ხიმური რუხაია, ლალი ტიბუა

მტკიცებათა თეორიის საფუძვლები

(ლექციების მოკლე კურსი უნივერსიტეტის სტუდენტებისათვის)

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2012

თავი I. წინადადებათა ლოგიკის ელემენტები

§ 1.1. წინადადებათა ლოგიკის ენა

წინადადებათა ლოგიკა შეისწავლის შინაარსისაგან აბსტრაგირებულ ისეთ თხრობით წინადადებებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

ა) ყოველი წინადადება ან ჭეშმარიტია ან მცდარი(მესამეს გამორიცხვის კანონი);

ბ) არცერთი წინადადება არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტიც და მცდარიც(წინააღმდეგობის კანონი).

ჭეშმარიტი წინადადებების აღსანიშნავად გამოიყენება ასო ბგერა ჭ''(გამოიყენება აგრეთვე t, 1 და სხვა), ხოლო მცდარი წინადადებების აღსანიშნავად კი ასო ბგერა „მ'' (გამოიყენება აგრეთვე f, 0 და სხვა). ჭ'' და „მ'' სიმბოლოებს ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ეწოდებათ(მარტივ წინადადებებს ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ენიჭებათ, ხოლო რთული წინადადებების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები გარკვეული წესით გამოითვლება).

წინადადებათა ლოგიკის მარტივ წინადადებათა მაგალითებია:

1) სამკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამი 180-ია.

2) ქმედება უდრის უკუქმედებას.

3) ყველა ცოცხალი ორგანიზმი სუნთქავს.

4) წყალბადის ვალენტობა არის 1.

5) დამნაშავე პირი კანონით ისჯება.

6) თითქმის ყველა ეკონომიური პრობლემა წარმატებით იხსნება ლოგიკური მეთოდების გამოყენებით.

შეთანხმებით, მარტივ წინადადებათა აღსანიშნავად იყენებენ $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, \ldots$ და ა.შ. სიმბოლოებს. ამ სიმბოლოებს ატომებს ანუ ატომალურ ფორმულებს უწოდებენ.

წინადადებათა ლოგიკის მარტივი წინადადებებისაგან $\neg$(იკითხება „არა''), $\vee$(იკითხება „ან''), $\wedge$(იკითხება „და''), $\rightarrow$(იკითხება „თუ ... მაშინ ... ''), $\leftrightarrow$(იკითხება „ ... მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ...'') ლოგიკური კავშირების(ოპერატორების) დახმარებით იგება რთული წინადადებები. მათი –ოპერატორების შინაარსი ასე განისაზღვრება:

1. **უარყოფის ოპერატორი.** A წინადადების უარყოფა აღინიშნება ასე $\neg A$და განსაზღვრით არის ახალი წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ როცა A მცდარია (იხ. ცხრილი 1).

მაგალითი. თუ A–თი აღვნიშნავთ წინადადებას „დედამიწა ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო'', მაშინ $\neg A$–თი აღინიშნება შემდეგი წინადადება: „ დედამიწა არ ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო''.

2. **კონიუნქციის ოპერატორი**. A და B წინადადებების კონიუნქცია აღინიშნება ასე $A \wedge B$ და განსაზღვრით არის ახალი წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ორივე ჭეშმარიტია. (იხ. ცხრილი 2).

მაგალითი. თუ A–თი აღვნიშნავთ წინადადებას „ველოსიპედისტი წრფივად მოძრაობს'', ხოლო B–თი „ველოსიპედისტი თანაბრად მოძრაობს'', მაშინ $A \wedge B$–თი აღინიშნება შემდეგი წინადადება: „ველოსიპედისტი წრფივად და თანაბრად მოძრაობს''.

3. **დიზიუნქციის ოპერატორი.** A და B წინადადებების დიზიუნქცია აღინიშნება ასე $A \vee B$ და განსაზღვრით არის ახალი წინადადება, რომელიც მცდარია მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ორივე მცდარია(იხ. ცხრილი 2).

მაგალითი. თუ A–თი აღვნიშნავთ წინადადებას „ ნეირონი იმყოფება აგზნებულ მდგომარეობაში,'' ხოლო B–თი „ნეირონი იმყოფება უძრავ მდგომარეობაში,'' მაშინ $A \vee B$–თი აღინიშნება შემდეგი წინადადება: „ ნეირონი იმყოფება აგზნებულ მდგომარეობაში ან უძრავ მდგომარეობაში.''

4. **გამომდინარეობის ოპერატორი.** A და B წინადადებების ლოგიკური გამომდინარეობა აღინიშნება ასე $A \rightarrow B$ და განსაზღვრით არის ახალი წინადადება, რომელიც მცდარია მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტია და B მცდარია(იხ. ცხრილი 2).

მაგალითი. თუ A–თი აღვნიშნავთ წინადადებას „ n ლუწი რიცხვია'', ხოლო B–თი „ n იყოფა 2-ზე'', მაშინ $A \rightarrow B$–თი აღინიშნება შემდეგი წინადადება: თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ n იყოფა 2-ზე.''

5. **ექვივალენტობის ოპერატორი**. A და B წინადადებების ექვივალენტობა აღინიშნება ასე $A \leftrightarrow B$ და განსაზღვრით არის ახალი წინადადება, რომელიც ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ორივე ჭეშამრიტია, ან ორივე მცდარია(იხ. ცხრილი 2).

მაგალითი. თუ A–თი აღვნიშნავთ წინადადებას „ ქვეყნის ეკონომიკა ძლიერია”, ხოლო B–თი „ქვეყნის ხელმძღვანელობა ატარებს სწორ ეკონომიკურ პოლიტიკას”, მაშინ $A \leftrightarrow B$–თი აღინიშნება შემდეგი წინადადება: „ ქვეყნის ეკონომიკა ძლიერია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ქვეყნის ხელმძღვანელობა ატარებს სწორ ეკონომიკურ პოლიტიკას”.

A	$\neg A$
ჭ	მ
მ	ჭ

ცხრილი 1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ	ჭ	ჭ	მ
მ	მ	მ	მ	ჭ	ჭ

ცხრილი 2

ლოგიკური კავშირებით მიღებული ახალი წინადადებების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები დამოკიდებულია იმ წინადადებების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებზე, რომლებზედაც ლოგიკური კავშირები მოქმედებენ.

გამოსახულებებს, რომლებიც აღნიშნავენ მარტივ („ჟანგბდის მოლეკულა შედგება ჟანგბადის ორი ატომისაგან”) ან შედგენილ („წყალი რეაგირებს არამეტალების ოქსიდებთან და მიიღება მჟავა”) წინადადებებს უწოდებენ წინადადებათა ლოგიკის ფორმულებს და განისაზღვრება შემდეგი რეკურსიული წესით:

1. ატომი ფორმულაა.
2. თუ A ფორმულაა, $\neg A$-ც ფორმულაა.
3. თუ A და B ფორმულებია, მაშინ $[A \vee B]$, $[A \wedge B]$, $[A \to B]$, $[A \leftrightarrow B]$ ფორმულებია.
4. 1-3 პუნქტით განსაზღვრული ფორმულების გარდა სხვა ფორმულები არ არსებობს.

მაგალითად, P არის პირველი პუნქტით განსაზღვრული ფორმულა, ხოლო $\neg P$ არის კი მეორე პუნქტით განსაზღვრული ფორმულა, ხოლო $[\neg P \vee Q]$, $[\neg Q \wedge \neg P]$, $[P \vee Q]$ კი მესამე პუნქტით განსაზღვრული ფორმულებია.

ფორმულის ნაწილის ცნება შემოვიტანოთ შემდეგი რეკურსიული განსაზღვრით:

1. თუ A არის ატომი, მაშინ A არის A ფორმულის ერთადერთი ნაწილი.

2. თუ A და B ფორმულებია, σ კი ორადგილიანი ლოგიკური ოპერატორია, მაშინ $[A\sigma B]$ ფორმულის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნაწილებია: A ფორმულის ნაწილები, B ფორმულის ნაწილები და თვით $[A\sigma B]$ ფორმულა.

