სიმრავლეთა თეორიის

საფუძვლები

(ბაკალავრიატის არჩევითი კურსისათვის)

პედაგოგი: არჩილ ყიფიანი

2012 წელი

სიმრავლის ცნება

სიმრავლის კანტორისეული განსაზღვრა ასეთია: „სიმრავლის ქვეშ ჩვენ გვესმის რეალობაში ან ჩვენს აზროვნებაში არსებული, ერთმანეთისაგან განსხვავებული, რაიმე საგნებისაგან შედგენილი ახალი ერთი მთლიანი ობიექტი“.

მოგვიანებით აღმოჩნდა, რომ სიმრავლის ასეთი განსაზღვრა წინააღმდეგობრივია. ამის დასასაბუთებლად მოვიყვანთ ორ ცნობილ პარადოქსს.

რასელის პარადოქსი. ვთქვათ A იყოს ყველა იმ X სიმრავლეთა სიმრავლე, რომლებიც თავისი თავის ელემენტები არ არიან, ანუ $A=\{X : X \notin X\}$. მაგალითად, ერთ-ერთი ასეთი სიმრავლეა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე (რადგან N არაა ნატურალური რიცხვი, ხოლო N სიმრავლის ელემენტები მხოლოდ და მხოლოდ ნატურალური რიცხვებია ამიტომ $N \notin N$). ცხადია, რომ

$$A \in A \Rightarrow A \notin A,$$

და

$$A \notin A \Rightarrow A \in A$$

ე.ი.

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A$$

და პარადოქსი სახეზეა.

კანტორის პარადოქსი. ვთქვათ U იყოს ყველა სიმრავლეთა სიმრავლე და განვიხილოთ $P(U)$ – U-ს ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. კანტორის თეორემა გვეუბნება, რომ $|U| < |P(U)|$, მაგრამ მეორეს მხრივ U-ს განმარტებიდან გამოდის, რომ $P(U) \subset U$ და მაშასადამე $|P(U)| \leq |U|$. აქაც სახეზეა პარადოქსი.

ამ პარადოქსებმა თავის დროზე სერიოზული კრიზისი გამოიწვიეს მათემატიკაში, რომლიდანაც გამოსავალი აღმოჩნდა სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიზაცია. ჩვენ განვიხილავთ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიზაციის ერთ-ერთ შესაძლო ვარიანტს.

სიმრავლეთა თეორია, როგორც I რიგის თეორია

ჩვენ მოვიყვანთ სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთ გავრცელებულ ვარიანტს, რომელსაც ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორია ეწოდება და ZFC სიმბოლოთი აღინიშნება.

ZFC თეორია არის I რიგის ტოლობიანი (ეგალიტარული) თეორია. მისი ალფაბეტია:

1. საგნობრივი ცვლადები $x_1, x_2, \cdots$;
2. ორი ორადგილიანი პრედიკატული სიმბოლო, A_1^2 და A_2^2, რომლებიც შესაბამისად „=“ და „$\in$“ სიმბოლოებით აღინიშნებიან.
3. ლოგიკური კავშირები $\neg$, $\Rightarrow$ და ზოგადობის კვანტორი $\forall$;
4. პუნქტუაციის ნიშნები: მარჯვენა და მარცხენა ფრჩხილები და მძიმე. ანუ „ (“ , „) “ და „ , “ სიმბოლოები.

$A_1^2(x_1, x_2)$ და $A_2^2(x_1, x_2)$ ელემენტარული (ატომარული) ფორმულების ნაცვლად მოხერხებულობისათვის (და მათემატიკური ტრადიციების გათვალისწინებით) ვწერთ არა

$=(x_1, x_2)$ და $\in(x_1, x_2)$ ფორმულებს, არამედ შესაბამისად $x_1 = x_2$ და $x_1 \in x_2$ ფორმულებს. ხოლო ამ ფორმულების უარყოფებს შესაბამისად $x_1 \neq x_2$ და $x_1 \notin x_2$ ჩანაწერებით აღვნიშნავთ.

***ZFC* თეორიის აქსიომები**:

ZFC-ს აქსიომები შეიძლება დავყოთ სამ კლასად:

ა) ლოგიკური აქსიომები,

ბ) ტოლობის აქსიომები,

გ) სპეციალური აქსიომები.

ლოგიკური აქსიომები. თუ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ და $\mathcal{C}$ *ZFC* თეორიის ფორმულებია, მაშინ მომდევნო (1) - (5) ფორმულები ამავე თეორიის აქსიომებია (უფრო ზუსტად, აქსიომური სქემებია).

(1) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$;

(2) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$;

(3) $(\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})$;

(4) $\forall x_i \, \mathcal{A}(x_1) \Rightarrow \mathcal{A}(t)$, სადაც t ტერმი თავისუფალია x_i-ს მიმართ $\mathcal{A}(x_1)$ ფორმულაში.

(კერძოდ, თუ t ტერმი ემთხვევა x_i-ს, მაშინ ეს აქსიომური სქემა მოგვცემს $\forall x_i \, \mathcal{A}(x_1) \Rightarrow \mathcal{A}(x_i)$ აქსიომას) ;

(5) $\forall x_i \quad (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$, თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა არ შეიცავს x_i-ის თავისუფალ შემოსვლას.

შენიშვნა. (4) აქსიომაში თუ t არ არის თავისუფალი x_i-ს მიმართ $\mathcal{A}(x_1)$ ფორმულაში, მაშინ მაგ. თუ ავიღებთ $\mathcal{A}(x_1) = \exists y(y \neq x)$ გამოვა, რომ $\forall x \exists y(y \neq x) \Rightarrow \exists y(y \neq y)$.

შენიშვნა. (5)-აქსიომაზე, თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა შეიცავს x_i-ის თავისუფალ შემოსვლას, მაშინ (5)-ე აქსიომიდან შესაძლებელია მცდარი დებულების გამოყვანაც. მაგალითად, თუ $\mathcal{A}$ არის $x = 1$, ხოლო $\mathcal{B}$ - $x = 1$ ფორმულა, და ინტერპრეტაციის არე N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, მაშინ (5)-ე აქსიომის ძალით გვექნება

$$\forall x(x = 1 \Rightarrow x = 1) \Rightarrow (x = 1 \Rightarrow \forall x(x = 1)). \qquad *$$

ცხადია, $\forall x(x = 1 \Rightarrow x = 1)$ ჭეშმარიტია N-ში. ხოლო $x = 1 \Rightarrow \forall x(x = 1)$ იმპლიკაცია კი არაა ჭეშმარიტი. ამიტომ * ფორმულა არაა ჭეშმარიტი N-ში.

გამოყვანის წესები:

(*i*) Modus ponens(*MP*) : "თუ გვაქვს $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, მაშინ გვაქვს $\mathcal{B}$".

(*ii*) Genezalization (Gen) : თუ გვაქვს $\mathcal{A}$, მაშინ გვაქვს $\forall x_i \mathcal{A}$.

შევნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილი აქსიომები აქსიუმური სქემებია. რაც იმას ნიშნავს, რომ თითოეული მათგანი სხვადასხვა $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ და $\mathcal{C}$ ფორმულებისათვის და t ტერმისათვის სხვადასხვა (უსასრულო რაოდენობის) აქსიომას იძლევა, იგივე შეიძლება ითქვას გამოყვანის წესებზეც.

ტოლობის აქსიომები:

(6) $\forall x_1 \quad (x_1 = x_1)$

(7) $x_1 = x_2 \Rightarrow (\mathcal{A}(x_1, x_1) \Rightarrow \mathcal{A}(x_1, x_2))$, სადაც x_2 თავისუფალია x_1-ის მიმართ $\mathcal{A}(x_1, x_1)$-ფორმულაში.

შეგახსენებთ, რომ $\mathcal{A}(x_1, x_1)$ აღნიშნავს ფორმულას, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}(x_1, x_1)$ ფორმულისაგან მასში x_1-ის ზოგიერთი (შესაძლოა არცერთი ან ყველა) თავისუფალი შემოსვლის ნაცვლად x_2-ის ჩასმით.

ტექსტის იოლად წაკითხვი მიზნით, ჩვენ $x_1, x_2, \ldots$ ცვლადების გარდა გამოვიყენებთ $x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots, A, B, C, \ldots$ A , B , C ,... სიმბოლოებს საგნობრივი ცვლადების აღსანიშნავად.

შენიშვნა. (7) აქსიომაში. თუ ავიღებთ $\mathscr{A}(x_1, x_1) \equiv \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$ ვნახავთ, რომ x_1-ის თავისუფლების მოთხოვნა x_2-ის მიმართ აუცილებელია.

სიმრავლის თეორიის სპეციალური აქსიომები

I. **ექსტენსიონალობის აქსიომა** (მოცულობის აქსიომა)

$$\forall t(t \in X \Leftrightarrow t \in Y) \Rightarrow X = Y$$

შებრუნებული იმპლიკაცია ტოლობის აქსიომიდან გამომდინარეობს.

II. **ცარიელი სიმრავლის** არსებობის აქსიომა

$$\exists X \forall t(t \notin X).$$

ადვილად მტკიცდება, რომ ასეთი X ერთადერთია და ის აღინიშნება $\varnothing$-ით. მართლაც, თუ ორია X_1 და X_2, მაშინ $t \in X_1 \Leftrightarrow t \in X_2$. (რადგან ორივე მცდარია) და ამიტომ I აქსიომით $x_1 = x_2$.

II′. **წყვილის აქსიომა**

ნებისმიერი a და b სიმრავლეებისათვის

$$\exists X \forall t(t \in X \Leftrightarrow t = a \vee t = b).$$

მტკიცდება რომ ასეთი X ერთადერთია და აღინიშნება $\{a, b\}$-ით.

def: $\{a\} \equiv \{a, a\}$.

III. **გაერთიანების აქსიომა**

თუ A სიმრავლეთა რაიმე ოჯახია

$$\exists S \forall t(t \in S \Leftrightarrow \exists X(X \in \mathsf{A} \,\&\, t \in X).$$

მტკიცდება, რომ ყოველი A ოჯახისათვის ასეთი S ერთადერთია და ის აღინიშნება $\bigcup \mathsf{A}$-ით.

თუ $\mathsf{A} = \{A, B\}$, მაშინ $\bigcup\{A, B\}$-ს ნაცვლად ვწერთ $A \cup B$.

თეორემა 1. $t \in A \cup B \Leftrightarrow t \in A \vee t \in B$.

დამტკიცება. III აქსიომიდან გვაქვს

$t \in A \cup B \Leftrightarrow \exists X(X \in \{A,B\} \& t \in X) \Leftrightarrow$ (II′ აქსიომიდან)

$$\exists X((X = A \vee X = B) \& t \in X) \Leftrightarrow \exists X(X = A \& t \in X \quad \vee X = B \& t \in X)$$

$$\Leftrightarrow \exists X(X = A \& t \in X) \vee \exists X(X = B \& t \in X) \Leftrightarrow t \in A \vee t \in B \blacksquare.$$

განმარტება-აღნიშვნა: $Y \subset X \equiv \forall t(t \in Y \Rightarrow t \in X)$.

IV. $P(X)$ **ბულეანის აქსიომა**:

$$\forall X \exists P \forall Y(Y \in P \Leftrightarrow Y \subset X)$$

მტკიცდება, რომ ყოველი X-თვის P ერთადერთია და აღინიშნება $P(X)$-ით. $P(X)$ სიმრავლეს X-ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე ან X-ის ბულეანი ეწოდება.

თეორემა 2. ნებისმიერი X_1 და X_2 სიმრავლისათვის, სამართლიანია ექვივალენტობა $X_1 = X_2 \Leftrightarrow P(X_1) = P(X_2)$. ანუ ორი სიმრავლე ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ბულეანები ტოლია.

დამტკიცება. ა) $X_1 = X_2 \Rightarrow P(X_1) = P(X_2)$ იმპლიკაცია გამომდინარეობს ტოლობის აქსიომიდან, მართლაც (7) აქსიომიდან გვექნება, რომ სამართლიანია შემდეგი იმპლიკაცია:

$$X_1 = X_2 \Rightarrow [P(X_1) = P(X_1)) \Rightarrow (P(X_1) = P(X_2))].$$

ამიტომ თუ დავუშვებთ $X_1 = X_2$ ტოლობას, რადგან $P(X_1) = P(X_1)$ ჭეშმარიტია, მივიღებთ, რომ $P(X_1) = P(X_2)$ ტოლობაც ასევე ჭეშმარიტია.

ბ) $P(X_1) = P(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$ - იმპლიკაციის ნაცვლად დავამტკიცოთ მისი ეკვივალენტური $X_1 \neq X_2 \Rightarrow P(X_1) \neq P(X_2)$ იმპლიკაცია. დავუშვათ $X_1 \neq X_2$, მაშინ ერთ ერთ სიმრავლეში X_1 და X_2-დან, იარსებებს t_0 ელემენტი, რომელიც არაა მეორეს ელემენტი, ვთქვათ $t_0 \in X_1 \setminus X_2$. მაშინ ცხადია, რომ $\{t_0\} \in P(X_1)$ და $\{t_0\} \notin P(X_2)$, ე.ი. I აქსიომის ძალით $P(X_1) \neq P(X_2)$. რ.დ.გ.

შესასრულების აქსიომა

ეს აქსიომა ამბობს, რომ არსებობს უსასრულო სიმრავლე:

$$\text{V.}\ \exists U(\varnothing \in U \,\&\, \forall x(x \in U \Rightarrow x \bigcup \{x\} \in U))$$

თუ შესაბამის აღნიშვნებს არ გამოვიყენებდით და შევეცდებოდით ამ აქსიომის ZFC-ის ალფაბეტში ჩაწერას, მაშინ V აქსიომა შემდეგ სახეს მიიღებდა:

$$\exists U(\exists z(z \in U \,\&\, \forall t \neg (t \in z)) \,\&$$

$$\forall X(X \in U \Rightarrow \exists Y(Y \in U \,\&\, \forall t(t \in Y \Leftrightarrow t = X \vee t \in X)))).$$

კიდევ უფრო ზუსტად ის შემდეგი სახით ჩაიწერებოოდა.

$$\exists x_1(\exists x_2(x_2 \in x_1 \,\&\, \forall x_3 \neg (x_3 \in x_2)) \,\&$$

$$\forall x_4(x_4 \in x_1 \Rightarrow \exists x_5(x_5 \in x_1 \,\&\, \forall x_3(x_3 \in x_5 \Rightarrow x_3 = x_4 \vee x_3 \in x_4)))) .$$

რაც კიდევ უფრო გააძნელებდა ჩანაწერის წაკითხვას.

აქვე შევნიშნოთ, რომ აბსოლუტურად ზუსტი ჩანაწერი არც ეს უკანასკნელი ფორმულაა, რადგან $\exists x_1 \mathcal{A}$ შემოკლებაა $\neg \forall x_1 \mathcal{A}_1$-ის და $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ კი შემოკლებაა $\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ფორმულისა.

შემოვიღოთ კიდევ ორი შემამოკლებელი აღნიშვნა.

ვთქვათ, $\Phi(X)$ ZFC თეორიის რაიმე ფორმულაა (ანუ სიმრავლეთა თეორიის რაიმე წინადადება X სიმრავლის შესახებ).

$$\forall x \in A\ \Phi(x) \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow \Phi(x)),\ \text{და}$$

$$\exists x \in A\ \Phi(x) \equiv \exists x(x \in A \,\&\, \Phi(x)).$$

ამ აღნიშნით უსასრულობის აქსიომა კიდევ უფრო მარტივად ჩაიწერება:

$$\exists U[\varnothing \in U \,\&\, \forall x \in U(x \bigcup \{x\} \in U)].$$

ამორჩევის (ცერმელოს) აქსიომა

ამორჩევის აქსიომის შინაარსი ასეთია:

თუ A სიმრავლეთა ოჯახი შედგება არაცარიელი, ურთიერთარაგადამკვეთი სიმრავლეებისაგან, მაშინ არსებობს ისეთი S სიმრავლე, რომელსაც A -ში შემავალ ყველა სიმრავლესთან, ზუსტად ერთი საერთო ელემენტი აქვს. ფორმალური ჩანაწერით ეს ასე გამოისახება:

VI. $$\forall A[\forall X,Y \in A[X \neq \varnothing \,\&\, (X \neq Y \Rightarrow X \bigcap Y = \varnothing)] \Rightarrow \exists S[\forall X \in A\ \exists_1 t(t \in S \bigcap X)]].$$

შენიშვნა: S სიმრავლე შესაძლოა შეიცავდეს იმ ელემენტებსაც, რომლებიც A-ოჯახის არც ერთი სიმრავლიდან არ ამორჩეულა. თუ გვინდა, რომ მხოლოდ მათ შეიცავდეს ავიღოთ

$$S' = (\cup A) \bigcap S .$$

შეგახსენებთ, რომ I რიგის თეორიებში ფორმულა $\exists_1 t \mathcal{A}(t)$ გამოიყენება $\exists t(\mathcal{A}(t) \,\&\, \forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow x = t))$ ფორმულის შემოკლებად და შინაარსულად აღნიშნავს, რომ არსებობს ერთადერთი (ზუსტად ერთი) t ისეთი, რომ $\mathcal{A}(t)$ ჭეშმარიტია.

შენიშვნა 1: VI აქსიომაში ჩვენ სიმარტივისათვის გამოვიყენეთ თანაკვეთის სიმბოლო, რომელიც ჯერ არ განსაზღვრულა. სიზუსტისათვის აღვნიშნოთ, რომ ზემოთმოყვანილ ამორჩევის აქსიომაში $X \bigcap Y = \varnothing$ ფორმულა აღნიშნავს $\neg \exists t(t \in X \,\&\, t \in Y)$ ფორმულას, ხოლო $t \in S \bigcap X$ - კი აღნიშნავს $t \in S \,\&\, t \in X$ ფორმულას.

შენიშვნა 2. ზემოთმოყვანილი უხერხულობის თავიდან ასაცილებლად ჩვენ რა თქმა უნდა შეგვეძლო VI და (ქვემოთმოყვანილი) VII აქსიომებისათვის ადგილები შეგვეცვალა და ამორჩევის აქსიომა მაშინ ჩამოგვეყალიბებინა, როცა თანაკვეთის ოპერაცია განსაზღვრული იქნებოდა, მაგრამ ტრადიციის და ისტორიის გათვალისწინებით სწორედ აქსიომების მოყვანილი ნუმერაციაა უფრო მიზანშეწონილი.

გამოყოფის აქსიომა

VI′. თუ $\Phi(x)$ *ZFC* თეორიის რაიმე ფორმულაა, მაშინ შემდეგი ფორმულა აქსიომაა:

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \,\&\, \Phi(x))$$

ანუ თუ რაიმე *A* სიმრავლის არსებობა უკვე დადგენილია, მაშინ *A*-ს იმ ელემენტთა სიმრავლეც არსებობს, რომლებიც $\Phi(x)$ პირობას აკმაყოფილებენ.

ცხადია, რომ ყოველი *A* სიმრავლისა და $\Phi(x)$ ფორმულისათვის *B* სიმრავლე, რომლის არსებობაც VI′ აქსიომითაა უზრუნველყოფილი ერთადერთია და ის

$$\{x \in A : \Phi(x)\}$$

ჩანაწერით აღინიშნება. ანუ სამართლიანია ექვივალენტობა.

$$t \in \{x \in A : \Phi(x)\} \Leftrightarrow t \in A \,\&\, \Phi(t).$$

თუ $\Phi(t) \Rightarrow t \in A$, მაშინ $\{t \in A : \Phi(t)\} \stackrel{def}{=} \{t : \Phi(t)\}$.

ცხადია $\{t : \Phi(t) \,\&\, \Psi(t)\} = \{t : \Phi(t)\} \bigcap \{t : \Psi(t)\}$,

$$\{t : \Phi(t) \vee \Psi(t)\} = \{t : \Phi(t)\} \bigcup \{t : \Psi(t)\}$$

ჩანაცვლების აქსიომა

VII$_\Phi$. თუ $\Phi(x, y)$ *ZFC* თეორიის რაიმე ფორმულაა, მაშინ შემდეგი ფორმულა *ZFC*-ს აქსიომაა:

$$\forall x \exists_1 y \Phi(x, y) \Rightarrow \forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A (\Phi(x, y))).$$

ამ აქსიომას ფრენკელის აქსიომასაც უწოდებენ. იგი ამბობს, რომ თუ *A* სიმრავლის ყოველ *x* ელემენტს, რაიმე წესით, ერთადერთი *y* ელემენტი შეესაბამება, მაშინ ამ *y*-ების სიმრავლეც არსებობსო (ცხადია არაა სავალდებულო, რომ *y* ელემენტი *A* სიმრავლეს ეკუთვნოდეს).

ZFC თეორიის ისეთ $\Phi(x, y)$ ფორმულას, რომლისთვისაც ჭეშმარიტია $\forall x \exists_1 y \Phi(x, y)$ ფორმულა, ეწოდება **ფუნქციონალური *x* ცვლადის მიმართ**.

ექსტენსიონალობის აქსიომიდან გამომდინარე ადვილად მტკიცდება, რომ ყოველი A სიმრავლისა და $\Phi(x,y)$ ფორმულისათვის, რომლისთვისაც შესრულებულია $\forall x \exists_1 y\ \Phi(x,y)$ პირობა, ანუ რომელიც ფუნქციონალურია x ცვლადის მიმართ, შესაბამისი B სიმრავლე ერთადერთია და ეს სიმრავლე $\Phi''(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ამით ჩვენ დავამთავრეთ *ZFC* (ცერმელო-ფრენკელის) სიმრავლეთა თეორიის აღწერა. თეორიას, რომელიც მიიღება *ZFC* თეორიიდან VI (ამორჩევის აქსიომის) ამოღებით *ZF*-ით აღინიშნება და ეწოდება ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორია ამორჩევის აქსიომის გარეშე.

ZFC (და მითუმეტეს *ZF*) თეორია სრული არაა. ანუ მასში არსებობენ ისეთი ჭეშმარიტი წინადადებები, რომლებიც არ მტკიცდებიან და არც უარიყოფიან. ამიტომ ხშირად "უფრო სრული" თეორიის მისაღებად *ZFC*-ს უმატებენ ამა თუ იმ ახალ აქსიომას. ერთ-ერთი ასეთი აქსიომაა რეგულარობის აქსიომა, რომელსაც ხშირად ფუნდირების აქსიომასაც უწოდებენ.

ფუნდირების აქსიომა შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$\forall A(A \neq \varnothing \Rightarrow \exists X \in A(X \cap A = \varnothing)).$$

ფუნდირების აქსიომიდან გამომდინარეობს ორი მნიშვნელოვანი შედეგი.

შედეგი 1. ნებისმიერი X სიმრავლისათვის $X \notin X$. (ეს მიიღება თუ ავიღებთ $A = \{X\}$).

შედეგი 2. არ არსებობს სიმრავლეთა $x_1, x_2, \ldots$ მიმდევრობა, ისეთი რომ $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$ (ავიღოთ $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$).

§1. მარტივი შედეგები აქსიომებიდან

ამიერიდან „არსებობს სიმრავლე" ნიშნავს, რომ ამ სიმრავლის არსებობა გამომდინარეობს *ZFC* თეორიის აქსიომებიდან. ერთი შეხედვით *ZFC* თეორიის აქსიომები საკმაოდ ცოტა სიმრავლეებს იძლევიან, მაგრამ ეს მხოლოდ ერთი შეხედვით. სიმრავლეთა *ZFC* თეორია იძლევა საშუალებას ავაგოთ მათემატიკისათვის საჭირო ნებისმიერი სიმრავლე და უფრო მეტიც, ავაგოთ მთელი მათემატიკა.

შევნიშნოთ, რომ VI (გამოყოფის) და VII$_\Phi$ (ჩანაცვლების) აქსიომები, წარმოადგენენ აქსიომურ სქემებს და თითოეული იძლევა აქსიომების უსასრულო რაოდენობას (ყოველი Φ-სათვის თითო აქსიომა).

III (გაერთიანების), IV(ბულეანის), VI (გამოყოფის) და VII_{Φ} აქსიომები ე.წ. პირობითი აქსიომებია, ისინი მაშინ ადასტურებენ სიმრავლის არსებობას თუ მანამდე ცნობილია შესაბამისი სხვა სიმრავლის არსებობა. ამასთან კონსტრუქცია სიმრავლეებისა, რომლებიც II (ცარიელი სიმრავლის არსებობის), III, IV და VII_{Φ} აქსიომები იძლევიან ცალსახაა. ხოლო V (უსასრულობის) და VI აქსიომები ცალსახა არაა. გარდა ამისა II და V აქსიომები კატეგორიულობით გამოირჩევიან, იმ აზრით რომ ისინი ყოველგვარი პირობების გარეშე უზრუნველყოფენ სათანადო სიმრავლეების არსებობას.

როგორც უკვე ვიცით, არსებობენ 0, 1, და 2 ელემენტიანი სიმრავლეები.

თეორემა 1. ნებისმიერი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სიმრავლეებისათვის $n = 1,2,3,\ldots$ არსებობს სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ზუსტად $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტებს.

დამტკიცება. როგორც ვიცით, როცა $n = 1,2$ წყვილის არსებობის აქსიომა უზრუნველყოფს თეორემის სამართლიანობას. ვთქვათ $n \geq 2$,მაშინ

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$.

ნუ: $\{a_1, a_2\} \cup \{a_3\} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_4\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ და ა.შ.

ცხადია, რომ $\cup\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

დალაგებული წყვილი (კურატოვსკის განსაზღვრა)

დალაგებული წყვილი შედგენილი a და b ელემენტებისგან ეწოდება $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ სიმრავლეს და აღინიშნება (a,b)-ით.

თეორემა 2. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \,\&\, b = d$.

დავამტკიცოთ, იმპლიკაცია $(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c \,\&\, b = d$. (შებრუნებული იმპლიკაცია ცხადია).

ვთქვათ $\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}$ (1)

გვაქვს ორიდან ერთი შემთხვევა, $a = b \vee a \neq b$.

I. $a=b \Rightarrow \{a,b\}=\{a\}$ და $(a,b)=\{\{a\}\}$.

(1) $\Rightarrow$ რომ მაშინ $\{\{c\},\{c,d\}\}$ სიმრავლეც ერთელემენტიანია და ე.ი. $\{c\}=\{c,d\}$ და ე.ი. $c=d$. ანუ $(a=b$ და $c=d)$.

ამიტომ (1) ფორმულიდან $\Rightarrow$ $\{\{a\}\}=\{\{c\}\}$ და I აქსიომიდან, ე.ი. $a=c$.

ანუ $a=b=c=d$. რ.დ.გ.

II შემთხვევა. $a\neq b$. ე.ი. $\{a,b\}$ ორელემენტიანია და $\{\{a\},\{a,b\}\}$-ც ორელემენტიანია. (1) და ექსტენციანალობიდან $\Rightarrow$, რომ $\{\{c\},\{c,d\}$ სიმრავლეც ორელემენტიანია, ე.ი. $\{c\}\neq\{c,d\}$ ანუ $c\neq d$.

(1) ტოლობიდან გვექნება მხოლოდ ერთი შემთხვევა.

$$\{a\}=\{c\} \text{ და } \{a,b\}=\{c,d\}, \text{ ანუ}$$

$$a=c \text{ და } \{a,b\}=\{a,d\}.$$

რადგან $a\neq b$. მაშინ და $b\in\{a,d\}$, ამიტომ $b=d$.

ე.ი. $a=c\,\&\,b=d$.

ე.ი. $\begin{matrix} a=b\Rightarrow a=c\,\&\,b=d. \\ a\neq b\neq a=c\,\&\,b=d \end{matrix} \Rightarrow a=b\vee a\neq b\Rightarrow a=c\,\&\,b=d$.

რადგან $a=b\vee a\neq b$ ტავტოლოგიაა, ამიტომ გვაქვს.

$a=c\,\&\,b=d$ რ.დ.გ.

a, *b* და *c* ელემენტებისაგან შედგენილი დალაგებული სამეული აღინიშნება (*a*, *b*, *c*) ჩანაწერით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(a,b,c)\overset{def}{=}((a,b),c).$$

ანალოგიურად გვექნება

$$(a,b,c,d)\overset{def}{=}((a,b,c),d) \text{ და ა.შ.}$$

ანუ თუ დალაგებული *n*-ეულის ცნებას რეკურენტული ფორმულით განვსაზღვრავთ, გვექნება:

$(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$,

(ü) $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots a_{n-1}), a_n)$, $n = 3,4,5\ldots$

სიმრავლეთა ოჯახის თანაკვეთა

თეორემა 3. თუ $A \neq \varnothing$ სიმრავლეთა რაიმე ოჯახია, მაშინ არსებობს ერთადერთი B სიმრავლე, რომელიც შედგება იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც A ოჯახში შემავალ ყველა სიმრავლეს ეკუთვნიან.

დამტკიცება. განვსაზღვროთ B სიმრავლე ტოლობით:

$$B = \{x \in U A : \forall X \in A (x \in X\}. \qquad (*)$$

ასეთი B სიმრავლის არსებობა გამომდინარეობს გამოყოფისა და გაერთიანების აქსიომების გამო. ექსტენციონალობის აქსიომიდან კი ასეთი B სიმრავლის ერთადერთობა გამომდინარეობს. ამიტომ შეგვიძლია (*) ტოლობით განსაზღვრული სიმრავლე აღვნიშნოთ $\cap A$ -ით. მას არაცარიელი A ოჯახის თანაკვეთა ეწოდება. კერძოდ, თუ $A = \{X_1, \ldots, X_n\}$, სადაც $n \in N$, მაშინ $\cap\{X_1, \ldots, X_n\}$-ის ნაცვლად ვწერთ $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$.

შენიშვნა. ცარიელი ოჯახის გაერთიანება, როგორც წესი, არ განისაზღვრება. რადგან გვინდა ისე განისაზღვროს ოჯახის თანაკვეთა, რომ შესრულდეს ბუნებრივი ეკვივალენტობა:

$$x \in \bigcap_{i \in I} X_i \Leftrightarrow \forall i (i \in I \Rightarrow x \in X_i)$$

ხოლო თუ I ცარიელი იქნება, მაშინ გამოვა, რომ $\bigcap_{i \in \theta} X_i$ სიმრავლეს ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის, ანუ ის უნივერსალური სიმრავლეა. ასეთი სიმრავლის არსებობას კი, როგორც ცნობილია, პარადოქსამდე მივყავართ.

