ლექცია 12

5. პარაბოლური განტოლებები

5.1. სითბოგამტარებლობის განტოლება. პირველი სასაზღვრო ამოცანა

პარაბოლური განტოლების უმარტივესი მაგალითია სითბოგამტარებლობის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{5.1.1}$$

განტოლება.

(5.1.1) განტოლების მახასიათებელ განტოლებას აქვს

$$(dt)^2=0$$

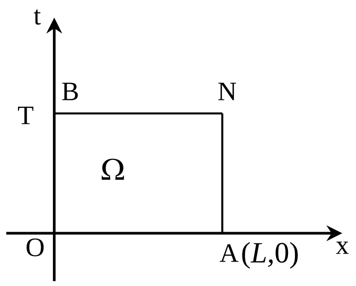
სახე, საიდანაც

$$dt=0$$

და

$$t=\text{const}. \tag{5.1.2}$$

ამდენად, (5.1.2) წრფეები, რომლებიც, ცხადია, x ღერძის პარალელური წრფეებია, წარმოადგენენ მახასიათებელ წრფეებს.



ნახ. 5.1.1

Oxt სიბრტყეზე განვიხილოთ Ω არე (იხ. ნახ. 5.1.1), რომელიც შემოსაზღვრულია $t=0$ და $t=T$ მახასიათებელი წრფეების OA და BN მონაკვეთებით და $x=0$ და $x=L$ წრფეების OB და AN მონაკვეთებით. S-ით აღვნიშნოთ Ω არის საზღვრის ნაწილი, რომელიც შედგება OA, OB და AN –ისგან, ამასთან $B\in S$ და $N\in S$.

$u(x,t)$ ფუნქციას, რომელსაც x-ის მიმართ მეორე და t-ს მიმართ პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები აქვს $\Omega\bigcup BN$ სიმრავლეზე და აკმაყოფილებს (5.1.1) განტოლებას, ამ განტოლების რეგულარული ამონახსნი ეწოდება.

ადრე უფრო ზოგადი პარაბოლური განტოლებისთვის მოყვანილი ექსტრემუმის პრინციპიდან გამომდინარეობს (5.1.1) განტოლებისთვის შემდეგი

ექსტრემუმის პრინციპი 5.1.1. $\Omega\bigcup S\bigcup BN$ სიმრავლეზე უწყვეტი (5.1.1) განტოლების $u(x,t)$ რეგულარული ამონახსნი თავის ექსტრემუმს აღწევს S-ზე.

პირველი სასაზღვრო ამოცანა 5.1.2. ვეძებოთ (5.1.1) განტოლების Ω არეში რეგულარული ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (5.1.1) განტოლებას და შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$u\big|_{OB}=\psi_1(t),\; u\big|_{AN}=\psi_2(t),\; u\big|_{OA}=\varphi(x),\; \psi_1(0)=\varphi(0),\; \psi_2(0)=\varphi(L), \tag{5.1.3}$$

სადაც ψ_1, ψ_2 და φ მოცემული ნამდვილი, უწყვეტი ფუნქციებია.

თეორემა 5.1.3. პირველი სასაზღვრო ამოცანა 5.1.2 ცალსახად ამოხსნადია.

დამტკიცება. მართლაც, თუ $u_1(x,t)$ და $u_2(x,t)$ ფუნქციები (5.1.1), (5.1.3) ამოცანის ამონახსნებია, მაშინ მათი

$$u(x,t):=u_1(x,t)-u_2(x,t) \tag{5.1.4}$$

სხვაობაც (5.1.1) განტოლების რეგულარული ამონახსნი იქნება, რომელიც S-ზე ნული ხდება. ექსტრემუმის პრინციპის თანახმად, $u(x,t)$ თავის მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობას S-ზე აღწევს. იქ კი მინიმუმიც და მაქსიმუმიც ნულის ტოლია, ე. ი.,

$$u(x,t)=0,\quad \text{როცა}\quad (x,t)\in\Omega\bigcup S\bigcup BN,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5.1.1), (5.1.3) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა.

დავამტკიცოთ ამონახსნის არსებობაც, როცა სასაზღვრო პირობებს აქვს

$$u(0,t)=0,\; u(L,t)=0,\; 0\le t<T, \tag{5.1.5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\quad 0\le x\le L\,, \tag{5.1.6}$$

სახე, სადაც $\varphi\in C^1([0,L])$ და ნული ხდება, როცა $x=0$, $x=L$.

როგორც ეს ანალიზის კურსიდანაა ცნობილი, $\varphi(x)$ ფუნქცია $[0,L]$ სეგმენტზე შეიძლება გავშალოთ ფურიეს აბსოლუტურად და თანაბრად კრებად

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \tag{5.1.7}$$

მწკრივად, სადაც

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)dx\,,\ k=1,2,\cdots.$$

უშუალოდ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$u_k(x,t)=e^{-\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \tag{5.1.8}$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს (5.1.1) განტოლებას და

$$u_k(0,t)=0\,,\ u_k(L,t)=0\,,\ u_k(x,0)=\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

სასაზღვრო პირობებს.