3. თუ A ფორმულაა, მაშინ $\neg A$ ფორმულის ნაწილებია A ფორმულის ნაწილები და თვით $\neg A$.

4. მოცემულ ფორმულას არა აქვს სხვა ნაწილები, გარდა იმ ნაწილებისა, რომლებიც განისაზღვრება 1-3 პუნქტით.

მაგალითად, $[[\neg Q \to P] \wedge \neg P]$ ფორმულის ნაწილებია: $[[\neg Q \to P] \wedge \neg P], [\neg Q \to P], \neg P, \neg Q, P$ და Q. ე.ი. ფორმულის ნაწილები ფორმულები არიან.

შევნიშნოთ, რომ ფორმულაში ყოველ მარცხენა ფრჩხილს შეესაბამება მარჯვენა ფრჩხილი და ფორმულაში მათ მიერ შექმნილი ფრჩხილთა წყვილი განსაზღვრავს მოქმედების რიგს.

ძირითადი ამოცანა: ბუნებრივი ენის წინადადებები ჩავწეროთ წინადადებათა ლოგიკის ფორმულებით და პირიქით.

მაგალითად:

1) თუ პირი არის სრულწლოვანი და თანახმა არის რომ იქორწინოს, მაშინ მისი ნების გამოვლენა ქორწინებაზე ნამდვილია(სამოქალაქო კოდექსი; მუხლი 1107).

ა) P - პირი არის სრულწლოვანი;

ბ) Q - პირი თანახმა არის რომ იქორწინოს;

გ) R- პირის ნების გამოვლენა ქორწინებაზე ნამდვილია;

$[[P \wedge Q] \to R]$,

2) ნივთი განძად ითვლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ არის ცნობილი მისი მესაკუთრე და დიდხანს იყო მიწაში ჩაფლული(სამოქალაქო კოდექსი, მუხლი 192).

ა) P - ნივთი განძად ითვლება;

ბ) Q - ცნობილი ნივთის მესაკუთრე;

გ) R- დიდხანს იყო ნივთი მიწაში ჩაფლული.

$[P \leftrightarrow [\neg Q \wedge R]]$.

3) არასრულწლოვანის ნების გამოვლენა ნამდვილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი გარიგებით იღებს სარგებელს ან ნების გამოვლენა მოიწონა მისმა კანონიერმა წარმომადგენელმა(სამოქალაქო კოდექსი, მუხლი 65. I).

ა) P - არასრულწლოვანის ნების გამოვლენა ნამდვილია;

ბ) Q - არასრულწლოვანი გარიგებით იღებს სარგებელს;

გ) R- ნების გამოვლენა მოიწონა არასრულწლოვანის კანონიერმა წარმომადგენელმა;

$$[P \leftrightarrow [Q \vee R]].$$

§ 1.2. წინადადებათა ლოგიკის ფორმულების ინტერპრეტაცია

ნებისმიერი ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ მასში შემავალი ატომების ჭეშმარიტული მნიშვნელობისა და ლოგიკური ოპერატორების შინაარსის გათვალისწინებით.

ვთქვათ, ***A*** მოცემული ფორმულაა, ხოლო $P_1,\ldots,P_n$ კი *A*-ში შემავალი განსხვავებული ატომების სრული გადათვლა, მაშინ ***A*** ფორმულის ინტერპრეტაცია არის $P_1,\ldots,P_n$ ატომებისათვის ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ისეთი მინიჭება, რომლის დროსაც თითოეულ P_i–ს ($i=1,\ldots,n$) მიეწერება ან „ჭ'', ან „მ''(მაგრამ ორივე ერთდროულად არა).

თუ მოცემულ ფორმულაში არის n სხვადასხვა ატომი, მაშინ ამ ფორმულას ექნება 2^n სხვადასხვა ინტერპრეტაცია.

მაგალითი. განვიხილოთ ფორმულა

$$\neg[[P \to Q] \vee [\neg R \leftrightarrow P]]$$

ამ ფორმულის განსხვავებული ატომებია: $P, Q, R,$ ამიტომ გვექნება $2^3 = 8$ ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ ამ ფორმულის შემდეგი ინტერპრეტაცია.

ვთქვათ, $P, Q, R,$ ატომების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები შესაბამისად არის ჭ, მ, ჭ. $[P \to Q]$-ს ჭეშმარიტული მნიშვნელობა მცდარია, რადგან P ჭეშმარიტია და Q მცდარი. $[\neg R]$-ის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არის მცდარი, რადგან R ჭეშმარიტია. $[\neg R \leftrightarrow P]$-ის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არის მცდარი, რადგან $[\neg R]$ მცდარია, ხოლო P ჭეშმარიტი. $[P \to Q] \vee [\neg R \leftrightarrow P]$-ის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა

არის მცდარი, რადგან $[P \to Q]$ და $[\neg R \leftrightarrow P]$ არის მცდარი, ხოლო $\neg[[P \to Q] \vee [\neg R \leftrightarrow P]]$ ფორმულა ჭეშმარიტია.

ამრიგად, განსახილველი ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა მოცემულ ინტერპრეტაციაში არის „ჭ". ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა სხვა შესაძლო ინტერპრეტაციაში.

მაგალითი.
ვიპოვოთ $[[\neg P \vee Q] \to [\neg Q \leftrightarrow P]] \wedge Q$ ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ყველა შესაძლო ინტერპრეტაციაში.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \leftrightarrow P$	$[\neg P \vee Q] \to [\neg Q \leftrightarrow P]$	$[[\neg P \vee Q] \to [\neg Q \leftrightarrow P]] \wedge Q$
ჭ	ჭ	მ	მ	ჭ	მ	მ	მ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	ჭ	ჭ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	მ	მ	მ

ცხრილი 1

A ფორმულას ეწოდება იგივურად ჭეშმარიტი (ტავტოლოგია), თუ ყველა შესაძლო ინტერპრეტციაში ***A*** ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არის ჭეშმარიტი.
მაგალითად, $P \vee \neg P$ ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტია (იხ. ცხრილი 2).

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
ჭ	მ	ჭ
მ	ჭ	ჭ

ცხრილი 2

A ფორმულას ეწოდება იგივურად მცდარი (წინააღმდეგობრივი), თუ ყველა შესაძლო ინტერპრეტაციაში ***A*** ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არის მცდარი.

მაგალითად, $P \wedge \neg P$ ფორმულა იგივურად მცდარია (იხ. ცხრილი 3).

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ

ცხრილი 3

A ფორმულას ეწოდება შესრულებადი, თუ ერთ ინტერპრეტაციაში მაინც ***A*** ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არის ჭეშმარიტი (იხ. ცხრილი 1 და 2).

თეორემა 1.2.1. იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულის უარყოფა არის იგივურად მცდარი.

თეორემა 1.2.2. იგივურად მცდარი ფორმულის უარყოფა არის იგივურად ჭეშმარიტი.

თეორემა 1.2.3. ტავტოლოგიისაგან განსხვავებული შესრულებადი ფორმულის უარყოფა შესრულებადი ფორმულაა.

ზემოთ განხილული ცხრილიდან (1, 2, 3) შეიძლება უშუალოდ დავინახოთ ამ თეორემების სამართლიანობა.

§ 1.3. წინდადებათა ლოგიკის ძირითადი ტოლძალოვნებანი

ვამბობთ, რომ ***A*** და ***B*** ფორმულა ტოლძალოვანია, თუ ყველა შესაძლო ინტერპრეტაციაში ***A*** ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა და ***B*** ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ერთმანეთს ემთხვევა და წერენ $A \equiv B$.