სიმრავლეთა სხვაობა

თუ მოცემულია ორი A და B სიმრავლე, მაშინ გამოყოფის აქსიომის გამო არსებობს სიმრავლე

$$\{x \in A : \neg (x \in B)\} \text{ ანუ } \{x \in A : x \notin B)\}$$

ეს სიმრავლე, რომელიც ცხადია ერთადერთია, $A \setminus B$-თი აღინიშნება.

თეორემა 4. წყვილის აქსიომა (აქსიომა II′) გამომდინარეობს I-VII აქსიომებიდან.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ორი a და b სიმრავლე და ვთქვათ A ისეთი ოჯახია, რომელსაც ეკუთვნის $\varnothing$ და $\{\varnothing\}$ სიმრავლეები, ასეთი სიმრავლის არსებობა გამომდინარეობს უსასრულობის აქსიომიდან (აქ ჩვენ, რა თქმა უნდა, არ გვაქვს უფლება გამოვიყენოთ თავად წყვილის აქსიომა, რომლიდანაც გამოვიდოდა ასეთი $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ სიმრავლის არსებობა). ცხადია $\varnothing \neq \{\varnothing\}$. ვთქვათ ახლა $\Phi(x,y)$ არის ფორმულა)

$$\{(x=\varnothing \,\&\, y=a)\vee(x\neq\varnothing \,\&\, y=b)\}.$$

ცხადია, რომ $\Phi(x,y)$ ფორმულა ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ. ამიტომ VII აქსიომა გვაძლევს $\Phi''(A)$ სიმრავლის არსებობას. ადვილი შესამოწმებელია რომ $\Phi''(A)$ სიმრავლე იგივეა, რაც $\{a,b\}$ ორელემენტიანი სიმრავლე. რადგან $\varnothing \xrightarrow{\Phi} a$ და $\{\varnothing\} \xrightarrow{\Phi} b$.

ვაჩვენოთ ეს დაწვრილებით. მართლაც, თუ გავიხსენებთ ჩანაცვლების აქსიომას

$$\forall x\exists_1 y\Phi(x,y)\Rightarrow\forall A\exists B\forall y(y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A(\Phi(x,y)),$$

მაშინ რადგან ჩვენს შემთხვევაში წანამძღვარი ჭეშმარიტია, ჭეშმარიტი იქნება დასკვნაც. ე.ი.

გვაქვს $$\forall A\exists B\forall y(y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A(\Phi(x,y)).$$

ე.ი. ჩვენი A სიმრავლისთვისაც არსებობს სიმრავლე B ისეთი, რომ:

$$y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A(\Phi(x,y)).$$ ე.ი.

$$y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A(x=\varnothing \,\&\, y=a\vee x\neq\{\varnothing\} \,\&\, y=b)$$ ე.ი.

$$y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A(x=\varnothing \,\&\, y=a)\vee\exists x\in A(x\neq\{\varnothing\} \,\&\, y=b)$$

$$y\in B\Leftrightarrow\exists x\in A(x=\varnothing)\,\&\, y=a\vee\exists x\in A(x\neq\{\varnothing\})\,\&\, y=b$$

$$\exists x\in A(x=\varnothing)\,\&\,\exists x\in A(x\neq\{\varnothing\})$$ ჭეშმარიტი ფორმულებია,

ამიტომ გვექნება : $$y\in B\Leftrightarrow y=a\ \mathrm{V}\ y=b.$$

თეორემა 5. VI′ გამოყოფის აქსიომა გამომდინარეობს დანარჩენი, ანუ I-VII აქსიომებიდან.

დამტკიცება. გავიხსენოთ VI′ და VII აქსიომები.

VI′ აქსიომა ამბობს, რომ თუ A რაიმე სიმრავლეა, ხოლო $\Phi(x)$ ფორმულა, მაშინ არსებობს სიმრავლე

$$B=\{t:t\in A\,\&\,\Phi(t)\}.\qquad (*)$$

VII აქსიომა კი გვეუბნება, რომ თუ A სიმრავლეა, ხოლო $\Phi(x,y)$ ისეთი ფორმულაა, რომ შესრულებულია $\forall x \exists_1 y \Phi(x,y)$ პირობა (ანუ $\Phi(x,y)$ ფუნქციონალურია y ცვლადის მიმართ), მაშინ არსებობს სიმრავლე:

$$B' = \{t : \exists x \in A \Phi(x,t)\}.$$

ვთქვათ ახლა გვაქვს რაიმე $\Phi(x)$ ფორმულა და დავამტკიცოთ რომ (*)-ით განსაზღვრული B სიმრავლე მართლაც არსებობს.

I შემთხვევა. ვთქვათ A-ში არ არსებობს $a \in A$ ელემენტი ისეთი, რომ $\Phi(a)$ წინადადება ჭეშმარიტია. მაშინ B სიმრავლე ცარიელი იქნება და მისი არსებობა გამომდინარეობს II აქსიომიდან.

II შემთხვევა. არსებობს $a \in A$ ისეთი, რომ $\Phi(a)$ ჭეშმარიტია.

განვიხილოთ *ZFC*-თეორიის შემდეგი ფორმულა $\Psi(x,y)$:

$$[\Phi(x) \& y = x] \vee [\neg\, \Phi(x) \& y = a].$$

ცხადია, რომ სრულდება $\forall x \exists_1 y \Psi(x,y)$ პირობა, ამიტომ VII_Ψ აქსიომიდან $B' = \{y : \exists x \in A \Psi(x,y)\}$ სიმრავლე არსებობს. ე.ი. არსებობს

$B' = \{y : \exists x \in A\ ([\Phi(x) \& y = x] \vee [\neg\, \Phi(x) \& y = a])\}$. მაგრამ

$$\exists x \in A\ ([\Phi(x) \& y = x] \vee [\neg\, \Phi(x) \& y = a]) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in A\, [\Phi(x) \& y = x] \vee \exists x \in A [\neg\, \Phi(x) \& y = a] \Leftrightarrow$$

$$y \in A \& \Phi(y) \quad .$$

ამიტომ $B' = B$ და (*)-ით განსაზღვრული B სიმრავლის არსებობაც დამტკიცებულია.

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი

ვთქვათ X და Y ნებისმიერი სიმრავლეებია. დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ყველა ისეთ დალაგებულ (a,b) წყვილთა სიმრავლეს, რომ $a \in X$ და $b \in Y$.

დავამტკიცოთ ასეთი სიმრავლის არსებობა.

თუ $a \in X$ და $b \in Y$ მაშინ $\{a\} \subset X \cup Y$ და $\{a,b\} \subset X \cup Y$

ამიტომ $\{a\} \in P(X \cup Y)$ და $\{a,b\} \in P(X \cup Y)$,

მაშინ

$$\{\{a\},\{a,b\}\} \subset P(X \cup Y),$$

ამიტომ

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} \in P(P(X \cup Y)),$$

რადგან არსებობს $X \cup Y$ (გაერთიანების აქსიომით), არსებობს $P(X \cup Y)$ ხარისხის (ბულეანის არსებობის) აქსიომით და იმავე აქსიომით არსებობს $P(P(X \cup Y))$ სიმრავლეც, ამიტომ VI′ (გამოყოფის აქსიომით) გვექნება, რომ არსებობს სიმრავლე:

$$\{t \in P(P(X \cup Y)) : \exists a \in X (b \in Y (t = (a,b)))\}. \qquad (1)$$

ცხადია ეს სიმრავლე შეიცავს ყველა ისეთ დალაგებულ წყვილს (a,b)-ს რომლისთვისაც შესრულდება $a \in X \,\&\, b \in Y$ და მხოლოდ მათ. ამდენად სწორედ ეს არის საძიებელი დეკარტული ნამრავლი.

(1) სიმრავლე აღინიშნება $X \times Y$ ჩანაწერით.

დეკარტული ნამრავლის თვისებები

1) $X \times Y = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$ ან $Y = \varnothing$ (დაამტკიცეთ დამოუკიდებლად).

2) დისტრიბუტიულობა გაერთიანებასთან:

ა) $(X_1 \cup X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)$;

ბ) $Y \times (X_1 \cup X_2) = (Y \times X_1) \cup (Y \times X_2)$.

დავამტკიცოთ მაგალითად ა). $(a,b) \in (X_1 \cup X_2) \times Y \Leftrightarrow (a \in X_1 \cup X_2)$

$$\& b \in Y \Leftrightarrow (a \in X_1 \vee a \in X_2) \,\&\, b \in Y \Leftrightarrow$$
$$(a \in X_1 \,\&\, b \in Y) \vee (a \in X_2 \,\&\, b \in Y) \Leftrightarrow ((a,b) \in X_1 \times Y) \vee ((a,b) \in X_2 \times Y) \Leftrightarrow$$
$$(a,b) \in (X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y)$$

რ. დ. გ.

3) **დისტრიბუტიულობა თანაკვეთასთან**:

ა) $(X_1 \bigcap X_2) \times Y = (X_1 \times Y) \bigcap (X_2 \times Y)$;

ბ) (დაამტკიცეთ დამოუკიდებლად,).

4) დეკარტული ნამრავლის მონოტონურობის თვისებები. თუ $Y \neq \varnothing$, მაშინ

ა) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow X_1 \times Y \subset X_2 \times Y$;

ბ) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow Y \times X_1 \subset Y \times Y_2$. (დაამტკიცეთ)

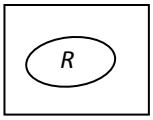
რაც შეეხება დეკარტული ნამრავლის კომუტატიურობას $X \times Y = Y \times X$

ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X=Y$ ან $X = \varnothing$ ან $Y = \varnothing$ (შეამოწმეთ).

თუ $X = Y$, მაშინ $X \times X$ დეკარტული ნამრავლი აღინიშნება X^2-ით.

ბინარული მიმართება

$X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის ყოველ R ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული მიმართება X და Y სიმრავლეთა ელემენტებს შორის. (უფრო ზუსტად ბინარული მიმართება ეწოდება სამეულს (R, X, Y), სადაც $R \subset X \times Y$) .

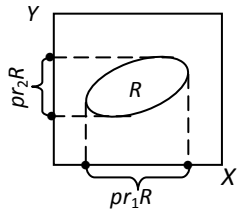


იმ შემთხვევაში თუ $Y = X$, მაშინ დეკარტული ნამრავლის X ანუ X^2-ის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული მიმართება X სიმრავლის ელემენტთა შორის.

ვთქვათ $R \subset X \times Y$ ბინარული მიმართებაა (X და Y სიმრავლეთა ელემენტებს შორის) თუ $(x, y) \in R$ ამას ასე ჩავწერთ xRy . განვსაზღვროთ R მიმართების I და II პროექციები:

$$pr_1R = \{x \in X : \exists y \in Y((x,y) \in R\},$$

$$pr_2R = \{y \in Y : \exists x \in X((x,y) \in R\}.$$



ცხადია საზოგადოდ:.

$$R \neq pr_1R \times pr_2R \neq X \times Y$$

ყოველ X სიმრავლის ელემენტებს შორის გვაქვს სამი ბუნებრივი ბინარული მიმართება: **ცარიელი მიმართება**, რომელიც არც ერთ წყვილს არ შეიცავს ($\varnothing \subset X \times X$); **სრული ბინარული მიმართება,** რომელიც ემთხვევა მთელ $X \times X$ დეკარტულ ნამ-რავლს და $\{(x,x) : x \in X\}$ ბინარული მიმართება რომელსაც $\Delta(X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ და X^2 -ის დიაგონალი ეწოდება.

ვთქვათ R ბინარული მიმართებაა X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის. განვიხილოთ მასთან ბუნებრივად დაკავშირებული ბინარული მიმართება, რომელსაც R-ის შებრუნებული ეწოდება, R^{-1}-ით აღინიშნება და შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\} \quad \text{ანუ}$$

$$(a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R.$$

ცხადია, რომ $pr_1(R) = pr_2(R^{-1})$ და $pr_2(R) = pr_1(R^{-1})$.

განვიხილოთ ნებისმიერი ორი ბინარული S $\subset$ A×B და T $\subset$ C×D მიმართება. ამ ორი მიმართების T$\circ$S კომპოზიცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$T \circ S = \{(a,d) : (\exists z)((a,z) \in S \ \& \ (z,d) \in T)\}.$$

ცხადია, ეს კომპოზიცია არ არის დამოკიდებული A,B,C,D სიმრავლეების შერჩევაზე და წარმოადგენს რომელიღაც ბინარულ მიმართებას A და D სიმრავლეების ელემენტებს შორის.

ვთქვათ, მოცემულია კიდევ ერთი R $\subset$ E×F ბინარული მიმართება. ადვილად მოწმდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$R \circ (T \circ S) = (R \circ T) \circ S,$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ბინარულ მიმართებათა კომპოზიციისათვის სრულდება ასოციატიურობის პირობა.

ახლა დავუშვათ, რომ S ბინარული მიმართებაა რაიმე A სიმრავლეზე, ე.ი. $S \subset A \times A$. შეამოწმეთ, რომ:

S რეფლექსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\Delta(A) \subset S$;

S სიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $S = S^{-1}$;

S ანტისიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $S \cap S^{-1} \subset \Delta(A)$.

S ტრანზიტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $S \circ S \subset S$.

ეკვივალენტობის დამოკიდებულება

X სიმრავლეზე განსაზღვრული R ბინარული მიმართებას ეწოდება ეკვივალენტობის მიმართება (მოკლედ ეკვივალენტობა) თუ X სიმრავლის ნებისმიერი x, y და z ელემენტებისათვის შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

xRx – რეფლექსურობა;

$xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$ – ტრანზიტულობა;

$xRy \Rightarrow yRx$ – სიმეტრიულობა.

მაგალითები. ა) ვთქვათ X არის სიბრტყეზე მოთავსებულ ყველა წრფეთა სიმრავლე. ხოლო R არის პარალელურობის დამოკიდებულება წრფეებს შორის ანუ თუ $x, y \in X$ მაშინ xRy უბრალოდ ნიშნავს, რომ x წრფე პარალელურია y-ის. ცხადია R ეკვივალენტობის მიმართებაა X-ზე (შეამოწმეთ).

ბ) ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განვიხილოთ ასეთი S დამოკიდებულება: xSy მაშინ და მხოლოდ, მაშინ როცა $x - y$ რაციონალური რიცხვია. ცხადია, რომ S ეკვივალენტობაა (შეამოწმეთ).

გ) = ტოლობის მიმართება ნებისმიერ X სიმრავლეზე ეკვივალენტობის მიმართებაა.

დ) მსგავსების დამოკიდებულება გეომეტრიულ ფიგურათა შორის სიბრტყეზე (ან სივრცეში) ეკვივალენტობაა. (შეამოწმეთ).

ფუნქციონალური გრაფიკი. ვთქვათ X და Y რაიმე სიმრავლეებია, ბინარულ მიმართებას $G \subset X \times Y$ ეწოდება ფუნქციონალური გრაფიკი თუკი სამართლიანია პირობა

$$((x,y) \in G \,\&\, (x,y') \in G) \Rightarrow y = y'$$

ანუ გრაფიკი ფუნქციონალურია თუკი ის ყოველ x ელემენტს (პირველ კომპონენტს) შეუსაბამებს ერთადერთ (მეორე კომპონენტს) y ელემენტს.

ფუნქცია $f = (G, X, Y)$ დალაგებულ სამეულს ეწოდება ფუნქცია თუ G არის ფუნქციონალური გრაფიკი, $pr_1 G = X$ და $pr_2 G \subset Y$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ასახავს X სიმრავლეს Y-სიმრავლეში და ამას ასე გამოსახავენ $f : X \to Y$ ან $X \xrightarrow{f} Y$.

ფუნქციის ცნების კერძო შემთხვევები: ინიექცია, სიურექცია, ბიექცია ამის შემდეგ ჩვეულებრივად განისაზღვრება.

ფუნქციის შესაბამისი ექვივალენტობის მიმართება, ფუნქციის გრაფი, ბმულობის კომპონენტები

ვთქვათ $f : X \to X$ ფუნქცია განვიხილოთ შემდეგი მიმართება

$$E_f = \{(x,y) \in X^2 : \exists n, m \in N(f^n(x) = f^m(y))\}.$$

თეორემა. E_f არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე.

დამტკიცება. 1. (რეფლექსურობა). რადგან $f^1(x) = f^1(x)$ ნების-მიერი $x \in X$ -სათვის, ამიტომ $(x,x) \in E_f$.

2. (სიმეტრიულობა). ვთქვათ $(x,y) \in E_f$, მაშინ $(y,x) \in E_f$ იმიტომ, რომ

$$\exists n, m \in N\left(f^n(x) = f^m(y)\right) \Leftrightarrow \exists m, n \in N\left(f^m y) = f^n(x)\right).$$

3. ტრანზიტულობა ვთქვათ $(x,y) \in E_f \,\&\, (y,z) \in E_f$.

ცხადია არსებობენ ისეთი n_1, m_1, n_2, $m_2 \in N$ რიცხვები, რომ სამართლიანია ტოლობა $f^{n_1}(x) = f^{m_1}(y)$ და $f^{n_2}(y) = f^{m_2}(z)$.

ავიყვანოთ I ტოლობა n_2 ხარისხში, ხოლო II ტოლობა m_1 ხარისხში, მივიღებთ

$$f^{n_1 n_2}(x) = f^{m_1 n_2}(y) \quad \text{და} \quad f^{n_2 \cdot m_1}(y) = f^{m_2 \cdot m_1}(z),$$

საიდანაც, ფუნქციათა კომპოზიციის ოპერაციის ასოციატიურობის გამო, ვღებულობთ, რომ

$$f^{n_1 n_2}(x) = f^{m_2 m_1}(z).$$

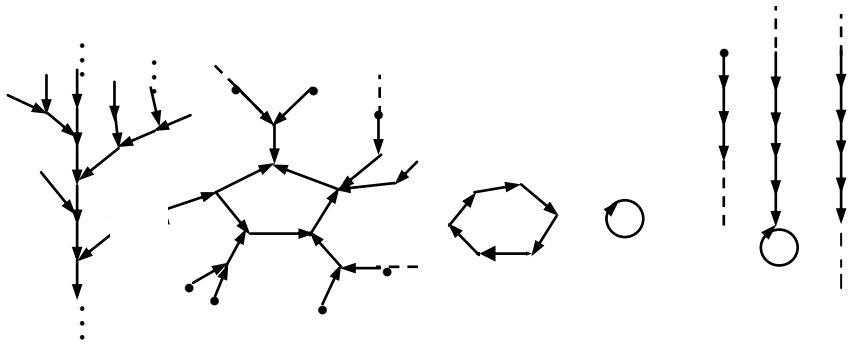
რაც იმას ნიშნავს, რომ $(x,z) \in E_f$.

ე.ი. E_f ეკვივალენტობის მიმართებაა X-ზე. ■

თუ $(x,) \in E_f$ ანუ თუ x და y ერთიდაიგივე ეკვივალენტობის კლასშია, მაშინ ცხადია, რომ რაღაც ნატურალური m, n-თვის

$$f\left(\underbrace{----}_{n-\text{ჯერ}} f(f(f(x)))\right) = f\left(\underbrace{----}_{m-\text{ჯერ}} f(f(f(y)))\right).$$

და ეს ორი წერტილი, x და y, იქნება $G_f = \{(x,y) : f(x) = y\}$ გრაფის ერთ ბმულობის კომპონენტში ანუ ერთიდაიგივე ეკვივალენტობის კლასში. ხოლო თუ $(x,y) \notin E_f$, მაშინ x და y მოხვდებიან G_f გრაფის სხვადასხვა ბმულობის კომპონენტებში, ცხადია G_f ორიენტირებული გრაფია. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ f ფუნქციაა X-დან X-ში, მაშინ $G_f = \{(x,y) \in X^2 : f(x) = y\}$ გრაფის ბმულობის კომპონენტები იქნება ერთ-ერთი შემდეგი სახის.



ნახაზზე ბოლო ფიგურა ორმხრივ უსასრულო ციკლია, ბოლოდან მეორე, ბოლოში მარყუჟით მთავრდება.

ყოველ ბმულობის კომპონენტში – ცხადია შეიძლება იყოს არაუმეტეს ერთი ციკლისა (კერძოდ მარყუჟიც არაუმეტეს ერთისა). გრაფის ყოველი წერტილიდან აუცილებლად უნდა გამოდიოდეს ისარი, თუმცა შესაძლოა ზოგიერთ წერტილში არ შედიოდეს არცერთი ისარი. ბმულობის კომპონენტების რაოდენობა შეიძლება იყოს ნებისმიერი, მაგრამ ცხადია, არაუმეტეს X-ის ელემენტის რაოდენობისა.

ამოცანა. რა სახის ბმულობის კომპონენტები ექნება ა) სიურექციას? ბ) ინექციას? გ) ბიექციას?

ამოცანა. როგორი ტიპის იქნება

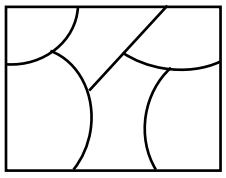
ა) მუდმივი ფუნქციის გრაფი?

ბ) იგივური ფუნქციის გრაფი?

გ) დირიხლეს ფუნქციის გრაფი?

დ) წრფივი ფუნქციის გრაფი?

სიმრავლის დაყოფა

$\boldsymbol{D}$ სიმრავლეს ეწოდება X სიმრავლის  **დაყოფა** თუ

1. $A \in \boldsymbol{D} \Leftrightarrow A \subset X \;\&\; A \neq \varnothing$

2. $A,B \in \boldsymbol{D} \;\&\; A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

3. $\cup \boldsymbol{D} = X$

არაცარიელ სიმრავლეთა ოჯახს ეწოდება **დიზიუნქტიური** თუკი ამ ოჯახის ნებისმიერი ორი წევრის თანაკვეთა ცარიელია.

ანუ X სიმრავლის დაყოფა ეს არის მისი არაცარიელი ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილი დიზიუნქტიური ოჯახი, რომელთა გაერთიანებაც X-ის ტოლია.

კითხვა 1. გააჩნია თუ არა ცარიელ სიმრავლეს დაყოფა? რატომ?

კითხვა 2. შეიძლება თუ არა რომ X სიმრავლის დაყოფაში ორი ქვესიმრავლე ერთმანეთის ტოლი იყოს? რატომ?

კითხვა 3. დაამტკიცეთ რომ თუ $\boldsymbol{D}$ A-ს დაყოფაა, მაშინ $\boldsymbol{D} \in P(P(A))$.

დამტკიცება. $X \in \mathsf{A} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in P(A)$. ამიტომ $\mathsf{A} \Rightarrow P(\mathsf{A})$, ე.ი. $\mathsf{A} \in P(P(A))$.

$X \in \boldsymbol{D} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in P(A)$, *ამიტომ* $\boldsymbol{D} \subset P(A)$, *ე.ი.* $\boldsymbol{D} \in P(P(A))$

კითხვა 4. დაამტკიცეთ, რომ თუ A სიმრავლეა, მაშინ $\boldsymbol{D}$ -ც სიმრავლეა.

თეორემა 9. ვთქვათ A არის X სიმრავლის დაყოფა, მაშინ R_{A} ბინარული მიმართება განსაზღვრული ექვივალენტობით

$$xR_{\mathsf{A}}y \Leftrightarrow \exists A \in \mathsf{A}(x \in A \& y \in A)$$

წარმოადგენს ექვივალენტობის მიმართებას A სიმრავლეზე.

(ზუსტად რომ განვსაზღვროთ:
$R_{\mathsf{A}} = \{t : \exists x \in X \exists y \in X(t = (x, y) \& \exists A \in \mathsf{A})x \in A \& y \in A))\}$).

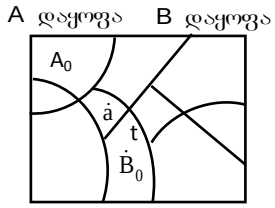
დამტკიცება: ა) შევამოწმოთ, რომ R_{A} რეფლექსურია. ვთქვათ $t \in X$, რადგან A არის X-ის დაყოფა ამიტომ t იქნება A დაყოფის ერთ ერთ A ელემენტის ელემენტი. ე.ი. $t \in A$. ამიტომ ცხადია $tR_{\mathsf{A}}t$ ჭეშმარიტია.

ბ) სიმეტრიულობა. ვთქვათ $uR_{\mathsf{A}}v$ (სადაც $u, v \in X$). მაშინ არსებობა $A \in \mathsf{A}$ ისეთი, რომ $u \in A \& v \in A$, &-ის კომუტატიურობის გამო $v \in A \& u \in A$, ე.ი. $vR_{\mathsf{A}}u$ -ც ჭეშმარიტია.

გ) ტრანზიტულობა ვთქვათ, $uR_{\mathsf{A}}t$ და $tR_{\mathsf{A}}v$, მაშინ არსებობს $A,B \in \mathsf{A}$, ისეთი რომ u,t$\in A$, $t,v \in B$, ე.ი. $t \in A$ და $t \in B$. ე.ი. $t \in A \cap B$ და ამიტომ $A = B$. ე.ი. $u \in A$ და $v \in A$ ამიტომ $uR_{\mathsf{A}}v$. რ.დ.გ.

თეორემა 10. თუ A და B ორი სხვადასხვა დაყოფაა X არაცარიელი სიმრავლისა, მაშინ R_{A} და R_{B} სხვადასხვა ექვივალენტობის მიმართებებია. ანუ $\mathsf{A} \neq \mathsf{B} \Rightarrow R_{\mathsf{A}} \neq R_{\mathsf{B}}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$. მაშინ ერთ ერთ სიმრავლეში ვთქვათ A-ში არსებობს დაყოფის A_0, რომელიც არ არის მეორე (ანუ B) დაყოფის ელემენტი. რადგან A_0 დაყოფის ელემენტია ის არაცარიელია ანუ არსებობს $a \in A_0 (\subset X)$. რადგან $a \in X$ და B კი X-ის დაყოფაა, ამიტომ B-ში იარსებებს დაყოფის ელემენტი B_0 ისეთი რომ $a \in B_0$. რადგან A_0 არ გვხდება B დაყოფაში ამიტომ ამიტომ $A_0 \neq B_0$, ე.ი. ერთ ერთში ვთქვათ B_0-ში არსებობს ელემენტი t რომელიც არაა A_0-ში. ე.ი. $t \in B_0 \,\&\, t \notin A_0$. ე.ი, გვაქვს $a \in A_0$, $a \in B_0$, $t \in B_0$, $t \notin A_0$. ამიტომ $(a,t) \notin R_{\mathsf{A}}$ და $(a,t) \in R_B$, ე.ი. $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$. რ.დ.გ.



თეორემა 11. ნებისმიერი R ექვივალენტობის მიმართება, რომელიც არაცარიელ X სიმრავლეზეა განსაზღვრული, X სიმრავლის რომელიმე დაყოფით განისაზღვრება. ანუ არსებობს X-ის დაყოფა A ისეთი რომ $R = R_{\mathsf{A}}$.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a \in X$-თვის აღვნიშნოთ $[a]_R = \{t \in X : tRa\}$ და განვიხილოთ ოჯახი $\mathsf{A} = \{[a]_R : a \in X\}$. ცხადია, რომ ეს არის დაყოფა მართლაც.

ა) R-ის რეფლექსურობის გამო, თუ $a \in X$, მაშინ $a \in [a]_R$ და ე.ი. $[a]_R \neq \varnothing$. ე.ი. დაყოფის ნებისმიერი სიმრავლე არაცარიელია.

ბ) თუ $[a]_R \neq [b]_R$, მაშინ $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$ წინააღმდეგ შემთხვევაში იარსე-ბებს $t \in [a]_R$ და $t \in [b]_R$ ე.ი. tRa და tRb, მაშინ გამოვა რომ (R-ის სიმეტრიულობითა და ტრანზიტულობით) aRb, $[a]_R = [b]_R$.

გ) $\bigcup \mathsf{A} = X$ მართლაც. ვთქვათ $t \in X$, მაშინ $t \in [t]_R \in \mathsf{A}$ და ე.ი. $t \in \bigcup \mathsf{A}$, ე.ი. $X \subset \bigcup \mathsf{A}$.

მეორეს მხრივ ცხადია, რომ $\bigcup \mathsf{A} \subset X$, რადგან $\forall a([a]_R \subset X)$

ე.ი. A დაყოფაა.

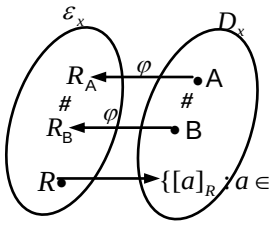
ახლა დავამტკიცოთ, რომ $R = R_{\mathsf{A}}$, სადაც $\mathsf{A} = \{[a]_R : a \in X\}$.

დავუშვათ u და v X-ის ნებისმიერი ელემენტია და uRv ანუ $(u,v) \in R$. $u \in [u]_R \,\&\, v \in [u]_R \Rightarrow \mathsf{A}$ დაყოფაში მოიძებნა ისეთი სიმრავლე, კერძოდ $[u]_R$, რომელსაც u და v ორივე ეკუთვნის $\Rightarrow uR_{\mathsf{A}}v \Leftrightarrow (u,v) \in R_{\mathsf{A}}$. ე.ი. $R \subset R_{\mathsf{A}}$.

პირიქით. თუ $(u,v) \in R_{\mathsf{A}}$, მაშინ A-ში არსებობს სიმრავლე $[a]_R$ ისეთი, რომ $u \in [a]_R$ და $v \in [a]_R$, ამიტომ uRa და vRa სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის გამო ვღებულობთ uRv. ანუ $(u,v) \in R_{\mathsf{A}} \Rightarrow (u,v) \in R$. ე.ი. $R \subset R$. ე.ი, $R = R_{\mathsf{A}}$. რ.დ.გ.

შენიშვნა: ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ X რაიმე სიმრავლეა და მასზე მოცემულია ექვივალენტობის R მიმართება და A დაყოფა $R \in P(X^2)$ და $\mathsf{A} \in P(P(X))$.

