ლექცია 11

4.3. კოშის ამოცანა კანონიკური სახის მეორე რიგის ზოგადი ჰიპერბოლური განტოლებისთვის ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში

შევისწავლოთ (4.2.1) განტოლება განსახილველ არეში (იხ. ნახ. 4.3.1) უწყვეტი კოეფიციენტებითა და მარჯვენა მხარით. ვთქვათ, l რაიმე წირია Oxy სიბრტყეში, რომელსაც x და y ღერძების პარალელური წრფეები [(4.2.1) განტოლების შემთხვევაში — მახასიათებელი წრფეები] არაუმეტეს ერთ წერტილში კვეთენ. ვთქვათ, l წირის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს

$$y=g(x) \quad \text{ან} \quad x=h(y)$$

სახით. ამასთან $g'(x)$ და $h'(y)$ წარმოებულები ნულისგან განსხვავებულია. ამ თვისებებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ l წირის არცერთ წერტილში მხები არ ემთხვევა მახასიათებელ მიმართულებას (იხ. ნახ. 4.3.1).

l წირზე დავასახელოთ კოშის

$$u\Big|_{y=g(x)}=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_1(x) \tag{4.3.1}$$

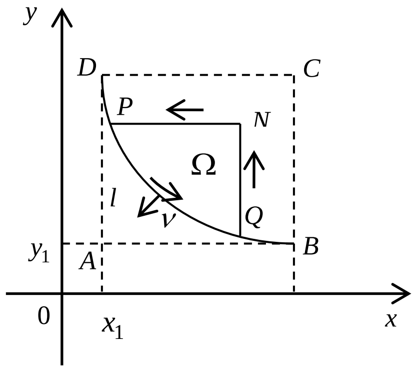
პირობები, φ_1 უწყვეტი, ხოლო φ_0 უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. (4.3.1) კოშის მონაცემები $y=g(x)$ წირზე $\frac{\partial u}{\partial x}$-ის გამოთვლის საშუალებას იძლევა. მართლაც, თუ (4.3.1)-დან პირველს x-ის მიმართ გავაწარმოებთ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} g'(x)=\varphi'_0(x),$$

საიდანაც

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)}=\varphi'_0(x)-\varphi_1(x)g'(x)=\omega(x). \tag{4.3.2}$$

კოშის ამოცანა 4.3.1. l წირის რაიმე მიდამოში ვიპოვოთ (4.2.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს კოშის (4.3.1) პირობებს.



ნახ.4.3.1

თეორემა 4.3.2. კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

დამტკიცება. თეორემა 4.2.2-ის დამტკიცების მსგავსად შემოვიღოთ (4.2.4) და (4.2.5) აღნიშვნები. მაშინ (4.2.1) განტოლება დავა ექვივალენტურ (4.2.6), (4.2.7), (4.2.5) სისტემაზე. $ABCD$ მართკუთხედში (იხ. ნახ. 4.3.1) ავიღოთ ნებისმიერი $N(x,y)$ წერტილი და გავატაროთ მასზე NP და NQ მახასიათებლები l წირის გადაკვეთამდე. თუ (4.2.6)-სა და (4.2.5)-ს ვაინტეგრებთ QN-ის, ხოლო (4.2.7)-ს — PN-ის გასწვრივ და გავითვალისწინებთ (4.3.1)-ს, (4.3.2)-სა და (4.2.7)-ს, მივალთ

$$v(x,y)=\omega(x)+\int_{g(x)}^{y}\big[F(x,\tau)-a(x,\tau)v(x,\tau)-b(x,\tau)w(x,\tau)-c(x,\tau)u(x,\tau)\big]d\tau, \tag{4.3.3}$$

$$w(x,y)=\varphi_1(x)+\int_{h(y)}^{x}\big[F(t,y)-a(t,y)v(t,y)-b(t,y)w(t,y)-c(t,y)u(t,y)\big]dt, \tag{4.3.4}$$