წინადადებათა ლოგიკაში გვაქვს შემდეგი ძირითადი ტოლძალოვნებანი:

1) $A \vee B \equiv B \vee A$

2) $A \wedge B \equiv B \wedge A$

3) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$

4) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$

5) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

7) $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

8) $A \to B \equiv \neg A \vee B$

9) $A \vee \text{მ} \equiv A$

10) $A \wedge \text{მ} \equiv \text{მ}$

11) $A \vee \text{ჭ} \equiv \text{ჭ}$

12) $A \wedge \text{ჭ} \equiv \ A$

13) $P \vee \neg P \equiv \text{ჭ}$

14) $P \wedge \neg P \equiv \text{მ}$

15) $\neg(\neg A) \equiv \ A$ (ორმაგი უარყოფის კანონი)

16) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (დე-მორგანის კანონი)

17) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (დე-მორგანის კანონი)

18) $A \wedge A \equiv \ A$

19) $A \vee A \equiv \ A$

ამ ტოლძალოვნებების დამტკიცება სიძნელეს არ წარმოადგენს. მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ $\neg[A \vee B] \equiv [\neg A \wedge \neg B]$.

A	B	$A \vee B$	$\neg[A \vee B]$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
ჭ	ჭ	ჭ	**მ**	მ	მ	**მ**
ჭ	მ	ჭ	**მ**	მ	ჭ	**მ**
მ	ჭ	ჭ	**მ**	ჭ	მ	**მ**
მ	მ	მ	**ჭ**	ჭ	ჭ	**ჭ**

გამუქებული სვეტებიდან ჩანს, რომ $\neg[A \vee B]$ და $[\neg A \wedge \neg B]$ ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ყველა შესაძლო ინტერპრეტაციაში ერთმანეთს ემთხვევა. ე.ი. ისინი ტოლძალოვანნი არიან.

თეორემა 1.3.1. თუ $\boldsymbol{A}$ ფორმულის რაიმე ნაწილს შევცვლით მისი ტოლძალოვანი ფორმულით, მივიღებთ $\boldsymbol{A}$ ფორმულის ტოლძალოვან ფორმულას.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\boldsymbol{B}$ ფორმულა მიიღება $\boldsymbol{A}$ ფორმულიდან მასში A_1 ნაწილის ნაცვლად მისი ტოლძალოვანი B_1 ნაწილით შეცვლით. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში $\boldsymbol{A}$ და $\boldsymbol{B}$ ფორმულის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა.

განვიხილოთ ნებისმიერი ინტერპრეტაცია. მოცემულობის თანახმად ამ ინტერპრეტაციაში A_1 და B_1-ის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა.

თუ ***A*** ფორმულაში A_1 ნაწილის ნაცვლად ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას, ხოლო ***B*** ფორმულაში B_1-ის ნაცვლად იმავე მნიშვნელობას, მაშინ მიღებული გამოსახულებები გრაფიკულად ტოლი იქნებიან, ე.ი. მათი მნიშვნელობები ნებისმიერად აღებულ ინტერპრეტაციაში ერთმანეთს დაემთხვევა, ე.ი. $A \equiv B$.

ტოლძალოვანი გარდაქმნებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ ფორმულათა რომელ კლასს ეკუთვნის მოცემული ფორმულა. მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ:

მაგალითი. $P \to [Q \to P]$ ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი.

$$P \to [Q \to P] \overset{8}{\equiv} P \to [\neg Q \vee P] \overset{8}{\equiv} \neg P \vee [\neg Q \vee P] \overset{1}{\equiv} [\neg Q \vee P] \vee \neg P \overset{3}{\equiv} \neg Q \vee [P \vee \neg P] \overset{13}{\equiv}$$

$$\overset{13}{\equiv} \neg Q \vee \text{ჭ} \overset{11}{\equiv} \text{ჭ}$$

რადგან $P \to [Q \to P] \equiv \text{ჭ}$, ამიტომ მოცემული ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი.

მაგალითი. $P \leftrightarrow \neg P$ ფორმულა არის იგივურად მცდარი.

$$P \leftrightarrow \neg P \overset{7}{\equiv} [P \to \neg P] \wedge [\neg P \to P] \overset{8}{\equiv} [\neg P \vee P] \wedge [\neg\neg P \vee P] \overset{15}{\equiv} [\neg P \vee \neg P] \wedge [P \vee P] \overset{19}{\equiv}$$

$$\overset{19}{\equiv} \neg P \wedge P \overset{2}{\equiv} P \wedge \neg P \overset{14}{\equiv} \text{მ}$$

რადგან $P \leftrightarrow \neg P$ ტოლძალოვანია „მ"-ის, ამიტომ იგი არის იგივურად მცდარი ფორმულა.

მაგალითი. $[P \to Q] \to P$ ფორმულა არის შესრულებადი.

$$[P \to Q] \to P \overset{8}{\equiv} \neg[P \to Q] \vee P \overset{8}{\equiv} \neg[\neg P \vee Q] \vee P \overset{16}{\equiv} [\neg\neg P \wedge \neg Q] \vee P \overset{15}{\equiv} [P \wedge \neg Q] \vee P \overset{1}{\equiv}$$

$$\overset{1}{\equiv} \mathbf{P} \vee \mathbf{[P \wedge \neg Q]} \overset{5}{\equiv} [P \vee P] \wedge [P \vee \neg Q] \overset{19}{\equiv} P \wedge [P \vee \neg Q] \overset{6}{\equiv} [P \wedge P] \vee [P \wedge \neg Q] \overset{18}{\equiv}$$

$$\overset{18}{\equiv} \mathrm{P} \vee \mathbf{[P \wedge \neg Q]} \ldots$$

ადვილი დასანახია, რომ ტოლძალოვანი გარდაქმნებით $[P \to Q] \to P$ ფორმულა არ მიიყვანება არც „ჭ"-ზე და არც „მ"-ზე (გარდაქმნების ნებისმიერი გაგრძელების შემთხვევაში ფორმულები განმეორდება „ჩაიციკლება"). მაშასადამე, მოცემული ფორმულა შესრულებადია.

§ 1.4. დიზიუნქციური და კონიუნქციური ნორმალური ფორმები

ხშირად აუცილებელია ფორმულების გარდაქმნა ერთი ფორმიდან მეორეში ე.წ. „ ნორმალურ ფორმებში''. გარდაქმნები ხდება მოცემული ფორმულის ნაწილის რაიმე ექვივალენტური ნაწილით შეცვლის გზით. ეს პროცესი ხდება მანამ, სანამ არ მივიღებთ სასურველ ფორმას.

ატომს ან ატომის უარყოფას ეწოდება ლიტერა.

ლიტერათა დიზიუნქციას ელემენტარული დიზიუნქცია ეწოდება.

მაგალითები: $P;\ \neg Q;\ P\vee\neg Q; P\vee\neg R\vee Q;$

ლიტერათა კონიუნქციას ელემენტარული კონიუნქცია ეწოდება.

მაგალითები: $P;\ \neg Q;\ P\wedge\neg Q; P\wedge\neg R\wedge Q;$

ვამბობთ, რომ ***A*** ფორმულა იმყოფება კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში, თუ ***A***-ს აქვს სახე $A\equiv A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n,\quad n\geq 1,$ სადაც ყოველი $A_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ არის ელემენტარული დიზიუნქცია.

მაგალითები:
$P;\ \neg Q;\neg P\wedge Q;\ [\neg P\vee\neg Q];[P\vee\neg R\vee Q]\wedge[\neg P\vee\neg Q];$

ვამბობთ, რომ ***A*** ფორმულა იმყოფება დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში, თუ ***A***-ს აქვს სახე $A\equiv A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n,\quad n\geq 1,$ სადაც ყოველი $A_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ არის ელემენტარულიკონიუნქცია.

მაგალითები:
$P;\ \neg Q;[\neg P\wedge Q];\ \neg P\vee\neg Q;[P\wedge\neg R\wedge Q]\vee[\neg P\wedge\neg Q];$

თეორემა 1.4.1. წინადადებათა ლოგიკის ნებისმიერი ფორმულისათვის არსებობს მისი ტოლძალოვანი კონიუნქციური ნორმალური ფორმა.

თეორემა 1.4.2. წინადადებათა ლოგიკის ნებისმიერი ფორმულისათვის არსებობს მისი ტოლძალოვანი დიზიუნქიური ნორმალური ფორმა.

თეორემა 1.4.1.-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს ნებისმიერი ფორმულის კონიუნქციური ნორმალურ ფორმამდე მიყვანის შემდეგი ალგორითმიდან:

ბიჯი 1. გამოვიყენებთ (7) და (8) ტოლძალოვნებებს, რათა ფორმულიდან გამოირიცხოს $\leftrightarrow$ და $\rightarrow$ ოპერატორები.

