ლექციების კურსი

მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები

შესავალი

თანამედროვე მოთხოვნების პირობებში ფართო პროფილით მათემატიკური განათლების მქონე სპეციალისტების მომზადების უმთავრეს მიზანს წარმოადგენს მათთვის მყარი მათემატიკური ცოდნის მიცემა ბუნებრივ (ფიზიკურ) და სოციალურ-ეკონომიკურ პროცესებთან კავშირში. რამდენადაც აღნიშნული პროცესები უმთავრესად დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება, მათემატიკოსის ჩამოყალიბებაში ღერძული მნიშვნელობა მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების საფუძვლიან შესწავლას ენიჭება. კერძოდ, ისინი უნდა იცნობდნენ მათემატიკური ფიზიკის ძირითად განტოლებებს, უნდა იცოდნენ მათი მომცველი ზოგადი სახის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიკაცია, ამონახსნების თვისებები, შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო ამოცანების კორექტულად დასმა და მათი გამოკვლევის ძირითადი მეთოდები. სასწავლო კურსის შინაარსში მითითებული თემების ნაწილი სტუდენტებმა დამოუკიდებლად უნდა მოამზადონ სასემინარო მუშაობისთვის.

ლექცია 1

ჩვენ განვიხილავთ *მატერიალურ ობიექტებს,* რომელთა ქვეშ გვესმის ყოველგვარი სხეული, რომელსაც შესწავლის პროცესში შეუძლია ნებისმიერად იცვალოს ფორმა და მდებარეობა სივრცეში. ასეთებს განეკუთვნებიან გაზები, სითხეები ან მყარი სხეულები, რომელთაც სივრცეში გარკვეული მოცულობა უკავიათ. დაკვირვებებიდან ცნობილია, რომ მატერიალურ ობიექტებს მოლეკულური აგებულება აქვთ. მეორე მხრივ, რაგინდ მცირე არ უნდა ავიღოთ სხეულის მოცულობის ელემენტი, ის უამრავ მოლეკულას შეიცავს. მაგალითად, ჰაერის კუბი, რომლის წიბო $0{,}001$ მმ-ია, შეიცავს $2{,}7\cdot 10^7$ მოლეკულას. თუ ვიგულისხმებთ, რომ სხეული დაყოფილია ამგვარ ელემენტებად, ისინი შეიძლება პრაქტიკულად უსასრულო მცირეებად ჩავთვალოთ და დავახასიათოთ სიჩქარის, აჩქარების და მოლეკულებზე მოქმედი ძალების საშუალო მნიშვნელობებით. ამგვარად შეიძლება მივიღოთ წარმოდგენა *უწყვეტ გარემოზე,* როგორადაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ სხეულებს. მატერიალური ობიექტების უწყვეტ გარემოდ მიღება გვაძლევს მათემატიკური ანალიზის მეთოდების გამოყენების საშუალებას.

მექანიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მატერიალური ობიექტების მოძრაობასა და წონასწორობას სივრცესა და დროში. მექანიკის ის ნაწილი, რომელიც *თეორიული მექანიკის* სახელითაა ცნობილი, მოიცავს მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის მათემატიკური აღწერის მეთოდებს. *მექანიკური მოძრაობა* კი სხე-

ულების ფარდობით გადაადგილებას ეწოდება. მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის ძირითადი კანონებია *ნიუტონის*$^{*)}$ *კანონები*:

1. *ინერციის კანონი.* სხეული იმყოფება მოსვენებულ (უძრავ) მდგომარეობაში ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად, თუ გარე ძალების მოქმედების შედეგად იგი არ იცვლის თავის მდგომარეობას, ე. ი. მისი სიჩქარე (ერთეული $m/s =$ მ/წმ)$^{**)}$ მუდმივია

$$\vec{\mathrm{v}} = const.$$

2. *ძალისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი.* მოძრავ სხეულზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა (ერთეული $N =$ ნიუტონი$^{***)}$) მისი m მასისა (ერთეული $kg =$ კგ)$^{****)}$ და $\vec{a}$ აჩქარების (ერთეული $m/s^2 =$ მ/წმ^2) ნამრავლის ტოლია:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

3. *ქმედებისა და უკუქმედების კანონი.* ორი სხეულის ერთმანეთზე ზემოქმედების ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართული.

რაიმე წერტილის მიმართ ძალის მომენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც ამ წერტილის ძალის მოდების წერტილთან შემაერთებელი ვექტორის (მის საწყის წერტილად მიღებულია წერტილი, რომლის მიმართაც ითვლება მომენტი) და ძალის ვექტორის ვექტორული ნამრავლის ტოლია.

სხეულზე მოქმედი ძალების, როგორც სრიალა ვექტორების, ჯამს ეწოდება სხეულზე მოქმედ ძალთა *ნაკრები (მთავარი) ვექტორი*, ხოლო მათი მომენტების ჯამს – *ნაკრები (მთავარი) მომენტი.*

ამბობენ, რომ სხეული *წონასწორობის მდგომარეობაშია,* თუ მასზე მოქმედი ძალებია წონასწორობაში, ხოლო *ძალთა სისტემა წონასწორობაშია*, თუ მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

ამდენად, წონასწორობაში მყოფ სხეულზე მოქმედი ყველა გარე ძალის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

$^{*)}$ ი. ნიუტონი (1643-1727) – ინგლისელი ფიზიკოსი და მათემატიკოსი

$^{**)}$ მეტრი (მ) – სინათლის მიერ ვაკუუმში 1/299 792 458 წამში გავლილი მანძილი. წამი (წმ) – ცეზიუმის (^{133}Cs) ატომის ძირითადი მდგომარეობის ორ ზენაზ დონეს შორის გადასვლის შესაბამისი გამოსხივების 9 192 631 770 პერიოდის ტოლი დრო. აქ და შემდგომში მითითებულია ერთეულები საერთაშორისო ერთეულთა SI სისტემაში. ამ სისტემაში ძირითად სიდიდეებად (ერთეულებად) მიღებულია სიგრძე (L), დრო (T), მასა, თერმოდინამიკური ტემპერატურა, ნივთიერების რაოდენობა, ელექტრული დენის ძალა და სინათლის ძალა. წარმოებული ერთეული (მაგალითად, სიჩქარის ერთეული) გამოისახება ძირითადი ერთეულების საშუალებით შესაბამისი მათემატიკური ფორმულით. ფიზიკური სიდიდეების ძირითად სიდიდეებად მიღებულ სიდიდეებზე დამოკიდებულების ფორმას *განზომილება* ეწოდება (მაგალითად, $\dim \vec{\mathrm{v}} := LT^{-1}$).

$^{***)}$ 1 ნიუტონი (N, ნ) – ძალა, რომელიც 1 კგ მასის მქონე სხეულს 1 მ/წმ^2 აჩქარებას ანიჭებს ძალის მოქმედების მიმართულებით. 1 ნ $=10^5$ დინი = 0,102 კგძ (კილოგრამძალა).

$^{****)}$ 1 კგ მასა კილოგრამის საერთაშორისო პროტოტიპის მასის ტოლია.

დალამბერის[*)] *პრინციპის* თანახმად მოძრავ სხეულზე მოქმედი გარე ძალები წონასწორდება ინერციის ძალით.

ინერციის ძალა ფიქტიური ძალაა, რომელიც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად $(-m\vec{a})$-ს ტოლია.

თეორიული მექანიკის განტოლებები სრულად აღწერენ მატერიალურ წერტილთა სისტემებისა და *აბსოლუტურად მყარი სხეულების* (ე. ი. ისეთი მყარი სხეულების, რომელთა ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია, მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ძალები მოქმედებენ მათზე) მოძრაობას. თუ მყარი სხეულის განხილვის პროცესში მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილი დროებით ან მუდმივად იცვლება, მაშინ მათ *დეფორმად მყარ სხეულებს,* ხოლო სხეულის წერტილთა მდებარეობის ასეთ ცვლილებას *დეფორმაციას* ვუწოდებთ. დეფორმადი მყარი სხეულების ან გაზების და სითხეების მოძრაობის დასახასიათებლად თეორიული მექანიკის განტოლებები უკვე აღარ გამოდგება. მექანიკის იმ დარგს, რომელიც დეფორმად მყარ სხეულებს, გაზებს და სითხეებს შეისწავლის, *უწყვეტ გარემოთა (სხეულთა) მექანიკა* ეწოდება.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში მიღებულია ე. წ. *გამყარების პრინციპი,* რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

დეფორმადი სხეულის წონასწორობისთვის მასზე მოქმედმა გარე ძალებმა უნდა დააკმაყოფილონ იმავე ფორმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები.