$$u(x,y)=\varphi_0(x)+\int_{g(x)}^{y}w(x,\tau)d\tau \tag{4.3.5}$$

ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემამდე u, v და w-ს მიმართ. ცხადია, თუ (4.2.1), (4.3.1) ამოცანის $u(x,y)$ ამონახსნი არსებობს, მაშინ u, v და w დააკმაყოფილებენ ვოლტერას (4.3.3)-(4.3.5) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას. პირიქით, (4.3.3)-(4.3.5) სისტემის (u,v,w) უწყვეტი ამონახსნი აკმაყოფილებს (4.2.6), (4.2.7), (4.2.5) სისტემას, ხოლო $u(x,y)$ აკმაყოფილებს (4.2.1) განტოლებას და (4.3.1) კოშის პირობებს. მართლაც, (4.3.5) განტოლების y-ის მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = w .$$

გარდა ამისა, (4.2.5), (4.2.7), (4.3.2) და (4.3.3) ტოლობების თანახმად, (4.3.5)-ის x-ის მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_0(x) + \int_{g(x)}^{y} \frac{\partial w}{\partial x} dy - w(x,y)\big|_{y=g(x)} \cdot g'(x)$$

$$= \varphi'_0(x) - \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=g(x)} \cdot g'(x) + \int_{g(x)}^{y} \big[F(x,\tau) - av - bw - cu\big] d\tau$$

$$= \omega(x) + \int_{g(x)}^{y} \big[F(x,\tau) - av - bw - cu\big] d\tau = v .$$

ე. ი., (4.2.4)-იც დაკმაყოფილებულია. ახლა, თუ (4.2.4)-ს ჩავსვამთ (4.2.6)-ში, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $u(x,y)$ დააკმაყოფილებს (4.2.1)-ს. თუ (4.3.5)-ში ჩავსვამთ $y = g(x)$-ს, მაშინ მივიღებთ, რომ $u(x,y)$ აკმაყოფილებს კოშის პირველ პირობას (4.3.1)-დან. შემდეგი მსჯელობებიდან [იხ. (4.2.5) და (4.3.4)]

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=g(x)} = w\big|_{y=g(x)} = \varphi_1(x) + \int_{h[g(x)]}^{x} \big[F(t,y) - av - bw - cu\big] dt = \varphi_1(x) ,$$

რადგან

$$h\big[g(x)\big] = x ,$$

ვრწუნდებით, რომ $u(x,y)$ კოშის მეორე პირობასაც აკმაყოფილებს.

ამრიგად, კოშის ამოცანა დავიდა (4.3.3)-(4.3.5) ვოლტერას ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის უწყვეტი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის დამტკიცებამდე, რასაც მივაღწევთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენებით ზუსტად ისევე, როგორც ეს (4.2.10)-(4.2.12) ვოლტერას ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის შემთხვევაში, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$\int_{g(x)}^{y} |\cdots| d\tau \le \int_{y_1}^{y} |\cdots| d\tau , \quad \int_{h(y)}^{x} |\cdots| dt \le \int_{x_1}^{x} |\cdots| dt ,$$

და ამდენად შეფასებები დაემთხვა წინა პარაგრაფის შეფასებებს იმ განსხვავებით, რომ x_0, y_0-ის ნაცვლად გვექნება x_1, y_1. ■

4.3.1. რიმანის[*)] მეთოდი. ახლა იმ პირობით, რომ კოშის ამოცანის ამონახსნი არსებობს, ავაგოთ ცხადი სახით მისი ინტეგრალური წარმოდგენა საწყისი მონაცემების საშუალებით.

ვთქვათ, (4.2.1) განტოლების კოეფიციენტები უწყვეტად წარმოებადია და მასთან ერთად განვიხილოთ მისი შეუღლებული

$$L^* v := \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = f(x,y) \qquad (4.3.6)$$

განტოლება.