ბიჯი 2. გამოვიყენოთ დე- მორგანის კანონები, რათა უარყოფის ოპერატორი გადავიტანოთ ატომების წინ.

ბიჯი 3. გამოვიყენოთ ორმაგი უარყოფის კანონი მანამ, სანამ ფორმულაში ყოველი ატომის წინ იქნება არა უმეტეს ერთი უარყოფის ნიშანი.

ბიჯი 4. გამოვიყენოთ (5) ტოლძალოვნება მანამ, სანამ არ მივიღებთ მოცემული ფორმულის ტოლძალოვან კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმას.

დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის მისაღებად გამოვიყენებთ იმავე ალგორითმს, იმ განსხვავებით, რომ მეოთხე ბიჯში (5) ტოლძალოვნების ნაცვლად გამოვიყენებთ (6) ტოლძალოვნებას მანამ, სანამ არ მივიღებთ მოცემული ფორმულის ტოლძალოვან დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმას.

მაგალითი. $[P \wedge \neg Q] \to [R \to [P \wedge \neg Q]]$ ფორმულა მივიყვანოთ კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმაზე.

$$[P \wedge \neg Q] \to [R \to [P \wedge \neg Q]] \overset{8}{\equiv} \neg[P \wedge \neg Q] \vee [\neg R \vee [P \wedge \neg Q]] \overset{17}{\equiv} [\neg P \vee \neg\neg Q] \vee$$

$$\vee [\neg R \vee [P \wedge \neg Q]] \overset{15}{\equiv} [\neg P \vee Q] \vee [\neg R \vee [P \wedge \neg Q]] \overset{4}{\equiv} [\neg P \vee Q \vee \neg R] \vee [P \wedge \neg Q] \overset{5}{\equiv}$$

$$\overset{5}{\equiv} [[\neg P \vee Q \vee \neg R] \vee P] \wedge [[\neg P \vee Q \vee \neg R] \vee \neg Q] \overset{3}{\equiv} [\neg P \vee Q \vee \neg R \vee P] \wedge$$

$$\wedge [\neg P \vee Q \vee \neg R \vee \neg Q] \quad \text{კ.ნ.ფ.}$$

მაგალითი. $[\neg P \wedge \neg Q] \leftrightarrow [P \vee \neg Q]$ ფორმულა მივიყვანოთ დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმაზე.

$$[\neg P \wedge Q] \leftrightarrow [P \vee \neg Q] \overset{7}{\equiv} [[\neg P \wedge Q] \to [P \vee \neg Q]] \wedge [[P \vee \neg Q] \to [\neg P \wedge Q]] \overset{8}{\equiv}$$

$$\overset{8}{\equiv} [\neg[\neg P \wedge Q] \vee [P \vee \neg Q]] \wedge [\neg[P \vee \neg Q] \vee [\neg P \wedge Q]] \overset{16,17}{\equiv} [[\neg\neg P \vee \neg Q] \vee [P \vee \neg Q]] \wedge$$

$$\wedge [[\neg P \wedge \neg\neg Q] \vee [\neg P \wedge Q]] \overset{15}{\equiv} [[P \vee \neg Q] \vee [P \vee \neg Q]] \wedge [[\neg P \wedge Q] \vee [\neg P \wedge Q]] \overset{15}{\equiv}$$

$$\overset{15}{\equiv} [P \vee \neg Q] \wedge [\neg P \wedge Q] \overset{3}{\equiv} [\neg P \wedge Q] \wedge [P \vee \neg Q] \overset{6}{\equiv} [[\neg P \wedge Q] \wedge P] \vee [[\neg P \wedge Q] \wedge \neg Q] \overset{4}{\equiv}$$

$$\overset{4}{\equiv} [\neg P \wedge Q \wedge P] \vee [\neg P \wedge Q \wedge \neg Q] \quad \text{დ.ნ.ფ.}$$

§ 1.5 ამოხსნადობის პრობლემა

ნებისმიერ მათემატიკურ თეორიაში დაისმის ამოცანა: მოიძებნოს ისეთი ალგორითმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს თითოეული მოცემული ფორმულისათვის, სასრული რიცხვი „მექანიკური" ხასიათის ელემენტარული ოპერაციების(ბიჯების) შესრულებით, გამოვარკვიოთ არის თუ არა ეს ფორმულა თეორემა. ამასთანავე, სასურველია შეიძლებოდეს ამ ალგორითმის ბიჯების რიცხვის შეფასება. აღნიშნულ ამოცანას ამოხსნადობის პრობლემას უწოდებენ.

წინადადებათა ლოგიკის შემთხვევაში ამოხსნადობის პრობლემა ტოლფასია ამოცანისა: მოიძებნოს ისეთი ალგორითმი, რომელიც შესაძლებლობას მოგვცემს თითოეული ფორმულისათვის გამოვარკვიოთ არის თუ არა ეს ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტი.

იმისათვის, რომ ამ კითხვას ვუპასუხოთ, საკმარისია შევადგინოთ ამ ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი და ბოლო სვეტში თუ მხოლოდ „ჭ" ასო გვხვდება, ეს ფორმულა იქნება იგივურად ჭეშმარიტი. ეს მეთოდი ამოხსნადობის პრობლემას წყვეტს პრინციპულად, რადგან იმ ფორმულისათვის, რომლებშიაც ატომების რიცხვი ბევრია, ფორმულის იგივურად ჭეშმარიტობის ასეთი შემოწმება პრაქტიკულად განუხორციელებელი ხდება.

არსებობს უფრო კარგი მეთოდი, რომელიც გულისხმობს ფორმულის წინასწარ ე.წ. ნორმალურ სახეზე დაყვანას. გავეცნოთ ამ მეთოდს.

ელემენტარულ დიზიუნქციაში შემავალ ატომსა და მის უარყოფას კონტრალური წყვილი ეწოდება.

თეორემა 1.5.1. ელემენტარული დიზიუნქცია რომ იყოს იგივურად ჭეშმარიტი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მასში იყოს ატომების ერთი მაინც კონტრალური წყვილი.

დამტკიცება. ვთქვათ, ელემენტარული დიზიუნქცია შეიცავს ატომსა და მის უარყოფას. ვაჩვენოთ, რომ იგი არის იგივურად ჭეშმარიტი. (1) ტოლძალოვნებების რამდენჯერმე გამოყენებით, ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ელემენტარულ დიზიუნქციას აქვს სახე: $P \vee \neg P \vee P_1 \vee \ldots \vee P_n$

$P \vee \neg P$ იგივურად ჭეშმარიტია და ამიტომ მთლიანად ელემენტარული დიზიუნქცია იგივურად ჭეშმარიტი იქნება.

ვთქვათ, ელემენტარული დიზიუნქცია იგივურად ჭეშმარიტია და ვაჩვენოთ, რომ იგი შეიცავს ერთ მაინც კონტრალურ წყვილს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, ელემენტარული დიზიუნქცია იგივურად ჭეშმარიტია, მაგრამ მასში არ არის კონტრალური წყვილი. თუ ყველა ატომს, რომელიც უარყოფის ოპერატორის შემდეგ დგას, მივანიჭებთ მნიშვნელოვას ჭეშმარიტს, ხოლო დანარჩენს კი მცდარს, მაშინ ასეთ ინტერპრეტაციაში ელემენტარული დიზიუნქცია მიიღებს მნიშვნელობა -

მცდარს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ელემენტარული დიზიუნქცია არ იქნება იგივურად ჭეშმარიტი. ეს კი ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას. ე.ი. ელემენტარული დიზიუნქცია შეიცავს კონტრალურ წყვილებს.
ანალოგიურად დამტკიცდება:

თეორემა 1.5.2. ელემენტარული კონიუქცია რომ იყოს იგივურად მცდარი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მასში იყოს ატომების ერთი მაინც კონტრალური წყვილი.