გამყარების პრინციპის თანახმად, დეფორმადი სხეულის წონასწორობის ქვეშ ჩვენ გვესმის ის მდგომარეობა, როცა მისი და მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილის ფორმის მქონე აბსოლუტურად მყარი სხეული წონასწორობაშია დეფორმად სხეულზე და შესაბამისად მის ნებისმიერ ნაწილზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების პირობებში.

მექანიკაში არჩევენ ორი სახის ძალებს: *მოცულობითს* და *ზედაპირულს,* იმისდა მიხედვით, თუ რაზე მოქმედებენ ისინი: მოცულობით თუ ზედაპირულ ელემენტზე. მოცულობითი ძალის ტიპური მაგალითია სიმძიმის და ინერციის ძალები, ხოლო ზედაპირული ძალისა კი – წნევა.

მოცულობითი ძალები მოქმედებენ გარემოს სხვადასხვა ელემენტის მოცულობაზე, უფრო სწორად, მასაზე. მიღებულია, რომ მოცულობის dV უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1) მოქმედ მოცულობით ძალას აქვს $\vec{\Phi}dV$ სახე, სადაც $\vec{\Phi}$ რაიმე სასრული ვექტორია, რომლის მოდების წერტილად შეიძლება მიღებულ იქნეს dV ელემენტის ნებისმიერი შიგა $x=(x_1,x_2,x_3)$ [**)] წერტილი. $\vec{\Phi}$-ს ეწოდება მოცულობის ერთეულზე გათვლილი *მოცულობითი ძალა.* ე.ი. მისი ერთეულია

$$N/m^3 = \text{ნიუტონი/მ}^3 = ((\text{კგ}\bullet\text{მ})/\text{წმ}^2)/\text{მ}^3 = ((kg\cdot m)/s^2)m^3 = kg/m^2s^2 .$$

[*)] ჟ. ლ. დალამბერი (1717-1783) – ფრანგი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი.

[**)] ქვემოთ, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩვენ განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა მარჯვენა $x_1x_2x_3$ სისტემას, რომლის ბაზისია $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$.

თუ ρ გარემოს *სიმკვრივეს*, ე. ი. მოცულობის ერთეულში მოთავსებულ მასას აღნიშნავს, მაშინ მასის ერთეულზე გათვლილი მოცულობითი ძალა, რომელსაც *მასობრივ ძალას* უწოდებენ, $\vec{\Phi}/\rho$-ს ტოლია. $\vec{\Phi}$ დამოკიდებულია ელემენტის მდებარეობაზე გარემოში, ე. ი. x წერტილის *კოორდინატებზე*, ხოლო დინამიკურ შემთხვევაში — დროზეც. მთელ V მოცულობაზე მოქმედი მოცულობითი ძალა გამოისახება შემდეგი სამჯერადი ინტეგრალით (მისი ერთეულია N — ნიუტონი)

$$\vec{\Psi} = \iiint_V \vec{\Phi} dV,$$

ხოლო *მთავარი მომენტი* — ინტეგრალით (მისი ერთეულია $N \cdot m =$ ნიუტონი · მ)

$$\vec{M} = \iiint_V [\vec{x}, \vec{\Phi}] dV, \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

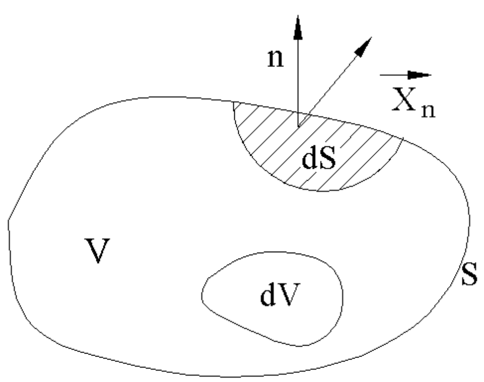
($\vec{x}, \vec{\Phi}$ და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს). ამ უკანასკნელის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე მათ მიმართ მთავარ მომენტებს მოგვცემენ.

მიღებულია, რომ $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ზედაპირის dS უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1) მოქმედ ზედაპირულ ძალას აქვს $\vec{X}_n dS$ სახე, სადაც $\vec{X}_n$ რაიმე სასრული ვექტორია, რომლის *მოდების წერტილად* შეიძლება მიღებულ იქნეს dS ელემენტის ნებისმიერი x შიგა წერტილი. $\vec{X}_n$-ს ეწოდება ფართის ერთეულზე გათვლილი ზედაპირული ძალა (მისი ერთეულია პასკალი[*]) $Pa = N/m^2$). მთელ S ზე ნახ. 1 დაპირზე მოქმედი *ზედაპირული ძალა* (მისი ერთეულია $Pa \cdot m^2 = N$) გამოისახება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით

$$\vec{F} = \iint_S \vec{X}_n dS,$$

ხოლო *მთავარი მომენტი* (მისი ერთეულია $m \cdot Pa \cdot m^2 = N \cdot m$) — ინტეგრალით

$$\vec{X} = \iint_S [\vec{x}, \vec{X}_n] dS.$$

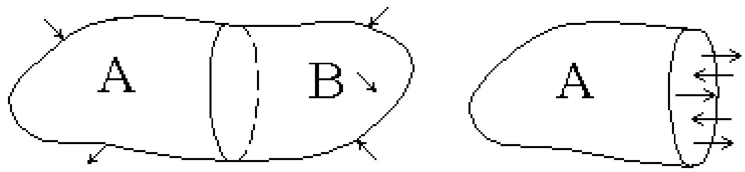


ნახ. 1

[*]) პასკალი (პა, Pa) — წნევისა და მექანიკური დაძაბულობის ერთეული. 1 პა ტოლია წნევისა, რომელსაც 1 მ^2 ფართობის ზედაპირზე თანაბრად განაწილებული 1 ნ ძალა ქმნის.

ბ. პასკალი (1623 – 1662) — ფრანგი ფილოსოფოსი, მწერალი, მათემატიკოსი და ფიზიკოსი

არადეფორმირებულ სხეულში ნაწილაკების განლაგება შეესაბამება სხეულის სითბურ წონასწორობას. თუ სხეულიდან აზრობრივად გამოვყოფთ რაიმე მოცულობას, მაშინ ყველა ძალა, რომელიც მასზე მოქმედებს სხეულის სხვა ნაწილების მხრიდან, გაწონასწორებული იქნება; გარე ძალების მოქმედების შედეგად კი ნაწილაკების განლაგება სხეულში იცვლება, ე. ი. სხეული განიცდის დეფორმაციას, რის შედეგადაც წარმოი-



ნახ. 2

შობა შინაგანი ძალები, რომლებიც ცდილობენ, სხეული პირვანდელ მდგომარეობას დაუბრუნონ. მათი განსაზღვრისთვის გამოიყენება ე. წ. *კვეთის მეთოდი.* ვთქვათ, გარე ძალების მოქმედებით დეფორმირებული სხეული წონასწორობაშია. აზრობრივად გავკვეთოთ ის რაიმე ზედაპირით (იხ. ნახ. 2) ორ, A და B ნაწილებად. აზრობრივად ჩამოვაშოროთ B ნაწილი და მისი მოქმედება A ნაწილზე შევცვალოთ კვეთის გასწვრივ მოდებული ისეთი ძალების მოქმედებით, რომლებიც არ გამოიწვევენ A ნაწილის დეფორმირებული მდგომარეობის შეცვლას. ეს უკანასკნელი ძალები ახლა შეიძლება გავიგოთ, როგორც A ნაწილზე მოდებული გარე ზედაპირული ძალები.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნახ. 1-ზე გამოსახული სხეული რაიმე სხვა სხეულებიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნაწილია, მაშინ $\vec{X}_n dS$-ს უწოდებენ დაძაბულობის ძალას ან ძაბვას, ხოლო $\vec{X}_n$-ს – ფართის ერთეულზე გაანგარიშებულ ძაბვას ან ძაბვის ვექტორს, ე. ი. მისი ერთეულია პასკალი – $Pa = N/m^2$.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{X}_n\, dS$ გამოხატავს იმ ზედაპირულ ძალას, რომლითაც dS-ის საშუალებით S ზედაპირის გარეთ მდებარე გარემოს ნაწილი მოქმედებს მის შიგნით მდებარე ნაწილზე. მაშინ, ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, შიგა ნაწილი dS-ის საშუალებით გარე ნაწილზე $\vec{X}_{-n}\, dS = -\vec{X}_n\, dS$ ზედაპირული ძალით იმოქმედებს. ინდექსი n აღნიშნავს, რომ $\vec{X}_n = (X_{n1}, X_{n2}, X_{n3})$ ძაბვის ვექტორი მოქმედებს $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალის მქონე ფართზე. მის გეგმილს $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებაზე ეწოდება ძაბვის ვექტორის σ_n *ნორმალური მდგენელი,* ხოლო მოდების წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე გეგმილს – τ_n *მხები მდგენელი.*