ცხადია,

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke^{-\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \tag{5.1.9}$$

მწკრივი, თუ მისი ორჯერ x-ით და ერთხელ t-თი წევრ-წევრად გაწარმოება დასაშვებია, (5.1.1), (5.1.5), (5.1.6) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს. ადვილი დასანახია, რომ როცა $t>0$, (5.1.9) მწკრივი და მისი ნებისმიერი რიგის წარმოებული x-ით და t-თი აბსოლუტურად და თანაბარად კრებადია. მართლაც, თუ (5.1.9) მწკრივს ფორმალურად გავაწარმოებთ m-ჯერ x-ით და n-ჯერ t-თი, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{\pi k}{L}\right)^{m+2n}e^{-\frac{\pi^2k^2t}{L^2}}\begin{cases}(-1)^{n+l-1}\cos\left(\dfrac{\pi k}{L}x\right), \text{ როცა } m=2l-1,\ \ l=1,2,\cdots,\\[2mm] (-1)^{n+l}\sin\left(\dfrac{\pi k}{L}x\right), \text{ როცა } m=2l,\quad l=1,2,\cdots.\end{cases} \tag{5.1.10}$$

აღვნიშნოთ $c_k(x,t)$-თი ამ უკანასკნელის ზოგადი წევრი, მაშინ, რადგან $|a_k|<C=const$ $\forall k$-სთვის, ამიტომ

$$|c_k(x,t)|\le C\left(\frac{\pi k}{L}\right)^{m+2n}e^{-\frac{\pi^2k^2t_0}{L^2}}\,,\ 0<t_0<t<T\,.$$

მაგრამ, თუ მარჯვენა მხარეს, რომელიც არ არის დამოკიდებული x-ზე და t-ზე, მივიღებთ მწკრივის ზოგად წევრად, რადგან

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\pi(k+1)}{L}\right)^{m+2n}\left(\frac{L}{\pi k}\right)^{m+2n}e^{-\frac{\pi^2(k+1)^2t_0}{L^2}+\frac{\pi^2k^2t_0}{L^2}}=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{m+2n}e^{-\frac{2k+1}{L^2}\pi^2t_0}=0$$

მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშნის თანახმად, ეს მწკრივი, რომელიც (5.1.10) მწკრივის მაჟორანტაა, კრებადი იქნება. აქედან გამომდინარე (5.1.10) მწკრივი იქნება თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადი ნებისმიერი $m=1,2,\ldots$ რიცხვისთვის, რაც კანონზომიერს ხდის (5.1.9) მწკრივის m-ჯერ x-ით და n-ჯერ t-თი გაწარმოებას.

თუ (5.1.6) საწყისი მონაცემი მოცემულია, როცა $t=t_0$, მაშინ (5.1.5) პირობების შემთხვევაში არსებობს პირველი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, რომელიც წარმოიდგინება (5.1.9) ფორმულით, სადაც მარჯვენა მხარეში t უნდა შევცვალოთ $(t-t_0)$-ით.

შევნიშნოთ, რომ მწკრივს $(5.1.9)$ ფორმულის მარჯვენა მხარეში, როცა $t<0$, აზრი შეიძლება საერთოდ არ ჰქონდეს.

5.2. კოში-დირიხლეს ამოცანა

ვთქვათ,

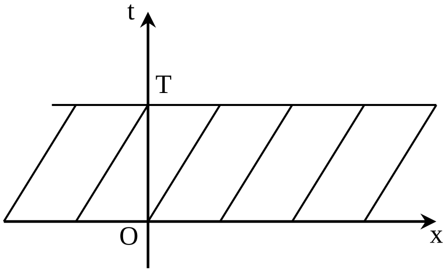
$$\Omega:=\left\{(x,t): x\in\,]-\infty,+\infty[,\ 0\le t\le T\right\},$$

სადაც T ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, ამასთან $T=+\infty$ შემთხვევასაც არ გამოვრიცხავთ (იხ. ნახ. 5.2.1).

კოში-დირიხლეს*) ამოცანა 5.2.1. Ω ზოლში ვეძებთ $(5.1.1)$ განტოლების რეგულარულ $u(x,t)$ ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in\,]-\infty,+\infty[\,, \tag{5.2.1}$$

პირობას, სადაც შემოსაზღვრული $\varphi(x)\in C\big(]-\infty,+\infty[\big)$ მოცემული ფუნქციაა.