ამ თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.5.3. იმისათვის რომ ფორმულა იყოს იგივურად ჭეშმარიტი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი ტოლძალოვანი კონიუნქციური ნორმალური ფორმის თითოეული ელემენტარული დიზიუნქცია შეიცავდეს ატომების ერთ მაინც კონტრალურ წყვილს.

დამტკიცება. ვთქვათ, ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი და ვაჩვენოთ, რომ მისი კონიუნქციური ნორმალური ფორმის თითოეული ელემენტარული დიზიუნქცია შეიცავს ატომების ერთ კონტრალურ წყვილს მაინც. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს ერთი მაინც ელემენტარული დიზიუნქცია, რომელიც არ შეიცავს ატომების კონტრალურ წუვილს. განვიხილოთ ისეთი ინტერპრეტაცია, რომლის დროსაც უარყოფის ოპერატორის შემდგომ მდგომ ატომებს ვანიჭებთ მნიშვნელობას - ჭეშმარიტს, ხოლო ყველა დანარჩენს კი -მცდარს. ასეთ ინტერპრეტაციაში განხილული ელემენტარული დიზიუნქცია და მაშასადამე, მთელი ფორმულა მიიღებს მნიშვნელობას „მცდარს", რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

ვთქვათ, კონიუნქციური ნორმალური ფორმის თითოეული ელემენტარული დიზიუნქცია შეიცავს ატომების ერთ კონტრალურ წყვილს მაინც და ვაჩვენოთ, რომ ეს ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი. 1.5.1. თეორემიდან გამომდინარე, თითოეული ელემენტარული დიზიუნქცია იქნება იგივურად ჭეშმარიტი და მაშასადამე, თავიდან მოცემული ფორმულაც.

ანალოგიურად დამტკიცდება:

თეორემა 1.5.4. იმისათვის, რომ ფორმულა იყოს იგივურად მცდარი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი ტოლძალოვანი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის თითოეული ელემენტარული კონიუნქცია შეიცავდეს ატომების ერთ მაინც კონტრალურ წყვილს.

მაგალითად, ფორმულა $[P \wedge \neg Q] \rightarrow [R \rightarrow [P \wedge \neg Q]]$ არის იგივურად ჭეშმარიტი, რადგან მისი ტოლძალოვანი კონიუნქციური ნორმალური ფორმის ორივე ელემენტარული დიზიუნქცია შეიცავს როგორც ატომს ასევე იმავე ატომის უარყოფას; ხოლო ფორმულა $[\neg P \wedge \neg Q] \leftrightarrow [P \vee \neg Q]$ არის იგივურად მცდარი, რადგან მისი ტოლძალოვანი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის ორივე ელემენტარული კონიუნქცია შეიცავს როგორც ატომს ასევე იმავე ატომის უარყოფას.

§ 1.6. ლოგიკური შედეგი

მათემატიკაში, ისევე როგორც ნებისმიერ დარგში, ხშირად გვჭირდება იმის გაგება, არის თუ არა მოცემული წინადადება (ფორმულა) სხვა წინადადებების(ფორმულების) ლოგიკური შედეგი.

B ფორმულას ეწოდება $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი, თუ ყველა იმ ინტერპრეტაციაში, რომელშიც $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ ფორმულა ჭეშმარიტია, B-ც ჭეშმარიტია.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.6.1. B ფორმულა არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B$ ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი.

დამტკიცება. ვთქვათ, B არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი და ვაჩვენოთ, რომ $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B$ ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, მოცემული ფორმულა არ არის იგივურად ჭეშმარიტი, მაშინ იარსებებს ისეთი ინტერპრეტაცია, რომელშიც $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ ფორმულა ჭეშმარიტია, ხოლო B კი მცდარი. ეს კი ნიშნავს, რომ B არ არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი.

დავუშვათ, რომ $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B$ არის იგივურად ჭეშმარიტი და ვაჩვენოთ, რომ B არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი.

დაშვებიდან და $\to$ ოპერატორის განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ყველა ინტერპრეტაციაში, სადაც $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ ფორმულა ჭეშმარიტია, B-ც უნდა იყოს ჭეშმარიტი. ე.ი. B არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი. რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თეორემა 1.6.2. B ფორმულა არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \wedge \neg B$ ფორმულა არის იგივურად მცდარი.

დამტკიცება. 1.6.1. თეორემის თანახმად B არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B$ ფორმულა არის იგივურად ჭეშმარიტი. მაშასადამე, (1.2.1.) თეორემის თანახმად, B არის $A_1,\dots,A_n$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B$ ფორმულის უარყოფა იგივურად მცდარია. ძირითადი ტოლძალოვნებების თანახმად

$$
\begin{aligned}
\neg((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B) &\equiv \neg(\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee B) \\
&\equiv \neg\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg B \\
&\equiv (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg B
\end{aligned}
$$

მაგალითი. ვაჩვენოთ, რომ R არის P, Q და $[P \wedge Q] \to R$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი. მართლაც, თეორემა 1.6.1-ის თანახმად შევადგინოთ ფორმულა $[P \wedge Q \wedge [[P \wedge Q] \to R]] \to R$ და ტოლძალოვანი გარდაქმნებით ვაჩვენოთ, რომ იგი არის იგივურად ჭეშმარიტი.

$$[P \wedge Q \wedge [[P \wedge Q] \to R]] \to R \overset{8}{\equiv} \neg[P \wedge Q \wedge [\neg[P \wedge Q] \vee R]] \vee R \overset{17,15}{\equiv}$$

$$\overset{17,15}{\equiv} [\neg P \vee \neg Q \vee [[P \wedge Q] \wedge \neg R] \vee R \overset{4}{\equiv} [\neg P \vee \neg Q \vee [P \wedge Q \wedge \neg R]] \vee R \overset{5}{\equiv}$$

$$\overset{5}{\equiv} [[\neg P \vee \neg Q \vee P] \wedge [\neg P \vee \neg Q \vee Q] \wedge [\neg P \vee \neg Q \vee \neg R]] \vee R \overset{13,11}{\equiv}$$

$$\overset{13,11}{\equiv} [\text{ჭ} \wedge \text{ჭ} \wedge [\neg P \vee \neg Q \vee \neg R]] \vee R \overset{12}{\equiv} [\neg P \vee \neg Q \vee \neg R] \vee R \overset{3}{\equiv}$$

$$\overset{3}{\equiv} \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee R \overset{13}{\equiv} \neg P \vee \neg Q \vee \text{ჭ} \overset{11}{\equiv} \text{ჭ}$$

თავი II. პირველი რიგის ლოგიკა

§ 2.1. პირველი რიგის ლოგიკის ენა

წინადადებათა ლოგიკის შესაძლებლობები „კარგი" ფორმალიზაცია გაუკეთოს მსჯელობებს საკმაოდ შეზღუდულია. მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი მსჯელობა:

ყველა ადამიანი მოკვდავია ;

სოკრატე ადამიანია ;

შესაბამისად, სოკრატე მოკვდავია.

ცხადია, რომ ინტუიციურად ეს მსჯელობა სწორია, მაგრამ ამის დადგენა წინადადებათა ლოგიკის ფარგლებში პრაქტიკულად შეუძლებელია. მართლაც, თუ შევეცდებით ამ მსჯელობის ფორმალიზაციას, მაშინ უნდა შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები(რადგან იგი შეიცავს სამ მარტივ წინადადებას):

p -ყველა ადამიანი მოკვდავია,

q -სოკრატე ადამიანია,

r -სოკრატე მოკვდავია,

სადაც p, q და r ატომებია. თეორემა 1.6.1.-ის თანახმად კი $[p \wedge q] \to r$ ფორმულა უნდა იყოს იგივურად ჭეშმარიტი. ცხადია, რომ იმ ინტერპრეტაციაში, სადაც p და q ჭეშმარიტია, ხოლო r მცდარი $[p \wedge q] \to r$ ფორმულა არის მცდარი. ე.ი. r არ არის p და q ფორმულების ლოგიკური შედეგი. ამის მიზეზი უნდა ვეძებოთ ჩვენს მიერ გაკეთებულ ფორმალიზაციაში – კერძოდ, შემოტანილ აღნიშვნებში. ადვილი დასანახია, რომ სამივე წინადადებაში ცხადად თუ არაცხადად გვხვდება კონსტანტა „სოკრატე'', რომლის თვისებების შესახებ ეს წინადადებები გვაწვდიან გარკვეულ ინფორმაციას. ე.ი. ამ წინადადებებს შორის არსებობს გარკვეული აზრობრივი კავშირი, რომელიც შემოტანილმა აღნიშვნებმა ვერ დააფიქსირეს. ჩვენ ფაქტიურად მოვახდინეთ სამივე წინადადების შინაარსისაგან აბსტრაგირება და ისინი ავღნიშნეთ p, q და r ატომებით, რის შედეგაც ამ ატომებს ენიჭებათ მხოლოდ ჭეშმარიტული მნიშვნელობები „ჭ'' და „მ''.

