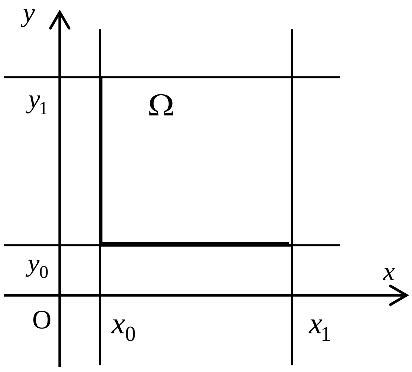
ლექცია 10 08/10/2008

4.2. გურსას*) (მახასიათებლებზე მონაცემებით) ამოცანა კანონიკური სახის მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისთვის ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში

განვიხილოთ კანონიკური სახის

$$Lu:=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=F(x,y) \qquad (4.2.1)$$



ნახ.4.2.1

ჰიპერბოლური განტოლება

$$\overline{\Omega}:=\left\{(x,y): x\in[x_0,x_1],\ y\in[y_0,y_1]\right\}$$

მართკუთხედში უწყვეტი კოეფიციენტებითა და მარჯვენა მხარით (იხ. ნახ. 4.2.1). (4.2.1) განტოლების მახასიათებელ განტოლებას აქვს

$$dydx=0$$

სახე, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$x=\text{const} \text{ და } y=\text{const}$$

მახასიათებელი წრფეებია.

4.2.1. გურსას (მახასიათებელი) ამოცანა. ვიპოვოთ (4.2.1) განტოლების $u\in C^2(\Omega)\bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$ ამონახსნი, რომელიც $x=x_0$ და $y=y_0$ მახასიათებლებზე აკმაყოფილებს

$$\begin{aligned} u(x_0,y)&=\varphi_1(y), \text{ როცა } y\in[y_0,y_1],\\ u(x,y_0)&=\varphi_2(x), \text{ როცა } x\in[x_0,x_1], \end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

პირობებს, ამასთან სრულდება შეთანხმების

$$\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0) \qquad (4.2.3)$$

პირობა და $\varphi_1(y),\varphi_2(x)\in C^1$ მათი განსაზღვრის სეგმენტებზე.

თეორემა 4.2.2. გურსას ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

დამტკიცება. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$v:=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (4.2.4)$$

$$w:=\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (4.2.5)$$

მაშინ (4.2.1) შეიძლება გადმოვწეროთ

$$\frac{\partial v}{\partial y}=F(x,y)-av-bw-cu, \qquad (4.2.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=F(x,y)-av-bw-cu, \qquad (4.2.7)$$

სისტემის სახით. (4.2.6)-ის, (4.2.7)-ის და (4.2.5)-ის ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

---

*) ე. ჟ. ბ. გურსა (1858-1936) – ფრანგი მათემატიკოსი

$$v(x,y)=v(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\left[F(x,\tau)-a(x,\tau)v(x,\tau)-b(x,\tau)w(x,\tau)-c(x,\tau)u(x,\tau)\right]d\tau,$$

$$w(x,y)=w(x_0,y)+\int_{x_0}^{x}\left[F(t,y)-a(t,y)v(t,y)-b(t,y)w(t,y)-c(t,y)u(t,y)\right]dt, \qquad (4.2.8)$$

$$u(x,y)=u(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}w(x,\tau)d\tau.$$

(4.2.4)-დან და (4.2.5)-დან, (4.2.2)-ის გათვალისწინებით,

$$v(x,y_0)=\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial x}=\varphi'_2(x),$$
$$w(x_0,y)=\frac{\partial u(x_0,y)}{\partial y}=\varphi'_1(y). \qquad (4.2.9)$$

თუ (4.2.9)-სა და (4.2.2)-ს ჩავსვამთ (4.2.8)-ში, გვექნება

$$v(x,y)=\varphi'_2(x)+\int_{y_0}^{y}\left[F(x,\tau)-a(x,\tau)v(x,\tau)-b(x,\tau)w(x,\tau)\right.$$
$$\left.-c(x,\tau)u(x,\tau)\right]d\tau, \qquad (4.2.10)$$

$$w(x,y)=\varphi'_1(y)+\int_{x_0}^{x}\left[F(t,y)-a(t,y)v(t,y)-b(t,y)w(t,y)\right.$$
$$\left.-c(t,y)u(t,y)\right]dt, \qquad (4.2.11)$$

$$u(x,y)=\varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y}w(x,\tau)d\tau. \qquad (4.2.12)$$