[*)] გ. ფ. ბ. რიმანი (1826 – 1866) – გერმანელი მათემატიკოსი

უშუალო გაწარმოებით ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი დიფერენციალური იგივობის სამართლიანობაში:

$$vLu - uL^*v = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right). \qquad (4.3.7)$$

განვიხილოთ Ω არე (იხ. ნახ. 4.3.1), რომელიც შემოსაზღვრულია l წირის PQ რკალით და $N(x_0, y_0)$ ფიქსირებული წერტილებიდან გამომავალი მახასიათებელი წრფეებით. თუ $u, v \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ და PQ ლიაპუნოვის წირია, მაშინ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით $(4.3.7)$-დან გვექნება, რომ

$$\int_\Omega (vLu - uL^*v)dxdy$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)\cos(\nu, x) + \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right)\cos(\nu, y)\right]dS, \qquad (4.3.8)$$

სადაც Γ შედგება QN და NP მახასიათებლებისა და PQ რკალისგან, ν გარე ნორმალია და არის საზღვარზე დადებით მიმართულებად აღებულია ის მიმართულება, რომელიც არეს მარცხნივ ტოვებს.

რადგან

$$\cos(\nu, x) = \frac{dy}{dS}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{dx}{dS}, \qquad (4.3.9)$$

$(4.3.8)$ და $(4.3.9)$-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_\Omega (vLu - uL^*v)dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy - \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right)dx\right]. \qquad (4.3.10)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ QN მახასიათებლის გასწვრივ ინტეგრება გვექნება მხოლოდ y-ით (რადგან იქ $dx = 0$), ხოლო NP-ს გასწვრივ – მხოლოდ x-ით (რადგან იქ $dy = 0$). თუ მოვახდენთ ნაწილობრივ ინტეგრებას, გვექნება, რომ

$$\frac{1}{2}\int_{QN}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy = \int_{QN}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial y} + auv\right]dy$$
$$= \frac{1}{2}(uv)\Big|_Q^N - \int_{QN} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy, \qquad 4.3.11)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{NP}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right)dx = -\frac{1}{2}(uv)\Big|_N^P + \int_{NP} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx. \qquad (4.3.12)$$

$(4.3.11)$-ისა და $(4.3.12)$-ის $(4.3.10)$-ში ჩასმით მივიღებთ, რომ

$$(uv)_N = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2}\int_{PQ}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy\right.$$
$$\left. - \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right)dx\right] + \int_{QN} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy + \int_{PN} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bu\right)dx \qquad (4.3.13)$$
$$+ \int_Q (vLu - uL^*v)dxdy.$$

ახლა დავუშვათ, რომ $u(x, y)$ $(4.2.1)$ განტოლების ამონახსნია, რომელიც კოშის $(4.3.1)$ პირობებს აკმაყოფილებს, ხოლო $v(x, y)$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან შეუღლებულ

$$L^*v = 0 \qquad (4.3.14)$$

განტოლებას და

$$v\big|_{x=x_0} = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,\tau)d\tau}, \quad v\big|_{y=y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} b(t,y_0)dt} \tag{4.3.15}$$

პირობებს, შესაბამისად QN და NP მახასიათებლებზე. v წარმოადგენს (4.3.14), (4.3.15) გურსას ამოცანის ამონახსნს, რომლის არსებობა, ერთადერთობა და მონაცემებზე უწყვეტად დამოკიდებულება §4.2-ში ვაჩვენეთ. ეს ამონახსნი, ცხადია, (x_0, y_0) წერტილის შერჩევაზეა დამოკიდებული და, ამდენად ბუნებრივია, ის განვიხილოთ, როგორც სიბრტყის ორი წერტილის ფუნქცია:

$$v = v(x, y; x_0, y_0).$$

(4.3.15)-ის გალოგარითმებით და გაწარმოებით მივიღებთ, რომ NQ მახასიათებელზე

$$\frac{\partial v(x_0, y; x_0, y_0)}{\partial y} = a(x_0, y)v(x_0, y; x_0, y_0), \tag{4.3.16}$$

ხოლო NP მახასიათებელზე

$$\frac{\partial v(x, y_0; x_0, y_0)}{\partial x} = b(x, y_0)v(x, y_0; x_0, y_0). \tag{4.3.17}$$