ძაბვის ტენზორის კომპონენტების აღსანიშნავად გამოიყენება სხვადასხვა აღნიშვნა, რომლებზეც ნათელ წარმოდგენას გვაძლევენ შემდეგი მატრიცული ტოლობები:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

ინგლისელმა მეცნიერმა რობერტ ჰუკმა*) 1678 წელს გამოაქვეყნა მის მიერ ჩატარებული ექსპერიმენტიდან გამომდინარე დასკვნა, რომ ღეროზე მოქმედი გამჭიმავი (ზედაპირული) ძალის ΔT ცვლილებასა და ღეროს წაგრძელების ΔL ცვლილებას შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, როცა გამჭიმავი ძალა გარკვეულ საზღვრებში იცვლება.

1. მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები

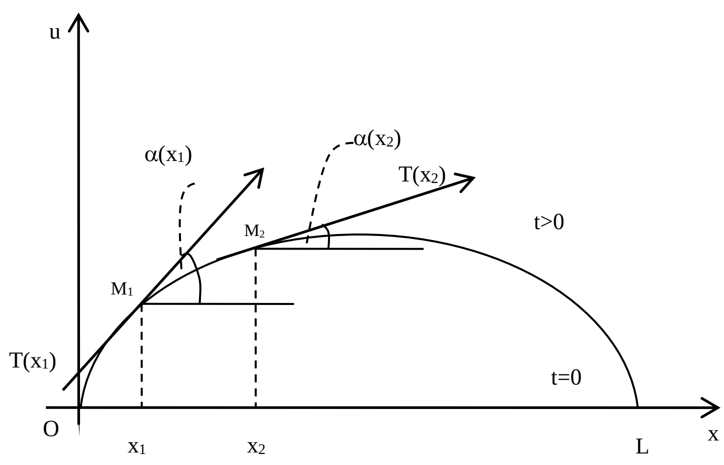
1.1. სიმის მცირე განივი რხევის განტოლება

სიმი ეწოდება დაჭიმულ ძაფს, რომელიც ღუნვას არ ეწინააღმდეგება. ვთქვათ, სიმი ირხევა (x,u) სიბრტყეში. წონასწორობის მდგომარეობიდან სიმის მცირე განივი გადახრა აღვნიშნოთ $u(x,t)$-თი. x სივრცული კოორდინატია, ხოლო t დროა; $T(x,t)$ სიმის დაჭიმულობის ძალაა; ρ სიმის სიმკვრივეა; $F(x,t)$ სიმზე მოქმედი გარე ძალების ინტენსივობაა. თუ T და ρ მუდმივია, მაშინ *სიმის რხევის განტოლებას* აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \ , \tag{1.1.1}$$

სადაც $a^2 := \dfrac{T}{\rho}$, $f := \dfrac{F}{\rho}$. (1.1.1) განტოლებას *ერთგანზომილებიანი ტალღის განტოლებაც* ეწოდება.

გამოვიყვანოთ (1.1.1) განტოლება. ვთქვათ, წონასწორობის მდგომარეობაში, $t=0$ მომენტში, სიმი მიმართულია x ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახ. 1.1.1). რადგან მცირე განივ რხევებს ვიხილავთ, ჩავთვლით, რომ $u(x,t)$ გადაადგილება და $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ იმდენად მცირე სიდიდეებია, რომ მათი უგულებელყოფა დასაშვებია თვით მათთან და მით უფრო 1-თან შედარებით. გამოვყოთ სიმის ნებისმიერი $[x_1, x_2]$ ნაწილი (იხ. ნახ. 1.1.1), რომელიც დეფორმაციას განიცდის და დროის $t>0$ მომენტში M_1M_2 რკალში გადა-



ნახ. 1.1.1

*) რ. ჰუკი (1635-1702) – ინგლისელი ბუნებისმეტყველი

დის. ცხადია, M_1M_2 რკალის l' სიგრძე დაითვლება შემდეგი ფორმულით (წირითი ინტეგრალის გამოყენებით)

$$l=\int_{M_1}^{M_2} dl=\int_{M_1}^{M_2}\sqrt{(du)^2+(dx)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx\int_{x_1}^{x_2}dx=x_2-x_1=:l\,.$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ მცირე რხევების დროს შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ სიმის სიგრძე დროის ცვლილებასთან ერთად არ იცვლება. მაშინ ჰუკის

$$\Delta T=E\Delta l$$

კანონის, სადაც პროპორციულობის E კოეფიციენტს იუნგის*) მოდული ეწოდება, თანახმად $\Delta T=0$, რადგან $\Delta l=0$. ამდენად, დროის ცვლილებასთან ერთად არც დაჭიმულობის ძალა იცვლება, ე. ი., $T=T(x)$.

დალამბერის პრინციპის თანახმად რხევად სიმზე მოქმედი აქტიური და ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი და ამდენად მისი გეგმილები Ox და Ou ღერძებზე 0-ის ტოლია. ჩავწეროთ ეს პირობები იმის გათვალისწინებით, რომ, რამდენადაც სიმის განივ რხევებს ვიხილავთ, ინერციისა და გარე ძალები Ou ღერძის პარალელურია. გვექნება

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2)-T(x_1)\cos\alpha(x_1)=0\,, \tag{1.1.2}$$

$$T(x_2)\sin\alpha(x_2)-T(x_1)\sin\alpha(x_1)+\int_{x_1}^{x_2}F(x,t)dx-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx=0\,. \tag{1.1.3}$$

ჩვენს დაშვებებში

$$\cos\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{1}}=1\,, \tag{1.1.4}$$

$$\sin\alpha(x)=\frac{\mathrm{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1}}=\frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{1.1.5}$$

(1.1.4)-ის გამო (1.1.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$T(x_2)=T(x_1)=T_0=\mathrm{const}\,, \tag{1.1.6}$$

ე. ი., დაჭიმულობის ძალა არც მის მოდების წერტილზეა დამოკიდებული. (1.1.6)-ისა და (1.1.5)-ის ძალით, (1.1.3)-ის პირველი ორი წევრი შემდეგ სახეს მიიღებს

$$T(x_2)\sin\alpha(x_2)-T(x_1)\sin\alpha(x_1)=T_0\left[\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right]=T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx\,. \tag{1.1.7}$$

(1.1.7) ჩავსვათ (1.1.3)-ში

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+F(x,t)\right]dx=0\,. \tag{1.1.8}$$

---

*) თ. იუნგი (1773-1829) – ინგლისელი ფიზიკოსი, ექიმი და ასტრონომი

(1.1.8) სრულდება ნებისმიერი x_1-ისა და x_2-ისთვის. ეს კი მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულია დროის ნებისმიერ t მომენტში

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t), \quad x \in [0,L]. \qquad (1.1.9)$$

აქედან, თუ ρ მუდმივია, გამომდინარეობს (1.1.1).

თუ სიმზე გარე ძალა არ მოქმედებს, ე. ი., $F(x,t) \equiv 0$, მაშინ (1.1.8)-დან გამომდინარეობს სიმის თავისუფალი რხევების

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

განტოლება.

(1.1.8) განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს. ამიტომ საჭიროა ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე დამატებითი პირობები. სახელდობრ, საწყის $t = 0$ მომენტში საჭიროა სიმის მდებარეობისა და მისი ყველა წერტილის სიჩქარის დასახელება:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad (1.1.10)$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ მოცემული ფუნქციებია.

(1.1.10) პირობებს საწყისი პირობები ეწოდება.

რადგან სიმი სასრულია, მის ბოლოებში რაიმე პირობები უნდა გვქონდეს. მაგალითად, თუ ბოლოები ჩამაგრებულია, მაშინ

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \text{ როცა } t \geq 0. \qquad (1.1.11)$$

(1.1.11) პირობებს სასაზღვრო პირობები ეწოდება.