u-ს, v-სა და w-ს მიმართ ვოლტერას[*)] ინტეგრალურ განტოლებათა ამ სისტემის ამონახსნი აკმაყოფილებს (4.2.6), (4.2.7), (4.2.5) სისტემას, რაშიც გაწარმოებით უშუალოდ დავრწმუნდებით. გარდა ამისა, თუ x-ით გავაწარმოებთ (4.2.12)-ს და მხედველობაში მივიღებთ (4.2.7)-სა და (4.2.10)-ს, ცხადია,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'_2(x)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x}d\tau$$

$$=\varphi'_2(x)+\int_{y_0}^{y}\left[F(x,\tau)-a(x,\tau)v(x,\tau)-b(x,\tau)w(x,\tau)-c(x,\tau)u(x,\tau)\right]d\tau=v\,.$$

ამდენად, კმაყოფილდება (4.2.4)-იც. ახლა, თუ (4.2.5)-ს ჩავსვამთ (4.2.7)-ში ან (4.2.4)-ს ჩავსვამთ (4.2.6)-ში მივიღებთ, რომ u აკმაყოფილებს (4.2.1)-ს. (4.2.12)-დან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.2.9)-ს და (4.2.3)-ს, გამომდინარეობს, რომ

$$u(x,y_0)=\varphi_2(x)\,,$$

$$u(x_0,y)=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y}w(x_0,\tau)d\tau=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y_1}\varphi'_1(\tau)d\tau$$

$$=\varphi_2(x_0)+\varphi_1(y)-\varphi_1(y_0)=\varphi_1(y)\,.$$

[*)] ვ. ვოლტერა (1860 – 1940) – იტალიელი მათემატიკოსი

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (4.2.10)-(4.2.12) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გვაძლევს გურსას (4.2.1), (4.2.2) ამოცანის ამონახსნს. (4.2.10)-(4.2.12) სისტემა გურსას (4.2.1), (4.2.2) ამოცანის ექვივალენტურია. (4.2.10)-(4.2.12) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს ვპოულობთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. ვთქვათ,

$$v_0 = \varphi'_2(x),\ \ w_0 = \varphi'_1(y),\ \ u_0 = \varphi_2(x),$$

და

$$v_n(x,y) = \varphi'_2(x) + \int_{y_0}^{y}\big[F(x,\tau) - a(x,\tau)v_{n-1}(x,\tau) - b(x,\tau)w_{n-1}(x,\tau)$$
$$- c(x,\tau)u_{n-1}(x,\tau)\big]d\tau,$$
$$w_n(x,y) = \varphi'_1(y) + \int_{x_0}^{x}\big[F(t,y) - a(t,y)v_{n-1}(t,y) - b(t,y)w_{n-1}(t,y)$$
$$- c(t,y)u_{n-1}(t,y)\big]dt,$$
$$u_n(x,y) = \varphi_2(x) + \int_{y_0}^{y} w_{n-1}(x,\tau)d\tau,\ \ n = 1,2,\cdots. \tag{4.2.13}$$

ცხადია,

$$v_{n+1}(x,y) - v_n(x,y) = -\int_{y_0}^{y}[a(x,\tau)(v_n - v_{n-1}) + b(x,\tau)(w_n - w_{n-1}) + c(x,\tau)(u_n - u_{n-1})]d\tau,$$
$$w_{n+1}(x,y) - w_n(x,y) = -\int_{x_0}^{x}[a(t,y)(v_n - v_{n-1}) + b(t,y)(w_n - w_{n-1}) + c(t,y)(u_n - u_{n-1})]dt, \tag{4.2.14}$$
$$u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y) = \int_{y_0}^{y}\big[w_n(x,\tau) - w_{n-1}(x,\tau)\big]d\tau.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი შეფასებები:

$$|v_n - v_{n-1}| \le K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$
$$|w_n - w_{n-1}| \le K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{4.2.15}$$
$$|u_n - u_{n-1}| \le K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

სადაც

$$K := \max\{1, M\}$$
$$M := \max_{\Omega}\big[|a(x,y)| + |b(x,y)| + |c(x,y)|\big], \tag{4.2.16}$$

ხოლო A n-ისგან დამოუკიდებელი გარკვეული რიცხვია.

როცა $n=1$, (4.2.15)-ის სამართლიანობა ნათელია (4.2.13)-დან. დავუშვათ მისი სამართლიანობა n-ისთვის და დავამტკიცოთ $(n+1)$-ისთვის. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ (4.2.16)-ს, (4.2.14)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|v_{n+1}-v_n\right| \le \int_{y_0}^{y}\left(|a|+|b|+|c|\right)K^{n-1}A\frac{\left(x+\tau-x_0-y_0\right)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau \le AK^{n-1}M\int_{y_0}^{y}\frac{\left(x+\tau-x_0-y_0\right)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau$$
$$\le AK^n\int_{y_0}^{y}\frac{\left(x+\tau-x_0-y_0\right)^{n-1}}{(n-1)!}d\tau = AK^n\left[\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^n}{n!}-\frac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}\right]$$
$$\le AK^n\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^n}{n!}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენი ორი უტოლობა (4.2.15)-დან.