გარდა ამისა, (4.3.15)-დან ცხადია, რომ

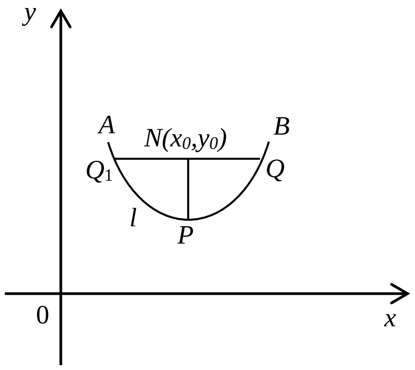
$$v(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1. \tag{4.3.18}$$

(4.3.14), (4.3.16), (4.3.17) ამოცანის ამონახსნს *რიმანის ფუნქცია* ეწოდება. რიმანის ფუნქცია არ არის დამოკიდებული l წირზე კოშის (4.3.1) მონაცემებზე და არც l წირის სახეზე. რიმანის ფუნქციისთვის (x, y) არგუმენტის, ხოლო (x_0, y_0) პარამეტრის როლს თამაშობს. თუ ახლა (4.3.13)-ში ჩავსვამთ რიმანის v ფუნქციას, გავითვალისწინებთ (4.2.1) განტოლებას, (4.3.16), (4.3.17) პირობებს და (4.3.18)-ს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} \\ &- \frac{1}{2}\int_{PQ}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy - \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2buv\right)dx\right] + \int_{\Omega} vFdxdy. \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

(4.3.19) ფორმულა გვაძლევს (4.2.1) განტოლების ამონახსნის წარმოდგენას რიმანის ფუნქციის საშუალებით ნებისმიერი საწყისი მონაცემებით მახასიათებელ l წირზე. რიმანის ფუნქციის აგების ხერხიდან გამომდინარე, თუ კოშის ამოცანა ამოხსნადია, მაშინ მისი ამონახსნი ერთადერთია (შევნიშნოთ, რომ პარაგრაფის დასაწყისში ერთადერთობა სხვა ხერხით დავამტკიცეთ). (4.3.19) წარმოდგენიდან უშუალოდ გამომდინარეობს კოშის ამოცანის ამონახსნის უწყვეტი დამოკიდებულება საწყის მონაცემებზე. (4.3.19) ფორმულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე ის, რომ ამონახსნის მნიშვნელობა $N(x_0, y_0)$ წერტილში დამოკიდებულია საწყის მონაცემებზე l წირის მხოლოდ იმ ნაწილზე, რომელსაც N წერტილიდან გავლებული მახასიათებლები მოკვეთენ მისგან. თუ საწყის მონაცემებს შევცვლით PQ რკალის გარეთ, ისე, რომ P და Q წერტილებში უწყვეტობა შევინარჩუნოთ, მაშინ ამონახსნი მხოლოდ NPQ მრუდწირული სამკუთხედის გარეთ შეიცვლება. ასე, რომ ყოველი მახასიათებელი წრფე გამოყოფს არეს, სადაც ამონახსნი უცვლელია, იმ არისგან, სადაც ამონახსნი იცვლება. აქედან გამომდინარე, ყოველი მახასიათებელი წრფის მიღმა ამონახსნი შეიძლება არაცალსახად გაგრძელდეს.

და ბოლოს შევნიშნოთ, რომ იმის მოთხოვნა, რომ მახასიათებელი წრფეები l წირს მხოლოდ ერთ წერტილში უნდა კვეთდნენ, არსებითია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში კოშის ამოცანა, საზოგადოდ, ამოხსნადი არ ექნება. ვთქვათ, l წირს ნახ. 4.3.2-ზე მითითებული სახე აქვს. რიმანის მეთოდით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ საძიებელი $u(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $N(x_0, y_0)$ წერტილში როგორც PQN, ასევე Q_1PN მრუდწირული სამკუთხედის გამოყენებით. N წერტილში მნიშვნელობა ერთ შემთხვევაში განისაზღვრება საწყისი მონაცემებით PQ რკალზე, ხოლო მეორე შემთხვევაში – Q_1P რკალზე, ამდენად, შესაბამისი



ნახ.4.3.2

რიმანის ფორმულები, საზოგადოდ, სხვადასხვა მნიშვნელობებს მოგვცემენ $N(x_0,y_0)$ წერტილში და, აქედან გამომდინარე, კოშის ამოცანა ამოხსნადი არ იქნება.

4.3.2. რიმანის ფუნქციის აგება. რიმანის ფუნქცია, რომელიც გურსას (4.3.14), (4.3.15) ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს, შეიძლება აგებულ იქნეს შესაბამისი ინტეგრალური განტოლების მიმდევრობითი მიახლოებითი ამოხსნით. მართლაც, (4.3.14)-ის, ე. ი. ერთგვაროვანი (4.3.6) განტოლების ჯერ x-ით, ხოლო შემდეგ y-ით ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial v(x_0,y)}{\partial y}-a(x,y)v(x,y)+a(x_0,y)v(x_0,y)$$

$$-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial (by)}{\partial y}(t,y)dt+\int_{x_0}^{x}c(t,y)v(t,y)dt=0,$$

$$v(x,y)-v(x,y_0)-v(x_0,y)+v(x_0,y_0)$$
$$-\int_{y_0}^{y}a(x,\tau)v(x,\tau)d\tau+\int_{y_0}^{y}a(x_0,\tau)v(x_0,\tau)d\tau-\int_{x_0}^{x}b(t,y)v(t,y)dt \qquad (4.3.20)$$
$$+\int_{x_0}^{x}b(t,y_0)v(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}d\tau\int_{x_0}^{x}c(t,\tau)v(t,\tau)dt=0.$$

(4.3.16)-ის და (4.3.17)-ის ინტეგრებით, თუ გავითვალისწინებთ (4.3.18)-ს, გვექნება, რომ

$$v(x_0,y)-\int_{y_0}^{y}a(x_0,\tau)v(x_0,\tau)d\tau=v(x_0,y_0)=1, \qquad (4.3.21)$$

$$v(x,y_0)-\int_{x_0}^{x}b(t,y_0)v(t,y_0)dt=v(x_0,y_0)=1. \qquad (4.3.22)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.3.21)-სა და (4.3.22)-ს, მაშინ (4.3.20) შეიძლება ჩავწეროთ $v(x,y)$-ის მიმართ შემდეგი ვოლტერას მეორე გვარის წრფივი ინტეგრალური განტოლების სახით:

$$v(x,y)-\int_{y_0}^{y}a(x,\tau)v(x,\tau)d\tau-\int_{x_0}^{x}b(t,y)v(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}d\tau\int_{x_0}^{x}c(t,\tau)v(t,\tau)dt=1. \qquad (4.3.23)$$

ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ (4.3.23) ინტეგრალური განტოლება ცალსახად ამოხსნადია და, ამდენად, მივიღეთ რიმანის ფუნქციის არსებობის ერთადერთობის კიდევ ერთი დამტკიცება. გარდა ამისა, (4.3.23) განტოლების მიმდევრობითი მიახლოებითი ამოხსნა გვაძლევს რიმანის ფუნქციის აგების კონსტრუქციულ გზას.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, რიმანის ფუნქცია ოთხი ცვლადის

$$v=R(x,y;x_0,y_0)$$

ფუნქციაა. თუ (4.3.15)-დან პირველში x_0-ს შევცვლით x-ით, ხოლო მეორეში y_0-ს – y-ით და შემდეგ გავაწარმოებთ შესაბამისად y_0-ითა და x_0-ით, მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial R(x,y;x,y_0)}{\partial y_0}+a(x,y_0)R(x,y;x,y_0)=0, \qquad (4.3.24)$$

$$\frac{\partial R(x,y;x_0,y)}{\partial x_0}+b(x_0,y)R(x,y;x_0,y)=0. \qquad (4.3.25)$$

