ლექცია 14

7. გადაგვარებული განტოლებები

7.1. ტრიკომის*) განტოლება. ტრიკომის ამოცანა

წრფივი მეორე რიგის კერძოწარმოებულიანი

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{7.1.1}$$

განტოლება ელიფსურია, როცა $y>0$, პარაბოლურად გადაგვარებულია, როცა $y=0$, და ჰიპერბოლურია, როცა $y<0$. (7.1.1) განტოლებას *ტრიკომის განტოლება* ეწოდება.

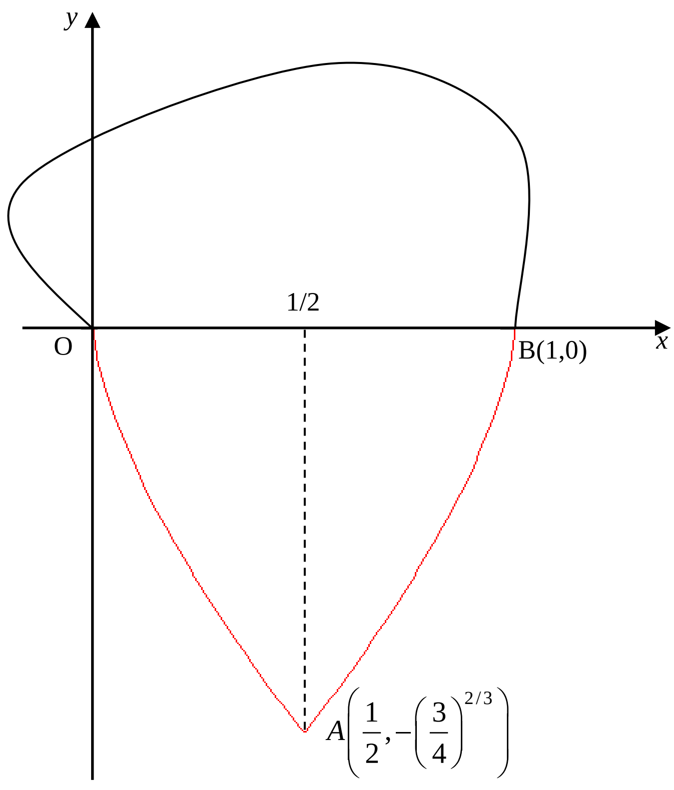
(7.1.1) განტოლების მახასიათებელ განტოლებას

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0 \tag{7.1.2}$$

სახე აქვს. ამოვხსნათ (7.1.2). ცხადია, როცა $y<0$,

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{(-y)^{\frac{1}{2}}},$$

საიდანაც



ნახ 7.1.1

$$(-y)^{\frac{1}{2}}d(-y)=\mp dx,$$

და მივიღებთ (7.1.1) განტოლების

$$\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\pm x=c=\text{const}$$

მახასიათებელი წირების ორ ოჯახს ჰიპერბოლურობის არეში. როგორც ვხედავთ, პარაბოლური გადაგვარების $y=0$ წრფე არამახასიათებელია, რადგან მის წერტილებში მახასიათებელი მიმართულებები მისი მართობულია. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ განტოლებას აქვს არამახასიათებელი პარაბოლური გადაგვარება.

ტრიკომის განტოლება განვიხილოთ ცალადბმულ Ω არეში (იხ. ნახ. 7.1.1), რომელიც შემოსაზღვრულია $y>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე ჟორდანის**) მარტივი σ წირით ბოლოებით $O(0,0)$ და $B(1,0)$ წერტილებში და

$$OA: x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=0,$$

*) ფ. ჯ. ტრიკომი (1897-1978) — იტალიელი მათემატიკოსი

**) მ. ე. კ. ჟორდანი (1838-1922) — ფრანგი მათემატიკოსი

$$BA: x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1$$

მახასიათებლებით, რომლებიც $A\left(\frac{1}{2},-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ წერტილიდან გამოდიან.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\Omega^{+}:=\{(x,y)\in\Omega: y>0\},\quad \Omega^{-}:=\{(x,y)\in\Omega: y<0\}.$$

ტრიკომის ამოცანა 7.1.1. ვიპოვოთ (7.1.1) განტოლების რეგულარული $u(x,y)\in C^{2}\left(\Omega^{+}\cup\Omega^{-}\right)\cap C^{1}(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ტრიკომის განტოლებას, როცა $(x,y)\in\Omega^{+}\cup\Omega^{-}$, და

$$u(x,y)=\varphi(x,y),\ \text{როცა}\ (x,y)\in\sigma,$$

$$u(x,y)=\psi(x),\ \text{როცა}\ (x,y)\in OA,$$

პირობებს, სადაც φ და ψ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია.

გარკვეულ პირობებში ტრიკომიმ დაამტკიცა დასმული ამოცანის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა.

ახლა განვიხილოთ

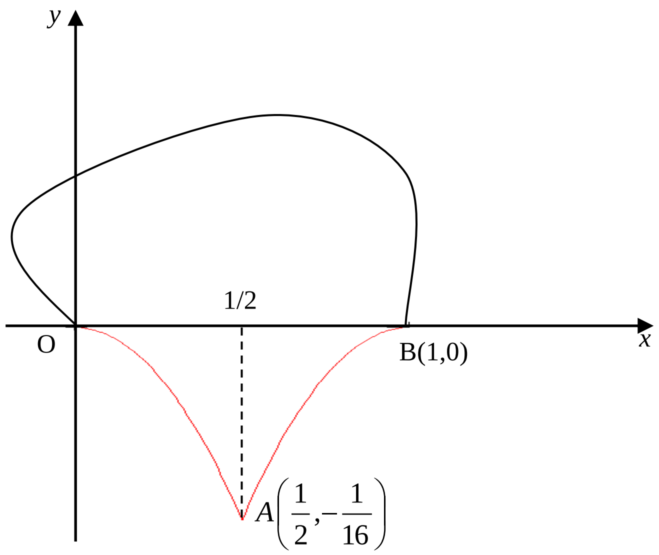
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (7.1.3)$$

განტოლება. მის მახასიათებელ განტოლებას

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=0$$

სახე აქვს, საიდანაც ნათელია, რომ, როცა $y>0$, განტოლება ელიფსურია, როცა $y=0$, განტოლება პარაბოლურად გადაგვარებულია, ხოლო როცა $y<0$, აქვს

$$2(-y)^{\frac{1}{2}}\pm x=c=\text{const}$$



ნახ 7.1.2

მახასიათებელი წირების ორი ოჯახი, რომლებიც ეხებიან განტოლების გადაგვარების $y=0$ წრფეს და ამდენად (7.1.3) განტოლების გადაგვარების $y=0$ წრფე ემთხვევა პარაბოლური განტოლების ერთადერთ მახასიათებელს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ განტოლებას აქვს მახასიათებელი პარაბოლური გადაგვარება.

(7.1.3) განტოლება განვიხილოთ Ω არეში (იხ. ნახ. 7.1.2), რომელიც შემოსაზღვრულია $y>0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე ჟორდანის მარტივი σ წირით ბოლოებით $O(0,0)$ და $B(1,0)$ წერტილებში და

$$OA: x-2(-y)^{\frac{1}{2}}=0$$

და

$$BA: x+2(-y)^{\frac{1}{2}}=1$$

მახასიათებლებით, რომლებიც $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{16}\right)$ წერტილიდან გამოდიან.

ტრიკომის ამოცანა 7.1.2. ვიპოვოთ (7.1.3) განტოლების რეგულარული $u(x,y)\in C^2\left(\Omega^+\bigcup\Omega^-\right)\bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (7.1.3) განტოლებას, როცა $(x,y)\in\Omega^+\bigcup\Omega^-$, და

$$u(x,y)=\varphi(x,y)\,,\ \text{როცა}\ (x,y)\in\sigma\,,$$
$$u(x,y)=\psi(x)\,,\ \text{როცა}\ (x,y)\in OA\,,$$
$$\lim_{y\to 0+} y^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\lim_{y\to 0-}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=:\nu(x)\,,\ \ 0<x<1, \tag{7.1.4}$$

პირობებს, სადაც φ უწყვეტია, ψ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია, ამასთან მეორე რიგის წარმოებული აკმაყოფილებს ჰიოლდერის პირობას; $\nu(x)$-ს შეიძლება ჰქონდეს სუსტი სინგულარობა (ე. ი., შეიძლება ხდებოდეს უსასრულობა ერთზე ნაკლები რიგით) $0<x<1$ ინტერვალის ბოლოებში.