თეორიულად წინადადება „ ყველა ადამიანი მოკვდავია'' შეიძლება ჩავწეროთ რამდენიმე მილიარდი ატომებით შედგენილი ელემენტარული კონიუქციით. ამ ატომებს შორის იქნება ატომები q(„სოკრატე ადამიანია'') და r(„სოკრატე მოკვდავია''). ცხადია, რომ ამ პირობებში r იქნება აღნიშნული „ელემენტარული კონიუქციისა'' და q ატომის ლოგიკური შედეგი, მაგრამ პრაქტიკულად იგი არ იქნება „კარგი'' ფორმალიზაცია.

საზოგადოდ, წინადადებათა ლოგიკის ატომებით აღვნიშნავთ რა მარტივ თხრობით წინადადებებს, ჩვენ იგნორირებას ვუკეთებთ ამ წინადადებებში შემავალ საგანთა შორის არსებულ როგორც მიმართებებს(პრედიკატებს), ასევე ფუნქციონალურ კავშირებს. ამ ხარვეზის გამოსწორებას წარმატებით ახერხებს პირველი რიგის ლოგიკის

ენა, რომელიც შეიცავს როგორც ფუნქციონალურ, ასევე პრედიკატულ სიმბოლოებს. გრდა ამისა ამ ენაში გვხვდება კვანტორული სიმბოლოები $\forall$ და $\exists$, რომლებიც ცვლადებთან ერთად ქმნიან ზოგადობისა და არსებობის ქვანტორებს. ზემოთ ხსენებულ სიმბოლოებზე გარკვეული წარმოდგენები რომ შეგვექმნას მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

ა) ფრაზა „ $2+x$'' ჩაიწერება ასე $+(2;x)$;

ბ) ფრაზა „ ვანოს მამა'' ჩაიწერება ასე **ᲛᲐᲛᲐ(ᲕᲐᲜᲝ);**

გ) ფრაზა „ $x \cdot y - z$'' ჩაიწერება ასე $-(\cdot(x;y);z)$;

დ) წინადადება „$2 + x = x \cdot y - z$'' ჩაიწერება ასე $=(+(2,x);-(\cdot(x;y);z))$;

ე) წინადადება „ x მეტია y-ზე'' ჩაიწერება ასე ***მეტია***$(x;y)$

ვ) წინადადება „ ვანოს მამა მაღალია'' ჩაიწერება ასე ***მაღალია***(ᲛᲐᲛᲐ(ᲕᲐᲜᲝ)).

ზ) წინადადება „ნიკო არის ვანოს მამა'' ჩაიწერება ასე ***მამა***(**ᲜᲘᲙᲝ, ᲕᲐᲜᲝ**);

თ) წინადადება „x ადამიანია'' ჩაიწერება ასე ***ადამიანია***(x); შესაბამისად „სოკრატე ადამიანია'' ჩაიწერება ასე ***ადამიანია***(**ᲡᲝᲙᲠᲐᲢᲔ);**

ი) წინადადება „x მოკვდავია'' ჩაიწერება ასე ***მოკვდავია***(x).

ამ ჩანაწერებში $+$, $-$, $\cdot$ ორ ადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლოებია; მამა ერთადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლოა; 2, ვანო და ნიკო კონსტანტებია; $=$, ***მეტია, მამა*** ორ ადგილიანი პრედიკატული სიმბოლოებია; ***მაღალია*** ერთ ადგილიანი პრედიკატული სიმბოლოა, ხოლო $x, y, z-$კი საგნობრივი ცვლადებია.

მაშასადამე, ატომისა და თერმის განსაზღვრისათვის საჭირო სიმბოლოებია:

1) საგნობრივი კონსტანტები. ესენი არიან საგნის ისეთი სახელები, როგორიცაა 2, სოკრატე, ვანო, ნიკო და სხვა;
2) საგნობრივი ცვლადები. მათ აღსანიშნავად გამოვიყენებთ $x,y,z,x_1,\ldots$ ტიპის ცვლადებს.
3) $n-$ადილიანი ფუნქციონალური სიმბოლოები ($n\in N$). მათ აღსანიშნავად გამოვიყენებთ $f,g,h,f_1,g_1,\ldots$ ტიპის ცვლადებს ან აზრის მქონე ქართულ სიტყვებს დაწერილს ერთ სიმაღლეზე, როგორიცაა „მამა" და სხვა.
4) $n-$ადგილიანი პრედიკატული სიმბოლოები ($n\in N$). მათ აღსანიშნავად გამოვიყენებთ $P,Q,R,P_1,\ldots$ ტიპის ცვლადებს ან აზრის მქონე ქართულ სიტყვებს დაწერილს დახრილად, როგორიცაა ***„მეტია", „მამა", „ადამიანია", „მოკვდავია"*** და სხვა.

განსაზღვრება 2.1. თერმი რეკურსიულად ისაძღვრება ასე:

1) საგნობრივი კონსტანტა არის თერმი;
2) საგნობრივი ცვლადი არის თერმი;
3) თუ f არის n-ადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლო და $t_1,\ldots,t_n$ არიან თერმები, მაშინ $ft_1\ldots t_n$ არის თერმი.
4) პირველი სამი პუნქტით განსაზღვრული თერმების გარდა სხვა თერმები არ გვაქვს.

მაშასადამე, პირველი რიგის ლოგიკას მარტივი თხრობით წინადადების აღსანიშნავად გააჩნიათ ატომები; ე. ი. მის ენის სიმბოლოებს შორის პროპოზიციული ცვლადების არსებობა არ არის აუცილებელი. ხოლო პირველი რიგის ლოგიკის ენის სიმბოლოებს შორის შეგხვდება წინადადებათა ლოგიკის სხვა ყველა სიმბოლო.

განსაზღვრება 2.2. თუ P არის n-ადგილიანი პრედიკატული სიმბოლო, ხოლო $t_1,\ldots,t_n$ თერმებია, მაშინ $Pt_1\ldots t_n$ ატომია.

შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ ხშირად $ft_1..t_n$ (შესაბამისად $Pt_1..t_n$) ჩანაწერის ნაცვლად ვიხმართ ასეთ ჩანაწერს $f(t_1,\ldots,t_n)$ (შესაბამისად $P(t_1,\ldots,t_n)$). პირველი რიგის ლოგიკის საგნობრივი ცვლადების დასახასიათებლად შემოაქვთ ორი სიმბოლო $\forall$ (ზოგადობის კვანტორული სიმბოლო) და $\exists$ (არსებობის კვანტორული სიმბოლო) და თუ x არის საგნობრივი ცვლადი, მაშინ $\forall x$ (შესაბამისად $\exists x$) ჩანაწერი

არის ზოგადობის(შესაბამისად არსებობის) კვანტორი. ამ კვანტორების შინაარსი ისაზღვრება ასე:

განსაზღვრება 2.3. თუ A წინადადებაა, მაშინ $\forall xA$(იკითხება „ყოველი x–ისათვის A) განსაზღვრით არის ახალი წინადადება, რომელიც მცდარია თუ მოიძებნა x–ის ერთი მნიშვნელობა მაინც რომლისთვისაც A არის მცდარი.

განსაზღვრა 2.4. თუ A წინადადებაა, მაშინ $\exists xA$(იკითხება „არსებობს ისეთი x, რომ A) განსაზღვრით არის ახალი წინადადება რომელიც ჭეშმარიტია თუ მოიძებნა x–ის ერთი მნისვნელობა მაინც რომლისთვისაც A არის ჭეშმარიტი.
პირველი რიგის ლოგიკის ფორმულის ცნება შემოდის შემდეგი რეკურსიული განსაზღვრით:'
განსაზღვრა 2.5.
1) ატომი არის ფორმულა;
2) თუ A და B ფორმულებია, მაშინ $[A\vee B],[A\wedge B],[A\rightarrow B]$ და $[A\leftrightarrow B]$ ფორმულებია;
3) თუ A ფორმულაა, მაშინ $\neg A, \forall xA$ და $\exists xA$ ფორმულებია;
4) პირველი ოთხი პუნქტით განსაზღვრული ფორმულების გარდა სხვა ფორმულები არ გვაქვს.

ჩვენ უკვე გვაქვს გარკვეული ცოდნა პირველი რიგის ლოგიკის ენის შესახებ და მოვახდინოთ ამ ცოდნის გამყარება ძირითადი ამოცანის „ ბუნებრივი ენის წინადადებები ჩავწეროთ პირველი რიგის ლოგიკის ენის ფორმულებით და პირიქით'' მაგალითების მოყვანით.

მაგალითი. წინადადება „ თუ ყველა ადამიანი მოკვდავია და სოკრატე ადამიანია, მაშინ სოკრატე მოკვდავია'' ჩავწეროთ ფორმულის სახით. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

x არის ადამიანი-***ადამიანია***(x),
ხოლო x არის მოკვდავი- ***მოკვდავია***(x);
მაშინ წინადადებები: „ყველა ადამიანი მოკვდავია'' ჩაიწერება ასე

$\forall x$ [***ადამიანია***(x) $\rightarrow$ ***მოკვდავია***(x)];

„სოკრატე ადამიანია'' - ***ადამიანია***(სოკრატე);
„სოკრატე მოკვდავია'' - ***მოკვდავია***(სოკრატე),
ხოლო წინადადება „თუ ყველა ადამიანი მოკვდავია და სოკრატე ადამიანია, მაშინ სოკრატე მოკვდავია ჩაიწერება ასე:

$\forall x$ [***ადამიანია***(x) $\rightarrow$ ***მოკვდავია***(x)] $\wedge$ ***ადამიანია***(სოკრატე)]
$\rightarrow$ ***მოკვდავია***(სოკრატე).

§ 2.2. პირველი რიგის ლოგიკის ფორმულის ინტერპრეტაცია

წინადადებათა ლოგიკის ფორმულების ინტერპრეტაციისაგან განსხვავებით პირველი რიგის ლოგიკის ფორმულების ინტერპრეტაციისათვის საჭიროა შემოვიღოთ საგანთა არაცარიელი არე და ამ არეზე განისაზღვროს საგნობრივი კონსტანტის, ფუნქიონალური სიმბოლოებისა და პრედიკატული სიმბოლოების მნიშვნელობები.

განსაზღვრა 2.6. პირველი რიგის ლოგიკის A ***ფორმულის ინტერპრეტაცია*** შედგება არაცარიელი საგანთა D არისაგან-საინტერპრეტაციო არისაგან და ფორმულაში შემავალი ყველა კონსტატისათვის, ფუნქიონალური სიმბოლოსათვის და პრედიკატული სიმბოლოსათვის მნიშვნელობის მინიჭებისაგან შემდეგი წესით:

1) ყოველ კონსტანტას ჩვენ მივანიჭებთ D არიდან აღებულ გარკვეულ ელემენტს;
2) ყოველ n–ადგილიან ფუნქციონალურ f^n სიმბოლოს ჩვენ ვუთანადებთ D არეზე განსაზღვრულ $f_D{}^n$ ფუნქციას(D^n-ის ასახვას D-ზე);
3) ყოველ n–ადგილიან პრედიკატულ P^n სიმბოლოს ჩვენ ვუთანადებთ D არეზე განსაზღვრულ $P_D{}^n$ პრედიკატს(D^n-ის ასახვა {ჭ, მ}-ზე).

ფორმულაში შემავალ სხვა სიმბოლოთა შინაარსი ცნობილია და მათ ინტერპრეტირება არ ჭირდებათ. ე. ი. ფორმულა D არეზე განსაზღვრულ ყოველი ინტერპრეტაციისათვის ღებულობს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას „ჭ”-ს ან „მ”-ს შემდეგი წესის მიხედვით:

1. თუ რომელიმე ინტერპრეტაციაში ცნობილია A და B ფორმულების მნიშვნელობა, მაშინ $\neg A, [A \vee B], [A \wedge B], [A \rightarrow B]$ და $[A \leftrightarrow B]$ ფორმულების მნიშვნელობა გამოითვლება $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ოპერატორების ჭეშმარიტული ცხრილების დახმარებით;
2. $\forall xA$ ღებულობს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას „მ”, თუ საინტერპრეტაციო D არეში მოიძებნა x–ის ერთი მნიშვნელობა მაინც რომლისთვისაც A არის მცდარი; წინააღმდეგ შემთხვევაში A ფორმულა ღებულობს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას „ჭ”.

3. $\exists xA$ ღებულობს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას „ჭ”, თუ საინტერპრეტაციო D არეში მოიძებნა x–ის ერთი მნიშვნელობა მაინც რომლისთვისაც A არის ჭეშმარიტი.

4. შევნიშნოთ, რომ თავისუფალი ცვლადის შემცველელი ფორმულა ვერ მიიღებს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. აქედან გამომდინარე ქვემოთ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ფორმულა ან არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს ან თავისუფალი ცვლადები განიხილება როგორც კონსტანტა.

მოვიყვანოთ პირველი რიგის ლოგიკის ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დადგენის რამდენიმე

მაგალითი:

1) $\forall x P(x)$ 2) $\exists x[\neg P(x)]$.

განვიხილოთ შემდეგი ინტერპრეტაცია $D=\{0;1\}$ არეზე $\frac{P(0)}{\text{ჭ}}$, $\frac{P(1)}{\text{მ}}$ ამ ინტერპრეტაციაში $\forall x P(x)$ ფორმულა არის მცდარი, ხოლო $\exists x[\neg P(x)]$ ფორმულა კი ჭეშმარიტი. ეს უშუალოდ გამომდინარებს $\forall x$ და $\exists x$ კვანტორის განსაზღვრიდან.

§ 2.3 არსებობისა და ზოგადობის კვანტორის თვისებები

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვსაზღვრეთ არსებობისა და ზოგადობის კვანტორი. ამ განსაზღვრიდან ჩანს, რომ არსებობის კვანტორი წარმოადგენს დიზიუნქციის ოპერატორის გარკვეული აზრით განზოგადოებას, ხოლო ზოგადობის კვანტორი კი – კონიუნქციის ოპერატორის.

გარდა ამისა, ჩვენ პირველ თავში შემოვიტანეთ ტოლძალოვანი ფორმულის ცნება, რომლის ზუსტ ანალოგიას წარმოადგენს პირველი რიგის ლოგიკის ტოლძალოვანი ფორმულის ცნება.

განსაზღვრა 2.7. ორ A და B ფორმულას ეწოდება ტოლძალოვანი (და ვწერთ $A \equiv B$) თუ ყველა შესაძლო ინტერპრეტაციაში A და B ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა. ე.ი. პირველ თავში მოცემული ტოლძალოვანი ფორმულების ცხრამეტივე წყვილი ტოლძალოვანია პირველი რიგის ლოგიკაშიც. აქ დამატებით გვაქვს ტოლძალოვან ფორმულათა რამდენიმე წყვილი, რომლებიც გამოხატავენ არსებობისა და ზოგადობის ქვანტორის თვისებებს.