ამრიგად, ბოლოებით დამაგრებული სიმის მცირე განივი რხევების ფიზიკური ამოცანა მივიყვანეთ შემდეგ მის შესაბამის მათემატიკურ მოდელზე — მათემატიკურ ამოცანაზე:

ვიპოვოთ $u(x,t)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები x-ისა და t-ს მიმართ, როცა $x \in [0,L]$, $t \geq 0$, და რომელიც აკმაყოფილებს (1.1.8) განტოლებას, (1.1.10) საწყის და (1.1.11) სასაზღვრო პირობებს.

1.2. მემბრანის მცირე განივი რხევის განტოლება

თხელ დაჭიმულ ფირს, რომელიც ღუნვას არ ეწინააღმდეგება, მემბრანა ეწოდება. *მემბრანის მცირე რხევის განტოლებას* აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f, \qquad (1.2.1)$$

სადაც კოეფიციენტები სიმის ანალოგიურადაა განმარტებული.

1.3. დრეკადი ღეროს რხევის განტოლება

ღეროს დინამიკის განტოლებას აქვს

$$\left[E(x_1)I_2(x_1)w_{,11}\right]_{,11}=q_1(x_1,t)-\rho(x_1)S(x_1)\frac{\partial^2 w(x_1,t)}{\partial t^2}$$

სახე, სადაც მძიმე აღნიშნავს გაწარმოებას მის შემდეგ მითითებული ცვლადის (ინდექსი ,1 ნიშნავს x_1-ით გაწარმოებას, ხოლო ,11 – მეორე რიგის წარმოებულს x_1-ის მიმართ) მიმართ, E იუნგის მოდულია,

$$I_2=\int_F x_3^2 dF$$

წარმოადგენს ე. წ. *ინერციის მომენტს* x_2 ღერძის მიმართ, $\rho(x_1)$ ღეროს სიმკვრივეა, $S(x_1)$ ღეროს განივი კვეთის ფართია, $q_1(x_1,t)$ განივი (x_3 ღერძის პარალელური) დატვირთვის ინტენსივობაა, $w(x_1,t)$ ჩაღუნვაა.

1.4. კირხჰოფ*)-ლიავის**) და რაისნერ***)-მინდლინის განტოლებები

ცვლადი სიხისტის ფირფიტის ღუნვის კირხჰოფ-ლიავის განტოლებას აქვს

$$\left(Du_{3,11}\right)_{,11}+\left(Du_{3,22}\right)_{,22}+\nu\left(Du_{3,22}\right)_{,11}+\nu\left(Du_{3,11}\right)_{,22}+2\left[(1-\nu)Du_{3,12}\right]_{,12}=q$$

სახე, სადაც

$$D(x_1,x_2)=\frac{2Eh^2}{3\left(1-\nu^2\right)}$$

ე. წ. *ცილინდრული სიხისტეა*, ν პუასონის****) კოეფიციენტია, $u_3(x_1,x_2)$ ჩაღუნვაა, $2h(x_1,x_2)$ ფირფიტის სისქეა.

მუდმივი სისქის ფირფიტის ღუნვის რაისნერ-მინდლინის განტოლებას აქვს

$$D\Delta\Delta u_3=q_3-\frac{4h^2(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\Delta q_3+q_{\alpha,\alpha},$$

სახე, სადაც q_i, $i=1,2,3$, გარე დატვირთვის კომპონენტებია, $\Delta(\cdot):=(\cdot)_{,\alpha\alpha}$, ბერძნული ინდექსის გამეორება ნიშნავს აჯამვას 1-დან 2-მდე, $\lambda>0$ და $\mu>0$ ლამეს*****) მუდმივებია.

1.5. წრფივი დრეკადობის თეორიის განტოლებები

დეფორმადი სხეულის დრეკადი წონასწორობა განისაზღვრება წონასწორობის

$$X_{ij,j}+\Phi_i=0,\ i=1,2,3, \tag{1.5.1}$$

განტოლებებით, სადაც X_{ij} ძაბვის ტენზორია, Φ_i მოცულობითი ძალის კომპონენტებია, ხოლო ლათინური ინდექსის გამეორება ნიშნავს აჯამვას 1-დან 3-მდე, და ჰუკის

---

*) გ. რ. კირხჰოფი (1824 – 1887) – გერმანელი ფიზიკოსი

**) ა. ლიავი (ლავი, Love) (1863 – 1940) – ინგლისელი მეცნიერი

***) ე. რაისნერი (1913 – 1996) – ამერიკელი მექანიკოსი

****) ს. დ. პუასონი (1781 – 1840) – ფრანგი მეცნიერი

*****) გ. ლამე (1795 – 1870) – ფრანგი მათემატიკოსი და ინჟინერი

$$X_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ \ i,j = 1,2,3, \qquad (1.5.2)$$

განზოგადებული კანონით (იზოტროპულ შემთხვევაში), სადაც $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ როცა } i = j \\ 0, \text{ როცა } i \neq j \end{cases}$ კრონეკერის[*)] სიმბოლოა u_i, $i = 1,2,3$, გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია. შევნიშნოთ, რომ

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

დეფორმაციის ტენზორია. $(1.5.2)$ გამოსახულება ჩავსვათ $(1.5.1)$-ში, მივიღებთ

$$\lambda\theta_{,j}\delta_{ij} + \mu u_{i,jj} + \mu\theta_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1,2,3.$$

აქედან

$$\mu\Delta u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1,2,3, \qquad (1.5.3)$$

სადაც $\Delta(\cdot) := (\cdot)_{,jj}$, $\theta := u_{k,k}$, ლათინური ინდექსის გამეორება ნიშნავს აჯამვას 1-დან 3-მდე. (1.5.3) სისტემას ეწოდება ლამეს განტოლებები. იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda = \mu$, ის მიღებული იყო ნავიეს[**)] მიერ.

ვთქვათ, სხეულზე მოცულობითი ძალები არ მოქმედებენ, მაშინ $(1.5.3)$-ის x_i-ს მიმართ გაწარმოების და i-ს მიმართ აჯამვის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\theta = 0, \text{ ე. ი. } \Delta\theta = 0, \qquad (1.5.4)$$

რადგან $\lambda + 2\mu > 0$.

თუ დავუშვებთ, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებს მეოთხე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები აქვთ და $(1.5.3)$-ზე ვიმოქმედებთ Δ ოპერატორით, $(1.5.4)$-ის გათვალისწინების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\mu\Delta\Delta u_i + (\lambda + \mu)(\Delta\theta)_{,i} = \mu\Delta\Delta u_i = 0.$$

ამრიგად, თუ სხეულზე მხოლოდ ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, მაშინ მოცულობითი გაფართოება θ ჰარმონიული ფუნქციაა, ხოლო გადაადგილების ვექტორის u_i კომპონენტები ბიჰარმონიული ფუნქციებია.

1.6. იერარქიული მოდელები

პრიზმული გარსების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელები. კირხჰოფ-ლიავის ჰიპოთეზებზე დაფუძნებულ ფირფიტების თეორიას აქვს ის შინაგანი წინააღმდეგობა, რომ ძირითად განტოლებათა სისტემა არ არის თავსებადი ფიზიკურ სასაზღვრო პირობებთან. ამ წინააღმდეგობის თავიდან აცილების ერთი ვარიანტი წინა პარაგრაფში განვიხილეთ. ახლა გავეცნობით კიდევ ერთ ვარიანტს, რომელიც შემოგვთავაზა ი. ვეკუამ. ამასთან განვიხილავთ პრიზმულ გარსებს, რომლებიც ცვლადი სისქის ფირფიტებს, როგორც კერძო შემთხვევას, მოიცავენ.

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z = \overset{(+)}{h}\left(x_1, x_2\right)$ და

[*)] ლ. კრონეკერი (1823 – 1891) – გერმანელი მათემატიკოსი

[**)] ლ. მ. ა. ნავიე (1785 – 1836) – ფრანგი ინჟინერი და მეცნიერი

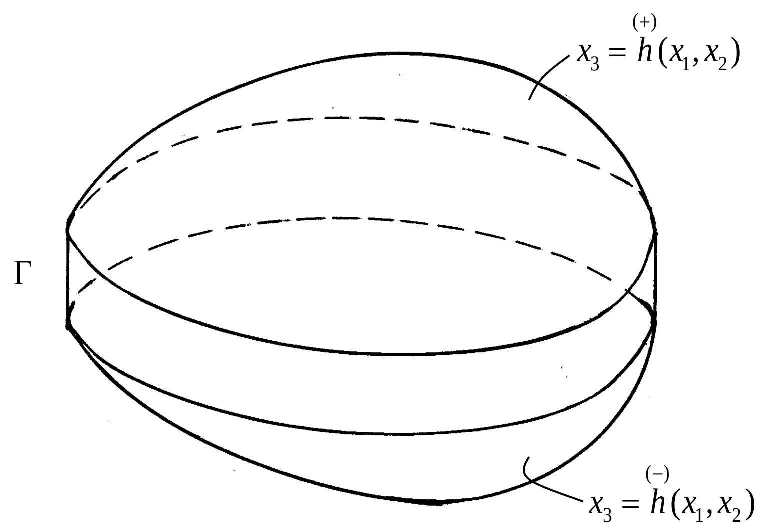
$z = \overset{(-)}{h}(x_1, x_2)$ ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან – Γ ცილინდრული ზედაპირით (იხ. ნახ. 1.6.1), რომლის მსახველი ვერტიკალური Ox_3 ღერძის პარალელურია, ეწოდება *პრიზმული გარსი.* სიმეტრიულ შემთხვევაში, ე. ი. როცა

$$\overset{(-)}{h}(x_1, x_2) = -\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)$$

პრიზმული გარსი ცვლადი სისქის ფირფიტას წარმოადგენს.

$$2h(x_1, x_2) = \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \geq 0$$

სიდიდეს პრიზმული *გარსის სისქე* ეწოდება.



ნახ. 1.6.1

პრიზმული გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე აღვნიშნოთ ω-თი, მის საზღვარს *გარსის საზღვარი* ეწოდება.

ჯერ კიდევ კოშიმ*) გამოიყენა ფირფიტების შესწავლის დროს გადაადგილების, დეფორმაციების და ძაბვების ხარისხოვან მწკრივად გაშლის მეთოდი. ეს მიდგომა აქვთ სხვა ავტორებსაც. ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც ლეჟანდრის**) პოლინომების მიმართ მწკრივად გაშლას ეყრდნობა და რომელზეც ჩვენ შევჩერდებით, ი. ვეკუას ეკუთვნის.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი $f(x) \in C^2([-1,+1])$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს მწკრივად ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(r + \frac{1}{2} \right) f_r \, P_r(x),$$

სადაც

$$P_r(x) := \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r (x^2 - 1)^r}{dx^r}$$

*) ო. ლ. კოში (1789 – 1857) – ფრანგი მათემატიკოსი

**) ა. მ. ლეჟანდრი (1752 – 1833) – ფრანგი მათემატიკოსი

$$\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1}P_r(x)P_l(x)dx=\delta_{rl}\right]$$

ლეჟანდრის პოლინომია, $\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}P_r(x),\ r=0,1,\ldots,\right]$ ორთონორმირებული სისტემაა,

ხოლო

$$f_r:=\int_{-1}^{+1}f(x)P_r(x)dx$$

და მას ეწოდება f-ის r რიგის *მომენტი* ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ.

როცა [-1,+1]-ის ნაცვლად გვაქვს $\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]$ და $f(x_1,x_2,x_3)$-ს ფიქსირებული (x_1,x_2)-სთვის x_3-ის მიმართ აქვს მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები, ე. ი. $f\in C^2_{x_3}\left(\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]\right)$, ცხადია

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{r=0}^{\infty}a\left(r+\frac{1}{2}\right)f_r(x_1,x_2)P_r(ax_3-b)$$

$$\left[a\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}P_r(ax_3-b)P_l(ax_3-b)dx_3=\delta_{kl}\right],$$

სადაც მწკრივი თანაბრად კრებადია $\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]$ სეგმენტზე და

$$a:=\frac{1}{h},\ b:=\frac{\overset{(-)}{h}+\overset{(+)}{h}}{2h},\ f_r(x_1,x_2):=\int_{\overset{(-)}{h}}^{\overset{(+)}{h}}f(x_1,x_2,x_3)P_r(ax_3-b)dx_3\,. \qquad (1.6.1)$$

თუ ვექტორი $(u_i,X_{ij},e_{ij})\in C^2_{x_3}\left(\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]\right)$, მაშინ ის შეიძლება $\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებად შემდეგ მწკრივად გავშალოთ

$$(u_i,X_{ij},e_{ij})=\sum_{r=0}^{\infty}a\left(r+\frac{1}{2}\right)(u_{ir},X_{ijr},e_{ijr})P_r(ax_3-b)\,.$$

ვაიერშტრასის[*)] თეორემის თანახმად x_3-ის ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ x_3-ის მიმართ პოლინომებით. ამიტომ N-ის შერჩევით (u_i,X_{ij},e_{ij})-ს შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ x_3-ის მიმართ ლეჟანდრის პოლინომების შემდეგი ჯამით:

$$(u_i,X_{ij},e_{ij})\cong\sum_{r=0}^{N}a\left(r+\frac{1}{2}\right)(u_{ir},X_{ijr},e_{ijr})P_r(ax_3-b)\,. \qquad (1.6.2)$$

[*)] კ. თ. ვ. ვაიერშტრასი (1815-1897) – გერმანელი მათემატიკოსი

თუ ჰუკის განზოგადებული კანონის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $P_r(ax_3-b)$-ზე და ვაინტეგრებთ $\overset{(-)}{h}$-დან $\overset{(+)}{h}$-მდე x_3-ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$X_{ijr}(x_1,x_2)=\lambda\theta_r(x_1,x_2)\delta_{ij}+2\mu e_{ijr}(x_1,x_2),\ r=0,1,\dots, \tag{1.6.3}$$

რაც წარმოადგენს ჰუკის კანონს, გადაწერილს მომენტებისთვის.

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის შემდეგი განტოლებები მომენტე-ბისთვის

$$X_{\alpha jr,\alpha}+\sum_{s=0}^{\infty}\overset{r}{a}_{is}\,X_{ijs}+\overset{r}{X}_j=\rho\frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2},\quad r=0,1,\dots,\quad j=1,2,3, \tag{1.6.4}$$

სადაც

$$\overset{r}{a}_{\alpha s}:=(2s+1)\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha}-(-1)^{r+s}\overset{(-)}{h}_{,,\alpha}}{2h},\ \ s\neq r,$$

$$\overset{r}{a}_{\alpha r}:=r\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha}-\overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h},\ \ \overset{r}{a}_{3s}:=-(2s+1)\frac{1-(-1)^{r+s}}{2h},$$

$$\overset{r}{X}_j=\overset{(+)}{X}_{3j}-\overset{(+)}{X}_{\alpha j}\overset{(+)}{h}_{,\alpha}+(-1)^r\left[-\overset{(-)}{X}_{3j}+\overset{(-)}{X}_{\alpha j}\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right]+\Phi_{jr}$$

$$=Q_{\overset{(+)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,1}\right)^2+\left(\overset{(+)}{h}_{,2}\right)^2}+(-1)^r Q_{\overset{(-)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(-)}{h}_{,1}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,2}\right)^2}+\Phi_{jr},$$

$Q_{\overset{(+)}{n}j}$, $Q_{\overset{(-)}{n}j}$ შესაბამისად ზედა და ქვედა პირით ზედაპირებზე მოქმედი ზედაპირული ძალებია. $\overset{(+)}{n}$ და $\overset{(-)}{n}$ შესაბამისად ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირების გარე (გარსის მიმართ) ნორმალებია. Φ_{jr} მოცულობითი ძალის კომპონენტების r რიგის მომენტებია.

დეფორმაციის ტენზორის r რიგის მომენტები ასე ჩაიწერება:

$$e_{ijr}=\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,u_{js}+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}u_{is}+\overset{r}{E}_{ij},\quad r=0,1,2,\dots,\quad i,j=1,2,3, \tag{1.6.5}$$

სადაც

$$\overset{(r)}{E}_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{ir,j}+u_{jr,i}\right),\ \ \overset{r}{b}_{\alpha\underline{r}}=-(r+1)\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha}-\overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h},\ \ \overset{r}{b}_{3\underline{r}}=0,\ \ \overset{r}{b}_{js}=\begin{cases}0, & s<r,\\ -\overset{r}{a}_{js}, & s>r.\end{cases}$$

(1.6.5) ჩავსვათ (1.6.3)-ში, ხოლო მიღებული – (1.6.4)-ში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\mu\Delta u_{jr}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\overset{r}{E}}{\partial x_j}+\overset{r}{M}_j(u_{ir})+\overset{r}{X}_j=\rho\frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2},\ \text{სადაც}\ \ r=0,1,\dots,\ i=1,2,3, \tag{1.6.6}$$

$$\Delta(\cdot):=(\cdot)_{,\alpha\alpha},\quad \overset{r}{E}=\overset{r}{E}_{ii}.$$

$\overset{r}{M}_j$ წრფივი ოპერატორები დამოკიდებულია ფირფიტის სისქეზე და მხოლოდ პირვე-ლი რიგის წარმოებულებს შეიცავენ.

(1.6.6) ფაქტობრივად წარმოადგენს ლამეს განტოლებებს, ჩაწერილს მომენტების-თვის.

ვიგულისხმოთ, რომ

$$u_{ir}=0,\ \text{როცა}\ \ r>N, \tag{1.6.7}$$

და (1.6.6) სისტემაში დავტოვოთ მხოლოდ პირველი $N+1$ განტოლება. მიღებულ განტოლებათა სისტემაში u_{jr}, საზოგადოდ, უკვე არ წარმოადგენს u_j-ს r რიგის მომენტს, განსაზღვრულს (1.6.1) ტოლობით. მიღებული სისტემა შეესაბამება N-ურ მიახლოებას.

თუ გარსის გვერდით ზედაპირზე მოცემულია ან $X_{ni}=f_i$ ძაბვები ან $u_{ni}=f_i$ გადაადგილებები, ცხადია, მათი $P_r(ax_3-b)$-ზე გამრავლებითა და $\overset{(-)}{h}$-დან $\overset{(+)}{h}$-მდე ინტეგრებით ადვილად ვიპოვით შესაბამის მომენტებს:

$$X_{nir}=f_r,\ \ i=1,2,3,\ \ r=\overline{0,N}, \tag{1.6.8}$$

$$u_{ir}=f_r\ \ \ i=1,2,3,\ \ r=\overline{0,N}, \tag{1.6.9}$$

სადაც n გვერდითი ზედაპირის გარე ნორმალია.

დინამიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შემდეგნაირად დაისმის: ვიპოვოთ $u_{jr}\in C^2(\omega)$, $r=0,\ldots$, $j=1,2,3$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.6.6) განტოლებას ω-ში, დროის ნებისმიერ $t\ge t_0$ მომენტში, (1.6.8) ან (1.6.9) პირობებს გარსის საზღვარზე და

$$u_{rj}\Big|_{t=t_0}=\varphi_{rj}(x_1,x_2),\ \ \frac{\partial u_{rj}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\psi_{rj}(x_1,x_2),\ \ (x_1,x_2)\in\omega,\ \ r=\overline{0,N},\ \ \ j=1,2,3,$$

საწყის პირობებს.

ამ გზით მიღებული სისტემის ღირსშესანიშნავი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ იგი განტოლებათა ორ ჯგუფად იყოფა. ერთი ჯგუფის მთავარი წევრები ემთხვევა ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ძირითად განტოლებათა სისტემის ოპერატორს, ხოლო მეორე ჯგუფის მთავარი წევრები – ლაპლასის*) ოპერატორს. ეს იმის საშუალებას იძლევა, რომ პრიზმული გარსების გათვლისთვის დრეკადობის ბრტყელი თეორიისთვის და ლაპლასის ოპერატორისთვის არსებული მათემატიკური აპარატი გამოვიყენოთ. ცხადია, ამონახსნის სიზუსტე იზრდება N-ის ზრდასთან ერთად. თუმცა ამასთან ერთად იზრდება სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვიც, რაც მის ამოხსნას ართულებს, მაგრამ პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე შეიძლება ნულოვანი $(N=0)$ და პირველი $(N=1)$ მიახლოებით დავკმაყოფილდეთ.

ნულოვან მიახლოებაში (1.6.6) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\mu\Delta\left(h^{-1}u_{\beta 0}\right)+(\lambda+\mu)\left(h^{-1}u_{\gamma 0}\right)_{,\gamma\beta}+\lambda(\ln h)_{,\beta}\left(h^{-1}u_{\alpha 0}\right)_{,\alpha}+\mu(\ln h)_{,\alpha}\left(h^{-1}u_{\alpha 0}\right)_{,\beta}$$

$$+\mu(\ln h)_{,\alpha}\left(h^{-1}u_{\beta 0}\right)_{,\alpha}+\frac{\overset{0}{X}_{\beta}}{h}=\rho\frac{\partial h^{-1}u_{\beta 0}}{\partial t^2},\ \ \beta=1,2,$$

$$\Delta\left(h^{-1}u_{30}\right)+(\ln h)_{,\alpha}\left(h^{-1}u_{30}\right)_{,\alpha}+\frac{\overset{0}{X}_{3}}{\mu h}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial h^{-1}u_{30}}{\partial t^2},$$

სადაც

---

*) პ. ს. ლაპლასი (1749 – 1827) – ფრანგი ასტრონომი, მათემატიკოსი და ფიზიკოსი

$$\overset{0}{X}_j = Q_{\overset{(+)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,1}\right)^2+\left(\overset{(+)}{h}_{,2}\right)^2} + Q_{\overset{(-)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(-)}{h}_{,1}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,2}\right)^2} + \Phi_{j0},$$

$$Q_{\overset{(+)}{n}j} = X_{ij}\left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t\right)\cos\left(\overset{(+)}{n}, x_i\right),\ \ Q_{\overset{(-)}{n}j} = X_{ij}\left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t\right)\cos\left(\overset{(-)}{n}, x_i\right).$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორი

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \cong \frac{1}{2h}\vec{u}_0(x_1, x_2, t).$$

პირველ მიახლოებაში, თუ $\overset{(+)}{h} = -\overset{(-)}{h} = -h$, გადაადგილების ვექტორი

$$\vec{U}(x_1, x_2, x_3, t) \cong \frac{1}{2}\vec{u}(x_1, x_2, t) + \frac{3}{2}x_3\vec{\mathrm{v}}(x_1, x_2, t),$$

სადაც

$$u_\alpha(x_1, x_2, t) = h^{-1}u_{\alpha 0}(x_1, x_2, t), \quad \mathrm{v}_\alpha(x_1, x_2, t) = h^{-2}u_{\alpha 1}(x_1, x_2, t),$$
$$u_3 = h^{-1}u_{30}(x_1, x_2, t) =: u, \quad \mathrm{v}_3 = h^{-2}u_{31}(x_1, x_2, t) =: \mathrm{v}.$$

ამ მიახლოებაში (1.6.6) სისტემა სტატიკის შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს

$$4\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial u_+}{\partial \bar{z}}\right) + 2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(h\theta) + 6\lambda\frac{\partial h\mathrm{v}}{\partial \bar{z}} + X_+ = 0, \tag{1.6.10}$$

$$2\mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(h\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + 3\mu\left(\frac{\partial h\mathrm{v}_+}{\partial z} + \frac{\partial h\bar{\mathrm{v}}_+}{\partial \bar{z}}\right) + X = 0, \tag{1.6.11}$$

$$4\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial \mathrm{v}_+}{\partial \bar{z}}\right) + 2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(h^3\rho) - 2\mu h\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 3\mu h\mathrm{v}_+ + Y_+ = 0, \tag{1.6.12}$$

$$2\mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(h^3\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)\right] - \lambda h\theta - 3(\lambda+2\mu)h\mathrm{v} + Y = 0, \tag{1.6.13}$$

სადაც

$$u_+ = u_1 + iu_2,\ \ \mathrm{v}_+ = \mathrm{v}_1 + i\mathrm{v}_2,\ \ \theta = \frac{\partial u_+}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

X_+ და X დამოკიდებულია მოცულობითი ძალების ნულოვან მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირულ ძალებზე, ხოლო Y_+ და Y – მოცულობითი ძალების პირველ მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირული ძალებზე.

(1.6.10)-(1.6.13) განტოლებათა სისტემა ორ ჯგუფად იყოფა: (1.6.10) და (1.6.13) დამოკიდებულია მხოლოდ u_+-ზე და v-ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (1.6.11) და (1.6.12) დამოკიდებულია მხოლოდ u-ზე და v_+-ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის ღუნვას.

დრეკადი ღეროს იერარქიული მოდელები. ვთქვათ, ღეროს უკავია R^3 სივრცის $\bar{V}$ ნაწილი,

$$V:=\left\{(x_1,x_2,x_3):\quad 0<x_1<L,\quad \overset{(-)}{h_i}(x_1)\le x_i\le \overset{(+)}{h_i}(x_1),\quad i=2,3,\quad L=const\right\},$$

$$2h_i(x_1):=\overset{(+)}{h_i}-\overset{(-)}{h_i}\ge 0,\quad h_i\in C([0,L])\cap C^1(]0,L[),\quad i=2,3,$$

სადაც $2h_3$ და $2h_2$ მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროს, შესაბამისად, სისქე და სიგანეა, რომელთა მაქსიმუმები არსებითად ნაკლებია ღეროს L სიგრძეზე. დავუშვათ, რომ

$$f(x_1,x_2,x_3)\in C^1(V),$$

და x_1 წერტილში, სადაც არც სისქე და არც სიგანე ნული არ ხდება, შემდეგნაირად განვსაზღვროთ ფუნქციის მომენტი:

$$f_{n_3n_2}(x_1):=\int_{\overset{(-)}{h_2}}^{\overset{(+)}{h_2}}\int_{\overset{(-)}{h_3}}^{\overset{(+)}{h_3}} f(x_1,x_2,x_3)P_{n_2}(a_2x_2-b_2)P_{n_2}(a_3x_3-b_3)dx_2dx_3,$$

$$n_i=0,1,\ldots,\ \ i=2,3,\ \ j=1,2,3,$$

სადაც

$$a_i:=\frac{1}{h_i},\ \ b_i:=\frac{\tilde h_i}{h_i},\ \ 2\tilde h_i:=\overset{(+)}{h_i}-\overset{(-)}{h_i},\ \ i=2,3,$$

P_{n_i}, $i=2,3$ ლეჟანდრის პოლინომებია. ცნობილია, რომ

$$\int_{-1}^{+1}P_k(t)P_l(t)dt=\frac{2}{2k+1}\delta_{kl},$$

ე. ი., თუ $t=a_ix_i-b_i$, $i=2,3$,

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\int_{\overset{(-)}{h_i}}^{\overset{(+)}{h_i}}P_k(a_ix_i-b_i)P_l(a_ix_i-b_i)a_idx_i=\delta_{kl},\ \ i=2,3.$$

$(0,0)$ მიახლოებაში სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\left(h_2h_3\mathrm{v}_{j,1}(x_1,t)\right)_{,1}+\overset{0,0}{Y_j}=\Lambda_j^{-1}\rho h_2h_3\frac{\partial^2\mathrm{v}_j(x_1,t)}{\partial t^2},\ \ j=1,2,3,$$

სადაც

$$\Lambda_j:=\begin{cases}\lambda+2\mu, & j=1,\\ \mu, & j=2,3,\end{cases}$$

$$\mathrm{v}_j(x_1,t):=\frac{u_{j\,00}(x_1,t)}{h_2(x_1)h_3(x_1)},\ \ \overset{0,0}{Y_1}:=\frac{\overset{0,0}{X_1^0}}{\lambda+2\mu},\ \ \overset{0,0}{Y_i}:=\frac{\overset{0,0}{X_i^0}}{\mu},\ \ i=2,3,$$

სადაც

$$\overset{n_3,n_2}{X_j^0}:=\sum_{i=2}^{3}\int_{\overset{(-)}{h_i}}^{\overset{(+)}{h_i}}\left[\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{5-i,1}\right)^2}\,X_{\overset{(+)}{v}_{5-i}j}\left(x_1\delta_{i2}x_2+\delta_{i3}\overset{(+)}{h_2},\delta_{i3}\overset{(+)}{h_3}+\delta_{i3}x_3\right)\right.$$

$$+(-1)^{n_{5-i}}\sqrt{1+\left(\overset{(-)}{h}_{5-i,1}\right)^2}\,X_{\overset{(-)}{v}_{5-i}j}\left(x_1\delta_{i2}x_2+\delta_{i3}\overset{(-)}{h}_2,\delta_{i3}\overset{(-)}{h}_3+\delta_{i3}x_3\right)\Bigg]$$

$$\times P_{n_i}\left(a_ix_i-b_i\right)dx_i+X_{jn_3n_2},\quad j=1,2,3,\quad n_3n_2=0,1,\ldots,$$

$$X_{\overset{(\pm)}{v}_i j}\left(x_1\delta_{i2}\overset{(\pm)}{h}_2+\delta_{i3}x_2,\delta_{i2}x_3+\delta_{i3}\overset{(\pm)}{h}_3\right)=X_{kj}\overset{(\pm)}{v}_{ik},\quad i=2,3,\quad j=1,2,3,$$

$$X_{\overset{(\pm)}{v}_i j}\left(x_1\delta_{i2}\overset{(\pm)}{h}_2+\delta_{i3}x_2,\delta_{i2}x_3+\delta_{i3}\overset{(\pm)}{h}_3\right),\quad i=2,3,\quad j=1,2,3,$$

წარმოადგენენ $x_i=\overset{(\pm)}{h}_i\left(x_1\right)$, $i=2,3$, ზედაპირზე ღეროს გარედან მოქმედ ზედაპირულ ძალთა კომპონენტებს, $\overset{(\pm)}{v}_i$, $i=2,3$, შესაბამისი გარე ნორმალებია. სიმეტრიული ღეროების შემთხვევაში, ე. ი. როცა $\widetilde{h}_i=0$, $i=2,3$, (1.0) მიახლოებაში სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$(\lambda+2\mu)\left(h_2h_3\mathrm{v}_{100,1}\right)_{,1}+3\lambda\left(h_2h_3\mathrm{v}_{310}\right)_{,1}+\overset{0,0}{X_1^0}=0,$$

$$\mu\left(h_2h_3^3\mathrm{v}_{310,1}\right)_{,1}-3(\lambda+2\mu)h_2h_3\mathrm{v}_{310}-\lambda h_2h_3\mathrm{v}_{100,1}+h_3\overset{1,0}{X_3^0}=0,$$

$$\mu\left(h_2h_3\mathrm{v}_{200,1}\right)_{,1}+\overset{0,0}{X_2^0}=0,$$

$$\mu\left(h_2h_3^3\mathrm{v}_{210,1}\right)_{,1}-3\mu h_2h_3\mathrm{v}_{210}+h_3\overset{1,0}{X_2^0}=0,$$

$$\mu\left(h_2h_3\mathrm{v}_{300,1}\right)_{,1}+3\mu\left(h_2h_3\mathrm{v}_{110}\right)_{,1}+h_3\overset{0,0}{X_3^0}=0,$$

$$(\lambda+2\mu)\left(h_2h_3^3\mathrm{v}_{110,1}\right)_{,1}-\mu h_2h_3\mathrm{v}_{300,1}-3\mu h_2h_3\mathrm{v}_{110}+h_3\overset{1,0}{X_1^0}=0.$$

1.7. ჰიდროგაზოდინამიკის განტოლებები

ვთქვათ, $V(x,t)=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ სითხის მოძრაობის სიჩქარის ვექტორია, $\rho(x,t)$ მისი სიმკვრივეა, $p(x,t)$ წნევაა, $f(x,t)$ წყაროების ინტენსივობაა, $F(x,t)=\left(F_1,F_2,F_3\right)$ მასობრივი ძალების ინტენსივობაა, მაშინ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებენ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho V)=f,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(V,\operatorname{grad})V+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=F,$$

განტოლებათა (არაწრფივ) სისტემას, სადაც პირველს ეწოდება *უწყვეტობის განტოლება*, მეორეს – *იდეალური სითხის მოძრაობის ეილერის*[*)] *განტოლება*. ამ განტოლებებს ემატება აგრეთვე *მდგომარეობის*

[*)] ლ. ეილერი (1707 – 1783) – მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ფიზიკოსი

$$\Phi(p,\rho)=0$$

განტოლება.

1.8. სითბოს გავრცელების (დიფუზიის) განტოლებები

გარემოში სითბოს გავრცელებისა და ნაწილაკების დიფუზიის პროცესები აღიწერება *დიფუზიის* ზოგადი *განტოლებით*

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)-qu+F(x,t)\,,$$

სადაც $u(x,t)$ გარემოს ტემპერატურაა (ნაწილაკების სიმკვრივეა) $x\in R^n$ წერტილში დროის t მომენტში, ხოლო p და q გარემოს დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეებია. თუ ρ სიმკვრივე, c ხვედრითი სითბოტევადობა, k სითბოგამტარობის კოეფიციენტები მუდმივია, ხოლო $F(x,t)$ სითბოს წყაროს ინტენსივობაა x წერტილში t მომენტში, მაშინ სითბოგამტარობის განტოლებას აქვს

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$

სახე, სადაც

$$\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

ლაპლასის ოპერატორია, ხოლო

$$a^2=\frac{k}{c\rho}\,,\quad f=\frac{F}{c\rho}\,.$$

სტაციონარული განტოლებები. სტაციონარული პროცესებისთვის, ე. ი., როცა $F(x,t)=F(x)$, $u(x,t)=u(x)$, რხევისა და დიფუზიის განტოლებებს აქვთ

$$-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)+qu=F(x) \tag{1.8.1}$$

სახე. როცა $p=\text{const}$ და $q=0$, (1.8.1) განტოლებას *პუასონის განტოლება* ეწოდება:

$$\Delta u=-f\,,\quad f=\frac{F}{p}\,,$$

როცა $f=0$,

$$\Delta u=0\,. \tag{1.8.2}$$

(1.8.2) განტოლებას *ლაპლასის განტოლება* ეწოდება.