(7.1.4) პირობას OB-ზე, $u(x,y)$-ის უწყვეტობასთან ერთად, შეწებების პირობა ეწოდება. როგორც ვხედავთ, ის წონიანია წარმოებულის შემთხვევაში.

მტკიცდება, რომ ტრიკომის ამოცანა 7.1.2 ცალსახად ამოხსნადია.

7.2. კელდიშის*) განზოგადებული თეორემა

Ω არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია $y\ge 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე საკმარისად გლუვი σ წირით და x ღერძის $\overline{AB}$ სეგმენტით, განვიხილოთ

$$Lu:=y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^n\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0, \tag{7.1.5}$$
$$m,n=\text{const}>0,$$

$\overline{\Omega}$-ში ანალიზური a, b, c კოეფიციენტებით, ამასთან

$$c\le 0\ \ \overline{\Omega}\text{-ში.}$$

დირიხლეს ამოცანა 7.2.1. Ω არეში ვიპოვოთ $u\in C^2(\Omega)\bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$ ამონახსნი Ω არეში მოცემული Lu-სა და $\partial\Omega$-ზე მოცემული u-ს მნიშვნელობებით.

კელდიშის ამოცანა 7.2.2. Ω არეში ვიპოვოთ $u\in C^2(\Omega)\bigcap C\left(\Omega\bigcup\sigma\right)$ ამონახსნი Ω არეში მოცემული Lu-სა და σ-ზე მოცემული u-ს მნიშვნელობებით.

ვთქვათ,

$$I_\delta:=\{(x,y)\in\Omega\colon 0<y<\delta,\ \delta=\text{const}>0\}\,.$$

თეორემა 7.2.3.**) თუ ან $n<1$, ან $n\ge 1$ და

$$b(x,y)<y^{n-1}\ \ \text{რაიმე}\ \ \bar{I}_\delta\text{-ში,} \tag{7.1.6}$$

დირიხლეს ამოცანა კორექტულია, მაშინ როდესაც კელდიშის ამოცანას ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა აქვს. თუ $n\ge 1$,

$$b(x,y)\ge y^{n-1}\ \ \text{რაიმე}\ \ \bar{I}_\delta\text{-ში}$$

და

$$a(x,y)=O\left(y^m\right),\ \ y\to 0+\,,$$

---

*) მ. ვ. კელდიში (1911 – 1978) – რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსი

**) იხ. G. Jaiani, On a Generalization of the Keldysh Theorem, Georgian Mathematical Journal, Vol.2, 3, pp. 117-120, 1996

(O ლანდაუს[*] სიმბოლოა), კელდიშის ამოცანა კორექტულია, მაშინ, როდესაც დირიხლეს ამოცანა, საზოგადოდ, ამოხსნადი არ არის.

კელდიშის თეორემა 7.1.6. თუ ან $n<1$, ან $n=1$ და $b(x,0)<1$, ან $1<n<2$ და $b(x,0)\le 0$, ან $n\ge 2$ და $b(x,0)<0$, დირიხლეს ამოცანა კორექტულია, მაშინ, როდესაც კელდიშის ამოცანას ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა აქვს. თუ ან $n=1$ და $b(x,0)\ge 1$, ან $1<n<2$ და $b(x,0)>0$, ან $n\ge 2$ და $b(x,0)\ge 0$, კელდიშის ამოცანა კორექტულია, მაშინ, როდესაც დირიხლეს ამოცანა, საზოგადოდ, ამოხსნადი არ არის.

[*] ე. გ. ჰ. ლანდაუ (1877 – 1938) – გერმანელი მათემატიკოსი