აღვნიშნოთ, ε_x-ით X-ზე განსაზღვრულ ყველა ექვივალენტობის მიმართებათა სიმრავლე (ის სიმრავლეა რადგან გამოყოფის აქსიომით მიიღება $P(X^2)$ სიმრავლიდან), ხოლო D_x-ით აღვნიშნოთ X სიმრავლის ყველა დაყოფათა სიმრავლე (ესეც სიმრავლეა, რადგან კვლავ გამოყოფის აქსიომით მიიღება $P(P(X))$ სიმრავლიდან).



თეორემა 9 განსაზღვრავს $\varphi : D_x \to \varepsilon_x$ ასახვას. თეორემა 10 გვეუბნება, რომ ეს φ ასახვა ინიექციურია. ხოლო თეორემა 11 φ ასახვის სიურექციულობას ამტკიცებს და საბოლოოდ გამოდის, რომ φ ბიექციაა D_x და ε_x სიმრავლეებს შორის ამასთან ერთად:

$$\varphi(\mathsf{A}) = R_{\mathsf{A}} \quad \text{და} \quad \varphi^{-1}(R) = \{[a]_R : a \in X\}.$$

დალაგების მიმართება

განვიხილოთ A სიმრავლე და $S \subset A \times A$ ბინარული მიმართება A-ზე (A-ში).

S-ს ეწოდება ნაწილობრივი დალაგების მიმართება (ან უბრალოდ - დალაგების მიმართება) თუ ეს მიმართება არის.

1. რეფლესური ე.ი. $(x,x)\in S$ ნებისმიერი $x\in A$-თვის.

2. ანტისიმეტრიული, ე.ი. ნებისმიერი $x,\ y\in A$-სათვის. $xSy \,\&\, ySx \Rightarrow x=y$.

3. ტრანზიტული, ე.ი. $xSy \,\&\, ySz \Rightarrow xSz$.

დალაგების დამოკიდებულებას ხშირად $\leq$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ იმის გამო, რომ ნამდვილ რიცხვთა შორის არსებული დალაგების $\leq$ მიმართება იყო ის მთავარი მიზეზი, საიდანაც წარმოიშვა თანამედროვე მათემატიკაში დალაგების სტრუქტურების ზოგადი თეორია.

თუ $\leq$ დალაგების მიმართებაა A სიმრავლეზე, a და b კი A-ს ელემენტებია, მაშინ სრულებით არაა დავალდებულო, რომ $a\leq b$ და $b\leq a$ წინადადებებიდან ერთ-ერთი აუცილებლად შესრულდეს. თუ $a\leq b$ ან $b\leq a$, მაშინ a და b ელემენტებს **ურთიერთსადარი ელემენტები** ეწოდებათ, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი **არასადარი**.

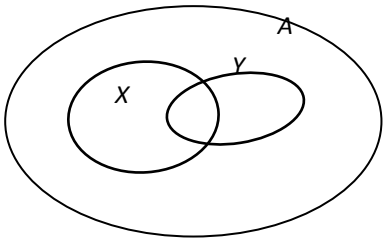
მაგალითი. თუ $X,Y\in P(A)$-ს ანუ $X\subset A$ და $Y\subset A$. მაშინ

1) $X\subset X$ ჭეშმარიტია, ე.ი. $\subset$ მიმართება რეფლექსურია.

2) $X\subset Y \,\&\, Y\subset X \Rightarrow X=Y$ (ე.ი. ანტისიმეტრიულია).

3) $X\subset Y \,\&\, Y\subset Z \Rightarrow X\subset Z$ (ე.ი. ტრანზიტულია).

შენიშვნა. ცხადია, რომ საზოგადოდ $P(A)$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი $\subset$ დალაგების მიმართების მიმართ სადარი არაა.



ნახაზზე ნაჩვენებია ისეთი შემთხვევა, როცა არც $X\subset Y$ და არც $Y\subset X$. ასევე თუ $a,b\in A$ და $a\neq b$, მაშინ $\{a\}$ და $\{b\}$ სიმრავლეები არასადარებია.

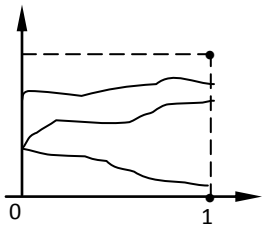
თუ A სიმრავლეზე მოცემულია $\leq$ დალაგების მიმართება, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე დალაგებულია $\leq$ მიმართებით. ან – $(A,\leq)$ დალაგებული სიმრავლეა.

მაგალითი. ვთქვათ $F=\{f : f:(0,1)\to(0,1)\}$ ანუ ვთქვათ F არის ყველა ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა სიმრავლე (0,1)-დან (0,1)-ში. შემოვიღოთ F სიმრავლეზე დალაგების $\leq_f$ მიმართება შემდეგნაირად:

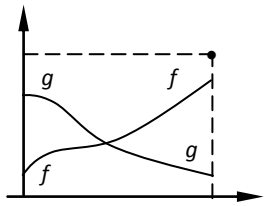
$$f\leq_f g \Leftrightarrow \forall x\in(0,1)(\, f(x)\leq g(x))$$

სადაც $\leq$ ჩვეულებრივი დალაგების მიმართებაა (0,1) ინტერვალის რიცხვებს შორის.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\leq_f$ მიმართება მართლაც დალაგების მიმართებაა (შეამოწმეთ).



სადარი ფუნქციებია



არასადარი ფუნქციებია

მაგალითად. x და $2x$ ფუნქციები $\leq_f$ სადარი ფუნქციებია, ხოლო x და $1-x$ არასადარი ფუნქციები $\leq_f$ დალაგების დამოკიდებულების მიმართ.

ამოცანა. ვთქვათ f ფუნქციაა X დან X –ში. განვსაზღვროთ მიმართება

$$x \leq^* y \Leftrightarrow \exists n \in N\ (f^n(x)=y).$$

იქნება თუ არა ნებისმიერი ფუნქციისთვის ეს მიმართება დალაგების მიმართება ? (განიხილეთ ციკლის შემცველობა ფუნქციის გრაფში).

$\leq$ დალაგების დამოკიდებულებას ეწოდება **წრფივი დალაგების** დამოკიდებულება (ან მიმართება) A-ზე თუ ის დამატებით ფლობს თვისებას:

A სიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის $a \leq b$ ან $b \leq a$. ანუ A სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი სადარია.

მაგალითი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებულია წრფივად ჩვეულებრივი $\leq$ მიმართების მიხედვით (რადგან ნებისმიერი ორი რიცხვისათვის $a \leq b$ ან $b \leq a$).

ცხადია, რომ თუ $(A, \leq)$ დალაგებული სიმრავლე, ან წრფივად დალაგებული, სიმრავლეა და $B \subset A$, მაშინ $(B, \leq)$-ც დალაგებული, შესაბამისად წრფივად დალაგებული სიმრავლე იქნება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A-ზე მოცემული დალაგების დამოკიდებულება **ინდუცირებს** B ქვესიმრავლეზე დალაგების მიმართებას.

ვთქვათ, $(A, \leq)$ დალაგებული სიმრავლეა და $B \subset A$. $b \in B$ ელემენტს ეწოდება B სიმრავლის მინიმალური (მაქსიმალური) ელემენტი, თუ $B \setminus \{b\}$ სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი c რომ შესრულდეს $c \leq b$ $(b \leq c)$.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, b მინიმალურია B-ში თუ ის ნაკლებია ან ტოლი B-ს ნებისმიერ ელემენტზე ან მასთან არასადარია. ასევე b მაქსიმალურია. B-ში თუ ის მეტია ან ტოლი B-ს ნებისმიერ ელემენტზე ან მასთან არასადარია.

$a \geq b$ ჩანაწერი იგივეა რაც $b \leq a$ ჩანაწერი.

$a < b$ არის შემოკლებული აღნიშვნა ფორმულისა $a \leq b \,\&\, a \neq b$;

$a > b$ არის შემოკლებული აღნიშვნა ფორმულის $a \geq b \,\&\, a \neq b$.

$a < b$ – იკითხება: a მკაცრად ნაკლებია b-ზე ან b მკაცრად მეტია a-ზე.

$(A, \leq)$ სიმრავლის a ელემენტს ეწოდება უდიდესი (უმცირესი) ელემენტი A-ში, თუ A სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის გვაქვს $x \leq a$ $(x \geq a)$ ანუ A სიმრავლის უდიდესი (უმცირესი) ელემენტი A სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტზე მეტი ან ტოლია (ნაკლები ან ტოლია).

ცხადია, რომ $(A, \leq)$ სიმრავლეში შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ ერთი უდიდესი ელემენტი შესაბამისად უმცირესი ელემენტი (დაასაბუთეთ).

ცხადია, ასევე რომ უდიდესი (უმცირესი) ელემენტი სიმრავლისა ამავე დროს არის ამ სიმრავლის მაქსიმალური (მინიმალური) ელემენტიც. ცხადია ისიც, რომ დალაგებულ სიმრავლეში შეიძლება იყოს ბევრი მინიმალური (მაქსიმალური) ელემენტი ან არ იყოს არცერთი.

ზოგიერთი მაგალითი: $(N, \leq)$ სიმრავლე შეიცავს უმცირეს (მინიმალურ) ელემენტს და არ შეიცავს უდიდესს (მაქსიმალურს) $(Z, \leq)$ სიმრავლე არ შეიცავს არც მინიმალურ და არც მაქსიმალურ, მითუმეტეს არც უდიდეს და არც უმცირეს ელემენტს.

განვიხილოთ N- სიმრავლეზე შემდეგი ბინარული მიმართება:

$$\leq_N = \{(m,n) \in N^2 : m \leq n \,\&\, m \equiv n (\mathrm{mod}\, 2)\}$$

ცხადია $\leq_N$ წარმოადგენს დალაგების მიმართებას N-ზე (შეამოწმეთ). ხოლო $(N, \leq_N)$ დალაგებულ სიმრავლეს აქვს ორი მინიმალური ელემენტი 0 და 1 და არა აქვს არც მაქსიმალური, არც უდიდესი და არც უმცირესი ელემენტს.

$0 \leq_N 2 \leq_N 4 \leq_N \cdots$

$1 \leq_N 3 \leq_N 5 \leq_N \cdots$

ნატურალური რიცხვები

ყოველი X სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ $X' \equiv X \cup \{X\}$. X'-სიმრავლის მომდევნო ეწოდება.

თეორემა 1 არსებობს სიმრავლეთა ერთადერთი ოჯახი. ω, რომელსაც შემდეგი თვისებები აქვს:

(I) $\varnothing \in \omega$;

(II) $X \in \omega \Rightarrow X' \in \omega$;

(III) თუ K სიმრავლეთა ისეთი ოჯახია, რომელსაც (I) და (II) თვისებები აქვს, მაშინ $\omega \subset K$.

დამტკიცება. უსასრულობის აქსიომიდან ჩანს, რომ არსებობს ერთი მაინც ოჯახი U, ისეთი რომ (I) და (II) თვისებების ანალოგი მისთვის სამართლიანია.

ვთქვათ A არის U-ს ყველა იმ ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომლებიც (I) და (II) თვისებებს აკმაყოფილებენ, ანუ:

$$\mathsf{A} = \{S \subset U : \varnothing \in S \;\&\; \forall X (X \in S \Rightarrow X' \in S)\}.$$

ცხადია $U \in \mathsf{A}$ და ამიტომ $\mathsf{A} \neq \varnothing$. განვიხილოთ A ოჯახის თანაკვეთა, აღვნიშნოთ

$$\omega \equiv \bigcap \mathsf{A} \text{-ით}$$

და ვაჩვენოთ, რომ ეს ω არის საძიებელი სიმრავლე.

მართლაც (I) ცხადია, რომ $\varnothing \in \omega$, რადგან $\varnothing$ A ოჯახში შემავალი ყველა სიმრავლის ელემენტია და მაშ იქნება $\bigcap \mathsf{A}$-ის ელემენტიც.

(II) ვთქვათ $X \in \omega$, მაშინ $X \in \bigcap \mathsf{A}$ და ე.ი. X არის A-ს ყოველი ელემენტის ელემენტი, A-ს განმარტების თანახმად X'-ც არის A-ს ყოველი ელემენტის ელემენტი და ამიტომ გვექნება $X' \in \omega$.

(III) თვისებაც ცხადია ω სიმრავლის განმარტების გამო. რ.დ.გ.

ცხადია, რომ ω სიმრავლის ელემენტებია $\varnothing, \varnothing', (\varnothing')' \cdots$, ანუ

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots.$$

რადგან A ოჯახის ნებისმიერი S სიმრავლისათვის $\omega \subset S$, ამიტომ ω არის $(A, \subset)$ დალაგებული სიმრავლის უმცირესი ელემენტი, ამიტომ მასში სხვა ტიპის ელემენტები ვერ იქნება.

ω-სიმრავლის ელემენტები აღვნიშნოთ m, n, k, p,... ასოებით.

ω-სიმრავლეს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, ხოლო მის ელემენტებს ნატურალური რიცხვები. ქვემოთ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს სახელი გამართლებულია, რადგან ω სიმრავლე მასზე განსაზღვრული „ ’ “ ოპერაციით აკმაყოფილებს პეანოს აქსიომებს.

როგორც ცნობილია პეანომ აჩვენა, რომ ნატურალურ რიცხვთა არითმეტიკა შეიძლება აიგოს შემდეგი აქსიომებიდან:

P_1. ნული ნატურალური რიცხვია;

P_2. ყოველი ნატურალური რიცხვის მომდევნო, ასევე ნატურალური რიცხვია;

P_3. ნული არც ერთი რიცხვის მომდევნო არაა;

P_4. თუ ორი რიცხვის მომდევნოები ტოლია, მაშინ ეს რიცხვებიც ტოლია;

P_5. თუ რაიმე სიმრავლე შეიცავს ნულს და თავის ყოველ ელემენტთან ერთად შეიცავს მის მომდევნოსაც, მაშინ ეს სიმრავლე შეიცავს ყველა ნატურალურ რიცხვს.

თეორემა 2. $m \in n \Rightarrow m' \subset n \qquad (m, n \in \omega)$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$K = \{n : \forall m(m \in n \Rightarrow m' \subset n)\} .$$

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\omega \subset K$ ეს კიდევ დამტკიცებული იქნება თუკი დავამტკიცებთ, რომ K სიმრავლე აკმაყოფილებს თეორემა 1-ში მოცემულ (I) და (II) თვისებებს (ასეთ სიმრავლეებს ანუ რომელთათვისაც (I) და (II) თვისებები აქვთ **ინდუქტიური** სიმრავლეები ეწოდებათ).

ცხადია, რომ $\varnothing \in K$ და ე.ი. K-ს აქვს (I) თვისება.

ვთქვათ ახლა $n \in K$ და დავამტკიცოთ რომ $n' \in K$ ანუ გვაქვს (*) $m \in n \Rightarrow m' \subset n$ იმპლიკაცია და უნდა დავამტკიცოთ $m \in n' \Rightarrow m' \subset n'$ იმპლიკაცია.

დავუშვათ $m \in n'$, $m \in n' \Rightarrow m \in n \cup \{n\} \Rightarrow m \in n \vee m = n$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) თუ $m \in n$ მაშინ (*)-ის გამო $m' \subset n$ და მითუმეტეს $m' \subset n'$. ბ) თუ $m = n$, მაშინ $m' = n'$ და ე.ი. $m' \subset n'$. ე.ი. ორივე შემთხვევაში $m \in n'$-დან გამომდინარეობს $m' \subset n'$. რ.დ.გ.

თეორემა 3. $n \notin n \qquad (n \in \omega)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $K=\{ n \in U:\ n \notin n \}$. დავამტკიცოთ რომ K ინდუქტიურია (ე.ი. $\omega \subset K$).

რადგან $\varnothing \notin \varnothing$ ამიტომ $\varnothing \in K$ და ე.ი. K-ს აქვს (I) თვისება.

II თვისების დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $n \in K$ და დავამტკიცოთ რომ $n' \in K$. ე.ი. დაშვებით გვაქვს $n \notin n$ და უნდა დავამტკიცოთ, რომ $n' \notin n'$. დავუშვათ წინააღმდეგი ე.ი. ვთქვათ გვაქვს $n' \in n'$, მაშინ

$$n' \in n' \Rightarrow n' \in n \cup \{n\} \Rightarrow n' \in n \vee n' = n .$$

ა) შემთხვევა: თუ $n' \in n \overset{\text{თეორემა 2}}{\Rightarrow} (n')' \subset n$. ამასთან ერთად გვაქვს $n \in n'$ („′“-ის განმარტება) და $n' \subset n''$ (კვლავ „′“-ის განმარტება), ანუ $n \in n''$ და რადგან $n'' \subset n$ გვქონდა მიღებული საბოლოოდ ვღებულობთ რომ $n \in n$. რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ბ) ვთქვათ ახლა $n' = n$ ანუ $n \cup \{n\} = n$, ამიტომ $n \in n$. რაც ასევე ეწინააღმდეგება დაშვებას. ამით თეორემა 3 დამტკიცებულია.

თეორემა 4. $m' = n' \Rightarrow m = n \qquad (m, n \in \omega)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $m' = n'$ *აქედან* $\Rightarrow$ (რადგან $m \in m'$) $m \in n' \Rightarrow m \in n \vee m = n$

ა) თუ $m \in n \Rightarrow$ (თეორემა 2) $m' \subset n \Rightarrow m \subset n$ (რადგან $m \subset m'$) ;

ბ) თუ $m = n \Rightarrow m \subset n$;

ანუ ორივე შემთხვევაში გვაქვს: $m' = n' \Rightarrow m \subset n$.

ტოლობის სიმეტრიულობის გამო ბოლო იმპლიკაციიდან გამომდინარეობს $m' = n' \Rightarrow n \subset m$ იმპლიკაციაც და ამიტომ რ.დ.გ.

შენიშვნა. ცხადია, რომ $\forall n \in \omega (n' \neq \varnothing)$.

მართლაც რადგან $n' = n \cup \{n\}$, ამიტომ $n \in n'$.

თეორემა 1,თეორემა 4 და უკანასკნელი შენიშვნის გამო ვრწმუნდებით, რომ ω სიმრავლე „′“ ოპერაციასთან ერთად აკმაყოფილებს პეანოს ყველა აქსიომას. ამიტომ ჩვენ ω სიმრავლეს გავაიგივებთ ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლესთან. $\varnothing \equiv 0$, $\{\varnothing\} \equiv 1$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \equiv 2$ და ა.შ. $n \cup \{n\} \equiv n+1$.

შენიშვნა. აქვე შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი მასზე ნაკლებ ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ანუ

$$0 = \varnothing,$$

$$n+1 = \{0,1,2, \ldots, n\} .$$

თეორემა 5. ნებისმიერი $m,n\in\omega$ -თვის სრულდება ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი ფორმულებიდან:

$$m\in n,\ \ n\in m,\ \ m=n. \qquad (*)$$

დამტკიცება. თეორემა 2 და თეორემა 3-დან გამომდინარეობს, რომ (*) ფორმულებიდან ნებისმიერი ორი არათავსებადია. მართლაც $m=n$ არათავსებადია $m\in n$ -თან, იმიტომ რომ ორივედან გამომდინარეობს $n\in n$. ე.ი. $m=n$ არათავსებადია დანარჩენ ორთან. ასევე, თუ $m\in n$ და $n\in m$, მაშინ გვექნება $m\in n$ და $n'\subset m$ ხოლო $n'\subset m$-დან $\Rightarrow n\subset m$ ამიტომ გამოვა, რომ $m\in m$ რაც შეუძლებელია.

იმის დასამტკიცებლად, რომ ყოველი $m,n\in\omega$ წყვილისათვის (*) დამოკიდებულებებიდან ერთი აუცილებლად შესრულდება გამოვიყენოთ ინდუქცია.

აღვნიშნოთ

$$K(n)=\{m: m\in n\vee n\in m\vee m=n\}.$$

ცხადია საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი n-ისათვის $\omega\subset K(n)$. ანუ ნებისმიერი n-ისათვის $K(n)$ ინდუქტიურია.

რადგან:

$$K(o)=\{\varnothing\}\bigcup\{m:\varnothing\in m\}.$$

ამიტომ $\varnothing\in K(o)$. ვთქვათ ახლა $m\in K(o)$, ე.ი. $\varnothing\in m \overset{m\subseteq m'}{\Rightarrow} \varnothing\in m'$ ე.ი. $m'\in K(o)$, ე.ი. $K(o)$ ინდუქტიურია.

დავუშვათ ახლა რომ $K(n)$ ინდუქტიური სიმრავლეა. ე.ი. $\omega\subset K(n)$. დავამტკიცოთ, რომ $K(n')$ -იც ინდუქტიური იქნება.

რადგან $n'\in\omega$ და $\omega\subset K(o)$ ე.ი. $n'\in K(o)$ და ამიტომ $n'\in\varnothing\vee n'=\varnothing\vee\varnothing\in n'$. რადგან დიზიუნქციის პირველი ორი წევრი მცდარია მივიღებთ, რომ $\varnothing\in n'$, ამიტომ $\varnothing\in K(n')$. $K(n')$-ის განმარტების ძალით. $K(n')$-ისათვის ინდუქტიურობის I პირობა შესრულებულია.

შევამოწმოთ ახლა პირობა (II).

ვთქვათ $m \in K(n')$, ე.ი. სრულდება ერთერთი შემდეგიდან

$$m \in n', \ m = n', \ n' \in m.$$

ა) $m = n' \overset{m \in m'}{\Rightarrow} n' \in m'$
ბ) $n' \in m \overset{m \subset m'}{\Rightarrow} n' \in m'$
$\Rightarrow n' \in m' \Rightarrow m' \in K(n')$.

ე.ი. ამ შემთხვევაში $m \in K(n') \Rightarrow m' \in K(n')$ ეს ინდუქტიურობის II პირობაა $K(n')$-ისათვის.

გ) თუ სამართლიანია $m \in n'$ დამოკიდებულება, მაშინ $m = n \vee m \in n$, თუ $m = n$, მაშინ $m' = n'$ და ე.ი. $m' \in K(n')$; თუკი $m \in n$, მაშინ $m \in K(n)$ და ამიტომ $m' \in K(n)$, რადგან ინდუქციის დაშვებით $K(n)$ სიმრავლე ინდუქტიურია. აქედან გამომდინარე

$$m' \in n \vee m' = n \vee n \in m'.$$

ამ დიზიუნქციის მესამე წევრი შეიძლება მოვაშოროთ, რადგან ის მცდარია (მართლაც ის $m \in n$-თან ერთად გვაძლევს $n \in n$-ს). ამიტომ რჩება მხოლოდ შემთხვევები $m' \in n$ და $m' = n$. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $n \subset n'$, მივიღებთ, რომ ორივე შემთხვევაში $m' \in K(n')$. ამით ინდუქტიურობის II პირობა $K(n')$-ისათვის შესრულებულია და რ.დ.გ.

გრაფის სიმრავლურ თეორიული რეალიზაცია

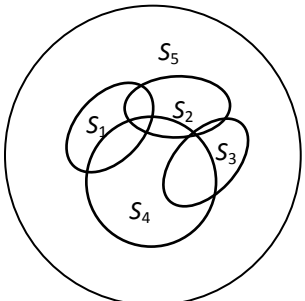
ვთქვათ მოცემულია სიმრავლეთა რაიმე $(S_i)_{i \in I}$ ოჯახი. მას შევუსაბამოთ გრაფი შემდეგი წესით: 1) თითოეული S_i სიმრავლისათვის ავიღოთ v_i წვერო ისე, რომ $s_i \neq s_j \Leftrightarrow v_i \neq v_j$ (შეიძლება ავიღოთ $v_i = S_i$). 2) შევაერთოთ წიბოთი ის და მხოლოდ ის ორი განსხვავებული წვერო, რომელთა შესაბამის სიმრავლეებსაც არაცარიელი თანაკვეთა აქვთ.

მივიღებთ გრაფს $G = (V, E)$, სადაც

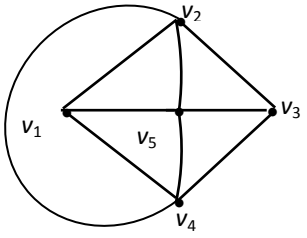
$V = \{v_i : i \in I)\}$ და $E = \{\{v_i, v_j\} : s_i \cap s_j \neq \varnothing, \ i, j \in\}$.

ასეთ G გრაფს $(S_i)_{i \in I}$ ოჯახის შესაბამისი მარჩევსკის გრაფი ეწოდება.

მაგ. სიმრავლეთა ოჯახი { S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 } -ისათვის



მარჩევსკის გრაფი იქნება:



თეორემა. ყოველი არაორიენტირებული გრაფი არის სიმრავლეთა რაიმე ოჯახის მარჩევსკის გრაფი.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია რაიმე არაორიენტირებული გრაფი $G=(V,E)$ ყოველ $v\in V$ წვეროს შევუსაბამოთ ყველა იმ წიბოების S_v სიმრავლე $(S_v\subset E)$, რომლებიც ინციდენტურია (შეერთებულია) v წვეროსთან. ე.ი.

$$S_v\equiv\{\{v,x\}:\{v,x\}\in E\}.$$

მივიღეთ სიმრავლეთა ოჯახი $(S_v)_{v\in V}$. თანაც ცხადია, რომ

$$\{u,v\}\in E\Leftrightarrow S_u\bigcap S_v\neq\varnothing.$$

ე.ი. G გრაფი იქნება სიმრავლეთა $(S_v)_{v\in V}$ ოჯახის მარჩევსკის გრაფი.

ამორჩევითი აქსიომის ეკვივალენტური ფორმულირება

როგორც ვიცით ამორჩევის აქსიომა არის შემდეგი წინადადება:

თუ მოცემულია არაცარიელ სიმრავლეთა არაცარიელი და დიზიუნქტური ოჯახი $\mathsf{A}=(X_i)_{i\in I}$, მაშინ არსებობს ფუნქცია $f:\mathsf{A}\to\bigcup\mathsf{A}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $i\in I$ -თვის $f(X_i)\in X_i$, მას ამორჩევის ფუნქცია ჰქვია. (მართლაც, განვსაზღვროთ $f(X_i)=y \Leftrightarrow y\in X_i\cap S$, სადაც S არის ცერმელოს აქსიომის საწყის ფორმაში მონაწილე სიმრავლე).

ვაჩვენოთ, რომ ცერმელის აქსიომაში დიზიუნქტიურობის მოთხოვნა შეიძლება გამოვტოვოთ. უფრო ზუსტად ვაჩვენოთ, რომ *ZFC*-ში სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა: თუ $\mathsf{A}=(X_i)_{i\in I}$ არაცარიელ სიმრავლეთა არაცარიელი ინიექციური ოჯახია, მაშინ არსებობს ამორჩევის ფუნქცია A ოჯახისათვის, ანუ ფუნქცია $f:\mathsf{A}\to\bigcup\mathsf{A}$ ისეთი, რომ $f(X_i)\in X_i$, $i\in I$.

დამტკიცება. მოცემული $(X_i)_{i\in I}$ ოჯახისათვის განვიხილოთ ახალი $(Y_i)_{i\in I}$ ოჯახი, სადაც $Y_i=X_i\times\{X_i\}$, $i\in I$.

ცხადია, რომ თუ $i\neq j$ და $i,j\in I$, მაშინ რადგან $X_i\neq X_j$ გვექნება $Y_i\bigcap Y_j=\varnothing$ (ვინაიდან თუ $\neq\varnothing$ და რაიმე $(a,b)\in(X_i\times\{X_i\})\bigcap(X_j\times\{X_j\})$, მაშინ გამოვა, რომ $b=X_i$ და $b=X_j$, ე.ი. $X_i=X_j$).

ამდენად $(Y_i)_{i\in I}$ უკვე არის არაცარიელ სიმრავლეთა, არაცარიელი და დიზიუნქციური ოჯახი და ცერმელის აქსიომის თანახმად არსებობს ამორჩევის ფუნქცია g ისეთი, რომ $g(Y_i)\in Y_i \quad i\in I$. ე.ი. არსებობს ისეთი $x_i \in X_i$, რომ $g(Y_i)=(x_i, X_i)$. თუ ახლა განვიხილავთ f ფუნქციას განსაზღვრულს ტოლობით

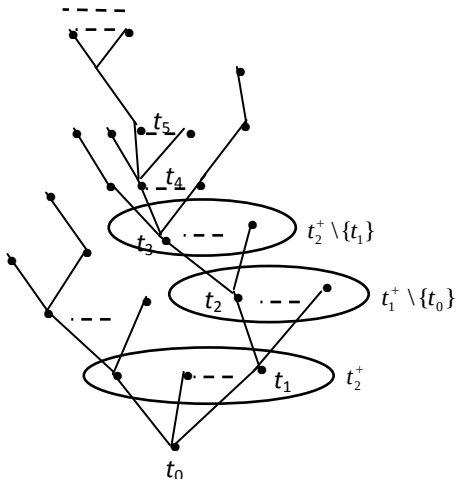
$$f(X_i)=pr_1(g(Y_i)),$$

გამოვა, რომ $f(X_i)=x_i$ ყოველი $i\in I$ -თვის და ე.ი. f ამორჩევის ფუნქცია ყოფილა $(X_i)_{i\in I}$ ოჯახისათვის (რადგან $x_i \in X_i$, $i\in I$).

კიონიგის თეორემა

ხეს ეწოდება ლოკალურად სასრული თუ მის ყოველ წვეროს სასრული ხარისხი აქვს, ე.ი. თუ ყოველი წვერო შეერთებულია სასრულ რაოდენობა წვეროსთან.

თეორემა (დ. კიონიგი). თუ T არის ლოკალურად სასრული ხე, რომელშიც არსებობს წვერო, რომლიდანაც გამოდის, ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის, n სიგრძის შტო (მარტივი ჯაჭვი), მაშინ ამ ხეში არსებობს უსასრული შტო.



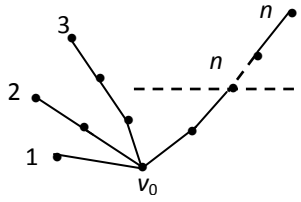
დამტკიცება. ვთქვათ t_0 არის T ხის ის წვერო, რომლიდანაც გამოდის n სიგრძის შტო ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის.

ინდუქციით ავაგოთ $t_0, t_1, t_2, \ldots$ წვეროების უსასრულო ინიექციური მიმდევრობა ისეთი, რომ $\{t_k, t_{k+1}\}\in T, \ k\in\omega$ (ანუ ყველა t_k შეერთებულია t_{k+1} -თან T გრაფში).

განვიხილოთ $t_0^+ = \{v: \{t_0, v\}\in T\}$ სიმრავლე ანუ ყველა იმ წვეროთა სიმრავლე T-ში, რომელიც შეერთებულია t_0 -თან. თეორემის პირობიდან გამომდინარე t_0^+ სიმრავლეში იარსებებს ისეთი წვერო t_1 , რომლიდანაც კვლავ გამოვა ნებისმიერი n სიგრძის შტო ($n\in\omega$). მართლაც: დავუშვათ წინააღმდეგი. ლოკალურად სასრულობის გამო t_0^+ სიმრავლე სასრულია. ვთქვათ $t_0^+ = \{t_{01}, t_{02}, \ldots t_{0m}\}$ და ვთქვათ $t_{01}, t_{02}, \ldots, t_{0m}$ წვეროებიდან გამოსული მაქსიმალური სიგრძის შტოების სიგრძეებია $l_{01}, l_{02}, \ldots, l_{0m}$, მაშინ t_0 წვეროდან არ იარსებებს $\max\{t_{01}, t_{02}, \ldots, t_{0m}\}+2$ სიგრძის შტო. რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. ე.ი. არსებობს $t_1 \neq t_0$ წვერო (რადგან T ხეა ის არ შეიცავს ციკლს, ე.ი. $\{t_0, t_0\}\notin T$ }) ისეთი, რომ t_1 -დან გამოდის ნებისმიერი n სიგრძის შტო $\forall n\in\omega$ -თვის. ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს გზები t_1 -ის „ზემოთ“ იქნება, ანუ არ გაივლიან t_0 -ზე. განვიხილოთ ახლა $t_1^+ \setminus \{t_0\}$ სიმრავლე, ანალოგიურად

ავარჩიოთ იქედან t_2 ელემენტი, რომლიდანაც კვლავ გამოდის ნებისმიერი n ($n \in \omega$) სიგრძის „ზემოთ“ მიმავალი გზა და ა.შ. ინდუქციით.

ცხადია $t_0, t_1, t_2, \ldots$ მიმდევრობა საძიებელი უსასრულო შტოა T ხეში. რ.დ.გ.



ნახ. 2

შენიშვნა: ლოკალურად სასრულობის მოთხოვნა ხეში აუცილებელია. მართლაც, თუკი შესაძლებელია, რომ T ხე შეიცავდეს თუნდაც ერთ უსასრულო ხარისხის მქონე წვეროს, მაშინ თეორემას ადგილი არა აქვს. კონტრმაგალითი გამოსახულია ნახ. 2-ზე. ამ ხის v_0 ფესვიდან გამოდის 1 სიგრძის შტო; 2 სიგრძის შტო და ა.შ. ნებისმიერი n სიგრძის შტო, თუმცა ის არ შეიცავს უსასრულო შტოს.

მოვიყვანოთ კიონიგის თეორემის ცოტა განსხვავებული ვერსია დამტკიცებითურთ. იგი ა.ხარაზიშვილის ქვემოთმითითებული წიგნიდანაა აღებული.

თეორემა (კიონიგი). ვთქვათ, მოცემულია უსასრულო, ლოკალურად სასრული, ბმული (V,E) გრაფი. მაშინ ამ გრაფის ნებისმიერი წვეროდან გამოდის მისი რომელიღაც წიბოებისაგან შედგენილი უსასრულო ჯაჭვი.

დამტკიცება. ავიღოთ (V,E) გრაფის ნებისმიერი v წვერო და ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის განვსაზღვროთ V(n) როგორც გრაფის ყველა იმ u წვეროთა სიმრავლე, რომლებიც შეერთებადია v-სთან წიბოების n სიგრძის მქონე უმოკლესი ჯაჭვით. თეორემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ V(n) სიმრავლეები სასრულია, წყვილ-წყვილად არ თანაიკვეთებიან და მათი გაერთიანება გვაძლევს მთელ V-ს. ამასთან ერთად, გვაქვს V(0) = {v}. ახლა E(n) სიმბოლოთი აღვნიშნოთ უმოკლესი სიგრძის მქონე ჯაჭვების სიმრავლე, რომლებიც v = v(0) წვეროს V(n) სიმრავლის წვეროებთან აერთებენ. ცხადია, E(n) სიმრავლეებიც სასრულია. ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ e(1)∈E(1) წიბო, რომელიც შედის v(0)-დან გამომავალი რაგინდ დიდი სიგრძის მქონე ჯაჭვებში. აღვნიშნოთ v(1)∈V(1) სიმბოლოთი e(1) წიბოს წვერო. შემდეგ ავიღოთ e(2)∈E(2) წიბო, რომელიც შედის v(1)-დან გამომავალი რაგინდ დიდი სიგრძის მქონე ჯაჭვებში. ამ პროცესის ინდუქციური გზით გაგრძელების შედეგად მივიღებთ v-დან გამომავალ

(e(1), e(2), e(3), . . . , e(n), . . .)

უსასრულო ჯაჭვს, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

მკითხველს ვურჩევთ, გაანალიზოს ეს დამტკიცება და დაადგინოს, ამორჩევის აქსიომის რომელი ფორმა და სად იყო გამოყენებული მოყვანილ მსჯელობაში.

ტოლბალოვანი, ტოლფასი ანუ ეკვივალენტური სიმრავლეები

A და B სიმრავლეს ეწოდება ტოლფასი (ტოლძალოვანი, ეკვივალენტური, ტოლბევრი) სიმრავლეები თუ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა

$$f : A \xrightarrow{1\text{–}1} B .$$

ამ ორ სიმრავლეს შორის და ამ ფაქტს $A \sim B$-ჩანაწერით აღნიშნავენ.

შასრული სიმრავლეებისათვის „A და B ტოლფასია“ იგივეს ნიშნავს, რომ „ამ სიმრავლეებში ელემენტების ერთიდაიგივე რაოდენობაა“.

მაგალითად [0,1] სეგმენტი [0,2] სეგმენტის ტოლძალოვანია, რადგან ასახვა $f(x) = 2x$ ამყარებს მათ შორის უ.ც. შესაბამობას.

ამოცანა 0. დაამტკიცეთ, რომ $A \sim B$ უფრო სწორად ~ მიმართება ექვივალენტურობის მიმართებაა.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ რომ ნებისმიერი a, b, c, d ნამდვილი რიცხვებისათვის, თუ $a < b$ და $c < d$, მაშინ (a,b) და (c,d) ინტერვალები ტოლძალოვანია.

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე ნებისმიერი ორი წრეწირი ტოლძალოვანია.

ამოცანა 3. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე ნებისმიერი ორი წრე ტოლძალოვანია.

ამოცანა 4. დაამტკიცეთ, რომ $[0,1) \sim (0,1]$.

ამოცანა 5. დაამტკიცეთ, რომ $(0,1) \sim (0,+\infty)$.

ვთქვათ X და Y რაიმე სიმრავლეებია, მაშინ Y^X-ით აღინიშნება სიმრავლე $\{f : f : X \to Y\}$ ანუ X-იდან Y-ში ყველა ფუნქციათა სიმრავლე.

ვაჩვენოთ, რომ ეს სიმრავლეა. როგორც ვიცით, $f : X \to Y$ *იგივეა რაც* $f = (G_f, X, Y)$ და G_f ფუნქციონალურია $X \times Y$-ში. რადგან $G_f \subset X \times Y$ *და* $G_f \in P(X \times Y)$, ამიტომ

$f \in P(X \times Y) \times \{X\} \times \{Y\}$. ახლა გამოყოფის აქსიომით, ცხადია, იარსებებს სიმრავლე

$Y^X = \{ f \in P(X \times Y) \times \{X\} \times \{Y\} : G_f$ ფუნქციონალური გრაფიკია $X \times Y$-ში და $f = (G_f, X, Y) \}$.

ამ განმარტების მიხედვით $\{0,1\}^\omega$ იქნება 0 და 1 რიცხვებისაგან შედგენილ ყველა მიმდევრობათა სიმრავლე. რადგან $\{0,1\} = 2$. ამიტომ $\{0,1\}^\omega = 2^\omega$. ასევე 2^X იქნება სიმრავლე ყველა $f : X \to \{0,1\}$ ტიპის ფუნქციებისა.

თეორემა. ნებისმიერი X სიმრავლისათვის $P(X)$ და 2^X ტოლძალოვანი სიმრავლეებია.

დამტკიცება. ყოველ $A \in P(X)$ (ანუ $A \subset X$) სიმრავლეს შევუსაბამოთ $f_A \in 2^X$ ფუნქცია შემდეგნაირად $f_A(t) = \begin{cases} 1 \text{ თუ } t \in A \\ 0 \text{ თუ } t \notin A \end{cases}$. (ასეთ ფუნქციას A ქვესიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია ეწოდება). ანუ განვსაზღვროთ შესაბამისობა $g : P(X) \to 2^X$ შემდეგი ტოლობით $g(A) = f_A$. ვაჩვენოთ რომ g ბიექციაა.

მართლაც. ვთქვათ $A \neq B$ და $A, B \subset X$. მაშინ არსებობს $t_0 \in A \setminus B$ (ან არსებობს $t_0 \in A \setminus B$) ე.ი. $t_0 \in A$ & $t_0 \notin B$ ე.ი. $f_A(t_0) = 1$ და $f_B(t_0) = 0$. ამიტომ f_A და f_B სხვადასხვა ფუნქციებია: $f_A \neq f_B$. ე.ი. g ინიექციაა. ვაჩვენოთ ახლა, რომ g სიურექციაცაა. ანუ ყოველი $f \in 2^X$ ფუნქციისათვის მოიძებნება $A \subset X$ ქვესიმრავლე ისეთი, რომ $f_A = f$. ვთქვათ $f \in 2^X$ განვსაზღვროთ A სიმრავლე ტოლობით $A = \{t \in X : f(t) = 1\}$. ცხადია, რომ ამ სიმრავლის შესაბამისი მახასიათებელი ფუნქცია f-ის ტოლია. რ.დ.გ.

შედეგი. $P(\omega) \sim 2^\omega$ ანუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, 0 და 1-ებისაგან შედგენილ ყველა მიმდევრობათა სიმრავლის ექვივალენტურია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი და A და B სიმრავლე. ლოგიკურად საზოგადოდ შესაძლებელია მხოლოდ ოთხი შემთხვევა:

ა) არსებობს ინიექციური ფუნქცია A-დან B-ში და არ არსებობს ინიექციური ფუნქცია (ინიექცია) B-დან A-ში.

ბ) არსებობს ინიექცია B-დან A-ში და არ არსებობს ინიექცია A-დან B-ში.

გ) არსებობს ინიექცია A-დან B-ში და არსებობს ინიექცია B-დან A-ში.

დ) არ არსებობს ინიექცია არც A-დან B-ში და არც B-დან A-ში.

ა) შემთხვევაში ამბობენ, რომ A სიმრავლის სიმძლავრე (ან კარდინალური რიცხვი ნაკლებია B სიმრავლის სიმძლავრეზე (ან კარდინალურ რიცხვზე) და ამას ასე წერენ:

$$|A| \lhd |B|.$$

თუ მხოლოდ ისაა ცნობილი, რომ არსებობს ინექცია A-დან B-ში, მაშინ ვწერთ $|A| \trianglelefteq |B|$.

ბ) შემთხვევაში ცხადია დავწერთ: $|B| \lhd |A|$.

გ) შემთხვევაში, ე.ი. გვაქვს

$$|A| \trianglelefteq |B| \quad \text{და} \quad |B| \trianglelefteq |A|.$$

მაგრამ ეს ავტომატურად სრულად არ ნიშნავს იმას, რომ

$$|A| = |B|, \qquad (*)$$

ანუ იმას, რომ სამართლიანია იმპლიკაცია

$$|A| \trianglelefteq |B| \,\&\, |B| \trianglelefteq |A| \Rightarrow |A| = |B|.$$

თუმცა * ტოლობა გ) შემთხვევაში სწორია, და შესაბამის (კანტორ-ბერნშტეინის) თეორემას ქვემოთ დავამტკიცეთ.

რაც შეეხება დ) შემთხვევას, ცერმელოს აქსიომის (AC) გამოყენებით მტკიცდება, რომ დ) შემთხვევას ადგილი არა აქვს. ანუ ნებისმიერი A და B სიმრავლისათვის სამართლიანია სამიდან ერთ-ერთი დებულება:

$$|A| \lhd |B|, \quad |B| \lhd |A| \quad \text{ან} \quad |A| = |B| \text{ანუ}$$

$$|A| \lhd |B| \vee |B| \lhd |A| \vee |A| = |B| \quad **$$

** დებულებას ტრიხოტომიის თვისებას უწოდებენ. როგორც ვთქვით $AC \Rightarrow **$. უფრო მეტიც.

ალფრედ ტარსკიმ დაამტკიცა, რომ

$$AC \Leftrightarrow **.$$

ე.ი. ტარსკიმ დაამტკიცა, რომ წინადადება: „ორი კარდინალური რიცხვიდან ან ერთია მეორეზე ნაკლები ან მეორე პირველზე ნაკლები. ან კიდევ ეს კარდინალები ტოლია“ ცერმელოს აქსიომის ექვივალენტურია სიმრავლეთა ZF თეორიაში. როგორც ადრე იყო ნათქვამი ZF-ით აღინიშნება სიმრავლეთა თეორია ამორჩევის აქსიომის გარეშე (ამ აქსიომითურთ სიმრავლეთა თეორიას ZFC-ით აღვნიშნავთ).

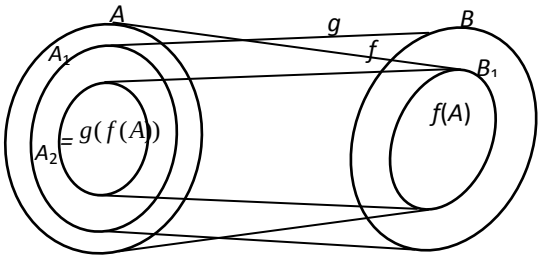
ახლა კი დავამტკიცოთ სიმრავლეთა თეორიის ერთერთი მნიშვნელოვანი კანტორ ბერნშტეინის თეორემა.

თეორემა (კანტორ ბერნშტეინის). თუ A და B ნებისმიერი ორი სიმრავლეა არსებობს უ.ც. ასახვა B-დან A-ში, მაშინ არსებობს უ.ც. A და B სიმრავლეებს შორის.

ანუ

$$|A| \leq |B| \,\&\, |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $f : A \xrightarrow{1-1} B_1 \subset B$ და $g : B \xrightarrow{1-1} A_1 \subset A$. იხ. ნახაზი



ე.ი. $f(A) \equiv B_1$ და $g(B) \equiv A_1$.

განვიხილოთ $g(f(A))$ სიმრავლე, რომელიც აღინიშნება A_2-ით.

რადგან $A \sim f(A) \sim g(\underset{A_2}{f(A)})$, ამიტომ $A \sim A_2$. ხოლო რადგან $B \sim A_1$. შეიძლება ზოგადობის დაურღვევლად თავიდანვე გვეგულისხმა, რომ $B \subset A$. უფრო ზუსტად თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ თუ

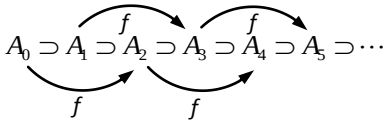
$$A_2 \subset A_1 \subset A_0 = A \text{ და } A_0 \sim A_2, \text{ მაშინ } A_0 \sim A_1 \sim A_2.$$

ვთქვათ $f : A_0 \to A_2$ ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას A_0 და A_2 სიმრავლეებს შორის. ცხადია ამ ასახვით A_0 გადადის A_2-ში. მაშინ მისი ქვესიმრავლე $A_1 \subset A_0$ გადავა ურთიერთცალსახად A_2-ის რაიმე $A_3 \subset A_2$ ქვესიმრავლეში, თავისთავად A_2 გადავა კიდევ უფრო მცირე რაიმე $A_4 \subset A_3$ სიმრავლეში. ანუ გვექნება

$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \Rightarrow f(A_0) \supset f(A_1) \supset f(A_2)$ და ასე შემდეგ.

რაც იმას ნიშნავს, რომ $A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots A_n \supset \ldots$

ე.ი. მივიღეთ სიმრავლეთა $\subset$ მიმართების მიმართ უსასრულოდ კლებადი მიმდევრობა.



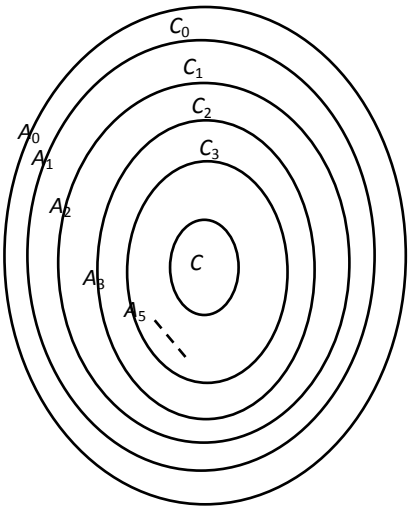
სადაც $f(A_i) = A_{i+2}$, $i \in N$.

აღვნიშნოთ $C_0 = A_0 \setminus A_1$, $C_1 = A_1 \setminus A_2, \cdots C_i = A_i \setminus A_{i+1}$

$$C = \bigcap_{i \in N} A_i$$

ცხადია, რომ $C, C_0, C_1, \ldots$ სიმრავლეები დიზიუნქტურია და

$$\left(\bigcup_{i \in N} C_i \right) \cup C = A_0 .$$



რადგან არცერთ C_i-ში არ მოხვდება A_0-ის ის და მხოლოდ ის ელემენტები, რომლებიც ყველა A_i-ს ეკუთვნიან.

ცხადია, რომ

$$C_0 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{f} C_4 \xrightarrow{f} \cdots$$

$$C_1 \xrightarrow{f} C_3 \xrightarrow{f} C_5 \longrightarrow \cdots$$

მართლაც $f(C_i) = f(A_i \setminus A_{i+1}) =$ რადგან f ინიექციაა

$= f(A_i) \setminus f(A_{i+1}) = A_{i+2} \setminus A_{i+3} = C_{1+2}$.

ახლა ცხადია, თუ როგორ უნდა ავაგოთ უ.ც. თანადობა h A_0 და A_1 სიმრავლეებს შორის. (იხ. სქემა)

$$A_0 = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup \cdots \cup C$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
$$A_1 = \quad C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup \cdots \cup C$$

ანუ

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ თუ } & x \in \bigcup_{k \in N} C_{2k} \\ x \quad \text{თუ } & x \in \bigcup_{k \in N} C_{2k+1} \cup C. \end{cases}$$

შედეგი. თუ მოცემულია რაიმე U სიმრავლე, და მის A და B ქვესიმრავლეებს შორის განვსაზღვრავთ ბინარულ მიმართებას $\leq_*$ ექვივალენტობით: „$A \leq_* B \Leftrightarrow$ არსებობს ინიექცია A-დან B-ში“. მაშინ $\leq_*$ დალაგების მიმართებაა. $P(U)$-სიმრავლეზე.

დამტკიცება. რეფლექსურობა და ტრანზიტულობა ცხადია. ანტისიმეტრიულობა კი, A და B სიმრავლეებისათვის, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემიდან გამომდინარეობს.

კანტორ-ბერნშტეინის თეორემა ძალიან ამარტივებს სიმრავლეთა ტოლძალოვნების დამტკიცებებს.

მაგალითი 1. დაამტკიცეთ, რომ $[0,1] \sim [0,1) \sim (0,1] \sim (0,1)$.

მაგალითი 2. ნებისმიერი ორი მრავალკუთხედი ტოლფასი სიმრავლეა.

მაგალითი 3. ნებისმიერი ტორი და ნებისმიერი ბირთვი ტოლფასი სიმრავლეა.

მაგალითი 4. ნებისმიერი ორი სხეული სამგანზომილებიან სივრცეში, რომელთაც ერთი მაინც შიგა წერტილში აქვს (თითოეულს). ტოლფასია.

თეორემა (კანტორი). თუ X ნებისმიერი სიმრავლეა, მაშინ

$$|X| < |P(X)|.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ $|X| \le |P(X)|$.

განვსაზღვროთ ინიექცია $f: X \to P(X)$ შემდეგნაირად:

$x \in X \Rightarrow f(x) = \{x\}$, რადგან $\{x\} \subset X$ ელემენტია $P(X)$-ისა, ე.ი. $|X| \le |P(X)|$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ არ არსებობს ბიექცია X და $P(X)$ სიმრავლეებს შორის.

უფრო მეტიც დავამტკიცოთ, რომ არ არსებობს სიურექცია X-დან $P(X)$-ზე. დავუშვათ წინააღმდეგი ვთქვათ $\varphi: X \to P(X)$ სიურექციაა.

ვთქვათ $x \in X$, მაშინ $\varphi(x) \subset X$ და $x \in \varphi(x) \vee x \notin \varphi(x)$. განვიხილოთ სიმრავლე

$$A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\} \qquad (1)$$

რადგან $A \subset X$ და $\varphi: X \to P(X)$ სიურექციაა. ამიტომ არსებობს $y \in X$ ელემენტი ისეთი, რომ

$$\varphi(y) = A \qquad (2)$$

მაშინ (1) და (2) ორივე ფორმულის გამოყენებით გვექნება ერთის მხრივ

$$y \in A \Rightarrow y \notin \varphi(y) \Rightarrow y \notin A$$

მეორეს მხრივ კი

$$y \notin A \Rightarrow y \in \varphi(y) \Rightarrow y \in A$$

იმპლიკაციები, ანუ სამართლიანია

$$y \in A \Leftrightarrow y \notin A$$

ეკვივალენტობა. რაც აშკარა წინააღმდეგობაა.

ამრიგად, არ არსებობს სიურექცია X -დან $P(X)$ -ზე. ამით კანტორის თეორემა დამტკიცებულია.

თვლადი სიმრავლეები

A სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ ის N სიმრავლის ტოლძალოვანია. ანუ თუ $A \sim N$. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში არსებობს ბიექცია $f : N \xrightarrow{1-1} A$. თუ აღვნიშნავთ $a_0 = f(0)$, $a_1 = f(1), \ldots, a_i(i), \ldots$ მივიღებთ, რომ a_0, $a_1, a_2 \ldots, a_i, \ldots$ მიმდევრობაში მოთავსდება A სიმრავლის ელემენტები და მხოლოდ ისინი. ამასთან f-ის ბიექციურობის გამო განსხვავებულ ინდექსებიანი წევრები ამ მიმდევრობაში განსხვავებულები იქნებიან ერთმანეთისაგან. ანუ:

$$i \neq j \Leftrightarrow a_i \neq a_j, \quad i, j \in N.$$

ასეთ მიმდევრობას A სიმრავლის **გადათვლას,** უწოდებენ და ამბობენ, რომ A *სიმრავლე წარმოდგენილია* $(a_i)_{i \in N}$ ინიექციური მიმდევრობის სახით.

თეორემა 1. თვლადი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, სასრული ან თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ A თვლადია და $B \subset A$. თუ B სასრულია, მაშინ თეორემა სამართლიანია. ვთქვათ B უსასრულოა. წარმოვადგინოთ A სიმრავლე $A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ ინიექციური ოჯახის სახით. i_0 იყოს ის უმცირესი ინდექსი, რომ შესრულდეს პირობა $a_{i_0} \in B$; i_1 იყოს ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი $N \setminus \{i_0\}$ სიმრავლიდან, რომლისთვისაც $a_{i_1} \in B$; და ა.შ. ინდუქციით i_{n+1} იყოს ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი $N \setminus \{0,1,\cdots,n\}$ სიმრავლიდან რომლისთვისაც მართებულია $a_{i_{n+1}} \in B$ ფორმულა.

ამგვარად ჩვენ მივიღებთ $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ ინიექციურ მიმდევრობას, რომელიც B სიმრავლის გადათვლას წარმოადგენს. ე.ი. B თვლადია.

თეორემა 2. ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად ქვესიმრავლეს.

დამტკიცება. თუ A უსასრულოა, მაშინ A არაცარიელია, ე.ი. მასში არსებობს $a_0 \in A$. A-ს უსასრულობიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ $A\setminus\{a_0\}$ სიმრავლეც არაცარიელია. ავირჩიოთ აქედან რაიმე $a_1 \in A\setminus\{a_0\}$ ელემენტი და ა.შ. თუ უკვე არჩეულია $a_0, a_1, \ldots, a_n$ და ელემენტები $(n \in N)$, მაშინ a_{n+1} იყოს $A\setminus\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. ე.ი. ინდუქციურად განისაზღვრება $a_0, a_1, a_2, \ldots$ მიმდევრობა. ცხადია $B = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ „მიმდევრობა“ A სიმრავლის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს და ისიც ცხადია, რომ $(a_i)_{i\in N}$ არის B სიმრავლის გადათვლა, ანუ B არის A სიმრავლის თვლადი ქვესიმრავლე. რ.დ.გ.

თეორემა 3. სასრულ ან თვლად სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი გაერთიანება, სასრული ან თვლადია.

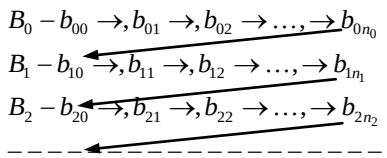
დამტკიცება. ცხადია, რომ სასრულ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანება სასრულია. ა) ვთქვათ $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ თვლად სიმრავლეთა სასრული ოჯახია. რადგან თითოეული A_i $0 \le i \le n$ თვლადია, არსებობს მათი გადათვლები:

$$
\begin{array}{l}
A_0 - a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots; \\
\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow \\
A_1 - a_{11}, a_{11}, a_{12}, \ldots; \\
\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow \\
A_2 - a_{20}, a_{21}, a_{22}, \ldots; \\
\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow \\
A_n - a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, \ldots .
\end{array}
$$

თუ $(a_{ij})_{(n+1)\times\omega}$ მატრიცის ჯერ 0-ოვან სვეტს გადავნომრავთ, მერე 1-სვეტს და ა.შ. თანაც განმეორებით ელემენტებს ამოვყრით (თუ ასეთები შეგვხვდება), მივიღებთ $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ სიმრავლის გადათვლას.

ბ) ვთქვათ $\{B_0, B_1, \ldots\}$ სასრულ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახია. ჩავწეროთ:

B_i-ს ელემენტები i-ურ სტრიქონში:

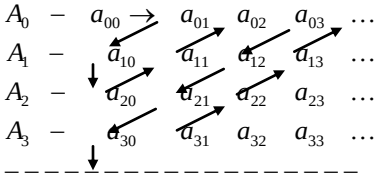


და გადავნომროთ $\bigcup_{i=0}^{n} B_i$ გაერთიანების ელემენტები ისრების მიმართულებით ელემენტების ამოწერით და განმეორებითი ელემენტების უგულებელყოფით. შედეგად მიიღება $\bigcup_{i=0}^{n} B_i$ სიმრავლის გადათვლა და მაშ ეს სიმრავლეც თვლადია.

გ) ვთქვათ ახლა $(A_i)_{i\in\omega}$ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახია. ყოველი i_i სიმრავლე წარმოვადგინოთ

$$A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$$

ინიექციური ოჯახის სახით და ჩაწეროთ მიღებული ორმხრივად უსასრულო მატრიცა და ამოვიწეროთ განსხვავებული ელემენტები



(*)

ისრების მითითებული მიმართულებით „მოძრაობისას“. თუ ამ ამოწერის პროცესში განმეორებით ელემენტებს (რომლებიც შეიძლება იყოს) უგულებელვყოფთ, მაშინ მივიღებთ $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ ოჯახის ელემენტების გადათვლას. რ.დ.გ.

შენიშვნა. ა) ბ) და გ) შემთხვევები ჩვენ მოვიყვანეთ ამ შემთხვევათა უფრო დაწვრილებითი განხილვისათვის. თორემ წინა თეორემის დამტკიცება უფრო მოკლედ შეიძლებოდა:

დამტკიცება II. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $(A_i)_{i\in\omega}$ არის თვლად სიმრავლეთა თვლადი და დიზიუნქტური ოჯახი. მაშინ (*) მატრიცის თითოეული ელემენტი მეორესაგან

განსხვავებულია და ისრით მოცემული "მიმართულებით" ამ ელემენტების ამოწერა მოგვცემს $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ სიმრავლის

$$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{03}, a_{12}, \ldots$$

გადათვლას. ე.ი. $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ თვლადი სიმრავლეა.

თუკი ახლა $(B_i)_{i\in\omega}$ არის სასრულ ან თვლად სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი ოჯახი (ე.ი. დასაშვებია, რომ ზოგიერთი B_i $(i\in\omega)$ სასრულიც იყოს. დასაშვებია ისიც, რომ $B_i = B_j$ მაშინაც კი როცა $i \neq j$), მაშინ ცხადია იარსებებს ინიექცია

$$h : \bigcup_{i\in\omega} B_i \to \bigcup_{i\in\omega} A_i$$

და რადგან $h\left(\bigcup_{i\in\omega} B_i\right)$ სიმრავლე თვლადი $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა იგი თეორემა 1-ის ძალით სასრული ან თვლადი იქნება. ამიტომ ცხადია თავად $\bigcup_{i\in\omega} B_i$ სიმრავლეც სასრული ან თვლადი იქნება. რ.დ.გ.

შენიშვნა. ამ თეორემის დასამტკიცებლად აუცილებელია ცერმელოს აქსიომის გამოყენება და ჩვენს დამტკიცებაშიც ეს აქსიომა ფარულად იყო გამოყენებული. კერძოდ: თითოეული A_i $i \in \omega$ სიმრავლე თვლადია, მაგრამ მისი გადათვლა $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ მიმდევრობის სახით ბევრნაირადაა შესაძლებელი. ჩვენ კი ყოველი i-სათვის, N^{A_i} მიმდევრობათა სიმრავლიდან მხოლოდ ერთს, ნებისმიერს ვირჩევთ. ამიტომ (*) მატრიცის არსებობა ამორჩევის აქსიომითა უზრუნველყოფილი.