(4.2.15) შეფასებებიდან გამომდინარეობს

$$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right),\ v_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n-v_{n-1}\right),\ w_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(w_n-w_{n-1}\right)$$

მწკრივების თანაბრად კრებადობა $\overline{\Omega}$-ზე, რამდენადაც მათი წევრები არ აღემატებიან $\overline{\Omega}$-ზე თანაბრად კრებად

$$A+A\sum_{n=1}^{\infty}K^{n-1}\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^{n-1}}{(n-1)!}=A+Ae^{K\left(x+y-x_0-y_0\right)}$$

მწკრივის შესაბამის წევრებს. ამდენად, u_n, v_n და w_n $\overline{\Omega}$-ზე თანაბრად მიისწრაფვიან გარკვეული ზღვრებისკენ, როცა $n\to\infty$. ახლა, თუ (4.2.13)-ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$, u_n, v_n და w_n მიმდევრობების თავიანთი u, v და w ზღვრებისკენ თანაბრად კრებადობიდან გამომდინარე, შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა და მივიღებთ, რომ u, v და w ზღვრები დააკმაყოფილებენ (4.2.10)-(4.2.12) სისტემას. ამით გურსას ამოცანის ამოხსნადობა დამტკიცებულია.

გურსას ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის დამტკიცების მიზნით განვიხილოთ ორი შესაძლო ამონახსნის u, v და w სხვაობა. ეს სხვაობა დააკმაყოფილებს (4.2.10)-(4.2.12) სისტემას, სადაც

$$F(x,y)\equiv 0,\ \varphi_1(y)\equiv 0,\ \varphi_2(x)\equiv 0,$$

სახელდობრ,

$$v(x,y)=-\int_{y_0}^{y}\left[a(x,\tau)v(x,\tau)+b(x,\tau)w(x,\tau)+c(x,\tau)u(x,\tau)\right]d\tau,$$
$$w(x,y)=-\int_{x_0}^{x}\left[a(t,y)v(t,y)+b(t,y)w(t,y)+c(t,y)u(t,y)\right]dt, \tag{4.2.17}$$
$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}w(x,\tau)d\tau,$$

სისტემას. რადგან u, v და w ფუნქციები უწყვეტია ჩაკეტილ Ω მართკუთხედზე, ამიტომ არსებობს ისეთი $A>0$ მუდმივი, რომ

$$|v|\le A,\ |w|\le A,\ |u|\le A.$$

(4.2.17)-დან გვექნება, რომ

$$
\begin{aligned}
&|v(x,y)| \le \int_{y_0}^{y} \left(|a|+|b|+|c|\right) A\, d\tau \le AK\left(y-y_0\right) \le AK\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^1}{1!}\\
&|w(x,y)| \le AK\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^1}{1!},\\
&|u(x,y)| \le AK\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^1}{1!}.
\end{aligned} \tag{4.2.18}
$$

(4.2.17)-დან, თუ გავითვალისწინებთ (4.2.18)-ს, მივიღებთ, რომ

$$
|v(x,y)| \le \int_{y_0}^{y} \left(|a|+|b|+|c|\right) AK\,\frac{\left(x+\tau-x_0-y_0\right)^1}{1!}\,d\tau
$$

$$
\le AK^2\left[\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^2}{2!}-\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]d\tau \le AK^2\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^2}{2!}\;.
$$

ანალოგიურად,

$$
|w(x,y)| \le AK^2\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^2}{2!}\,,
$$

$$
|u(x,y)| \le AK^2\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^2}{2!}\,.
$$

მათემატიკური ინდუქციით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$
|v(x,y)| \le AK^n\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^n}{n!}\,,
$$

$$
|w(x,y)| \le AK^n\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^n}{n!}\,,
$$

$$
|u(x,y)| \le AK^n\,\frac{\left(x+y-x_0-y_0\right)^n}{n!}\,.
$$

თუ უკანასკნელ შეფასებაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, გვექნება, რომ

$$
v(x,y) \equiv 0\,,\quad w(x,y) \equiv 0\,,\quad u(x,y) \equiv 0\,.
$$

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ $x < x_0$, $y < y_0$ შემთხვევა.