ნახ. 5.2.1

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$E(x,\xi,t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}},\ \ t>\tau\,, \tag{5.2.2}$$

ფუნქცია $(5.1.1)$ განტოლების ამონახსნია $t>\tau$ ნახევარსიბრტყის ყველა (x,t) წერტილში. მას $(5.1.1)$ განტოლების ფუნდამენტალური (ელემენტარული) ამონახსნი ეწოდება.

თეორემა 5.2.2.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi \tag{5.2.3}$$

ფუნქცია წარმოადგენს კოში-დირიხლეს ამოცანის ამონახსნს.

დამტკიცება. ცვლადთა

$$\xi=x+2\eta\sqrt{t}$$

გარდაქმნით $(5.2.3)$ ინტეგრალი დაიყვანება

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\big(x+2\eta\sqrt{t}\big)e^{-\eta^2}d\eta \tag{5.2.4}$$

სახეზე. რადგან ამოცანის პირობის თანახმად $\varphi(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი M, რომ

$$\sup_{x\in\,]-\infty,+\infty[}|\varphi(x)|<M\,,$$

$(5.2.4)$ ინტეგრალი თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია და

$$|u(x,t)|<\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta\,.$$

საიდანაც

$$|u(x,t)|\le M\,,$$

რადგან

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta=\sqrt{\pi}\,. \tag{5.2.5}$$

---

*) სახელი გამომდინარეობს იმ მოსაზრებიდან, რომ ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში $(5.2.1)$ პირობა შეიძლება გავიგოთ როგორც საწყისი (რადგან $t=0$ დროის საწყისი მომენტია), ასევე სასაზღვრო (რადგან $t=0$ საზღვარია $t>0$ ნახევარსიბრტყის) პირობა.

ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ (5.2.3) ინტეგრალი და მისი ნებისმიერი რიგის წარმოებული x-ით და t-თი თანაბრად კრებადია ყოველი (x,t), $t>0$, წერტილის მახლობლობაში. ამდენად, (5.2.3) ინტეგრალი შეიძლება გავაწარმოოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ორჯერ x-ით და ერთხელ t-თი; ახლა, თუ პირველს გამოვაკლებთ მეორეს, რადგან (5.2.2), თუ $\tau=0$, წარმოადგენს (5.2.1) განტოლების ამონახსნს, როცა $t>0$, დავასკვნით, რომ (5.2.3) ინტეგრალიც (5.2.1) განტოლების ამონახსნია, როცა $t>0$.

ვინაიდან (5.2.4) ინტეგრალი თანაბრად კრებადია x-ის და t-ს მიმართ, ამიტომ შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა, როცა $t\to 0+$, და, (5.2.5)-ის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$\lim_{k\to 0+} u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-\eta^2}d\eta=\varphi(x).$$ ■

ვთქვათ, ახლა $g(x,t)$, $x\in]-\infty,+\infty[$, $t\in[0,+\infty[$, მოცემული უწყვეტი შემოსაზღვრული ფუნქციაა. თუ მონაცემის მატარებლად ნაცვლად $t=0$ წრფისა ავიღებთ $t=\tau$ წრფეს, სადაც τ ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, და განვიხილავთ

$$v(x,t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}g(\xi,\tau)d\xi,\ \ t>\tau,$$

ფუნქციას, ადვილი დასანახია, როგორც ეს ზემოთ გავაკეთეთ (ან ახალი $t_1=t-\tau$ ცვლადის შემოტანით), რომ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}=0,\ \ t>\tau,\ \text{და}\ \ v(x,\tau,\tau)=g(x,\tau). \tag{5.2.6}$$

ამ ტოლობებისა და პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოების წესის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{5.2.7}$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს სითბოგამტარებლობის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=-g(x,t) \tag{5.2.8}$$

არაერთგვაროვან განტოლებას და

$$u(x,0)=0 \tag{5.2.9}$$

პირობას. მართლაც, (იხ. (5.2.6)),

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=v(x,t,t)+\int_0^t\frac{\partial v(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau=g(x,t)+\int_0^t\frac{\partial v(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau, \tag{5.2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^t\frac{\partial^2 v(x,t,\tau)}{\partial x^2}d\tau. \tag{5.2.11}$$

(5.2.10), (5.2.11)-დან კი, იმის გათვალისწინებით, რომ $v(x,t,\tau)$ აკმაყოფილებს (5.2.6) განტოლებას, გამომდინარეობს (5.2.8). (5.2.9) ნათელია (5.2.7)-დან.

შენიშვნა 5.2.3. ცხადია, (5.2.3) და (5.2.7) ფუნქციების ჯამი გვაძლევს (5.2.8) განტოლების რეგულარულ ამონახსნს, რომელიც (5.2.1) პირობას აკმაყოფილებს. ამდენად ის წარმოადგენს არაერთგვაროვანი სითბოგამტარებლობის განტოლებისთვის კოში-დირიხლეს ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს.