8.1.14)$$
საწყის პირობებს, სადაც $\varphi(x)$ *და* $\psi(x)$ *მოცემული საკმარისად გლუვი ნამდვილი ფუნქციებია.*

(8.1.1), (8.1.11), (8.1.14) ამოცანის $u(x,t)$ ამონახსნი ვეძებოთ
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \qquad (8.1.15)$$
მწკრივის სახით.

ცხადია, რომ (8.1.15) ფორმულით წარმოდგენილი $u(x,t)$ ფუნქცია მის მარჯვენა ნაწილში მწკრივის თანაბარი კრებადობის დაშვების შემთხვევაში აკმაყოფილებს (8.1.11) სასაზღვრო პირობებს. იმისთვის, რომ ის (8.1.14) საწყის პირობებსაც აკმაყოფილებდეს, უნდა შესრულდეს
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x) \ \ \text{და} \ \ \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin nx = \psi(x) \qquad (8.1.16)$$
ტოლობები, საიდანაც ვპოულობთ, რომ
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx, \ \ b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx dx.$$

ფურიეს მწკრივების თეორიიდან ცნობილია, რომ $0 \le x \le \pi$ სეგმენტზე $\varphi''(x)$ და $\psi''(x)$ ფუნქციების უწყვეტობა და
$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0$$
პირობების შესრულება იძლევა $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების (8.1.16) სახით წარმოდგენის და (8.1.15)-ის მარჯვენა მხარეში ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბარი კრებადობის გარანტიას. გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში (8.1.15) მწკრივის $u(x,t)$ ჯამი, როცა $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, იქნება უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელიც (8.1.11) და (8.1.14) პირობებს დააკმაყოფილებს.

თუ დამატებით ცნობილია, რომ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები თავისი წარმოებულებით შესაბამისად მესამე და მეორე რიგამდე უწყვეტია $0 \le x \le \pi$ სეგმენტზე, ამასთან
$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(\pi) = 0, \ \ \psi(0) = \psi(\pi) = 0,$$

მაშინ (8.1.15) ფორმულით წარმოდგენილ $u(x,t)$ ფუნქციას ექნება კერძო წარმოებულები მეორე რიგის ჩათვლით, რომლებიც (8.1.15)-ის მარჯვენა მხარეში მწკრივის წევრ-წევრად დიფერენცირებით გამოითვლებიან. ცხადია, რომ ამ დაშვებებში (8.1.15) მწკრივის $u(x,t)$ ჯამი იქნება (8.1.1), (8.1.11), (8.1.14) ამოცანის საძებნი ამონახსნი. (8.1.15)-ის მარჯვენა მხარეში

$$\sin nx\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right), \quad n = 1,2,\ldots,$$

სახის თითოეულ შესაკრებს ბგერის გავრცელების თეორიაში ბოლოებით $(0,0)$ და $(0,\pi)$ წერტილებში ჩამაგრებული სიმის *საკუთარი რხევები* (ანუ *ჰარმონიკები*) ეწოდება.

მტკიცდება, რომ (8.1.1), (8.1.11), (8.1.14) ძირითად შერეულ ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ამონახსნი.

8.2. ინტეგრალური გარდაქმნების მეთოდი

ფურიეს*) გარდაქმნის გამოყენება კოშის ამოცანის გლობალური ამონახსნის ასაგებად სიმის რხევის განტოლებისთვის. ვთქვათ, უნდა განისაზღვროს სიმის რხევის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{8.2.1}$$

განტოლების $t > 0$ ნახევარსიბრტყეში რეგულარული $u(x,t)$ ამონახსნი

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{8.2.2}$$

პირობებით, სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ მოცემული საკმარისად გლუვი ფუნქციებია.

დავუშვათ, რომ $u(x,t)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები მეორე რიგამდე უწყვეტია და ნულისკენ მიისწრაფვიან, როცა $x^2 + t^2 \to \infty$, მაშინ აზრი აქვს ფურიეს

$$U(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ix\xi} dx \tag{8.2.3}$$

გარდაქმნას და კანონიერია ყველა ქვემოთ ჩატარებული ოპერაცია:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(\tau,t)}{\partial \tau^2} e^{-i\tau\xi} d\tau = -\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau,t) e^{-i\tau\xi} d\tau = -\xi^2 U(\tau,\xi), \tag{8.2.4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(\tau,t)}{\partial t^2} e^{-i\tau\xi} d\tau = \frac{\partial^2 U(\tau,\xi)}{\partial t^2}, \tag{8.2.5}$$

$$U(0,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx = \Phi(\xi), \tag{8.2.6}$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ix\xi} dx = \Psi(\xi), \tag{8.2.7}$$

სადაც $\Phi(\xi)$ და $\Psi(\xi)$ შესაბამისად $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების ფურიეს გარდაქმნებია.

თუ (8.2.1) განტოლების ორივე ნაწილს $e^{-ix\xi}$-ზე გავამრავლებთ და x-ით ვაინტეგრებთ $-\infty$-დან ∞-მდე, (8.2.4)-ის, (8.2.5)-ის, (8.2.6)-ისა და (8.2.7)-ის ძალით, მივიღებთ

$$U_{tt}(t,\xi) + \xi^2 U(t,\xi) = 0, \tag{8.2.8}$$

$$U(0,\xi) = \Phi(\xi), \quad U_t(0,\xi) = \Psi(\xi). \tag{8.2.9}$$

---

*) ჟ. ბ. ჟ. ფურიე (1768 – 1830) – ფრანგი მათემატიკოსი

(8.2.8) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების $U(t,\xi)$ ზოგადი ამონახსნი ავიღოთ

$$U = c_1(\xi)e^{i\xi t} + c_2(\xi)e^{-i\xi t} \tag{8.2.10}$$

სახით, სადაც c_1 და c_2 ξ პარამეტრზე დამოკიდებული ნებისმიერი მუდმივებია (t-ს მიმართ).

(8.2.10)-ისა და (8.2.9)-ის ძალით, გვაქვს

$$c_1 + c_2 = \Phi(\xi), \quad c_1 - c_2 = \frac{\Psi(\xi)}{i\xi},$$

საიდანაც ვპოულობთ, რომ

$$c_1 = \frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi), \quad c_2 = \frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi).$$

თუ c_1-ისა და c_2-ის ნაპოვნ მნიშვნელობებს (8.2.10)-ის მარჯვენა მხარეში ჩავსვამთ, მივიღებთ (8.2.8) განტოლების

$$U(t,\xi) = \frac{1}{2}\Phi(\xi)\left(e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}\right) + \frac{1}{2i\xi}\Psi(\xi)\left(e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}\right) \tag{8.2.11}$$

ამონახსნს, რომელიც (8.2.9) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს.

თუ ვისარგებლებთ ფურიეს

$$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\eta t}dt$$

გარდაქმნის შებრუნების

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\eta)e^{i\eta t}d\eta \tag{8.2.12}$$

ფორმულით, (8.2.3)-დან მივიღებთ

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(t,\tau)e^{i\tau x}d\tau$$

ან, (8.2.11)-ის გათვალისწინებით,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+t)} + e^{i\tau(x-t)}\right]\Phi(\tau)d\tau + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+t)} - e^{i\tau(x-t)}\right]\frac{1}{i\tau}\Psi(\tau)d\tau. \tag{8.2.13}$$

(8.2.12) შებრუნების ფორმულის ძალით, (8.2.6) და (8.2.7) ტოლობებში ბოლო ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau)e^{i\tau\xi}d\tau, \quad \psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)e^{i\tau\xi}d\tau.$$

ამდენად,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau(x+t)}\Phi(\tau)d\tau = \varphi(x+t), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau(x-t)}\Phi(\tau)d\tau = \varphi(x-t) \tag{8.2.14}$$

და

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(\tau)}{\tau}\left[e^{i\tau(x+t)} - e^{i\tau(x-t)}\right]d\tau &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Psi(\tau)\int_{x-t}^{x+t}e^{i\tau\xi}d\xi\right]d\tau \\ = \int_{x-t}^{x+t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\tau)e^{i\tau\xi}d\tau\right]d\xi &= \int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

(8.2.14)-ისა და (8.2.15)-ის (8.2.13) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ (8.2.1), (8.2.2) ამოცანის ჩვენთვის უკვე ცნობილი დალამბერის

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi \qquad (8.2.16)$$

ამონახსნს.

8.3. ვარიაციული მეთოდები

დირიხლეს პრინციპი. მთელ რიგ შემთხვევებში, რაც გამოყენებებში გვხვდება, კერძო-წარმოებულებიანი განტოლებები წარმოადგენენ *ეილერის განტოლებებს ვარიაციული ამოცანებისთვის.* ასე, მაგალითად, ლაპლასის

$$\Delta u(x,y)=0$$

განტოლება წარმოადგენს *დირიხლეს*

$$D(u)=\int_{\Omega}\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy \qquad (8.3.1)$$

ინტეგრალის, რომელიც S საზღვრიან Ω არეზეა გავრცელებული, მინიმუმის ამოცანისთვის ეილერის განტოლებას.

$\Omega\bigcup S$-ში უწყვეტ ფუნქციებს Ω-ში უბან-უბან უწყვეტი პირველი წარმოებულებით და სასრული დირიხლეს ინტეგრალით, რომლებიც S-ზე წინასწარ მოცემულ $\varphi(x,y)$ მნიშვნელობებს იღებენ, ვუწოდოთ *დასაშვები ფუნქციები.*

არსებობს მჭიდრო კავშირი დირიხლეს ამოცანას, რომელიც მდგომარეობს Ω არეში ჰარმონიული და $\Omega\bigcup S$-ში უწყვეტი $u(x,y)$ ფუნქციის განსაზღვრაში

$$u(x,y)=\varphi(x,y)\,,\ \ (x,y)\in S\,, \qquad (8.3.2)$$

სასაზღვრო პირობით, და ე. წ. *პირველ ვარიაციულ ამოცანას* შორის, რომელიც მდგომარეობს დასაშვებ ფუნქციებს შორის იმ ფუნქციის მოძებნაში, რომლისთვისაც დირიხლეს (8.3.1) ინტეგრალის მნიშვნელობა მინიმალურია.

თუ S-ზე მოცემული $\varphi(x,y)$ ფუნქცია ისეთია, რომ დასაშვები ფუნქციების კლასი ცარიელი არაა, მაშინ დირიხლეს ამოცანა და პირველი ვარიაციული ამოცანა ეკვივალენტურია.

ამ მტკიცების სამართლიანობას ვაჩვენებთ ზოგიერთი დამატებითი დაშვების პირობებში.

ვთქვათ, $u(x,y)$ პირველი ვარიაციული ამოცანის ამონახსნია. დასაშვები ფუნქციების კლასი წარმოვადგინოთ $u(x,y)+\varepsilon h(x,y)$ სახით, სადაც ε ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $h(x,y)$ დასაშვები ფუნქციების კლასიდან ნებისმიერი ისეთი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$h(x,y)=0\,,\ \ (x,y)\in S\,, \qquad (8.3.3)$$

პირობას.

ცხადია, რომ

$$D(u+\varepsilon h)=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)\geq 0\,, \qquad (8.3.4)$$

სადაც

$$D(u,h):=\int_{D}\left(u_x h_x+u_y h_y\right)dxdy\,. \qquad (8.3.5)$$

რადგან $u(x,y)$ მამინიმიზირებელი ფუნქციაა და ε — ნებისმიერი მუდმივი, (8.3.4)-დან ვასკვნით, რომ

$$D(u,h)=0\,, \qquad (8.3.6)$$

ვინაიდან $D(u+\varepsilon h)$, როგორც ε-ის ფუნქცია მინიმუმს აღწევს, როცა

$$\varepsilon=0\,,$$

რისთვისაც აუცილებელია, მისი ε-ის მიმართ წარმოებული ნულის ტოლი იყოს.

$u(x,y)$ და $h(x,y)$ ფუნქციები და S კონტური ჩავთვალოთ იმდენად გლუვად, რომ მათთვის სამართლიანი იყოს

$$u_x h_x + u_y h_y = \left(u_x h\right)_x + \left(u_y h\right)_y - h\Delta u\,, \tag{8.3.7}$$

ტოლობა და გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა, მაშინ (8.3.5)-ის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$D(u,h) = \int\limits_S h\frac{\partial u}{\partial \nu}ds - \int\limits_\Omega h\Delta u dxdy, \tag{8.3.8}$$

სადაც ν S-ის გარე ნორმალია.

(8.3.3)-ისა და (8.3.6)-ის ძალით, (8.3.8)-დან გამომდინარეობს

$$\int\limits_\Omega h\Delta u dxdy = 0\,,$$

საიდანაც იმის დაშვებით, რომ Δu Ω-ში უწყვეტი ფუნქციაა, $h(x,y)$-ის ნებისმიერობის გამო ვასკვნით, რომ

$$\Delta u(x,y) = 0\,.$$

მაშასადამე, მიღებული დაშვებების დროს პირველი ვარიაციული ამოცანის ამონახსნი დირიხლეს ამოცანის ამონახსნიცაა.

ვთქვათ, ახლა $u(x,y)$ ლაპლასის განტოლებისთვის დირიხლეს ამოცანის ამონახსნია (8.3.2) სასაზღვრო პირობით, ხოლო $u(x,y)+\varepsilon h(x,y)$, როგორც ზემოთ, დასაშვები ფუნქციების კლასია, ამავე დროს $u(x,y)$-ისა და $h(x,y)$-სთვის ადგილი აქვს (8.3.8) ფორმულას. ამ ფორმულიდან (8.3.3)-ისა და $u(x,y)$-ის ჰარმონიულობის გამო გამომდინარეობს (8.3.6) ტოლობა. ამიტომ (8.3.4)-დან გვაქვს

$$D(u) \le D(u+\varepsilon h)\,.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $u(x,y)$ ფუნქცია მინიმიზირებას უკეთებს დირიხლეს ინტეგრალს და, ამგვარად, ის პირველი ვარიაციული ამოცანის ამონახსნია.