თუ (*) ორმხრივად უსასრულო ცხრილის მითითებული მიმართულებით „მოძრაობისას" არა ელემენტებს, არამედ მხოლოდ ინდექსებს ამოვწერთ, მაშინ მოვიღებთ $N \times N$ ანუ N^2 სიმრავლის ელემენტების გადათვლას. ამრიგად სამართლიანია.

შედეგი. N^2 და N სიმრავლეები ერთმანეთის ექვივალენტურია. საინტერესოა, რომ N^2 და N სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა მარტივი, ცხადი სახის, ფორმულითაც შეიძლება იქნეს ჩაწერილი. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. $f(m,n)=2^m(2n+1)-1$ ორი ნატურალური ცვლადის ფუნქცია ამყარებს უ.ც. შესაბამისობას N^2 და N სიმრავლეებს შორის.

დამტკიცება. განვიხილოთ $g(m,n) = 2^m(2n+1)$ ფუნქცია და ვაჩვენოთ, რომ ის ბიექციაა N^2 და $N \setminus \{0\}$ სიმრავლეებს შორის, მართლაც ვაჩვენოთ, რომ

$$g(m_1,n_1)=g(m_2,n_2)\Rightarrow(m_1,n_1)=(m_2,n_2).$$

ცხადია, რომ

$$g(m_1,n_1)=g(m_2,n_2)\Rightarrow 2^{m_1}(2n_1+1)=2^{m_2}(2n_2+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(m_1=m_2)\,\&\,(2n_1+1=2n_2+1)\Rightarrow m_1=m_2\,\&\,n_1=n_2$$ ე.ი.

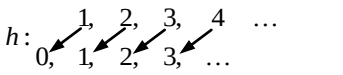
$(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$. ანუ $g:N^2\to N\setminus\{0\}$ ფუნქცია ინიექციაა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ g ასახვა სიურექციაცაა. ვთქვათ $k\geq 1$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. გავყოთ ის 2-ზე შემდეგ მიღებული კვლავ გავყოთ 2-ზე და ა.შ. სანამ გაიყოფა აღვნიშნოთ m_k-ით 2-ის ის უდიდესი ხარისხი, რომელიც ყოფს k-ს. ცხადია k-ს 2^{m_k}-ზე გაყოფის შედეგად დარჩება რაიმე კენტი $2n_k+1$ რიცხვი, ე.ი. ნებისმიერი $k\geq 1$ რიცხვისათვის, მოიძებნა m_k, n_k ნატურალური რიცხვები ისეთი, რომ

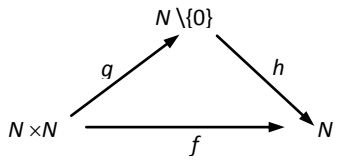
$$k=2^{m_k}(2n_k+1),$$

ამიტომ g ფუნქცია სიურექცია და ე.ი. ბიექციაც ყოფილა.

ცხადია, რომ $h(n)=n-1$ ფუნქცია ამყარებს უ.ც. თანადობას $N\setminus\{0\}$ და N სიმრავლეებს შორის (იხ. დიაგრამა).



ანუ გვაქვს დიაგრამა



და რადგან ბიექციათა კომპოზიცია ბიექციაა, ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. ნებისმიერი $k\geq 1$ ნატურალური რიცხვისათვის $N^k\sim N$.

დამტკიცება. თუ $k=1$, მაშინ $f_1(m)=m$ იგივური ფუნქცია ამყარებს ბიექციას.

თუ $k=2$, მაშინ $f_2(m,n)=2^m(2n+1)-1$ ბიექციაა N^2 და N სიმრავლეებს შორის.

დავუშვათ, რომ რაიმე ნატურალური $k\geq 1$ რიცხვისათვის გვაქვს ბიექცია $f_k : N^k \xrightarrow{1-1} N$. მაშინ ცხადია, რომ f_{k+1} ფუნქცია განსაზღვრული ტოლობით:

$$f_{k+1}(n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}) = f_2(f_k(n_1,n_2,\ldots,n_k),n_{k+1})$$

იქნება ბიექციაა N^{k+1} და N სიმრავლეებს შორის როგორც ბიექციათა კომპოზიცია.

თეორემა. ყველა რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ Q_+ ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა და $r\in Q_+$ რაიმე დადებითი რაციონალური რიცხვია. ცხადია ის ერთადერთი სახით წარმოდგება $r=\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადის სახით, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია, შევუსაბამოთ ამ r რიცხვს N^2 სიმრავლის (m, n) ელემენტი. ცხადია ეს შესაბამისობა არის ინიექცია Q_+-დან N^2-ში. ე.ი. Q_+ სასრული ან თვლადია და რადგან სასრული არაა ე.ი. თვლადია.

ცხადია, რომ თუ Q_- აღნიშნავს ყველა უარყოფით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, მაშინ არსებობს უმარტივესი ბიექცია $f : Q_+ \xrightarrow{1-1} Q_1$ განსაზღვრული ფორმულით: $f(r)=-r$. ე.ი. Q_- სიმრავლეც თვლადია. და რადგან სასრული ან თვლადი სიმრავლეების სასრული ან თვლადი გაერთიანება სასრული ან თვლადია ამიტომ

$$Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{o\},$$

სიმრავლეც თვლადია.

თეორემა7. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა სასრულ მიმდევრობათა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა სასრულ მიმდევრობათა სიმრავლე A ასოთი: ცხადია:

$$A = \cup\{N^k : k\in N\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} N^k .$$

ამიტომ A თვლადი სიმრავლეა.

შენიშვნა. N^0 განმარტების თანახმად ესაა ყველა ფუნქციების სიმრავლე $\varnothing$-დან N-ში. ასეთი ფუნქციის გრაფიკი (შესაბამისი წყვილთა სიმრავლე) ცარიელია და ამიტომ ეს ფუნქცია განმარტებით ემთხვევა შემდეგ სამეულს ($\varnothing$,$\varnothing$, N). ანუ ასეთი ფუნქცია ერთადერთია და ე.ი. N° ერთ ელემენტიანი სიმრავლეა.

წინა თეორემაში, რა თქმა უნდა, არაა აუცილებელი ვილაპარაკოთ მაინცდამაინც ნატურალურ რიცხვებზე. მაგალითად ანალოგიურად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ქართულ ენაზე გადმოცემულ, რეალურად არსებულ თუ ყველა შესაძლო, ტექსტთა სიმრავლე თვლადია. იმიტომ, რომ ალფაბეტი სასრულია და თითოეული ტექსტი წარმოადგენს ამ ალფაბეტის სიმბოლოთა სასრულ მიმდევრობას.

ტექსტთა სიმრავლე მაშინაც თვლადი იქნება თუ ალფაბეტი თვლადი იქნება. მაგ. ქართული ენა გამდიდრებული მათემატიკური აღნიშვნებით. მსგავსად ამისა თვლადი იქნება ყველა კომპიუტერულ პროგრამათა სიმრავლე და ა.შ.

განმარტება. ნამდვილ რიცხვს ეწოდება ალგებრული, თუ ის წარმოადგენს მთელკოეფიციენტებიანი, არანულოვანი მრავალწევრის ფესვს.

თეორემა 8. ყველა ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ყოველი ალგებრული მრავალწევრი ცალსახად განისაზღვრება მთელ რიცხვთა სასრული მიმდევრობით (მაგ: $5x^4-3x^2+7x-9=0$ მრავალწევრი ცალსახად განისაზღვრება (5, 0, -3, 7, -9) სასრული მიმდევრობით) ასეთ მიმდევრობების სიმრავლე კი როგორც ვიცით თვლადია. ე.ი. ყველა ალგებრულ მრავალწევრთა სიმრავლეც თვლადია. ამასთან ერთად, თითოეულ ალგებრულ მრავალწევრს აქვს ფესვთა სასრული რაოდენობა. ამიტომ ყველა ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე, როგორც სასრულ სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანება თვლადია.

თეორემა 9. ყველა პერიოდულ წილადთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება (I). ყოველი პერიოდული წილადი რაციონალური რიცხვია.

დამტკიცება (III). ყოველი პერიოდული ათწილადი შეიძლება ჩაიწეროს როგორც სასრულ რაოდენობა სიმბოლოთა სასრული მიმდევრობა (მაგ. წილადი 0,121212 ... შეიძლება ჩაიწეროს ასე: 0,(12)) მათი რაოდენობა კი თვლადია.

თეორემა 10. რიცხვთა ღერძზე მოცემული ყველა შესაძლო ინტერვალთა დიზიუნქტური ოჯახი არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება I. ვთქვათ $A=(I_j)_{j\in J}$ არის R ღერძის ინტერვალთა რაიმე დიზიუნქტური ოჯახი. ცხადია ყოველი I_j $(j\in J)$ ინტერვალი შეიცავს ერთ მაინც რაციონალურ რიცხვს. ყოველი j-სათვის J-დან r_j აღნიშნავდეს რაიმე რაციონალურ რიცხვს I_j ინტერვალიდან. რადგან ინტერვალთა A ოჯახი დიზიუქტურია, ამიტომ

$$i\neq j\Rightarrow r_i\neq r_j\,.$$

ამიტომ $(r_j)_{j\in J}$ ოჯახი იქნება ინიექციური ოჯახი. რადგან $(r_j)_{j\in J}\subset Q$, ამიტომ J არაუმეტეს თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება II. ვთქვათ $q_0,q_1,q_2,\ldots$ არის Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გადათვლა და (I) დამტკიცებისაგან განსხვავებით r_j ყოველი $j\in J$ სათვის განვსაზღვროთ როგორც I_j ინტერვალში შემავალი (არა ნებისმიერი არამედ) $q_0,q_1,\ldots$ გადათვლაში უმცირესი ინდექსის მქონე რაციონალური რიცხვი. ცხადია $(r_j)_{j\in J}$ ოჯახი ინიექციური იქნება და ამიტომ J იქნება არაუმეტეს თვლადი სიმრავლე.

შენიშვნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ (I) დამტკიცების დროს ყოველი r_j $j\in J$ აირჩევა უსასრულო სიმრავლიდან ნებისმიერი და $(r_j)_{j\in J}$ ოჯახის აგებისას ვიყენებთ ცერმელოს აქსიომას. მაშინ როცა II დამტკიცებაში ყოველი r_j, კონკრეტული, ცალსახად განსაზღვრული, რაციონალური რიცხვია I_j ინტერვალიდან და ამიტომ $(r_j)_{j\in J}$ ოჯახის აგება ფაქტიურად (ცერმელოს ამორჩევის აქსიომის გარეშე) ხდება.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყეზე მოცემულია რვიანების ნებისმიერი დიზიუნქტიური სიმრავლე, მაშინ ეს სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ეცადეთ დაამტკიცოთ ZF თეორიაში. (მითითება: Q^2 თვლადია).

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილთა რაოდენობა არაუმეტეს თვლადია.

თეორემა 11. თუ A უსასრულო სიმრავლეა და B სასრული ან თვლადი, მაშინ $A \cup B \sim A$.

დამტკიცება. ზოგადობას შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ A და B თანაუკვეთი სიმრავლეებია. (მართლაც წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავთ A და $B \setminus A$ სიმრავლეებს, რომლებიც თანაუკვეთებია, $B \setminus A$ როგორც B-ს ნაწილი კვლავ სასრული ან თვლადია და თან ადგილი აქვს ტოლობას $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$).

გამოვყოთ A სიმრავლეში თვლადი S ქვესიმრავლე და $A \setminus S$ აღვნიშნოთ T-ით. ცხადია

$$A = S \cup T \quad \text{და} \quad S \cap T = \varnothing .$$

და გარდა ამისა, სამართლიანია ტოლობა

$$A \cup B = T \cup S \cup B .$$

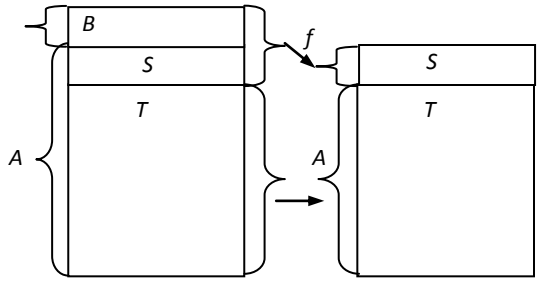
ცხადია, რომ $S \cup B$ სიმრავლე თვლადია, როგორც არაუმეტეს თვლად S და B სიმრავლეთა გაერთიანება. ე.ი. $S \cup B$ ტოლძალოვანია T სიმრავლის. ამიტომ არსებობს ბიექცია

$$f : S \cup B \xrightarrow{1\text{–}1} S .$$

ავაგოთ ახლა ბიექცია $g : A \cup B \xrightarrow{1\text{–}1} A$ განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{თუ } x \in S \cup B \\ x & \text{თუ } x \in T. \end{cases}$$

ე.ი. $A \cup B \sim A$. რ.დ.გ. იხ. ნახ.



ამოცანა. გამოვიყენოთ ეს კონსტრუქცია და ავაგოთ ბიექცია [0, 1] და [0, 1) სიმრავლეებს. ასევე [0, 1] და (0, 1) სიმრავლეებს შორის.

ცნობილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა რიჰარდ დედეკინდმა მოიყვანა უსასრულო სიმრავლის შემდეგნაირად განსაზღვრა:

„A სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო თუ ის ტოლძალოვანმა მისი საკუთრივი ქვესიმრავლის“.

ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ სიმრავლე უსასრულოა (ე.ი. არაა სასრული) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის უსასრულოა დედეკინდის აზრით.

განმარტება. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის სიმძლავრეს კონტინუუმის სიმძლავრე ეწოდება.

თეორემა 12. [0, 1] ტოლძალოვანია 2^N სიმრავლისა.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a \in [0,1]$ ნამდვილი რიცხვი წარმოიდგინება ერთადერთი გზით ისეთი $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ უსასრულო ათწილადის სახით, რომელშიც ნებისმიერი α_i არის ციფრი (ე.ი. $\alpha_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$) და რომელშიც არ გვხვდება ციფრი 9 პერიოდში, გარდა ერთადერთი შემთხვევისა, რომელიც რიცხვი 1-ის წარმოდგენასთანაა დაკავშირებული ($1 = 0,(9)$). ყველა ასეთ ათწილადთა სიმრავლე აღვნიშნოთ A ასოთი.

ე.ი. გვაქვს

$$A = \{0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots : \forall i \in N\, \exists j \in N\, (j > i \,\&\, \alpha_j \neq 9)\} \cup \{0,(9)\} \quad \text{და} \quad A \sim [0,1].$$

მოვახდინოთ A-ში შემავალ ათწილადთა ჩაწერა 0 და 1 სიმბოლოებისაგან შემდგარი კოდების სახით:

ციფრ 0-ს შევუსაბამოთ 0000, 1-ს შევუსამაბოთ 0001 2-ს – 0010, 3-ს – 0011, 4-ს – 0100, 5-ს – 0101, 6-ს – 0110, 7-ს – 0111, 8-ს – 1000 და 9-ს 1001. ახლა ნებისმიერ $a \in A$ ათწილადს შევუსაბამოთ ის აღწილადი, რომელსაც მივიღებთ a ათწილადისაგან თუ მასში მძიმის მარჯვნივ მოთავსებულ ციფრებს მათივე კოდებით შევცვლით. მაგალითად $0,1234(5)$ –ს შევუსაბამოთ $0,\underbrace{0001}_{1}\underbrace{0010}_{2}\underbrace{0011}_{3}\underbrace{0100}_{4}\underbrace{(0101)}_{5}$. ცხადია, რომ ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა და ამიტომ არსებობს ინიექცია A სიმრავლიდან 2^N სიმრავლეში. ე.ი. არსებობს ინიექცია [0, 1] სიმრავლიდან 2^N სიმრავლეში. მეორეს მხრივ, თუ 2^N-ის ნებისმიერ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \ldots$ ელემენტს შევუსაბამებთ $0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \ldots$ ათწილადს ის წარმოადგენს გარკვეულ რიცხვს [0, 1]-დან ცალსახად ჩაწერილს (რადგან ყოველი β_i ტოლია 0-ის ან 1-ის და ე.ი. $\neq 9$). ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ინიექცია

2^N-დან [0,1] სიმრავლეში. ამიტომ კანტორ ბერნშტეინის თეორემის თანახმად არსებობს ბიექციაც [0,1] და 2^N სიმრავლეებს შორის.

შედეგი 1. $R \sim P(N)$.

დამტკიცება: წინა დამტკიცებული დებულებებიდან გვაქვს: $R \sim [0,1] \sim 2^N \sim P(N)$,

ამიტომ $R \sim P(N)$.

შედეგი 2. [0,1] არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. რადგან $[0,1] \sim 2^N$ და კანტორის თეორემით $\left|2^N\right| > |N|$. ე.ი. არ არსებობს უ.ც. თანადობა [0,1] და N-ს შორის. რ.დ.გ.

[0,1] სიმრავლის არათვლადობის დამტკიცება სხვა მეთოდებითაც შეიძლება. წინა თეორემა მეტს ამტკიცებს და უფრო მეტად სხვა კუთხითაა საინტერესო. კერძოდ იმით, რომ თურმე მათემატიკის ორ ძირითად N და R – ნატურალურ რიცხვთა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების რაოდენობებს შორის კავშირი ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

„ნამდვილი რიცხვი იმდენია, რამდენი ქვესიმრავლეც აქვს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს“.

მოვიყვანოთ [0,1]-ის არათვლადობის უშუალო დამტკიცებები.

თეორემა. [0,1] არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება 2. ვთქვათ A წინა თეორემაში განსაზღვრული სიმრავლეა ანუ A არის ყველა იმ $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ ათწილადთა სიმრავლე, სადაც α_i ციფრებია და არ გვხვდება ციფრი 9 პერიოდში გარდა ერთადერთი $0,(9) = 1$ შემთხვევისა. როგორც ვიცით $A \sim [0,1]$.

დავუშვათ ახლა წინააღმდეგი და ვთქვათ [0,1] თვლადია, მაშინ არსებობს მისი გადანომრვა $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ მიმდევრობის სახით. თითოეული $a_i (i \in N)$ წარმოვადგინოთ ათწილადის სახით A-დან:

$$a_i = 0, \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots$$

და განვიხილოთ ახალი t რიცხვი $=0,t_0,t_1,t_2\ldots$ რომელიც ისეა განსაზღვრული, რომ $t_i \neq \alpha_{ii}\ (i \in N)$. მაგალითად $t_i = \begin{cases} 0 \text{ თუ } \alpha_{ii} \neq 0 \\ 1 \text{ თუ } \alpha_{ii} = 0 \end{cases}$. ცხადია, რომ t-ს i-ური ათწილადის ნიშანი განსხვავდება a_i ნამდვილი რიცხვის i-ური ათწილადის ნიშნისაგან და ამიტომ $t \neq \alpha_i\ (i \in N)$. რაც ეწინააღმდეგება იმას, რომ $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\ldots[0,1]$ სიმრავლის გადანომრვაა. რ.დ.გ.

თავის დროზე დიდი ინტერესი გამოიწვია კანტორის მიერ [0,1] სიმრავლის არათვლადობის დამტკიცებამ, რადგან ეს იყო პირველი დამტკიცება იმისა, რომ არსებობს ორი, კონკრეტული, განსხვავებული სიდიდის უსასრულობა. მოვიყვანოთ კიდევ ერთი ნაკლებად გავრცელებული დამტკიცება [0,1]-ის არათვლადობისა, რომელიც კანტორის თავმოყრილ სეგმენტთა პრინციპის გამოყენებით მიიღება.

დამტკიცება 3. დავუშვათ წინააღმდეგი და ვთქვათ $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\ldots$ (*) [0,1] სიმრავლის გადათვლაა (გადანომრვაა) ანუ

$$\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\ldots\}=[0,1].$$

ავიღოთ [0,1]-ში ორი შიგა წერტილი $b_0 < c_0$ და დავყოთ $[0,1]=[0,b_0]\cup[b_0,c_0]\cup[c_0,1]$ სამი სეგმენტის გაერთიანებად. ცხადია. ამ სამი ქვესეგმენტიდან a_0 არ ეკუთვნის ერთს მაინც. S_0 იყოს მარცხნიდან პირველი ასეთი ინტერვალი. ე.ი. $a_0 \notin S_0$.

ახლა S_0 -ში ავიღოთ $b_1,c_1\ \ (b_1 < c_1)$ ორი შიგა წერტილი და დავყოთ ამ წერტილებით S_0 კიდევ სამ ქვესეგმენტად S_1 იყოს მარცხნიდან პირველი ის ქვესეგმენტი S_0 -ისა, რომელსაც არ ეკუთვნის a_1. ე.ი. $a_0 \notin S_0$ და $a_1 \notin S_1$.

გავაგრძელოთ ეს პროცესი ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის, მივიღებთ $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$

[0,1]-ის ქვესეგმენტების მიმდევრობას, რომელიც თავმოყრილ სეგმენტთა უსასრულო მიმდევრობაა, ამასთან $\forall n(a_n \notin S_n)$. თავმოყრილ სეგმენტთა პრინციპის თანახმად არსებობს წერტილი $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \cap\{S_n : n \in N\}$. რადგან t ყოველი S_n სეგმენტის ელემენტია ის ვერ იქნება ვერცერთი a_n რიცხვი. (*) მიმდევრობიდან.

ანუ მოიძებნება ისეთი t რიცხვი რომელიც არაა (*) გადათვლაში, ე.ი. (*) გადათვლა ვერ ამოწურავს [0, 1] სეგმენტს. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ [0, 1] არათვლადია.

თეორემა. თუ $A \sim B$, მაშინ $P(A) \sim P(B)$.

დამტკიცება. $A \sim B$. მაშინ არსებობს ბიექცია $f : A \xrightarrow{1\text{–}1} B$. ყოველი $X \subset A$-თვის აღვნიშნოთ X-ის ანასახი f ასახვის მიმართ $f[X]$ -ით ანუ $f[X]=\{f(x) : x \in X\}$. და განვიხილოთ

$F : P(A) \to P(B)$ განსაზღვრული ტოლობით $F(X) = f[X]$. ცხადია, რომ თუ $X \subset A$, მაშინ $F(X)$ არის B-ს ქვესიმრავლე, ანუ $P(B)$-ს ელემენტი.

ა) ვაჩვენოთ, რომ F ასახვა ინიექციაა. ვთქვათ $X \subset A$, $Y \subset A$ და $X \neq Y$. მაშინ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისმოთ, რომ არსებობს ელემენტი $x_0 \in X \setminus Y$, ე.ი. $x_0 \in X$ და $x_0 \notin Y$, ე.ი. $f(x_0) \in f[X]$ და $f(x_0) \notin f[Y]$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f[X] \neq f[Y]$. ე.ი. F ინიექციაა. ბ) ახლა ვაჩვენოთ, რომ F სურექციაცაა. ვთქვათ $Z \in P(B)$, B სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა, ცხადია, რომ $f^{-1}[Z]$ სიმრავლე, რომელიც განმარტებით $\{f^{-1}(z) : z \in Z\}$ სიმრავლეა იქნება $P(A)$-ს ელემენტი და ამავე დროს შესრულდება $F(f^{-1}[Z]) = Z$ ტოლობა; რადგან f ბიექციაა. ე.ი. F სიურექციაა.

თეორემა. თუ $A_1 \sim A_2 \,\&\, B_1 \sim B_2$, მაშინ $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.

დამტკიცება. ვთქვათ $f_1 : A_1 \xrightarrow{1-1} A_2$ & $f_2 : B_1 \xrightarrow{1-1} B_2$. განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით $f(x,y) = \big(f_1(x), f_2(y)\big)$. ცხადია, რომ f ასახვაა $A_1 \times B_1$ და $A_2 \times B_2$ დეკარტულ ნამრავლებს შორის. ა) ვაჩვენოთ რომ f ინიექციაა. მართლაც ვთქვათ $(a,b) \neq (c,d)$ ორი განსხვავებული დალაგებული წყვილია $A_1 \times B_1$-სიმრავლიდან. მაშინ $a \neq c$ ან $b \neq d$. f_1 და f_2-ის ბიექციურობის გამო გვექნება $f_1(a) \neq f_1(c) \vee f_2(b) \neq f_2(d)$. ამიტომ $(f_1(a), f_2(b)) \neq (f_1(c), f_2(d))$ და ე.ი. $f(a,b) \neq f(c,d)$. ანუ f ინიექციაა. ბ) ვაჩვენოთ ახლა f-ის სიურეციულობა. ვთქვათ $(c,d) \in A_2 \times B_2$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $(f_1^{-1}(c), f_2^{-1}(d))$ წყვილი ელემენტია $A_1 \times B_1$-დან და გარდა ამისა

$$f((f_1^{-1}(c), f_2^{-1}(d)) = (f_1\big(f_1^{-1}(c)\big), f_2\big(f_2^{-1}(d)\big)) = (c,d) \quad .$$

ამიტომ f სიურექციაც ყოფილა და მაშასადამე ბიექციაც.

შენიშვნა. $1 \times N \sim 2 \times N \not\Rightarrow 1 \sim 2$.

ანუ შებრუნებული დებულება არაა სამართლიანი.

თეორემა. $\forall i(A_i \sim B_i) \Rightarrow A_1 \times \ldots \times A_n \sim B_1 \times \ldots \times B_n$.

დამტკიცება. ვთქვათ ნებისმიერი $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ რიცხვისათვის გვაქვს $f_i : A_i \to B_i$

აღვნიშნოთ

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv (f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots, f_n(a_n)).$$

ვაჩვენოთ, რომ Φ ბიექცია $A_1 \times \ldots \times A_n$ და $B_1 \times \ldots \times B_n$ სიმრავლეებს შორის:

ა) ჯერ დავამტკიცოთ, რომ Φ ინექციაა. ვთქვათ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$.

ე.ი.

$$\exists i\ (a_i \neq a_i') \Rightarrow \exists i \big(f_i(a_i) \neq f_i(a_i')\big) \Rightarrow (f_1(a_1), \ldots, f_n(a_n)) \neq (f_1(a_i'), \ldots, f_n(a_n'))$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq \Phi(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n').$$

ბ) ახლა დავამტკიცოთ, რომ Φ სურექციაა. მართლაც. ვთქვათ $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in B_1 \times \ldots \times B_n$.

მაშინ ცხადია, რომ

$$(f_1^{-1}(b_1), \ldots, f_n^{-1}(b_n)) \in A_1 \times \ldots \times A_n \quad \text{და} \quad \Phi(f_1^{-1}(b_1), \ldots, f_n^{-1}(b_n)) = (b_1, \ldots, b_2).$$

შებრუნებული დებულება როგორც ვიცით, სწორი არაა. მაგ. $n = 2$, $1 \times N \sim 2 \times N$, მაგრამ $1 \not\sim 2$.

შედეგი. თუ $A_1 = A_2 = \cdots = A_n \ \& \ B_1 = \cdots = B_n$, მაშინ მივიღებთ.

$$A \sim B \Rightarrow A^n \sim B^n.$$

შენიშვნა. ამ შემთხვევაში შებრუნებული დებულებაც სწორია, ე.ი. თუ $n \neq 0$ მაშინ $A \sim B \Leftrightarrow A^n \sim B^n$.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა. $A \sim B \Rightarrow A^N \sim B^N$, ანუ თუ $A \sim B$, მაშინ ამ სიმრავლეების ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა მიმდევრობათა სიმრავლებიც ტოლძალოვანია,

აქ პირიქით არაა სწორი. მაგ.

$2^N \sim 3^N$, მაგრამ $2 \not\sim 3$,

თეორემა. კვადრატი ექვივალენტურია მონაკვეთის ანუ $[0,1] \times [0,1] \sim [0,1]$.

დამტკიცება. როგორც წინა თეორემის დამტკიცებაში აღვნიშნეთ, $[0,1] \sim A$, სადაც A არის ისეთ $0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ ათწილადთა სიმრავლე, რომელშიც არ გვხვდება 9 პერიოდში გარდა ერთადერთი 0,(9) შემთხვევისა.

ვთქვათ $a \in [0,1]$ და $b \in [0,1]$.

და ვთქვათ $a = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ და $b = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n \ldots$ ათწილადებია A სიმრავლიდან, მაშინ $(a,b) \in [0,1]\times[0,1]$ ელემენტს შევუსაბამოთ

$$0, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n \ldots$$

ათწილადით განსაზღვრული ნამდვილი რიცხვი [0,1]-დან.

ცხადია ეს შესაბამისობა ბიექციაა და ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას $[0,1]\times[0,1]$ კვადრატსა და [0,1] მონაკვეთს შორის.

შედეგი 1. $R \times R \sim R$.

დამტკიცება. ვთქვათ $f: [0,1] \xrightarrow{1-1} R$ ბიექცია. მაშინ $\hat{f}((x,y)) = (f(x), f(y))$ ამყარებს უ.ც. თანადობას

$[0,1]\times[0,1]$ და $R \times R$ სიმრავლეებს შორის, ამრიგად გვაქვს

$$R \sim [0,1] \sim [0,1]\times[0,1] \sim R \times R \Rightarrow R \sim R \times R. \text{ რ.დ.გ.}$$

შედეგი. თუ $k \in \omega\backslash\{0\}$, მაშინ ა) $[0,1]^k \sim [0,1]$; ბ) $R^k \sim R$.

დამტკიცება.

ა) დავამტკიცოთ ინდუქციით. თუ n = 1, 2, მაშინ ვიცით, რომ დებულება ჭეშმარიტია. დავუშვათ $[0,1]^n \sim [0,1]$, მაშინ გვექნება: $[0,1]^{n+1} = [0,1]^n \times [0,1] \sim [0,1] \times [0,1] \sim [0,1]$.

ბ) მტკიცდება ანალოგიურად.

სიმრავლის სიმძლავრე, ოპერაციები სიმძლავრეებზე

სიმრავლის სიმძლავრის ცნება გ. კანტორმა შემოიღო 1895 წელს და მას ასე განმარტავდა: M სიმრავლის სიმძლავრე, ანუ კარდინალი, ეს არის ის ობიექტი, რომელიც დარჩება სიმრავლისაგან, თუკი მხედველობაში არ მივიღებთ M-ის ელემენტების ბუნებას და M-ის ელემენტებს შორის დალაგების მიმართებას. ხაზს უსვამდა რა აბსტრაქციის ორმაგ მომენტს კანტორი M-ის სიმძლავრეს $\overline{\overline{M}}$ სიმბოლოთი აღნიშვნა.

სიმძლავრის ამ არაზუსტ ცნებას ერთგვარად ავსებდა ორი სიმრავლის სიმძლავრეთა ტოლობის ასეთი განსაზღვრა:

A და B-ს სიმძლავრეები ტოლია $\Leftrightarrow$ არსებობს ბიექცია A და B სიმრავლეებს შორის.

კარდინალური რიცხვის ასეთი განსაზღვრა არ გვაძლევს საშუალებას $\overline{\overline{M}}$ -ის ქვეშ ვიგულისხმოთ რაიმე გარკვეული ობიექტი. სიმრავლეთა თეორიაში ეს ობიექტი თავადაც სიმრავლე უნდა იყოს.

ჯერჯერობით ჩვენ ვისარგებლებთ სიმრავლის სიმძლავრის კანტორისეული განსაზღვრით, მოგვიანებით, კი ჩვენ დავაზუსტებთ ამ ცნებას და $\overline{\overline{M}}$ -ის ქვეშ ვიგულისხმებთ სავსებით კონკრეტულ სიმრავლეს – კერძოდ ისეთ უმცირეს ორდინალს (ორდინალურ რიცხვს), რომელსაც და M-ს შორისაც არსებობს ბიექცია.

სიმრავლის სიმძლავრეს, სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს, კარდინალსაც უწოდებენ. განვსაზღვრით კარდინალურ რიცხვთა ჯამი.

თუ A და B თანაუკვეთი სიმრავლეებია, მაშინ განსაზღვრით $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}$.

თანაუკვეთობის მოთხოვნა ამ განსაზღვრისას შეიძლება თავიდან ავიცილოთ, რადგან შეიძლება იგივე ჯამი განვსაზღვროთ ასე: $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A\times\{0\}\cup B\times\{1\}}}$, სადაც ცხადია, რომ $A\sim A\times\{0\}$, $B\sim B\times\{1\}$ და $(A\times\{0\})\cap(B\times\{1\})=\varnothing$. განვსაზღვროთ ასევე კარდინალურ რიცხვთა ხარისხის ოპერაცია ტოლობით -

$$\left(\overline{\overline{A}}\right)^{\overline{\overline{B}}}=\overline{\overline{A^B}}\ .$$

შეგახსენებთ, რომ A^B არის B-დან A-ში ყველა გადასახვათა სიმრავლე.

ამოცანა. იპოვეთ $A^{\varnothing}$ სიმრავლე, სადაც A რაიმე სიმრავლეა.

კარდინალურ რიცხვთა თვისებები.

ვთქვათ a, b და c კარდინალური რიცხვებია, მაშინ სამართლიანია ტოლობები:

1. $a+b=b+a$ კომუტატიურობა

2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ ასოციატიურობა

3. $a\cdot b=b\cdot a$ ნამრავლის კომუტატიურობა

4. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ ნამრავლის ასოციატიურობა

5. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ დისტრიბუტიულობა

6. $a_1=b_1 \,\&\, a_2=b_2 \Rightarrow a_1\cdot a_2=b_1\cdot b_2$

7. $a=b\Rightarrow 2^a=2^b$

8. $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$
9. $(ab)^c=a^c\cdot b^c$
10. $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$

} კარდინალურ რიცხვთა ხარისხის ფორმულები

1. – 7. თვისებები მარტივად დამტკიცდება თუ ამ ტოლობებს შესაბამისი სიმრავლეთა ეკვივალენტობებით შევცვლით.

დავამტკიცოთ მაგალითად 3. ავიღოთ ისეთი A და B სიმრავლეები, რომ $\overline{\overline{A}}=a$ და $\overline{\overline{B}}=b$.

$a\cdot b=b\cdot a$ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ $A\times B\sim B\times A$ ეკვივალენტობის ჭეშმარიტობა. მართლაც ადვილად მოწმდება, რომ ასახვა $f((x,y))=(y,x)$ ($x\in A$, $y\in B$) ბიექციაა $A\times B$ და $B\times A$ სიმრავლეებს შორის. რ.დ.გ.

8.-ს დამტკიცება. უ.დ. $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$.

ვთქვათ $\overline{\overline{A}}=a$, $\overline{\overline{B}}=b$, $\overline{\overline{C}}=c$ და $C\cap B=\varnothing$. დავამტკიცოთ, რომ

$$A^{B\cup C}\sim A^B\times A^C.$$

ვთქვათ $f\in A^{B\cup C}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $f: B\cup C\to A$.

რადგან f განსაზღვრულია $B\cup C$ -ზე, ამიტომ ის განსაზღვრული იქნება ცალკე B-ზე და ცალკე C-სიმრავლეებზეც. ე.ი. არსებობენ შევიწროებები f ფუნქციისა შესაბამისად B და C სიმრავლეებზე: $f_{|B}$ და $f_{|C}$. ე.ი. f ფუნქციას შევუსაბამოთ წყვილი ($f_{|B}$, $f_{|C}$). ცხადია, $f_{|B}\in A^B$ და $f_{|C}\in A^C$, ამიტომ $(f_{|B},f_C)\in A^B\times A^C$. ე.ი. ჩვენ განვსაზღვრეთ რაღაც $h: A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$ შესაბამისობა ტოლობით: $h(f)=(f_{|B},f_{|C})$.

რადგან $B \cap C = \varnothing$, ამიტომ ადვილად მოწმდება, რომ h შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა (შეამოწმეთ).

9. ტოლობის. დამტკიცება. უ.დ. $(ab)^c = a^c \cdot b^c$.

დავამტკიცოთ, რომ $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

ვთქვათ $f \in (A \times B)^C$, ე.ი. $f : C \to A \times B$.

ე.ი. ყოველი $x \in C$ -თვის $f(x)$ არის რაღაც (x-ზე დამოკიდებული) კონკრეტული წყვილი $\big(g_f(x), h_f(x)\big) \in A \times B. \Rightarrow g_f(x) \in A$ და $h_f(x) \in B$. ე.ი. $g_f \in A^C$ და $f_f \in B^C$ ამიტომ შესაბამისობა φ განსაზღვრული ტოლობით $\varphi(f) = (g_f, h_f)$ საძიებელი ბიექციაა.

უფრო ზუსტად ყოველ f-ს შევუსაბამოთ $(pr_1 \circ f, pr_2 \circ f)$ წყვილი. შეამოწმეთ, რომ შესაბამისობა $g(f) = (pr_1 \circ f, pr_2 \circ f)$ არის ბიექცია $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$-ს შორის.

დავამტკიცოთ **10 ტოლობა** – $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.

ანუ ნებისმიერი A, B და C სიმრავლეებისათვის ვაჩვენოთ $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$ ექვივალენტობის ჭეშმარიტობა.

ვთქვათ $f \in A^{B \times C}$ ანუ $f : B \times C \to A$, ე.ი. f ფუნქცია $B \times C$ სიმრავლის ყოველ (x, c) ელემენტს შეუთანადებს A სიმრავლის რაიმე $f(x,c)$ ელემენტს. დავაფიქსიროთ $c \in C$ წერტილი. მაშინ $f_c(x) = f(x,c)$ იქნება ერთი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც B სიმრავლეს ასახავს B სიმრავლეში. ე.ი. ყოველი $c \in C$ -თვის $f_c \in A^B$.

შესაბამისობა $c \to f_c$ გვაძლევს რაღაც ფუნქციას $\Phi_f - \in (A^B)^C$, რომელიც ნებისმიერი $c \in C$ -თვის გამოითვლება ასე: $\Phi_f(c) = f_c$ ($\in A^B$)

ვაჩვენოთ ახლა, რომ შესაბამისობა $f \to \Phi_f$ ამყარებს უ.ც. თანადობას $A^{B \times C}$ და $(A^B)^C$ სიმრავლეებს შორის.

ა) ვთქვათ $f_1 \neq f_2$ ორი ფუნქციაა $A^{B \times C}$-დან. ეს იმას ნიშნავს, რომ $B \times C$ სიმრავლის რომელიმე (x_0, c_0) ელემენტზე განსხვავდებიან, ე.ი. $f_1(x_0, c_0) \neq f_2(x_0, c_0)$ ანუ $\varphi'_{c_0}(x_0) \neq \varphi''_{c_0}(x_0)$, რადგან x_0 ელემენტზე φ'_{c_0} და φ''_{c_0} ფუნქციები განსხვავდებიან, ე.ი. $\varphi'_{c_0} \neq \varphi''_{c_0}$ სხვადასხვა ელემენტებია A^B სიმრავლისა. ამიტომ Φ_{f_1} და Φ_{f_2} სხვადასხვა ფუნქციებია. ე.ი. შესაბამისობა $f \to \Phi_f$ ინექციაა.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ ეს შესაბამისობა სურექციაა. ვთქვათ რაიმე $\Phi \in (A^B)^C$, მაშინ $\Phi(c)$ იქნება A^B-ს რაიმე ელემენტი. ე.ი. $\Phi(c) : B \to A$. ყოველი c-თვის გვაქვს ასახვა $\varphi_c : B \to A$, რომელიც B-ს

ნებისმიერ x ელემენტს შეუთანადებს A-ს რაიმე ელემენტს. ანუ $\varphi_c(x)\in A$ თუ $x\in B$, ანუ ყოველ (x,c) წყვილისათვის $\varphi_c(x)\in A$. ეს განსაზღვრავს გარკვეულ f ორი ცვლადის ფუნქციას $B\times C$ სიმრავლეში.

f ორი ცვლადის ფუნქციას $B\times C$ ნამრავლიდან A სიმრავლეში.

უსასრულო კარდინალურ რიცხვთა სკალა

კანტორის თეორემის თანახმად

$$N,2^N,2^{2^N}\dots, \qquad (3)$$

სიმრავლეებს ყველას განსხვავებული სიმძლავრეები აქვთ. ამასთან ყოველ შემდეგს წინებზე მეტი. ასე, რომ გვაქვს უსასრულო კარდინალთა უსასრულო სიმრავლე. თუმცა არსებობს უსასრულო სიმრავლე, რომელიც არც ერთი სიმრავლის ტოლძა-ლოვანი არაა (3) მიმდევრობიდან. ვთქვათ A არის $N,2^N,2^{2^N}\dots$ სიმრავლეთა ოჯახი.

თეორემა. $\bigcup\mathsf{A}$ სიმრავლე (3) მიმდევრობაში შემავალი არცერთი სიმრავლის ტოლძალოვანი არაა.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები $P_0\equiv N$, $P_{n+1}\equiv 2^{P_n}$. დავუშვათ წინააღმდეგი: არსებობს $i\in N$ ისეთი რომ $P_i\sim\bigcup\mathsf{A}$. ცხადია, რომ $P_{i+1}=2^{P_i}$. რადგან $P_{i+1}\in\mathsf{A}$, ამიტომ $P_{i+1}\subset\bigcup\mathsf{A}$ და მაშ გვექნება: $\overline{\overline{P}}_{i+1}\le\overline{\overline{\bigcup\mathsf{A}}}=\overline{\overline{P}}_i$ ანუ გვექნება $\overline{\overline{P}}_{i+1}\le\overline{\overline{P}}_i$. რაც იგივეა: $\overline{\overline{2^{P_i}}}\le\overline{\overline{P}}_i$. ეს კი ეწინააღმდეგება კანტორის თეორემას. რ.დ.გ.

შედეგი. $N\cup 2^N\cup 2^{2^N}\cup\cdots$ სიმრავლეს აქვს მეტი სიმძლავრე, ვიდრე თითოეულ $N,2^N,2^{2^N},\cdots$ სიმრავლეთაგანს.

დამტკიცება. ცხადია ნებისმიერი $N,2^N,2^{2^N},\cdots$ სიმრავლეთაგანი ქვესიმრავლეა $N\cup 2^N\cup 2^{2^N}\cup\cdots$ სიმრავლის. $(\forall_i(P_i\subset\bigcup\mathsf{A}))$. ამასთან ერთად არც ერთი $N,2^N,2^{2^N},\cdots$ სიმრავლეთაგანი არაა მისი ტოლ-ძალოვანი, ე.ი. $\forall_i(\overline{\overline{P}}_i\le\overline{\overline{\bigcup}}\mathsf{A})$ და $\forall_i(\overline{\overline{P}}_i\ne\overline{\overline{\bigcup}}\mathsf{A})$, ე.ი. $\forall_i(\overline{\overline{P}}_i<\overline{\overline{\bigcup}}\mathsf{A})$. რ.დ.გ.

აღვნიშნოთ ახლა $P=N\cup 2^N\cup 2^{2^N}\cup\cdots$ და განვიხილოთ სიმრავლეები $P,2^P,2^{2^P},\cdots$ ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ თითოეულ ამ სიმრავლეს ექნება ერთმანეთისაგან და თითოეული P_i -საგან განსხვავებული სიმძლავრე, ხოლო $P\cup 2^P\cup 2^{2^P}\cup\cdots$ სიმრავლის სიმძლავრე, აქამდე აგებულ ყველა სიმძლავრეზე მეტი იქნება და ა.შ. და ა.შ.

თეორემა. არ არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომელიც ყოველი სიმძლავრის ერთ მაინც სიმრავლეს შეიცავს.

დამტკიცება. ვთქვათ U სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახია.

განვიხილოთ $P(\bigcup \mathsf{U})$. კანტორის თეორემის თანახმად

$$\overline{\overline{\bigcup \mathsf{U}}} < \overline{\overline{P(\bigcup \mathsf{U})}}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ U ოჯახი არ შეიძლება შეიცავდეს $P(\bigcup \mathsf{U})$ სიმრავლის ეკვივალენტურ Y სიმრავლეს ელემენტის სახით. მართლაც, თუ $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{P(\bigcup \mathsf{U})}}$ და $Y \in \mathsf{U}$, მაშინ $Y \subset \bigcup \mathsf{U}$, ამიტომ $\overline{\overline{Y}} \le \overline{\overline{\bigcup \mathsf{U}}} < \overline{\overline{P(\bigcup \mathsf{U})}}$, ე.ი. $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{P(\bigcup \mathsf{U})}}$ და $\overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{P(\bigcup \mathsf{U})}}$ ერთდროულად.

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

ჩვენ ერთხელ კიდევ შევხვდით ისეთ ერთობლიობას, რომელიც შეუძლებელია განვიხილოთ როგორც სიმრავლე. ობიექტთა ისეთ ერთობლიობას, რომელიც არაა სიმრავლე ზესიმრავლე ეწოდება.

სიმრავლეებისა და ზესიმრავლეების საერთო სახელწოდება არის „კლასი“, კლასი ფაქტობრივად ეს არის ის ერთობლიობა, რომელსაც ვღებულობთ თუ ავიღებთ I რიგის თეორიის რაიმე $\Phi(x)$ ერთი ცვლადის შემცველ ფორმულას და განვიხილავთ ყველა იმ x ობიექტთა ერთობლიობას, რომელთათვისაც $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია.

ზესიმრავლე არ შეიძლება იყოს სხვა რამის ელემენტი. ელემენტი თუნდაც კლასისა შეიძლება იყოს მხოლოდ სიმრავლე.

n, $\aleph_0$ და $2^{\aleph_0}$ კარდინალების თვისებები

როგორც ვიცით $\aleph_0 \equiv \overline{\overline{N}}$ და $\overline{\overline{2^N}} = \overline{\overline{2}}^{\overline{\overline{N}}} = 2^{\overline{\overline{N}}} = 2^{\aleph_0}$. ვიცით, რომ $2^{\aleph_0}$ სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრის ([0, 1]-ის სიმძლავრის) ტოლია და მას $\mathfrak{c}$-ით აღნიშნავენ.

(1) რადგან $n \in N$ ნატურალური რიცხვი თავად არის n ელემენ-ტიანი სიმრავლე, ამიტომ $\overline{\overline{n}} = n$.

(2) თუ a კარდინალია, მაშინ

$$\mathsf{a} \cdot 1 = \mathsf{a}, \quad \mathsf{a}^1 = \mathsf{a}\ 1^{\mathsf{a}} = 1.$$

ცხადია კარდინალებზე ოპერაციების განმარტებებიდან.

(3) $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

მართალია, რადგან თვლად სიმრავლეთა არაუმეტეს თვლადი გაერთიანება თვლადია და გარდა ამისა

$$n \cdot \aleph_0 = \overline{\overline{n \times N}} = \overline{\overline{(\{0\} \times N) \cup (\{1\} \times N) \cup \cdots \cup (\{n-1\} \times N)}} = \aleph_0,$$

ასევე

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \overline{\overline{N \times N}} = \overline{\overline{\bigcup_{k \in N} (\{k\} \times N)}} = \aleph_0$ (თვლადთა თვლადი გაერთიანება).

(4) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

მართლაც

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = 2 \cdot \mathfrak{c} = 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{1+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

(5) $n < \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

პირველი უტოლობა იმიტომ, რომ N უსასრულოა, მეორე უტოლობა კი იმიტომ, რომ კონტინუუმი არათვლადია.

(6). $n + \mathfrak{c} = \aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

მართლაც

$$\mathfrak{c} \le n + \mathfrak{c} \le \aleph_0 + \mathfrak{c} \le \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

(ინექცია) (ინექცია) (ინექცია) (4 ტოლობა)

ამიტომ კანტორ ბერნშტეინის თეორემის თანახმად,

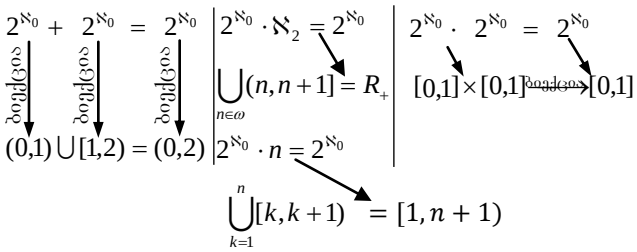
კარდინალები $\mathfrak{c}$, $n + \mathfrak{c}$ და $\aleph_0 + \mathfrak{c}$, ტოლი კარდინალებია. აქამდე მოვყევი

(7) $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$

დამტკიცება $\mathfrak{c} \le \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \le 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

.

საინტერესოა, რომ $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ ტოლობის დამტკიცება, $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0$-ის და ა.შ. სხვანაირადაც შეიძლება მაგ.:



მაგრამ ის გზა (ალგებრული), უფრო მარტივი და უფრო ზოგადიცაა.

(8) თუ $n > 0$ ნატურალური რიცხვია, მაშინ $n \cdot \mathfrak{c} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

მართლაც, $\mathfrak{c} \le n \cdot \mathfrak{c} \le \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} \le \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$

ამიტომ კანტორ-ბერშტეინის თეორემის ძალით ვღებულობთ. რ.დ.გ.

(9). თუ $n > 0$, მაშინ $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$.

დამტკიცება. (7) ტოლობა და ინდუქცია n-ის მიმართ.

(10) თუ $n > 1$, მაშინ $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

მართლაც, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \le n^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} =$

ამიტომ კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ძალით. რ.დ.გ.

ანალოგიურად დამტკიცება ტოლობები $2^{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}$ კარდინალისათვის:

$\mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$.

ა) $n + \mathfrak{f} = \aleph_0 + \mathfrak{f} = \mathfrak{L} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$,

ბ) $n \cdot \mathfrak{f} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$, $(n > 0)$.

გ) $n^{\mathfrak{L}} = \aleph_0^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{f}^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{f}$, $(n > 1)$.

მაგალითად: ბ) $\mathfrak{f} \le n \cdot \mathfrak{f} \le \aleph_0 \cdot \mathfrak{f} \le \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{f} \le \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{L}} \cdot 2^{\mathfrak{L}} = 2^{\mathfrak{L}+\mathfrak{L}} = 2^{\mathfrak{L}} = \mathfrak{f}$.

ამიტომ კანტონ-ბერნშტეინის თეორემის ძალით ბ) ტოლობები ჭეშმარიტია.

ზოგიერთი თეორემა:

თეორემა 1. ნატურალურ რიცხვთა უსასრული მიმდევრობათა სიმრავლისაა.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე S-ით. ცხადია $S \sim N^N$, ამიტომ $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{N^N}} = \aleph_0^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = \mathfrak{L}$.

თეორემა 2. თუ $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{L}$ და $\overline{\overline{B}}$ თვლადია, მაშინ $\overline{\overline{A \setminus B}} = \mathfrak{L}$. (კონტინტიუუმს მინუს თვლადი კონტინუუმია).

დამტკიცება. ვთქვათ A კონტინუალუ-რია B კი თვლადი. როგორც ვიცით $A \times A \sim A$ და ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია თეორემა დავამტკიცოთ $A \times A$ კონტინუალური და მისი თვლადი B ქვესიმრავლეებისათვის.

$B \subset A \times A \Rightarrow \overline{\overline{pr_1 B}} \le \overline{\overline{B}}$, ე.ი. $pr_1 B$ თვლადია. ამიტომ არსებობს $a_0 \in A \setminus pr_1 B$ ელემენტი. განვიხილოთ სიმრავლე $\{a_0\} \times A$. ცხადია, ის კონტინუალურია და სიმრავლე $A \times A \setminus B$-ს ქვესიმრავლეა. ე.ი. გვაქვს

$$A \sim \{a_0\} \times A \subset (A \times A) \setminus B \subset A \times A \sim A$$

ამიტომ $(A \times A) \setminus B \sim A$ და ე.ი. $A \times A \setminus B$ კონტინუალურია. რ.დ.გ.

შედეგი. ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუალურია.

თეორემა 3. ნამდვილ რიცხვთა ყველა უსასრულო მიმდევრობების სიმრავლე კონტინუალურია.

დამტკიცება. $\overline{\overline{R^N}} = \mathfrak{L}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{L}$.

თეორემა 4. ნამდვილი ცვლადის ყველა ნამდვილ ფუნქციათა სიმრავლის სიმძლავრე $2^{\mathfrak{L}}$-ს, ჰიპერკონტინუუმის ტოლია.

დამტკიცება. $\overline{\overline{R^R}} = (\overline{\overline{R}})^{\overline{\overline{R}}} = \mathfrak{L}^{\mathfrak{L}} + 2^{\mathfrak{L}}$.

თეორემა 5. R-დან R-ში ყველა უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე კონტინუალურია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ R-დან R-ში ყველა უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე C_R-ით.

ყოველ უწყვეტ $f \in C_R$ ფუნქციას შევუსაბამოთ $f_{|Q} : Q \to R$. ანუ f ფუნქციის შევიწროება (შეზღუდვა) რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე. ანუ გვაქვს ასახვა $\varphi : C_R \to R^Q$ განსაზღვრული ტოლობით: $\varphi(t) = \varphi(f_{|Q})$. ვაჩვენოთ, რომ φ ინიექციაა. ვთქვათ $f_1 \in C_R \,\&\, f_2 \in C_R \,\&\, f_1 \neq f_2$ და ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$. ანუ ვაჩვენოთ, რომ $f_1 \neq f_2 \Rightarrow f_{1|Q} \neq f_{2|Q}$ ან რაც იგივეა: $f_{1|Q} = f_{2|Q} \Rightarrow$ $\Rightarrow f_1 = f_2$. ვთქვათ, $f_{1|Q} = f_{2|Q}$ ანუ f_1 და f_2 ფუნქციები ერთმანეთს ემთხვევა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე. ვთქვათ $x_0 \in R$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ხოლო $(\mathrm{r})_{i \in N}$ არის x_0 -ისაკენ კრებადი რაციონალურ რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობა. f_1 და f_2 -ის უწყვეტობის გამო:

$$f_1(x_0) = \lim_{i \to \infty} f_1(\mathrm{r}_i) = \lim_{i \to \infty} f_2(\mathrm{r}_i) = f_2(x_0), \text{ ე.ი. } f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

x_0 -ის ნებისმიერობის გამო $f_1 = f_2$ R სიმრავლეზე. ე.ი. φ ინიექციაა და ამიტომ

$$\overline{\overline{C_R}} \leq \overline{\overline{R^Q}} = \mathfrak{L}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{L}.$$

ე.ი. $\overline{\overline{C_R}} = \mathfrak{L}$. მეორე მხრივ ყოველი მუდმივი ფუნქცია უწყვეტია და ამიტომ $\overline{\overline{C_R}} \leq \mathfrak{L}$. კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის თანახმად საბოლოოდ გვექნება $\overline{\overline{C_R}} = \mathfrak{L}$. რ.დ.გ.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ ტოლობები:

ა) $1+2+3+\cdots = \aleph_0$, ბ) $2+2+2+\cdots = \aleph_0$,

გ) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots = \mathfrak{L}$, დ) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots = \mathfrak{L}$.

დამტკიცება. ა) და ბ) ტოლობები გამომდინარეობს იქედან. რომ სასრულ სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანება თვლადია. დ) ტოლობა გამომდინარეობს იქედან, რომ $2^{\aleph_0} = \mathfrak{L}$. გ) ტოლობა კი მიიღება ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან

$$\mathfrak{L} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdots = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{L}.$$

სავსებით დალაგებული სიმრავლეები

მოცემულ დალაგებულ $(E, \leq)$ სიმრავლეს **სავსებით დალაგე-ბული** ჰქვია თუ მის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეში არსებობს უმცირესი ელემენტი.

განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სავსებით დალაგებული (ს.დ.) სიმრავლის ყოველი არაცარიელი ქვესიმრავლე აგრეთვე ს.დ. სიმრავლეა.

თუ E დალაგებული სიმრავლეა, და $a \in E$, მაშინ a ელემენტის უშუალო მომდევნო ეწოდება ისეთ b ელემენტს, რომ $a < b$, არ არსებობს მათგან განსხვავებულ c ელემენტი ისეთი, რომ $a < c < b$.

ცხადია, რომ თუ $(E, \leq)$ ს.დ.ს. არის, მაშინ მის ყველა ელემენტს, გარდა უდიდესი ელემენტისა (რომელიც შეიძლება იყოს E-ში) ყველას აქვს უშუალო მომდევნო.

მართლაც ვთქვათ x არაა უდიდესი E-ში, მაშინ მასზე მატების სიმრავლე $\{y \in E : x < y\}$ არაცარიელია მისი უმცირესი ელემენტი, რომელიც არსებობს, აღვნიშნოთ x' ის ცხადია x-ის უშუალო მომდევნოა.

განმარტებიდან ისიც გამომდინარეობს, რომ თუ $(E, \leq)$ ს.დ.ს.-ა. (სავსებით დალაგებული სიმრავლე), მაშინ ის წრფივად დალა-გებულიც იქნება. მართლაც ვთქვათ $a, b \in E$, რადგან $\{a, b\}$ E-ს არაცარიელი ქვესიმრავლე მასში უნდა იყოს უმცირესი ელემენტი, ე.ი. ან $a \leq b$ ან $b \leq a$. ე.ი. E-ში ნებისმიერი ორი ელემენტი სადარია და მაშ $(E, \leq)$ წრფივად დალაგებულიცაა.

ცხადია, შებრუნებულ დებულებას ადგილი არა აქვს მაგ. Z, Q და R სიმრავლეები მათზე მოცემული ჩვეულებრივი დალაგების მიმართ წრფივად დალაგებულნი არიან, მაგრამ არა სავსებით დალაგებულნი.

ცხადია ნებისმიერი სასრული სიმრავლე სავსებით დალაგე-ბულია, თუ ის წრფივადაა დალაგებული.

უსასრულო ს.დ.ს.-ის მაგალითს N წარმოადგენს, მასზე მოცემული ჩვეულებრივი $\leq$ დალაგების მიმართების მიხედვით.

Z და Q არაა სავსებით დალაგებული, მაგრამ რადგან ისინი თვლადებია თითოეული შეიძლება წარმოვადგინოთ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ მიმდევრობის სახით და N-ზე მოცემული ჩვეულებრივი დალაგების მიხედვით განვსაზღვროთ ახალი დალაგება $\leq_1$ ექვივალენტობით:

$$a_i \leq_1 a_j \Leftrightarrow i \leq j \qquad (i, j \in N).$$

ცხადია, რომ $(Z, \leq_1)$ და $(Q, \leq_1)$ სიმრავლეები ს.დ.ს.-ებია.

განმარტება. ორ დალაგებულ $(E_1, \leq_1)$ და $(E_2, \leq_2)$ სიმრავლეს ეწოდება იზომორფული თუ არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა $f : E_1 \xrightarrow{1-1} E_2$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $a, b \in E_1$ ელემენტებისათვის სრულდება იმპლიკაცია:

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b),$$

ანუ იზომორფიზმი ინარჩუნებს დალაგებას.

თუ f იზომორფიზმია $(E, \leq)$ დალაგებული სიმრავლისა კვლავ $(E, \leq)$ სიმრავლეში, მაშინ f-ს ავტომორფიზმი ეწოდება.

ის ფაქტი, რომ $(E_1, \leq_1)$ და $(E_2, \leq_2)$ დალაგებული სტრუქტურები ერთმანეთის იზომორფულია ჩაიწერება ასე: $(E_1 \leq_1) \cong (E_2, \leq_2)$.

თეორემა 1. $\cong$ დამოკიდებულება ეკვივალენტობის მიმართებაა დალაგებულ სიმრავლეთა შორის.

1) (რეფლექსურობა). $(E, \leq)$ დალაგებული სიმრავლე თავის თავის იზომორფულია რადგან ამ იზომორფიზმს ამყარებს E-ს იგივური ასახვა I_E.

2) (სიმეტრიულობაა) ვთქვათ $(E_1, \leq_1) \cong (E_2, \leq_2)$ და f არის იზომორფიზმი $(E_1, \leq_1)$ და $(E_2, \leq_2)$ სტრუქტურებს შორის. ვაჩვენოთ, რომ f^{-1} იქნება იზომორფიზმი $(E_2, \leq_2)$ და $(E_1, \leq_1)$ სიმრავლეებს შორის. ვთქვათ $c, d \in E_2$ და $c \leq_2 d$. რადგან f იზომორფიზმია $(E_1, \leq_1)$ და $(E_2, \leq_2)$-ს შორის, ის ბიექციაცაა და ამიტომ $c = f(a)$ და $d = f(b)$, სადაც $a, b \in E_1$, რაიმე ელემენტებია. ამასთან რადგან $f(a) \leq_2 f(b)$, იზომორფიზმის განმარტების ძალით გვექნება $a \leq_1 b$. მაგრამ ეს იგივეა რაც:

$$f^{-1}(f(a)) \leq_1 f^{-1}(f(b)) \quad \text{უტოლობა.}$$

ანუ

$$f^{-1}(c) \leq_1 f^{-1}(d) \quad \text{უტოლობა.}$$

ე.ი.

$$c \leq_2 d \Leftrightarrow f^{-1}(c) \leq_1 f^{-1}(d).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ f^{-1} იზომორფიზმია $(E_2, \leq_2)$ და $(E_1, \leq_1)$ დალაგებულ სიმრავლეებს შორის. ანუ მოკლედ, რომ ვთქვათ, თუ

$(E_1, \leq_1) \overset{f}{\cong} (E_2, \leq_2)$, მაშინ $(E_2, \leq_2) \overset{f^{-1}}{\cong} (E_1, \leq_1)$.

3) (ტრანზიტულობა). თუ $(E_1, \leq_1) \overset{f}{\cong} (E_2, \leq_2)$ და $(E_2, \leq_2) \overset{g}{\cong} (E_3, \leq_3)$. მაშინ ვაჩვენოთ, რომ $(E_1, \leq_1) \overset{gof}{\cong} (E_3, \leq_3)$.

მართლაც, ვთქვათ $a, b \in E_1$ და $a \leq_1 b$; რადგან $f : E_1 \xrightarrow{1\text{–}1} E_2$ იზომორფიზმია, ამიტომ გვექნება $f(a) \leq_2 f(b)$. ხოლო რადგან $g : E_2 \to E_3$, ასევე იზომორფიზმია გვექნება

$g(f(a)) \leq_3 g(f(b))$ ანუ $(gof)(a) \leq_3 (gof)(b)$. ე.ი. კომპოზიცია gof იზომორფიზმია $(E_1, \leq_1)$ და $(E_3, \leq_3)$ დალაგებულ სიმრავლეებს შორის.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ორი n ელემენტიანი $(n \in N)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლე ერთმანეთის იზომორფულია (წრფივად დალაგებულიც).

ამოცანა 2. მოიყვანეთ ორი თვლადი ს.დ.ს.-ის მაგალითი, რომელიც არ იქნება ერთმანეთის იზომორფული.

შენიშვნა. თუ $(A, \leq_A)$ და $(B, \leq_B)$ ორი წრფივად დალაგებული სიმრავლეა და არსებობს ბიექცია $f : A \to B$, ისეთი რომ

$$a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_B f(b), \quad a,b \in A$$

მაშინ f იზომორფიზმია $(A, \leq_A)$ და $(B, \leq_B)$ სიმრავლეებს შორის,

ე.ი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_B f(b), \quad a,b \in A.$$

მაშინ f იზომორფიზმია $(A, \leq_A)$ და $(B, \leq_B)$ სიმრავლეებს შორის. ე.ი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $f(a) \leq_B f(b) \Rightarrow a \leq_A b$. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\neg(a \leq_A b)$ მაშინ $\neg(f(a) \leq_B f(b))$.

ვთქვათ, $\neg(a \leq_A b)$ რადგან $\leq_A$ წრფივი დალაგებაა, მაშინ გვექ-ნება $b <_A a$, და ამიტომ $f(b) <_B f(a)$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\neg(f(a) \leq_B f(b))$.

ე.ი. წრფივი დალაგებული სიმრავლეების იზომორფიზმის განმარტებაში საკმარისია ცალმხრივი იმპლიკაცია. მითუმეტეს ეს ეხება სავსებით დალაგებული სიმრავლეების იზომორფიზმის ცნებასაც.

ვთქვათ x არის $(E, \leq)$ ს.დ.ს.-ს რაიმე ელემენტი $(x \in E)$. განვიხილოთ E-ს ქვესიმრავლე

$$E(x) = \{y : y \in E \,\&\, y < x\}.$$

ამ სიმრავლეს x-ის შესაბამისი **საწყისი ინტერვალი** ეწოდება (E-ში).

თეორემა 2. თუ f არის $(E, \leq)$ ს.დ.ს-ს ზრდადი ინიექციური ასახვა თავისთავში, მაშინ:

$$x \in E \Rightarrow x \le f(x). \qquad (*)$$

დამტკიცება. დავუშვათ (*) უტოლობა არ სრულდება ყველა $x \in E$-თვის და D იყოს ყველა იმ x-ების სიმრავლე (E-დან), რომელთათვისაც $f(x) < x$. ე.ი. დავუშვათ, რომ $D \neq \varnothing$. მაშინ, რადგან D შედის E სავსებით დალაგებულ სიმრავლეში, D-ში არსებობს უმცირესი ელემენტი. აღვნიშნოთ იგი z-ით.

$$\text{ე.ი. გვაქვს: } f(z) < z. \qquad (**)$$

რადგან f ზრდადია და ინიექციური, გვექნება აგრეთვე:

$$f(f(z) < f(z).$$

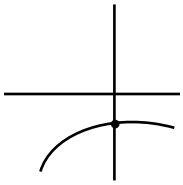
საიდანაც $\Rightarrow$ რომ $f(z) \in D$**.** (**) უტოლობა გვეუბნება, რომ z არ ყოფილა უმცირესი D-ში. რაც წინააღმდეგობაა. რ.დ.გ.

შედეგი 1. არც ერთი ს.დ.ს. არ შეიძლება იყოს არცერთი თავისი საწყისი ინტერვალის იზომორფული.

დამტკიცება. ვთქვათ $(E, \le)$ ს.დ.ს. არის $(E(x), \le)$-ის იზომორ-ფული $(x \in E)$, ანუ არსებობს ბიექცია $h: E \to E(x)$ ისეთი, რომ თუ $a, b \in E$, მაშინ

$$a \le b \Leftrightarrow h(a) \le h(b).$$

ე.ი. h ზრდადია და თან ინიექციური, ამიტომ **რადგან** $h(x) \in E(x)$ **გვექნებს, რომ** $h(x) < x$, ეს $x \le h(x)$, მეორეს მხრივ კი წინააღმდეგობა ამტკი-ცებს შედეგი 1-ს.



შენიშვნა: სულ სხვაგვარადაა სიტუაცია ნამდ-ვილ რიცხვთა სიმრავლის ბუნებრივი დალაგებისას: მართლაც $y = -2^{-x}$ ფუნქცია იზომორფიზმია $(-\infty, +\infty)$ და $(-\infty, 0)$-ს შორის, ჩვეულებრივი დალაგებისას.

შედეგი 2. ნებისმიერ სავსებით დალაგებულ $(E, \le)$ სიმრავლეს გააჩნია ერთადერთი, მხოლოდ იგივური ავტომორ-ფიზმი.

დამტკიცება. ვთქვათ f არის $(E, \le)$ ს.დ.ს-ის ავტომორფიზმი. ანუ f ბიექციაა E-დან E-ში და

$$a \le b \Leftrightarrow f(a) \le f(b) \ (a, b \in E). \qquad (*)$$

ვთქვათ $x \in E$ ნებისმიერი ელემენტია.

თეორემა 2-ის ძალით გვექნება

$$x \leq f(x). \qquad (**)$$

მეორეს მხრივ f^{-1}-ც $(E, \leq)$-ის ავტომორფიზმია და ამიტომ:

$$x \leq f^{-1}(x) \ (***),$$

ანუ (*) და (***)-დან $\Rightarrow f(x) \leq f(f^{-1}(x))$ ანუ

$$f(x) \leq x$$

უტოლობა, რომელიც (**) უტოლობასთან ერთად გვაძლევს, რომ ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის

$$f(x) = x,$$

ანუ f იგივური ასახვა E-ზე. ე.ი. $f = I_E$. რ.დ.გ.

თეორემა 3. (ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლის ურთიერთდამოკიდებულების შესახებ) თუ $(A, \leq_A)$ და $(B, \leq_B)$ ნებისმიერი ორი ს.დ.ს. არის მაშინ ისინი ან ერთმანეთის იზომორფულია ან ერთ ერთი მეორეს საწყისი ინტერვალის იზომორფულია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $G \equiv \{(a,b) : a \in Ab \in B \ \& \ A(a) \cong B(b)\}$ (ჩა-ნაწერი $A(a) \cong B(b)$ შემოკლებული ფორმაა $(A(a), \leq_A) \cong (B(b), \leq_B)$-ის).

1. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ G და G^{-1} ფუნქციონალური გრაფიკებია. მართლაც: დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ ერთიდაიგივე $a \in A$ ელემენტის შეესაბამება ორი b_1 და b_2 ($b_1 < b_2$) ელემენტი. ანუ $(a, b_1) \in G$ და $(a, b_2) \in G$, მაშინ გვექნება, რომ $A(a) \cong B(b_1)$ და $A(a) \cong B(b_2)$, აქედან მივიღებთ, რომ $B(b_1) \cong B(b_2)$, რადგან $b_1 < b_2$ ამიტომ გამოვა, რომ $B(b_2)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლე იზომორფულია თავისი საწყისი ინტერ-ვალისა. რაც შედეგი 1-ის საწინააღმდეგოა. მტკიცება G^{-1}-ისათვის. 1 დამტკიცებულია.

2. ასახვა $G(a) = b$ ამყარებს იზომორფიზმს $pr_1 G$ და $pr_2 G$ სიმრავლეებს შორის.

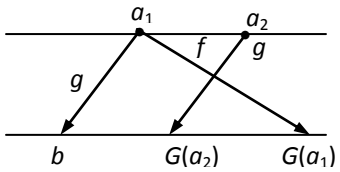
მართლაც, ვთქვათ $a_1 \in pr_1 G \ \& \ a_2 \in pr_1 G \ \& \ a_1 \leq a_2$. გვინდა დავამტ-კიცოთ, რომ:

$$G(a_1) \leq_B G(a_2).$$

დავუშვათ წინააღმდეგი. ე.ი. $G(a_2) \leq_B G(a_1)$

$$a_1 \in pr_1 G \quad \text{და} \quad a_2 \in pr_1 G,$$

ამიტომ $A(a_1) \cong B(G(a_1))$ და $A(a_2) \cong B(G(a_2))$. ვთქვათ ამ იზომორ-ფიზმებს ამყარებენ შესაბამისად f და g ბიექციები. რადგან $a_1 \leq_A a_2$, ამიტომ $a_1 \in A(a_2)$ და g მას (a_1-ს) გადასახავს $B(G(a_2))$-სიმრავლეში, ე.ი. $B(G(a_1))$ იზომორფულია თავისი საწყისი $B(b)$ ინტერვალის (იხ. ნახ. 1). ამ იზომორ-ფიზმს, კერძოდ, დაამყარებს ასახვა



$$g_0 f^{-1} : B(G(a_1)) \to B(b).$$

ეს ეწინააღმდეგება შედეგი 1-ს. ე.ი. 2. დამტკიცებულია.

3) ა) თუ $a \in pr_1 G \,\&\, a' < a \Rightarrow a' \in pr_1 G$,

ბ) $b \in pr_2 G \,\&\, b' < b \Rightarrow b' \in pr_2 G$.

დავამტკიცოთ $a \in pr_1 G$ და $a' < a$, მაშინ ცხადია არსებობს $b \in pr_2 G$-ში ისეთი, რომ $A(a) \cong B(b)$. ამ იზომორფიზმის დროს $a' \in A(a)$, გადავა, რაღაც b'-ში. $\in B(b)$ ეს ნიშნავს, რომ $A(a') \cong B(b')$ (რადგან იგივე იზომორფიზმი a'-ზე ნაკლებებს b'-ზე ნაკლებებში გადაიყვანს ცხადია). ამიტომ $(a', b') \in G$, ე.ი. $a' \in pr_1 G$.

ბ) მტკიცდება სრული ანალოგიით.

4) თეორემა 2-ის დასამტკიცებლად ახლა საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$pr_1 G = A \vee pr_2 G = B.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ $A \setminus pr_1 G$ და $B \setminus pr_2 G$ არასა-ცარიელი სიმრავლეებია. ამასთან ისინი როგორც შესაბამისად A და B ს.დ.ს.-ის ქვესიმრავლეები, ასევე სავსებით დალაგებულები არიან. აღვნიშნოთ a^*-ით და b^*-ით $A \setminus pr_1 G$ და $B \setminus pr_2 G$ სიმრავ-ლეების უმცირესი ელემენტები შესაბამისად. მაშინ 3) თვისების ძალით გვექნება, რომ $A(a^*) = pr_1 G$ და $B(b^*) = pr_2 G$.

მართლაც: ვაჩვენოთ, რომ $A(a^*) = pr_1(G)$.

ვთქვათ $a \in A(a^*) \Rightarrow a < a^* \Rightarrow a \in pr_1 G$ (a^*-ის განმარტებიდან).

ვთქვათ, ახლა $a = pr_1 G$, მაშინ $a < a^*$ (რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება $a^* \leq a$, ამიტომ 3) თვისები $\Rightarrow a^* \in pr_1 G$ რაც არ შეიძლება), ხოლო რადგან $a < a^*$, მაშინ $a \in A(a^*)$. ე.ი.

$$a \in A(a^*) \Leftrightarrow a \in pr_1(G).$$

ანალოგიურად მტკიცდება $B(b^*) = pr_2 G$ ტოლობაც.

რადგან 2)-ის გამო $pr_1 G \cong pr_2 G$, ამიტომ $A(a^*) \cong B(b^*)$, მაშინ G-ს განსაზღვრიდან გამოვა, რომ $(a^*, b^*) \in G$. რაც ეწინააღმდეგება a^* და b^*-ს განმარტებებს.

ე.ი. თეორემა 2 დამტკიცებულია.

ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპი

ვთქვათ მოცემულია სავსებით დალაგებული $(E, \leq)$ სიმრავლე და ამ სიმრავლის ელემენტთა რაიმე $S(x)$ თვისება.

ვთქვათ, ნებისმიერი $x \in E$-თვის, იქედან რომ მასზე ნაკლებ ყველა y-ს აქვს S თვისება გამომდინარეობს, რომ თავად x-საც აქვს S თვისება. მაშინ S თვისება ექნება E სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს.

ანუ ფორმალურად: სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$\forall x \in E(\forall y \in E(y < x \Rightarrow S(y) \Rightarrow S(x)) \Rightarrow \forall x \in E \ S(x).$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. ვთქვათ, რომ დაშვება სამართლიანია, მაგრამ არსებობს E-ს ელემენტი, ისეთი რომელსაც არა აქვს S თვისება. აღვნიშნოთ, x_0-ით E-ს ყველა ასეთ ელემენტს შორის უმცირესი. ე.ი. ერთის მხრივ გვაქვს, რომ $S(x_0)$ მცდარია. მეორეს მხრივ კი რადგან x_0 უმცირესია ისეთებს შორის, რომელსაც არა აქვს S თვისება, მაშინ გვექნება იმპლიკაცია:

$$y < x_0 \Rightarrow S(y).$$

თანაც ეს იმპლიკაცია სრულდება ნებისმიერი $y \in E$-თვის, მაშინ დაშვების თანახმად S თვისება ექნება x_0 ელემენტსაც, რაც ეწი-ნააღმდეგება x_0-ის განმარტებას.

ინდუქცია & რეკურსია

ტერმინები ინდუქცია და რეკურსია ხშირად ერთმანეთის ნაცვლადაც გამოიყენება.

მაგ. $n!$-ის განსაზღვრას

$$\begin{cases} f(o)=1, \\ f(n)=n\cdot f(n-1) \quad n>0,\ n\in N, \end{cases}$$

ინდუქციასაც ეძახიან და რეკურსიასაც.

ჩვენ გავმიჯნავთ ამ ცნებებს. თუ რაიმეს დამტკიცება ხდება, ჯერ $n=0$ -თვის შემდეგ $n=1,2,\cdots$ რიცხვებისათვის თანაც ისე, რომ ყოველი წინადადების დამტკიცება წინა დამტკიცებულ წინადადებაებს ეყრდნობა, მაშინ საქმე გვაქვს ინდუქციასთან, ხოლო თუ რაიმეს განმარტება ან აგება ხდება ჯერ $n=0$, ხოლო შემდეგ $n=1,2,\cdots$ რიცხვებისათვის ისე, რომ ყოველი n-სათვის (გარდა შესაძლებელია რამდენიმე საწყისისა). ახალი ობიექტის აგება ხდება წინად აგებული (განმარტებული) ობიექტის ან ობიექტების გამოყენებით, მაშინ რეკურსიასთანა გვაქვს საქმე.

ჩვენი მიზანია, რომ ინდუქციური მტკიცებები და რეკურციული აგებები არა მხოლოდ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე ვაწარ-მოოთ, არამედ ნებისმიერ სავსებით დალაგებულ სიმრავლეზეც იგივე გავაკეთოთ.

განვიხილოთ $f:N\to N$ განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$f(0)=1,$$

$$f(n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1)+1,\ n>0,\ n\in N.$$

ანუ $f(n)$ განიმარტება f ფუნქციის ყველა წინა მნიშვნელობის გამოყენებით. როგორ განვაზოგადოთ ასეთი აგების წესი ნების-მიერ A ს.დ.ს.-ზე? თუკი გვინდა რაიმე რეკუსრიული განსაზღვრა $f:A\to B$ ფუნქციისა (B რაიმე სიმრავლეა), მაშინ ყოველი $x\in A$ -სათვის $f(x)$ -ის განსაზღვრაში უნდა გამოვიყენოთ $f(y)$ $(y<x)$ მნიშვნელობები, ე.ი. f-ის მნიშვნელობები $A(x)$ -ზე ანუ $f|_{A(x)}$ ფუნქცია.

ტრანსფინიტული რეკურსიის მეთოდი

თეორემა (ტრანსფინიტური რეკურსიის შესახებ). ვთქვათ მოცე-მულია $(E,\leq)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლე და $T(u)$ ტერმი. მაშინ არსებობს E-ზე განსაზღვრული ერთადერთი f სიურექცია, რომელიც ყოველი $x\in E$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს

$$f(x)=T(f|_{E(x)})$$

ტოლობას.

დავამტკიცოთ f-ის ერთადერთობა. ვთქვათ E-ზე განსაზღვრუ-ლია ორი f და f' სიურექცია, რომელთათვისაც შესრულებულია

$f(x) = T(f|_{E(x)})$ და $f'(x) = T(f'|_{E(x)})$ $(x \in E)$ ტოლობები.

ავიღოთ ნებისმიერი $x \in E$ და ნებისმიერი $y < x$ ელემენტი და ვთქვათ

$$y < x \Rightarrow f(y) = f'(y) \qquad (*)$$

მაშინ ცხადია, რომ $f|_{E(x)} = f'|_{E(x)}$, (რადგან $E(x)$ ეს სწორედ x-ზე ნაკლები ელემენტების სიმრავლეა E-დან), ამიტომ

$$f(x) = T(f|_{E(x)}) = T(f'|_{E(x)}) = f'(x).$$

ე.ი. გამოვიდა, რომ თუ (*). მაშინ $f(x) = f'(x)$. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ახლა ვღებულობთ, რომ

$$\forall x \in E(f(x) = f'(x)),$$ ე.ი. f ერთადერთია.

დავსვათ ასეთი კითხვა. ვთქვათ მოცემულია ერთი და იგივე სიმძლავრის ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლე, იქნება თუ არა ეს ორი სიმრავლე ერთმანეთის იზომორფული?

პასუხი მარტივია არა.

მაგალითი 1. განვიხილოთ N-ზე დალაგებები

1. 0, 1, 2, … ანუ $\leq_0$ ჩვეულებრივი დალაგება N-ზე $(N, \leq_0)$;
2. 1, 2, 3, …, 0 ($\leq_1$ დალაგება); $(N, \leq_1)$;
3. 2, 3, 4, …, 0, 1 ($\leq_2$ დალაგება); $(N, \leq_2)$.

.....

$n+1$, $n, n+1, n+2, \cdots, 0, 1, \cdots, n-1$. ($\leq_n$ დალაგება); $(N, \leq_n)$.

.....

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $(N, \leq_k)_{k \in N}$ სავსებით დალაგე-ბული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არაიზომორფულია.

(*) მართლაც $(N, \leq_0) \not\equiv (N, \leq_1)$, იმიტომ რომ პირველში არ არსებობს უდიდესი ელემენტი, მეორეში არსებობს, ხოლო იზომორფიზმის დროს ცხადია უდიდესი ელემენტი უდიდესში უნდა გადავიდეს (ინვარიანტია). $(N, \leq_1) \not\equiv (N, \leq_2)$, იმიტომ რომ $(N, \leq_2)$ ს.დ.ს.-ს უდიდეს ელემენტს აქვს

უშუალო წინამორბედი $(N, \leq_1)$-სას კი არა. ხოლო იზომორფიზმის დროს უშუალო წინამორბედი, უშუალო წინამორბედში გადავა (ცხადია). და ა.შ.

თუ N-ს სიმრავლეს შემდეგნაირად დავალაგებთ:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

(ანუ ლუწი რიცხვები ერთმანეთში ბუნებრივადაა დალაგებული, ასევე კენტი რიცხვებიც, ხოლო $\forall$ ლუწი რიცხვი ნაკლებია $\forall$ კენტ რიცხვზე ამ დალაგებით). მაშინ კიდევ ახალ დალაგებას მივიღებთ N-ზე.

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 0$ კიდევ სხვა დალაგება იქნება და ა.შ.

მტკიცდება, რომ ასეთი დალაგებების სიმრავლე არათვლადია, ე.ი. N სიმრავლე თურმე შეიძლება „არათვლად სხვადასხვა-ნაირად“ დავალაგოთ სავსებით.

ვთქვათ ახლა A ნებისმიერი თვლადი სიმრავლეა, ანუ

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}.$$

დავალაგოთ ეს სიმრავლე შემდეგნაირად:

$$a_2, a_3, a_4, \cdots, a_1, a_0.$$

აღვნიშნოთ ეს დალაგება A სიმრავლისა $\leq_A$-ით. მიუხედავად იმისა, რომ a_i-ები ნატურალური რიცხვები არაა და a_0 და a_1-ც „გადაადგილებულია“ მაინც გვაქვს იზომორფულობა:

$$(N, \leq_2) \cong (N, \leq_A).$$

ბუნებრივად ისმის კითხვა, მაინც რა ობიექტია ის, რაც საერთო აქვს ერთმანეთის იზომორფულ ყველა სავსებით დალა-გებულ სიმრავლეს და განსხვავებული აქვთ ნებისმიერ ორ არაიზომორფულ ს.დ. სიმრავლეს?

ეს არის ის რაც რასაც სიმრავლეთა თეორიაში რიგობრივი რიცხვი ანუ ორდინალი ჰქვია.

განვსაზღვროთ ორდინალის ცნება ჯონ ფონ ნეიმანის მიხედვით. $(E, \leq)$ ნებისმიერი ს.დ. სიმრავლეა.

ყოველი $x \in E$ ელემენტისათვის ტრანსფინიტული რეკურსიის მეთოდით განვსაზღვროთ

$$O(x) = \{O(y) : y < x\}. \ *$$

$O(x)$ სიმრავლეებს ეწოდებათ ორდინალური რიცხვები (ორდინალები) ფონ ნეიმანის აზრით.

ვთქვათ e_0 არის E ს.დ.ს.-ის უმცირესი ელემენტი (*) განსაზღვრიდან ცხადია, რომ $O(e_0) = \varnothing = 0$; თუ e_1-ით აღვნიშნავთ E-ს ელემენტს, რომელიც e_0-ის მომდევნოა, მაშინ მივიღებთ

$O(e_1)=\{\varnothing\}=1$ (ისევ * განსაზღვრებიდან) თუ ასე გავაგრძელებთ მივიღებთ: $O(e_2)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=2$ და ა.შ. $O(e_n)=n$ ნატურალურ რიცხვს ZFC-ში.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ZFC-ში განსაზღვრულ ნატურალურ რიცხვებს, გარდა ჩვეულებრივი თვისებებისა აქვთ დამატებითი თვისებები, კერძოდ განმარტებიდან ადვილად გამომ-დინარეობს, რომ თუ $n<m$, მაშინ $n\in m$ და პირიქით.

თუ $n\le m$, მაშინ $n\subset m$ და პირიქით.

და ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი წარმოადგენს მასზე ნაკლები ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეს. ამ თვისებებისა და ამ იდეის გაგრძელებაა ორდინალური რიცხვის ცნება.

ვთქვათ მას შემდეგ რაც $(E,\le)$ ს.დ.ს. სიმრავლიდან ამოვირჩევთ $0,1,2,\cdots,n\cdots$ ორდინალები E-ში კიდევ დარჩა ელემენტები უმცი-რესი, მათ შორის (E-ში) აღვნიშნოთ e_ω-ით (*) განმარტებად, ცხადია, რომ

$$\omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

თუ E-ში კიდევ არის ელემენტი მათგან უმცირესი აღვნიშნოთ $e_{\omega+1}$-ით და ორდინალი მისი შესაბამისი $O(e_{\omega+1})=\omega\cup(\omega\}$ ეს ორდინალი $\omega+1$-ით აღინიშნება. საზოგადოდ O თუ ორდინალია, მაშინ $O+\{0\}$ ორდინალს (O-ს მომდევნო ორდინალს) $O+1$-ით აღნიშნავენ.

ორდინალების თვისებები

ორდინალთა ქვემოთჩამოთვლილი თვისებები ადვილად მტკიც-დება ორდინალის განმარტებიდან ზოგიერთის დამტკიცებას ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებაც სჭირდება. ვთქვათ $(E,\le)$ ს.დ.ს. არის, ხოლო $x,y,x_1,x_2\in E$.

1) $y<x\Leftrightarrow o(y)\in o(x)$;

2) $o(y)\notin o(x)$;

3) $x_1=x_2\Leftrightarrow o(x_1)\in o(x_x)$;

4) $O(y)\in O(x)\Rightarrow O(y)\subset O(x)$;

4′) $O(y)\in O(x)\Leftrightarrow O(y)\subset O(x)\,\&\,O(y)\ne O(x)$;

5) $y\le x\Leftrightarrow o(y)\subset O(x)$;

6) $(O(x),\subset)$ სავსებით დალაგებული სიმრავლეა (კერძოდ $(O(x),\subset)\cong(E(x),\leq)$ და ამ იზომორფიზმს ამყარებს $f:x\to O(x)$ ასახვას).

7) ორდინალთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება კვლავ ორდინა-ლია;

8) ყოველი სავსებით დალაგებული სიმრავლისათვის არსებობს მისი იზომორფული ორდინალური რიცხვი;

9) ორდინალურ რიცხვთა ნებისმიერი სიმრავლისათვის არსებობს ორდინალი, რომელიც ამ სიმრავლეში შემავალ ყველა ორდი-მალზე მეტია;

10) არ არსებობს ყველა ორდინალთა სიმრავლე.

ცერმელოს თეორემა

თეორემა. ნებისმიერი A სიმრავლე შეიძლება სავსებით დალაგდეს (ანუ ნებისმიერი A სიმრავლე შეიძლება წარმოდგეს რაიმე $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ ინექციური მიმდევრობის სახით).

დამტკიცება. ვთქვათ f ამორჩევის ფუნქციაა $P(A)\setminus\{\varnothing\}$ არაცარიელ სიმრავლეთა ოჯახისათვის, ე.ი.

$$X\neq\varnothing\ \&\ X\subset A\Rightarrow f(X)\in X\,.$$

ვთქვათ $t\notin A$ რაიმე ელემენტია (ასეთი t არსებობს იმიტომ, რომ არ არსებობს ყველა სიმრავლეთა სიმრავლე). განვსაზღვროთ $t(\varnothing)=t$.

აღვნიშნოთ $C=\{R\in P(A^2):R$ სავსებით ალაგებს A-ს ქვესიმ-რავლეს$\}$. (ცხადია, რომ C სიმრავლე არსებობს გამოყოფის აქსიომის გამო).

თუ $B\subset A$ და R ალაგებს B-ს. ე.ი. $R\subset B^2\Rightarrow R\in P(B^2)$, რადგან $P(B^2)\subset P(B^2)$, ე.ი. $R\in P(B^2)$.

რადგან C-ში შემავალი ყოველი R ალაგებს სავსებით A-ს რომელიმე B_R ქვესიმრავლეს, $\overline{R}$-ით აღვნიშნოთ (B_R,R) ს.დ.ს.-ის იზომორფული ორდინალი. ჩანაცვლების აქსიომის ძალით არსებობს

$$C^*=\{\overline{R}:R\in C\}\,.$$

რადგან ორდინალთა ნებისმიერი სიმრავლისათვის არსებობს ორდინალი, რომელიც მეტია მოცემული (ამ შემთხვევაში C^*) სიმრავლეში შემავალ ყველა ორდინალზე, და რადგან ორდი-ნალთა ნებისმიერი სიმრავლე სავსებითაა დალაგებული, ამიტომ არსებობს უმცირესი ორდინალი α, რომელიც მეტის C^*-ში შემა-ვალ ნებისმიერ ორდინალზე.

ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდით განვსაზღვროთ ფუნქცია $\varphi:C^*\to A\cup\{t\}$ ტოლობით:

$$\varphi(\xi) = f(a \setminus \{\varphi(\eta) : \eta < \xi\}) . \ (\xi \in G^* \Leftrightarrow \xi < \alpha) .$$

ცხადია, რომ თუ $\varphi(\xi) \neq t$, მაშინ $a \setminus \{\varphi(\eta) : \eta < \xi\}$ არაცარიელი სიმრავლეა და $\varphi(\xi) \in A \setminus \{\varphi(\eta) : \eta < \xi\}$, $\varphi(\xi)$ განსხვავებულია ყველა $\varphi(\eta)$ $(\eta < \xi)$-საგან.