ვთქვათ, ტალღის (1.2.1) განტოლებაში გარე შეშფოთება პერიოდულია ω სიხშირით და $a^2f(x)$ ამპლიტუდით, მაშინ

$$f(x,t)=a^2f(x)e^{i\omega t}\,.$$

ვეძებოთ პერიოდული $u(x,t)$ ჩაღუნვა იმავე სიხშირით და უცნობი $u(x)$ ამპლიტუდით, ე. ი.

$$u(x,t)=u(x)e^{i\omega t}$$

სახით. მაშინ (1.2.1) განტოლება მიიღებს

$$\Delta u(x)+\lambda^2 u(x)=-f(x)\,,\quad \lambda^2=\frac{\omega^2}{a^2}\,,$$

სახეს. ამ განტოლებას ჰელმჰოლცის[*] ან მეტაჰარმონიული განტოლება ეწოდება, ხოლო შესაბამის რხევებს — ჰარმონიული რხევები.

1.9. გადატანის განტოლება

ვთქვათ, ყველა ნაწილაკის სიჩქარე ერთნაირია და v-ს ტოლია; ნაწილაკების ურთიერთშეჯახებები იმდენად იშვიათია, რომ მათ უგულებელვყოფთ; ნაწილაკები ეჯახებიან უძრავ ბირთვს; $l(x)$ მათი თავისუფალი გარბენის საშუალო სიგრძეა x წერტილში; $n(x,\mathbf{s},t)$ იმ ნაწილაკების სიმკვრივეა, რომლებიც $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$, $|\mathbf{s}|=1$, მიმართულებით მიფრინავენ x წერტილში t დროის მომენტში; შეჯახებისას ან p_1 ალბათობით ნაწილაკი განიბნევა ბირთვზე, ამასთან დრეკად ბურთულასავით ხტება მისგან; ან ბირთვი ნაწილაკს p_2 ალბათობით იტაცებს, ან ნაწილაკი $p_3:=1-p_1-p_2$ ალბათობით ხლეჩს ბირთვს; $F(x,s,t)$ წყაროების სიმკვრივეა. მაშინ ნაწილაკების $\psi:=vn$ ნაკადი აკმაყოფილებს

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\mathbf{s},\operatorname{grad}\psi)+\alpha\psi=\frac{\alpha h}{4\pi}\int_{S_1}\psi(x,s',t)\,ds'+F \qquad (1.9.1)$$

ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებას, სადაც $\alpha=\dfrac{1}{l}$, $h=p_1+vp_3$. (1.9.1) გადატანის ერთსიჩქარიანი განტოლებაა პროცესებისთვის იზოტროპული (თანაბარი) p_3 გაფანტვით.

1.10. მაქსველის[**] განტოლებები

ვთქვათ, $E(x,t)=(E_1,E_2,E_3)$ ელექტრული ველის დაძაბულობაა, $H(x,t)=(H_1,H_2,H_3)$ მაგნიტური ველის დაძაბულობაა, $\rho(x)$ მუხტების სიმკვრივეა, ε გარემოს დიელექტრიკული მუდმივაა, μ გარემოს მაგნიტური შეღწევადობის კოეფიციენტია, $I(x,t)=(I_1,I_2,I_3)$ გამტარობის დენია. მაშინ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებენ

$$\operatorname{div}(\varepsilon E)=4\pi\rho\,,\quad \operatorname{div}(\mu H)=0\,,$$
$$\operatorname{rot}E=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H)}{\partial t}\,,$$
$$\operatorname{rot}H=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon H)}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}I\,,$$

[*] გ. ლ. ფ. ჰელმჰოლცი (1821 — 1894) — გერმანელი ფიზიკოსი, მათემატიკოსი, ფიზიოლოგი და ფსიქოლოგი.

[**] ჯ. კ. მაქსველი (1831 — 1879) — ინგლისელი ფიზიკოსი

განტოლებათა (წრფივ) სისტემას, სადაც $c = 3 \cdot 10^{10}$ *სმ/წმ* სინათლის სიჩქარეა სიცარიელეში. მეორე განტოლება გამოსახავს ფარადეის*) კანონს, მესამე – ამპერის**) კანონს.

1.11. შრედინგერის***) განტოლება

ვთქვათ, m ქვანტური ნაწილაკის მასაა, $V(x)$ გარე ძალოვანი ველის, რომელშიც ეს ნაწილაკი მოძრაობს, პოტენციალი, ხოლო $\psi(x,t)$ ამ ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა, მაშინ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi ,$$

სადაც $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ *ერგი•წმ* პლანკის****) მუდმივაა.

1.12. კლაინ*****)-გორდონ-ფოკის******) და დირაკის*******) განტოლებები

$\varphi(x_0, x)$ $\left[x_0 = ct \left(c \text{ სინათლის სიჩქარეა}\right), x := (x_1, x_2, x_3)\right]$ ტალღური ფუნქცია, რომელიც m_0 მასის მქონე თავისუფალ რელატივისტურ (ფსევდო) სკალარულ ნაწილაკს აღწერს, აკმაყოფილებს კლაინ-გორდონ-ფოკის

$$(\Box_a + m^2)\varphi = 0$$

განტოლებას, სადაც

$$\Box_{a} := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$$

ტალღური ოპერატორია (*დალამბერის ოპერატორი*).

m მასის მქონე თავისუფალი რელატივისტური ნაწილაკი, რომლის სპინი $\frac{1}{2}$-ია (მაგ., ელექტრონი განიხილება, როგორც "მბრუნავი ბზრიალა", ხოლო მისი სპინი – როგორც ასეთი ბრუნვის მახასიათებელი), აღიწერება 4-კომპონენტიანი ტალღური ფუნქციით (სპინორით)

$$\Psi(x_0, x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) .$$

ის აკმაყოფილებს 4 განტოლებისგან შემდგარ შემდეგ წრფივ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელსაც *დირაკის განტოლება* ეწოდება:

---

*) მ. ფარადეი (1791 – 1867) – ინგლისელი ფიზიკოსი, ქიმიკოსი და ფიზიკოს-ქიმიკოსი

**) ა. მ. ამპერი ((1775 – 1836) – ფრანგი ფიზიკოსი და მათემატიკოსი

***) ე. შრედინგერი (1887 – 1961) – ავსტრიელი ფიზიკოსი

****) მ. კ. ე. ლ. პლანკი (1858 – 1947) – გერმანელი ფიზიკოს-თეორეტიკოსი

*****) ფ. კლაინი (1849 – 1925) – გერმანელი მათემატიკოსი

******) ვ. ა. ფოკი (1898 – 1974) – რუსი ფიზიკოსი

*******) პ. ა. მ. დირაკი (1902 – 1984) – ინგლისელი ფიზიკოს-თეორეტიკოსი

$$\left(i\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I \right) \Psi(x_0, x) = 0 ,$$

სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო γ^k, $k = 0,1,2,3$, დირაკის შემდეგი მატრიცებია

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

დირაკის განტოლება წარმოადგენს კლაინ-გორდონ-ფოკის მატრიცულ ფაქტორიზაციას, რამდენადაც

$$\left(i\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I \right)\left(i\sum_{k=0}^{3} \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + m_0 I \right) = -(\Box + m_0^2) I$$

1.13. ჩაპლიგინის*) განტოლება

ჩაპლიგინის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

სადაც $k(0) = 0$, $k'(y) > 0$, $k(-y) = -k(y)$.

დავალება სტუდენტებისთვის

სასემინარო მუშაობისთვის, ლექტორთან შეთანხმებით, უნდა შეარჩიოთ თემად მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებებიდან ერთ-ერთი მათგანი და მოამზადოთ მოხსენება წერილობით ზეპირი პრეზენტაციის მიზნით. გამოიყენეთ სილაბუსში მითითებული და სხვა შესაბამისი ლიტერატურა.

*) ს. ა. ჩაპლიგინი (1869 – 1942) – რუსი მექანიკოსი