ლაპლასის განტოლებისთვის არსებობენ სხვა სასაზღვრო ამოცანებიც, რომლებსაც შეესაბამება მათი ეკვივალენტური ვარიაციული ამოცანები დირიხლეს ინტეგრალისთვის. მათ შორის შეიძლება დავასახელოთ, მაგალითად, ნოიმანის ამოცანა.

ლაპლასის განტოლებისთვის სასაზღვრო ამოცანების დირიხლეს ინტეგრალისთვის მათ ეკვივალენტურ ვარიაციულ ამოცანებზე მიყვანის იდეა ეკუთვნის რიმანს. ამ იდეას *დირიხლეს პრინციპს* უწოდებენ.

8.4. სასრული სხვაობების მეთოდი

გამოყენებებში ხშირად მოითხოვება მათემატიკური ფიზიკის კონკრეტული ამოცანების მიახლოებითი (გარკვეული აზრით) ამონახსნის პოვნა. ქვემოთ მოცემულია კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამონახსნების აგების ერთ-ერთი მეთოდის აღწერა, რომელიც *სასრულსხვაობიანი* ან *ბადური მეთოდის* სახელს ატარებს.

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება ორი დამოუკიდებელი ცვლადით

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + e(x,y)u = f(x,y)\,. \tag{8.4.1}$$

ჩავთვალოთ x, y დეკარტის*) ორთოგონალურ კოორდინატებად და x, y ცვლადების სიბრტყე დავფაროთ

*) რ. დეკარტი (1596 – 1650) – ფრანგი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი

$$x = m \cdot h\,,\ \ y = n \cdot h\,,\ \ m,n = 0,\pm 1,\dots,$$

კვადრატული ბადით, სადაც h მოცემული დადებითი რიცხვია. ამ ბადის თითოეული კვადრატის წვეროს ეწოდება *კვანძი*, ხოლო h რიცხვს – *ბიჯი.*

თუ კერძო წარმოებულის განსაზღვრიდან გამოვალთ, თითოეულ (x, y) კვანძში, იმ პირობით, რომ ყველა ხუთი (x, y), $(x-h, y)$, $(x+h, y)$, $(x, y-h)$, $(x, y+h)$ წერტილი (8.4.1) განტოლების განსაზღვრის Ω არეს ეკუთვნის, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \approx \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h},\\
&\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \approx \frac{u(x,y)-u(x,y-h)}{h},\\
&\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)}{h^2},\\
&\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)}{h^2}.
\end{aligned} \tag{8.4.2}$$

აქედან გამომდინარე, ჩვენ უფლება გვაქვს, თითოეულ ზემოთ ნაჩვენებ კვანძში (8.4.1) კერძოწარმოებულებიანი განტოლება მიახლოებით შევცვალოთ

$$\begin{aligned}
a(x,y)&\big[u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)\big]\\
&+b(x,y)\big[u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)\big]\\
&+ch\big[u(x,y)-u(x-h,y)\big]+dh\big[u(x,y)-u(x,y-h)\big]\\
&+h^2 e(x,y)u(x,y)=h^2 f(x,y)
\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

წრფივი ალგებრული განტოლებით $u(x, y)$-ის, $u(x-h, y)$-ის, $u(x+h, y)$-ის, $u(x, y-h)$-ის, $u(x, y+h)$-ის მიმართ.

როცა (x, y) წერტილი Ω არში მდებარე კვანძებს გაირბენს, (8.4.3) მოგვცემს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $u(x, y)$-ის მნიშვნელობათა მიმართ მითითებულ კვანძებში. ზოგიერთი ამ სიდიდეთაგანი ან, სასაზღვრო და საწყისი პირობებიდან გამომდინარე, პირდაპირ განისაზღვრება (8.4.3) სისტემისგან დამოუკიდებლად ან ეს უკანასკნელნი გვაძლევენ დამატებით წრფივ ალგებრულ განტოლებებს, რომლებიც (8.4.3) სისტემასთან ერთად წარმოადგენენ ამოსავალი ამოცანის მიახლოებით ბადურ შეცვლას. ასეთნაირად მიღებულ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი განსახილველი ამოცანის მიახლოებით ამონახსნადაა მიღებული.