(4.3.15)-დან ცხადია აგრეთვე, რომ

$$R(x,y;x,y)=1. \qquad (4.3.26)$$

თუ (4.3.14) განტოლების განხილვის Ω არეში $u(x_0,y_0)\in C^2$, ადვილად დავრწმუნდებით

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial y_0}\left[u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y)\right]-R(x_0,y_0;x,y)Lu(x_0,y_0)\\&=\frac{\partial}{\partial x_0}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y_0}-aR\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y_0}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x_0}-bR\right)\right]\end{aligned} \qquad (4.3.27)$$

იგივეობის სამართლიანობაში. მართლაც, უშუალო გაწარმოებით გვექნება, რომ

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x_0\partial y_0}R+\frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial R}{\partial x_0}+\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial R}{\partial y_0}+u\frac{\partial^2 R}{\partial x_0\partial y_0}-R\frac{\partial^2 u}{\partial x_0\partial y_0}-aR\frac{\partial u}{\partial x_0}-bR\frac{\partial u}{\partial y_0}-cRu\\&=\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial R}{\partial y_0}-aR\frac{\partial u}{\partial x_0}+u\frac{\partial^2 R}{\partial x_0\partial y_0}-u\frac{\partial (aR)}{\partial x_0}+\frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial R}{\partial x_0}-bR\frac{\partial u}{\partial y_0}+u\frac{\partial^2 R}{\partial y_0\partial x_0}-u\frac{\partial (bR)}{\partial y_0}.\end{aligned}$$

მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ დაგვრჩება

$$u\left[\frac{\partial^2 R}{\partial x_0\partial y_0}-\frac{\partial (aR)}{\partial x_0}-\frac{\partial (bR)}{\partial y_0}+cR\right]=0.$$

ეს უკანასკნელი სრულდება, რადგან R ფუნქცია x_0,y_0 წყვილის მიმართ აკმაყოფილებს (4.3.14) განტოლებას.

ვაინტეგროთ (4.3.27) x_0-სა და y_0-ის მიმართ

$$x_*\le x_0\le x,\quad y_*\le y_0\le y$$

ინტერვალებში, სადაც (x_*,y_*) წერტილი Ω არის ნებისმიერი წერტილია. ცხადია, (4.3.26)-ის გამო,

$$\begin{aligned}&\int_{x_*}^{x}dt\int_{y_*}^{y}\frac{\partial^2 u(t,\tau)R(t,\tau;x,y)}{\partial\tau\partial t}d\tau=\int_{x_*}^{x}\left[\frac{\partial u(t,y)R(t,y;x,y)}{\partial t}-\frac{\partial u(t,y_*)R(t,y_*;x,y)}{\partial t}\right]dt\\&=u(x,y)R(x,y;x,y)-u(x_*y)R(x_*y;x,y)-u(x,y_*)R(x,y_*;x,y)+u(x_*,y_*)R(x_*,y_*;x,y)\\&=u(x,y)-u(x_*,y)R(x_*,y;x,y)-u(x,y_*)R(x,y_*;x,y)+u(x_*,y_*)R(x_*,y_*;x,y),\end{aligned}$$

ხოლო, (4.3.17)-ის თანახმად, ნაწილობით ინტეგრებით,

$$\begin{aligned}&\int_{x_*}^{x}dt\int_{y_*}^{y}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{u(t,\tau)\left[\frac{\partial R(t,\tau;x,y)}{\partial t}-b(t,\tau)R(t,\tau;x,y)\right]\right\}d\tau\\&=\int_{x_*}^{x}\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial R(t,y;x,y)}{\partial t}-b(t,y)R(t,y;x,y)\right]-u(t,y_*)\left[\frac{\partial R(t,y_*;x,y)}{\partial t}-b(t,y_*)R(t,y_*;x,y)\right]\right\}dt\\&=-u(x,y_*)R(x,y_*;x,y)+u(x_*,y_*)R(x_*,y_*;x,y)+\int_{x_*}^{x}R(t,y_*;x,y)\left[\frac{\partial u(t,y_*)}{\partial t}+b(t,y_*)u(t,y_*)\right]dt.\end{aligned}$$

ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ (4.3.16)-ს, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}&\int_{x_*}^{x}d\tau\int_{y_*}^{y}\frac{\partial}{\partial t}\left\{u(t,\tau)\left[\frac{\partial R(t,\tau;x,y)}{\partial\tau}-a(t,\tau)R(t,\tau;x,y)\right]\right\}dt\\&=-u(x_*,y)R(x_*,y;x,y)+u(x_*,y_*)R(x_*,y_*;x,y)\\&+\int_{y_*}^{y}R(x_*,\tau;x,y)\left[\frac{\partial u(x_*,\tau)}{\partial\tau}+a(x_*,\tau)u(x_*,\tau)\right]d\tau.\end{aligned}$$

ამრიგად, გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(x_*,y_*)R(x_*,y_*;x,y) \\ &+ \int_{x_*}^{x} R(t,y_*;x,y)\left[\frac{\partial u(t,y_*)}{\partial t} + b(t,y_*)u(t,y_*)\right]dt \\ &+ \int_{y_*}^{y} R(x_*\tau;x,y)\left[\frac{\partial u(x_*,\tau)}{\partial \tau} + a(x_*,\tau)u(x_*,\tau)\right]d\tau \\ &+ \int_{x_*}^{x} dt \int_{y_*}^{y} R(t,\tau;x,y)Lu(t,\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

როცა

$$u(x,y) = R(x_*,y_*;x,y),$$

(4.3.24)-(4.3.26)-ის გათვალისწინებით, (4.3.28)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{x_*}^{x} dt \int_{y_*}^{y} R(t,\tau;x,y)\, LR(x_*,y_*;t,\tau)d\tau = 0. \tag{4.3.29}$$

რადგან (4.3.29) ნებისმიერი $(x,y)\in\Omega$ წერტილისთვის სრულდება, ამიტომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლი უნდა იყოს, საიდანაც

$$LR(x_*,y_*;t,\tau) = 0. \tag{4.3.30}$$

ამრიგად, რიმანის ფუნქცია t, τ ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს (4.2.1) განტოლებას.

(4.3.24)-(4.3.26)-ისა და (4.3.30)-ის თანახმად, უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ (4.2.1) განტოლების უწყვეტი $F(x,y)$ მარჯვენა მხარის შემთხვევაში,

$$u_0(x,y) = \int_{x_*}^{x} dt \int_{y_*}^{y} R(t,\tau;x,y)F(t,\tau)d\tau$$

წარმოადგენს (4.2.1) განტოლების კერძო ამონახსნს.

შენიშვნა 4.3.3. განვიხილოთ კანონიკური სახის მეორე რიგის ელიფსური განტოლება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში:

$$Eu = \Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y). \tag{4.3.31}$$

თუ შემოვიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{და} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

ოპერატორებს, სადაც

$$z = x + iy, \quad \zeta = x - iy,$$

(4.3.31) განტოლება ჩაიწერება

$$Hu := \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)u = F(z,\zeta) \tag{4.3.32}$$

სახით, სადაც

$$A(z,\zeta) := \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) + ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],$$

$$B(z,\zeta) := \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) - ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],$$

$$C(z,\zeta) := \frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \quad F(z,\zeta) := \frac{1}{4}f\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right).$$

(4.3.32)-ის და (4.2.1)-ის გარეგნული მსგავსება იძლევა რიმანის ფუნქციის კომპლექსური ცვლადების შემთხვევაში განზოგადების საშუალებას, რაც წარმატებით გამოიყენა ი. ვეკუამ.

მან ააგო ელიფსური განტოლებების ფართო კლასისთვის ე. წ. ზოგადი ამონახსნების წარმოდგენები რიმანის ფუნქციის საშუალებით და გამოიკვლია ზოგადი სახის სასაზღვრო ამოცანები.