თუკი $\xi < \alpha$ -სათვის შესრულდება პირობა $\varphi(\xi) \neq t$, მაშინ გამოვა, რომ $\{\varphi(\xi) : \xi < \alpha\}$ სიმრავლე, ანუ $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ ოჯახი A-ს სავსებით დალაგებული ქვესიმრავლეა და ის α ორდინალის იზომორფულია, მაშინ მივიღებთ $\alpha \in C^*$. რაც ეწინააღმდეგება α-ს განსაზღვრას.

ე.ი. ზოგიერთი $\xi < \alpha$ ორდინალისათვის შესრულდება $\varphi(\xi) = t$ ტოლობა. β-თი აღვნიშნოთ ასეთ ორდინალებს შორის უმცირესი. მაშინ გვექნება. $\varphi(\beta) = t$ და $\xi < \beta \Rightarrow \varphi(\xi) \in A$, ანუ $A \setminus \{\varphi(\xi) : \xi < \beta\} = \varnothing$ და $A = \{\varphi(\xi) : \xi < \beta\}$. ე.ი. A სიმრავლე სავსებით დალაგდა. რ.დ.გ.

თუ გავაანალიზებთ ცერმელოს თეორემის დამტკიცებას, ვნახავთ, რომ მტკიცება მიმდინარეობს ZF თეორიაში, გარდა იმ მომენტისა, როცა ვამბობთ, რომ „ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $P(A) \setminus \{\varnothing\}$ სიმრავლეთა ოჯახისათვის არსებობს ამორჩევის ფუნქცია“-ო.

ანუ ჩვენ ZF თეორიაში დავამტკიცეთ.

თეორემა. თუ A ისეთი სიმრავლეა, რომ $P(A) \setminus \{\varnothing\}$ ოჯახისა-თვის არსებობს ამორჩევის ფუნქცია, მაშინ არსებობს A სიმრავლის სავსებით დალაგებაც.

სამართლიანია ამ თეორემის შებრუნებული თეორემაც, რომელიც ასევე ZF თეორიაში მტკიცდება.

თეორემა (ცერმელოს თეორემის შებრუნებული). თუ A სიმრავლე შეიძლება სავსებით იქნას დალაგებული, მაშინ არსებობს ამორჩევის ფუნქცია $P(A) \setminus \{\varnothing\}$ სიმრავლეთა ოჯახისათვის.

დამტკიცება. ვთქვათ A სავსებით დალაგებულია რაიმე $\leq_R$ დალაგებით. ვთქვათ $X \in P(A) \setminus \{\varnothing\}$. რადგან X არის A ს.დ.ს.-ის არაცარიელი ქვესიმრავლე ,მასში იარსებებს უმცირესი ელემენტი აღვნიშნოთ იგი a_x-ით. ე.ი. $a_x \in X$. განვსაზღვროთ ახლა ამორჩევის ფუნქცია

$$f : P(A) \setminus \{\varnothing\} \to A .$$

შემდეგნაირად

$$f(X) = a_x , \ X \subset A . \quad \text{რ.დ.გ.}$$

ე.ი. ამორჩევის ფუნქცია (თუ სიმრავლე სავსებითაა დალაგებული) ისაზღვრება ეფექტურად, ცერმელოს აქსიომის გარეშე.

კარდინალურ რიცხვთა ტრიხოტომიის თვისება

თეორემა. ნებისმიერი $\mathfrak{a}$ და $\mathfrak{f}$ კარდინალური რიცხვებისათვის სამართლიანია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი სამი დამოკიდებულებიდან:

$$\mathfrak{a}<\mathfrak{f},\ \mathfrak{a}=\mathfrak{f},\ \mathfrak{f}<\mathfrak{a}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathfrak{a}$ და $\mathfrak{f}$ კარდინალები შესაბამიდად A და B სიმრავლეების სიმძლავრეებია. ცერმელოს თეორემის ძალით A და B სიმრავლეები შეიძლება სავსებით დავალაგოთ $(A, \leq_A)$ და $(B, \leq_B)$ სიმრავლეების სახით. როგორც ვიცით ან A სიმრავლე იქნება B სიმრავლის საწყისი მონაკვეთის იზომორფული (ე.ი. ავტომატურად იარსებებს ინიექცია A-დან B-ში და ე.ი. $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{f}$), ან A სიმრავლე იქნება B სიმრავლის იზომორფული, როგორც ს.დ.ს.-ები (ე.ი. იარსებებს ბიექცია A და B სიმრავლეებს შორის და ე.ი. $\mathfrak{a}=\mathfrak{f}$ ან კიდევ B სიმრავლე იქნება A ს.დ.ს.-ის საწყისი ინტერვალის იზომორფული და მაშ იარსებებს ინიექციური ასახვა B სიმრავლისა A-სიმრავლეში, რაც იმას მოგვცემს, რომ $\mathfrak{f}\leq\mathfrak{a}$.

გარდა ამისა, რადგან არც ერთი სავსებით დალაგებული სიმრავლე არ შეიძლება იყოს იზომორფული თავისი საწყისი ინტერვალისა, ამიტომ არც ერთი ორი დამოკიდებულება შემდეგი სამიდან

$$\mathfrak{a}<\mathfrak{f},\ \mathfrak{a}=\mathfrak{f},\ \mathfrak{f}<\mathfrak{a}.$$

არ შეიძლება ერთდროულად შესრულდეს. რ.დ.გ.

ლემა. P სიბრტყეზე მოთავსებულ ყველა შესაძლო წრფეთა სიმრავლის სიმძლავრე კონტინუუმის ტოლია.

დამტკიცება. ავირჩიოთ P სიბრტყეზე კოორფინატთა კონკრე-ტული OXY სისტემა. P სიბრტყის ყველა წრფეთა L სიმრავლე დავყოთ ორ თანაუკეთ კლასად:

$$L=A\cup B,$$

ანუ A იყოს $\overrightarrow{oy}$ ღერძის პარალელურ ყველა წრფეთა სიმრავლე და B იყოს P სიბრტყის ყველა დანარჩენ წრფეთა სიმრავლე. ცხადია თუ $l\in A$, მაშინ მისი განტოლებაა $x=a\quad(a\in R)$, ხოლო თუ $l\in B$, მაშინ მისი განტოლებაა $y=\kappa x+b\quad(\kappa,b\in R)$. ცხადია, რომ $A\cap B\neq\varnothing$ და $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}=\mathfrak{L}$. ამიტომ $L=\mathfrak{L}+\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$. რ.დ.გ.

მაზურკევიჩის თეორემა

თეორემა. არსებობს სიბრტყის წერტილთა ისეთი სიმრავლე, რომელიც ამ სიბრტყის ნებისმიერ წრფესთან ზუსტად ორ წერტილში იკვეთება.

დამტკიცება. ვთქვათ φ არის კონტინუუმის სიმძლავრის ორდინალებს შორის უმცირესი (ცერმელოს თეორემის თანახმად შესაძლებელია კონტინუალური სიმრავლის სავსებით დალაგება და ე.ი. არსებობს კონტიმუუმის სიმძლავრის ტოლი სიმძლავრის ორდინალი. ამიტომ, ვინაიდან ორდინალთა ნებისმიერ სიმრავლეში არსებობს უმცირესი, არსებობს უმცირესი ორდინალი კონტი-ნუუმის სიმძლავრის ორდინალებს შორის).

რადგან სიბრტყის ყველა წერტილთა და ყველა წრფეთა სიმრავლეები კონტინუალურებია, ისინი შეიძლება წარმოვადგინოთ ტრანსფინიტური, ინიექციური $(P_\xi)_{\xi<\varphi}$ და $(l_\xi)_{\xi<\varphi}$ მიმდევრობის სახით.

ავაგოთ ახლა წერტილთა საძიებელი $(q_\xi)_{\xi<\varphi}$ მიმდევრობა ისე, რომ $Q=\{q_\xi:\xi<\varphi\}$ სიმრავლე იკვეთებოდეს სიბრტყის ყოველ წრფესთან ორ და მხოლოდ ორ წერტილში.

q_0 განვსაზღვროთ, როგორც პირველი წერტილი $(P_\xi)_{\xi<\varphi}$ მიმდევრობიდან, რომელიც l_0 წრფეზე მდებარეობს. დავუშვათ ახლა $\alpha>\varphi$ რაიმე ორდინალია და $(q_\xi)_{\xi<\alpha}$ მიმდევრობა უკვე განსაზღვრული გვაქვს. როგორ განვსაზღვროთ „შემდეგი q წერტილი“ ანუ q_α წერტილი?

$T_\alpha\equiv\{l:l$ არის წრფე & l წრფე ორ წერტილში მაინც იკვეთება Q_α-სთან$\}$.

რადგან $\alpha<\varphi$, ამიტომ (φ-ს განმარტებიდან) $\overline{\overline{\alpha}}<\mathfrak{L}$. ე.ი. გვექნება უტოლობა $\overline{\overline{Q}}<\mathfrak{L}$, და მაშასადამე $\overline{\overline{T_\alpha}}\le\overline{\overline{Q_\alpha\times Q_\alpha}}<\mathfrak{L}$. რადგან $(l_\xi)_{\xi<\varphi}$ კონტინუალური ოჯახის და T_α კონტინუუ,ზე ნაკლები სიმძლავრის, ამიტომ არსებობს წრფე, რომელიც $\notin T_\alpha$-ს. ე.ი. არსებობს უმცირესინდექსიანი ასეთი წრფე $(l_\xi)_{\xi<\varphi}$ ოჯახიდან. აღვნიშნეთ ეს წრფე l_{β_α}-ით. აღვნიშნოთ R-ით l_{β_α} წრფის T_α ოჯახში შემავალ ყველა წრფესთან გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლე. ანუ $T=l_{\beta_\alpha}\cap(\cup T_\alpha)$. რადგან $l_{\beta_\alpha}\notin T_\alpha$ და $\overline{\overline{T_\alpha}}<\mathfrak{L}$. მივიღებთ, რომ $\overline{\overline{R}}<\mathfrak{L}$. ამიტომ l_{β_α} წრფე შეიცავს ისეთ წერტილს, რომელიც არც R-შია და არც Q_α $\left(\overline{\overline{Q_\alpha\cup R}}<\mathfrak{L}\right)$. ყველა ასეთ წერტილთა შორის პირველი წერტილი $(P_\xi)_{\xi<\varphi}$ მიმდევრობიდან აღვნიშნოთ q_α-ით. ამრიგად ტრანსფინიტური

რეკურსიით $Q=(q_\xi)_{\xi<\varphi}$ მიმდევრობა მთლიანად განსაზღვრულია. ვაჩვენოთ, ახლა, რომ $Q=\{q_\xi:\xi<\varphi\}$ საძიებელი სიმრავლეა.

ა) ჯერ ვაჩვენოთ, რომ არც ერთი წრფე Q-სთან ორზე მეტ წერტილში არ იკვეთება. მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი და ვთქვათ Q სიმრავლის სამი q_{α_1}, q_{α_2} და q_{α_3} წერტილები ერთ l წრფეზეა მოთავსებული. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხ-მოთ, რომ $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$. მაშინ ცხადია, რომ $q_{\alpha_1}\in Q_{\alpha_3}\ \&\ q_{\alpha_2}\in Q_{\alpha_3}$, Q_α-ს განსაზღვრის თანახმად.

მაგრამ ვინაიდან q_{α_1} და q_{α_2} ორივე l წრფეზეა, ამიტომ $l\in T_{\alpha_3}$, მაგრამ q_{α_3} წერტილი $\notin$ არც ერთ წრფეს T_{α_3} ოჯახიდან (ვინაიდან აგების თანახმად: $q_\alpha\in l_{\beta_\alpha}\setminus R\bigcup Q_\alpha\quad l_{\beta_\alpha}\notin T_\alpha$), ე.ი. $q_{\alpha_3}\notin l$ ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმას, რომ Q სიმრავლის არც ერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ ძევს.

ბ) ახლა ის ვაჩვენოთ, რომ არც ერთი წრფე $(P_\xi)_{\xi<\varphi}$ ოჯახიდან Q სიმრავლეს არ გადაკვეთს ორზე ნაკლებ წერტილში. მართლაც აგების პროცესიდან ჩანს, რომ თუ l_{β_α} წრფე ისეთია, რომ ის $Q_{\alpha+1}$-თან ერთ წერტილში იკვეთება (საერთოდ რომ იკვეთება ცხადია, რადგან $q_\alpha\in l_{\beta_\alpha}\bigcap Q_{\alpha+1}$, ხოლო $\gamma<\varphi\Rightarrow Q_j\subset Q$), მაშინ l_{β_α} წრფე არ შევა $T_{\alpha+1}$ ოჯახში და შემდეგი უმცირესი ინდექსიანი წრფე ისევ l_{β_α} იქნება. რაც იმას გამოიწვევს, რომ $q_{\alpha+1}$ წერტილის აღებაც l_{β_α} წრფიდან მოხდება და ამიტომ l_{β_α}-ს Q სიმრავლეში ორი წერტილი გარანტირებული აქვს.

ანუ საბოლოოდ დამტკიცდა, რომ საძიებელი სიმრავლეა. რ.დ.გ.

R^3 სივრცის დაყოფა ერთეულრადიუსიან წრეწირთა ოჯახად

თეორემა (ა. ხარაზიშვილი). ვთქვათ, $r>0$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ არსებობს r რადიუსიან წრეწირთა ისეთი $(C_i)_{i\in I}$ ოჯახი, რომ $i\neq j\Rightarrow C_i\bigcap C_j=\varnothing$ და $\bigcup\limits_{i\in I}C_i=R^3$.

ანუ არსებობს R^3 სივრცის დაყოფა r რადიუსიან წრეწი-რებად.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ თუ ასეთი ოჯახი არსებობს, მაშინ დიზიუქტურობის გამო ის აუცილებლად კონტინუალური იქნება. ვთქვათ $r>0$ და ვთქვათ, φ კონტინუუმის სიმძლავრის

უმცირესი ორდინალია, ხოლო $(P_\xi)_{\xi<\varphi}$ არის R^3 სივრცია ყველა წერტილთა ინიექციური ტრანსფინიტური მიმდევრობა, ასეთი მიმდევრობა არსებობს ცერმელოს თეორიის გამო) ტრანსფინი-ტული რეკურსიით ავაგოთ $(C_\xi)_{\xi<\varphi}$ r რადიუსიან წრეწირთა ოჯახი, რომ შესრულდეს პირობები:

1) $\xi_1 < \xi_2 < \varphi \Rightarrow C_{\xi_1} \bigcap C_{\xi_2} = \varnothing$,

2) $\xi < \varphi \Rightarrow P_\xi \in \bigcup_{\eta \le \xi} C_\eta$

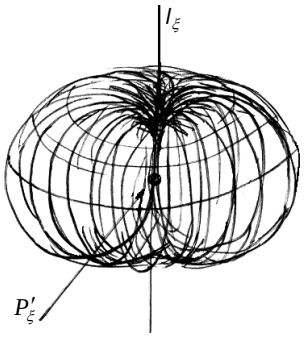
(ცხადია 2 პირობიდან $\Rightarrow R^3 = \bigcup_{\xi<\varphi} C_\xi$).

დავუშვათ, რომ $\xi < \varphi$ და ξ ორდინალისათვის უკვე განსაზღვ-რულია $(C_\zeta)_{\zeta<\xi}$ ტრანსფინიტური მიმდევრობა, რომელიც r რა-დიუსიანი თანაუკვეთი წრეწირებისაგან შედგება და სამართლიანია 2) თვისების ანალოგიური თვისება: თუ $\eta < \xi$, მაშინ $P_\xi \in \bigcup_{\xi \le \eta} C_\xi$. ანუ უკვე აგებულები ფარავენ სივრცის წერტილთა $(P_\eta)_{\eta<\varphi}$ სიმრავლეს.

ავიღოთ ახლა თავად P_ξ წერტილი. თუ $P_\xi \in \bigcup_{\zeta \le \xi} C_\zeta$ (ანუ თუ P_ξ ავიღოთ $(P_\xi)_{\xi<\varphi}$ მიმდევრობის ის წერტილი, რომელიც $\notin \bigcup_{\zeta \le \xi} C_\zeta$ სიმრავლეს და თან უმცირესინდექსიანი ყველა ასეთ წერტილთა შორის. (რადგან წრეწირთა არაკონტინუალური ოჯახი ვერ დაფარავს R^3 -ს ამიტომ ასეთი წერტილი იარსებებს).

I. მართლაც, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყეთა არაკონტინუალური ოჯახი ვერ დაფარავს R^3 . თუ დაფარავს, მაშინ სფერო დაიფარება არაკონტინუალური რაოდენობა წრეწირებით. ეს არ შეიძლება, რადგან მაგალითად იარსებებს მერიდიანი, რომელიც არ დაემთხვევა ამ ოჯახის არცერთ წრეწირს. ამ მერიდიანს იმ წრეწირთა არაკონტინუალურ ოჯახთან ექნება არაკონტინუალური თანაკვეთა და ე.ი. ამ მერიდიანზე იარსებებს წერტილი, რომელსაც ვერ დაფარავს ის ოჯახი, ე.ი. სფეროზეც იარსებებს.

II. ვერ დაფარავს სფეროს, სფეროზე ავიღოთ ამ არაკონტინუალურ სიბრტყეთა ოჯახის კვალები. ე,ი, წრეწირები მათი რაოდენობა $< \mathsf{L}$. ე.ი. სფეროზე არსებობს წრეწირი C, რომელიც $\notin$ ამ ოჯახს. განვიხილოთ $C \cap$ ოჯახთან $< \mathsf{L}$ ამიტომ C წრეწირზე $\exists$ წერტილი p, რომელიც არ დაიფარება, თუკი $P_\xi \notin \bigcup_{\zeta \le \xi} C_\zeta$, მაშინ განვსაზღვროთ $P'_\xi = P_\xi$. ე.ი. ორივე შემთხვევაში $P'_\xi \notin \bigcup_{\zeta \le \xi} C_\zeta$. გავატაროთ ახლა P'_ξ წერტილზე l_ξ წრფე ისე, რომ ის არ იყოს პერპენდიკულარული $(C_\zeta)_{\zeta<\xi}$ ოჯახში შემავალი წრეწირთა სიბრტყეების. ეს შესაძლებელია, რადგან მიმართულე-ბების სიმრავლე კონტინუალურია, ხოლო $\overline{\xi} < \mathsf{L}$.



ავაგოთ ახლა ტორი, რომელიც მიიღება C წრეწირის კონგრუენტული წრეწირის l_ξ ღერძის გარშემო ბრუნვით, თანაც ისე, რომ წრეწირისათვის l_ξ არის P'_ξ წერტილში გავლებული მხები. ამ ტორის ზედაპირი აღვნიშნოთ $S(T)$ -ით. ცნობილია, რომ თუ ტორის ზედაპირზე მთლიანად ძევს რაიმე წრეწირი, მაშინ ის ან მერიდიანია ან პარალელი (* თვისება).

ცნობილია, ასევეე ტორის ზედაპირის ასეთი თვისება, რომ წრეწირი ან მთლიანადაა ტორის ზედაპირზე, ან კიდევ ამ ზედაპირთან მხოლოდ სასრული თანაკვეთა აქვს (**) თვისება. (ინტიუციურად ნათელ ამ გეომეტრიულ ფაქტებს ჩვენ დაუმტკიცებლად გამოვიყენებთ).

l_ξ ღერძის მიმართულების შერჩევის გამო ტორის ვერცერთი პარალელი წრეწირი ვერ იქნება $(C_\zeta)_{\zeta<\xi}$ ოჯახში, ხოლო P'_ξ -ის შერჩევის გამო ტორის ვერც ერთი მერიდიანიც ვერ იქნება $(C_\zeta)_{\zeta<\xi}$ ოჯახში. ამიტომ

$$\left(P'_\xi \notin \bigcup_{\zeta\le\xi} C_\zeta \right)$$

და მაშინ * თვისების გამო, გვექნება, რომ არცერთი $C_\zeta (\xi < \xi)$ წრეწირი არ მდებარეობს მთლიანად $S(T)$ ზედაპირზე. ხოლო ** თვისების გამო გვექნება, რომ თანაკვეთა

$C_\zeta \cap S(T)$ სასრული სიმრავლეა $(\forall \zeta < \xi$ -თვის).

მაგრამ, რადგან $\overline{\xi} < \mathsf{L}$ (ξ ნაკლებია φ-ზე და ამიტომ). ამიტომ აუცილებლად მოიძებნება ისეთი მერიდიანი, რომელიც არ თანაიკ-ვეთება $\bigcup_{\zeta<\xi} C_\zeta$ სიმრავლესთან. ერთ-ერთი ასეთი მერიდიანული წრეწირი იყოს C_ξ . ე.ი. C_ξ წრეწირი ისე გავატარეთ P'_ξ ახალ წერ-ტილზე, რომ არ კვეთს არცერთ წინა აგებულ წრეწირს (ცხადია $P'_\xi \in C_\xi$). ე.ი. $(C_\xi)_{\xi<\alpha}$ ისეთი, რომელიც დაფარავს R^3 -ს. რ.დ.გ.

ვექტორული სივრცის ბაზისი, ჰამელის ბაზისი

მოკლედ გავიხსენოთ ვექტორული სივრცის ცნება. ვექტორული სივრცე V, რაიმე K ველს ზემოთ აღინიშნება $V(K)$ ეწოდება არაცარიელ V სიმრავლეს, რომელზეც განსაზღვრულია შეკრების „+“ და ველის ელემენტზე გამრავლების „·“ ოპერაციები, რომელთათვისაც სამართლიანია შემდეგი აქსიომები.

(x, y, z აღნიშნავენ V-ს ნებისმიერ ელემენტებს α, β კი K ველის ნებისმიერ ელემენტზე).

1. $x+y=y+x$,
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$,
3. $\exists\Theta\in V\forall x\in V(x+\Theta=x)$,
4. $\forall x\in V\exists(-x)\in V(x+(-x)=\Theta)$,
5. $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$.
6. $1\cdot x=x$ 1 ველის ერთეულია,
7. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$,
8. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

* $x_1,\cdots,x_n$ ვექტორთა **წრფივი კომბინატა** $V(K)$-ში ეწოდება. $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\cdots,\alpha_nx_n$ სასრულ ჯამს ($x_i\in V$, $\alpha_k\in K$, $i\in\{1,2,\cdots,n\}$).

* ვექტორთა $y_1+y_2,\cdots,y_n$ სისტემას ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული,** თუკი არსებობს Θ-ს ტოლი მათი რაიმე არატრი-ვიალური წრფივი კომბინაცია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვექტორთა $y_1+y_2,\cdots,y_n$ სისტემას **წრფივად დამოუკიდებელი** ეწოდება.

* V სივრცის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი (დამოკიდებული) თუ ამ სიმრავლის ნების-მიერი სასრული ქვესიმრავლე წრფივად დამოუკიდებელია (შესაბამისად ეწოდება წრფივად დამოკიდებული თუ ამ სიმრავლეში არსებობს წრფივად დამოკიდებული სასრული ქვესიმრავლე).

* $V(K)$ სივრცის ელემენტთა ისეთ სიმრავლეს, რომელიც წრფივად დამოუკიდებელია და ნებისმიერი ვექტორი, $V(K)$ სივრციდან, წარმოიდგინება ამ სიმრავლის ელემენტთა წრფივი კომბინაციით, ვექტორული სივრცის ბაზისი ეწოდება.

* **ჰამელის ბაზისი.** განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, როგორც ვექტორული სივრცე Q რაციონალურ რიცხვთა ველს ზემოთ ($R(Q)$ ვექტორული სივრცისათვის სამართლიანია 1.-8. აქსიომები). და განვიხილოთ ამ სივრცის ბაზისი. ე.ი. ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $(u_i)_{i\in I}$ ოჯახი, რომ ყოველი $x\in R$ ნამდვილი რიცხვი ერთადერთი გზით წარმოიდგინება $x=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{r}_ku_{i_k}$ სახით, სადაც r_k $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ რაციონალური რიცხვებია. ასეთ ბაზისს ჰამელის ბაზისი ჰქვია.

ჰამელის ბაზისს მრავალი გამოყენება აქვს მათემატიკაში, სხვადასხვა უცნაური თვისების ობიექტების ასაგებად.

მაგალითად ჰამელის ბაზისის გამოყენებით მტკიცდება, რომ არსებობს ფუნქცია $f : R \to R$ ისეთი, რომელიც არ წარმოადგენს $y = \kappa x$ სახის ფუნქციას და აკმაყოფილებს ე.წ. კოშის ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

ასეთი ფუნქციის არსებობა გამოიყენება სიმრავლის მისაღება-დაც, გამოიყენება ალგებრაშიც იმის დასამტკიცებლად, რომ R^2 და R ადიტიური ჯგუფები იზომორფულია. ასეთი ფუნქციის არსებობა იქნა გამოყენებული ჰილბერტის მესამე (გეომეტრიული) პრობლემის ამოსახსნელად და ა.შ.

კარდინალურ რიცხვთა $[\aleph_0, 2^{\aleph_0}]$ და $(\aleph_0, 2^{\aleph_0})$

შუალედების დახასიათება ფუნქციებისა და

ავტომორფიზმების ტერმინებში

განსაზღვრება 1. $f : E \to E$ ფუნქციას ეწოდება ხისტი, თუკი (E, f) ალგებრულ სტრუქტურას აქვს მხოლოდ იგივური ავტომორფიზმი.

განსაზღვრება 2. $f : E \to E$ ფუნქციის დონის სიმრავლეები ეწოდებათ $f^{-1}(\{x\})$ $(x \in E)$ სიმრავლეებს (ელემენტების წინა სახეთა სიმრავლე დონის სიმრავლეა).

განსაზღვრება 3. $[\aleph_0, 2^{\aleph_0}] = \{\lambda : \lambda$ კარდინალია $\& \aleph_0 \le \lambda \le 2^{\aleph_0}\}$.

განსაზღვრება 4. $(\aleph_0, 2^{\aleph_0}) = \{\lambda : \lambda$ კარდინალია $\& \aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}\}$.

თეორემა 1. ვთქვათ $\lambda > 2$ რაიმე კარდინალია, მაშინ $\aleph_0 \le \lambda \le 2^{\aleph_0}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა **არსებობს** ხისტი ფუნქცია $f : \lambda \to \lambda$, რომლის ერთი დონის სიმრავლე λ სიმძლავრისაა ყველა დანარჩენი კი არაუმეტეს ორლემენტიანია.

თეორემა 2. ვთქვათ λ რაიმე კარდინალია, მაშინ $\aleph_0 \le \lambda \le 2^{\aleph_0}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

ა). **არსებობს** ხისტი ფუნქცია $f : \lambda \to \lambda$, რომლის ერთ დონეს აქვს ზუსტად λ ელემენტი, ხოლო ყველა სხვას არაუმეტეს 2 ელემენტი და

ბ) **არ არსებობს** ფუნქცია $g : \lambda \to \lambda$, რომელსაც აქვს ზუსტად ცალი ავტომორფიზმი.

სარჩევი

15. ნატურალური რიცხვები
16. გრაფის სიმრავლურ თეორიული რეალიზაცია
17. ამორჩევითი აქსიომის ექვივალენტური ფორმულირება
18. კიონიგის თეორემა
19. ტოლძალოვანი, ტოლფასი ეკვივალენტური სიმრავლეები
20. თვლადი სიმრავლეები
21. სიმრავლის სიმძლავრე, ოპერაციები სიმძლავრეებზე
22. უსასრულო კარდინალურ რიცხვთა სკალა
23. n, $\aleph_0$ და $2^{\aleph_0}$ კარდინალების თვისებები
24. სავსებით დალაგებული სიმრავლეები
25. ტრანსფინიტური ინდუქციის პრინციპი
26. ინდუქცია & რეკურსია
27. ტრანსფინიტული რეკურსიის მეთოდი
28. ორდინალების თვისებები
29. ცერმელოს თეორემა
30. კარდინალურ რიცხვთა ტრიხოტომიის თვისება
31. არაზომადი სიმრავლე
32. ულამის მატრიცა
33. არაზომადი კარდინალები
34. მაზურკევიჩის თეორემა
35. R^3 სივრცის დაყოფა ერთეულრადიუსიან წრეწირთა ოჯახად
36. ვექტორული სივრცის ბაზისი, ჰამელის ბაზისი
37. კარდინალურ რიცხვთა $[\aleph_0,2^{\aleph_0}]$ და $(\aleph_0,2^{\aleph_0})$ შუალედების დახასიათება ფუნქციების და ავტომორფიზმების ტერმინებში

ძირითადი ლიტერატურა:

1. ალექსანდრე ხარაზიშვილი, სიმრავლეთა თეორიის საწყისები ნაწილი I, თბილისი, 2008

2. ალექსანდრე ხარაზიშვილი, სიმრავლეთა თეორიის საწყისები ნაწილი II, თბილისი, 2012

3. ალექსანდრე ხარაზიშვილი, მათემატიკური ესკიზები ნაწილი I თბილისი 2007

4. Tomas Jech. Set Theory. Springer. 2003

5. Set theory K.Kuratowski and A.Mostowski, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1967 (არსებობს რუსული თარგმანი: К.Куратовский, А.Мостовский Теория Множеств

Мир, 1970)

6. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. Задачи по теории множеств , математической логике и теории алгоритмов. М. Наука. 1984

დამხმარე ლიტერატურა

7. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию, Москва, 1977.

8. N. Bourbaki, Elements of Mathematics, Theory of Sets, Springer (softcover reprint of the English translation of 1968 of N. Bourbaki's "Theorie des Ensembles"(1970)
(არსებობს რუსული თარგმანი: Н. Бурбаки , Теория

Множеств, Изд. Мир, Москва, 1965).

9. W. Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, Second Edition Revized, Warszawa, 1965.

10. Peter Cameron, Sets, Logic and Categories, Springer-Verlage 1999
11. Kipiani, Archil. One abstract characterization of intervals of cardinal numbers. *Acta Univ. Lodz. Folia Math.* No. 9 (1997), 55—61
12. Kipiani, Archil**.** Uniform sets and isomorphisms of trees, Mathematical Institute, University of Wroclaw, Preprint no. 107, 1989.
13. *Разбиение трехмерного пространства на конгруэнтные окружности / А. Харазишвили // Сообщения Академии Наук Грузинской ССР, т. 119. - 1985. - N1. - стр.57-60. ...*