ლექცია 13

6. კერძოწარმოებულიანი განტოლებების ამონახსნების სიგლუვის შესახებ

6.1. ელიფსური განტოლებები

პუასონის (3.2.12) ფორმულიდან

$$\left(u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_0^R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^n} \varphi(\xi) dS_\xi \right)$$

გამომდინარეობს, რომ R რადიუსიანი ბირთვისთვის დირიხლეს ამოცანის ამონახსნი ლაპლასის განტოლების შემთხვევაში $|x| < R$ ბირთვში ანალიზური (ე. ი. ბირთვის ნებისმიერი შიგა წერტილის რაიმე მიდამოში იშლება აბსოლუტურად კრებად ხარისხოვან მწკრივად $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ) ფუნქციაა, რისთვისაც საკმარისია, ბირთვის საზღვარზე მოცემული φ ფუნქცია იქ მხოლოდ უწყვეტი (ე. ი. შეიძლება საზღვრის არცერთ წერტილში არ იყოს დიფერენცირებადი) იყოს. უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს თვისება ვრცელდება უფრო ზოგად ელიფსურ განტოლებებზე. მაგალითად, თუ სიბრტყეზე განვიხილავთ მეორე რიგის წრფივ ელიფსურ განტოლებებს ანალიზური კოეფიციენტებით, მაშინ მათი რეგულარული ამონახსნების ანალიზურობა x_1 და x_2 ცვლადების მიმართ გამომდინარეობს ამონახსნების ი. ვეკუას ცნობილი ზოგადი წარმოდგენებიდან.

6.2. პარაბოლური განტოლებები

პარაგრაფ 5.1-ში დავამტკიცეთ, რომ თუ მოცემული

$$\varphi(x) = u(x,0)$$

სასაზღვრო ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია, მაშინ (5.1.1) სითბოგამტარებლობის (პარაბოლური) განტოლებისთვის (5.1.5), (5.1.6) პირველი სასაზღვრო ამოცანის

$$\left(u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi k}{L} x \right)$$

(5.1.9) ამონახსნს აქვს ყველა რიგის წარმოებული x-ისა და t-ს მიმართ

$$\Omega := \{(x,t) : x \in]0, L[, \ \ t \in]0, T[\}$$

არეში.

როცა

$$\varphi(x) = u(x,0), \ \ x \in]-\infty, +\infty[,$$

სასაზღვრო ფუნქცია შემოსაზღვრული და უწყვეტია, კოში-დირიხლეს (5.1.1), (5.2.1) ამოცანის (5.2.3) ფორმულით მოცემულ $u(x,t)$ ამონახსნს

$$\left(u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} d\xi \right)$$

აქვს ყველა რიგის წარმოებული x-ისა და t-ს მიმართ.

6.3. ჰიპერბოლური განტოლებები

წინა ორ პარაგრაფში მოყვანილი ელიფსური და პარაბოლური განტოლებების ამონახსნებისთვის დამახასიათებელი სიგლუვის თვისება არ ახასიათებს ჰიპერბოლურ განტოლე-

ბებს, კერძოდ, სიმის რხევის განტოლებისთვის კოშისა და გურსას ამოცანების ამონახსნებს.

მაგალითად, თუ განვიხილავთ უსასრულო სიმის რხევას

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad x \in]-\infty,+\infty[, \quad \varphi_0 \in C^2, \tag{6.3.1}$$

კოშის პირობებით, როგორც ეს (4.1.12) ფორმულიდან გამომდინარეობს, (4.1.4) განტოლების ამონახსნს ექნება

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)\right] \tag{6.3.2}$$

სახე.

(6.3.2) ფორმულიდან ნათელია, რომ (4.1.4), (6.3.1) კოშის ამოცანის ამონახსნის სიგლუვის რიგი ემთხვევა $\varphi_0(x)$ საწყისი მონაცემის სიგლუვის რიგს. ე. ი., თუ $\varphi_0 \in C^k\left(]-\infty,+\infty[\right)$, მაშინ $u(x,t) \in C^k$, როცა $x \in]-\infty,+\infty[$ და $t \in]0,+\infty[$. აღსანიშნავია, რომ თუ $\varphi_0(x)$ საწყისი მონაცემს აქვს წყვეტა $x = x_0$ წერტილში, ეს წყვეტა გაყვება $u(x,t)$ ამონახსნს

$$x - at = x_0 \quad \text{და} \quad x + at = x_0$$

მახასიათებლების გასწვრივ.