მაგალითად:

1. $\neg\forall x A \equiv \exists x \neg A$
2. $\neg\exists x A \equiv \forall x \neg A$
3. $\forall x[A \wedge B] \equiv \forall x A \wedge \forall x B$
4. $\exists x[A \vee B] \equiv \exists x A \vee \exists x B$
5. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$

6. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$

საზოგადოდ, შემდეგი ფორმულები: $\forall x[A \vee B]$ და $\forall x A \vee \forall x B$, $\exists x[A \wedge B]$ და $\exists x A \wedge \exists x B$ არ არიან ექვივალენტურნი. მაგრამ თუ B ფორმულაში x ცვლადს არა აქვს თავისუფალი შემოსვლა, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლძალოვნებებს:

7. $\forall x[A \vee B] \equiv \forall x A \vee B$
8. $\exists x[A \wedge B] \equiv \exists x A \wedge B$

აღსანიშნავია არსებობისა და ზოგადობის კვანტორის შემდეგი თვისებები:

9. $\exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
10. $\forall x A \rightarrow (T/x)A$
11. $(T/x)A \rightarrow \exists x A$

სადაც, $(T/x)A$ არის ფორმულა, რომელიც მიიღება A ფორმულიდან თუ მასში x-ის თავისუფალი შემოსვლების ნაცვლად ჩავსვამთ T თერმს. ამასთან ჩასმის შემდეგ T ტერმის არცერთი თავისუფალი ცვლადი არ უნდა დაებას. ეს მიიღწევა A–ში დაბმული ცვლადების ელიმინაციით.

§ 2.4. ფორმულის წინარე სახე

წინა თავში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ წინადადებათა ლოგიკის ნებისმიერი ფორმულა მიიყვანება როგორც დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმამდე ასევე კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმამდე. ფორმულის ასეთ სპეციალურ ფორმებს დიდი გამოყენებები აქვს, მაგალითად ამოხსნადობის პრობლემებთან დაკავშირებით. ამ საკითხებს უკავშირდება აგრეთვე პირველი რიგის ლოგიკის ფორმულების სპეციალური ფორმა - ფორმულის წინარე ნორმალური სახე.

განსაზღვრა 2.8. ვიტყვით, რომ A ***ფორმულა იმყოფება წინარე ნორმალურ სახეზე,*** თუ A–ს აქვს სახე $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)B$, სადაც $Q_i x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ არის ან $\forall x_i$ ან $\exists x_i$, ხოლო B–კი ისეთი ფორმულა, რომელიც არ შიცავს კვანტორებს(უკვანტორო ფორმულა).

$(Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_nx_n)$ ეწოდება A ფორმულის თავსართი, ხოლო B ფორმულას კი - A ფორმულის გული.

მაგალითად, ქვემოთ მოყვანილი ფორმულები იმყოფებიან წინარე ნორმალურ სახეზე:

1. $\forall x \forall y[p(x,y) \leftrightarrow \neg p_1(x)]$
2. $\exists x \exists y[\neg p_2(x) \wedge [p_1(x) \to p(x,y)]]$
3. $\forall x \exists y \forall z[p(x,y) \vee \neg p_1(z)]$

თეორემა 2.4.1. პირველი რიგის ლოგიკის ნებისმიერი ფორმულისათვის არსებობს მისი ტოლძალოვანი წინარე ნორმალური სახე.

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია მოვიყვანოთ ალგორითმი, რომელიც პირველი რიგის ნებისმიერ ფორმულას მიიყვანს მის ტოლძალოვან წინარე ნორმალურ სახეზე.

ბიჯი 1. გამოვიყენოთ შემდეგი ორი ტოლძალოვნება

$A \leftrightarrow B \equiv [A \to B] \wedge [B \to A]$ (1)

$A \to B \equiv \neg A \vee B$ (2)

რათა გამოვრიცხოთ $\leftrightarrow$და $\to$ ლოგიკური კავშირები.

ბიჯი 2. იმისათვის, რომ უარყოფის ნიშანი შევიტანოთ ფორმულის შიგნით, რამდენჯერმე უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი ტოლძალოვნებანი:

$\neg\neg A \equiv A$ (3)

$\neg[A \wedge B] \equiv \neg A \vee \neg B$ (4)

$\neg[A \vee B] \equiv \neg A \wedge \neg B$ (5)

$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$ (6)

$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$ (7)

ბიჯი 3. საჭიროების შემთხვევაში დაბმული ცვლადები შევცვალოთ.

ბიჯი 4. გამოვიყენოთ ქვემოთ მოცემული ტოლძალოვნებანი, რათა კვანტორები დავსვათ ფორმულის თავში. ე.ი. მივიღოთ ფორმულის წინარე ნორმალური სახე.

ა)თუ B არ შეიცავს x ცვლადის თავისუფალ შემოსვლებს, მაშინ

$\forall x A \vee B \equiv \forall x[A \vee B]$ (8)

$\forall x A \wedge B \equiv \forall x[A \wedge B]$ (9)

$\exists x A \vee B \equiv \exists x[A \vee B]$ (10)

$\exists x A \wedge B \equiv \exists x[A \wedge B]$ (11)

ბ)თუ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 არიან არსებობისა და ზოგადობის კვანტორები, ხოლო z არ შედის არც A –ში და არც B–ში, მაშინ

$Q_1xA \vee Q_2xB \equiv Q_1xQ_2z[A \vee (z/x)B]$ (12)

$Q_3xA \wedge Q_4xB \equiv Q_3xQ_4z[A \wedge (z/x)B]$ (13)

გ) $\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x[A \wedge B]$ (14)

$$\exists xA \vee \exists xB \equiv \exists x[A \vee B] \qquad (15)$$

მაგალითად, მივიყვანოთ წინარე ნორმალურ სახეზე $\forall xA \to \exists xB$ ფორმულა, სადაც A და B არიან კვანტორების არშემცველი ფორმულები. $\forall xA \to \exists xB \equiv$ (2)-ის თანახმად $\neg\forall xA \vee \exists xB \equiv$ (6)-ის თანახმად $\exists x\neg A \vee \exists xB \equiv$ (15)-ის თანახმად $\exists x[\neg A \vee B]$. ე.ი. $\forall xA \to \exists xB$ ფორმულის წინარე ნორმალური სახე არის $\exists x[\neg A \vee B]$.

§ 2.5. დამტკიცების მეთოდები

წინადადებათა ლოგიკის ფორმულის იგივურად ჭეშმარიტობის, იგივურად მცდარობისა და შესრულებადობის დასადგენად ჩვენ ვიყენებდით ჭეშმარიტული ცხრილის მეთოდს, ტოლძალოვანი გარდაქმნის მეთოდს და ფორმულის სპეციალურ ფორმაზე მიყვანის მეთოდს. ყველა ამ მეთოდების ეფექტური გამოყენება პირველი რიგის ლოგიკის ფორმულებისათვის შეუძლებელია, ამიტომ მიგვაჩნია გამოვიყენოთ თეორემათა მტკიცების ტრადიციული მეთოდები, როგორიცაა აბსურდამდე მიყვანის მეთოდი, შემთხვევებად დაყოფის მეთოდი, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი და სხვა. ჩამოვაყალიბოთ ამ მეთოდებიდან ზოგიერთი მათგანი და მივუთითოთ პრაქტიკაში მათი გამოყენების გზები.

I. თუ A ფორმულის დაშვებით დამტკიცდა B ფორმულა, მაშინ $A \to B$ ფორმულა არის თეორემა.

ეს მეთოდი გამოიყენება იმპლიკაციის ტიპის ფორმულის დასამტკიცებლად. ე.ი. ჩვენ თუ გვსურს დავამტკიცოთ $A \to B$ ფორმულა არის თეორემა, მაშინ უნდა დავუშვათ, რომ A ფორმულა არის თეორემა და დავამტკიცოთ, რომ B ფორმულა არის თეორემა. A ფორმულას უწოდებენ დამხმარე ჰიპოტეზას, ხოლო თვით მეთოდს კი ***დამხმარე ჰიპოტეზის მეთოდს.***

II. თუ დავუშვებთ $\neg A$ ფორმულის სამართლიანობას და მივიღებთ წინააღმდეგობას(ე.ი. B და $\neg B$ ფორმულები თეორემებია), მაშინ A არის თეორემა.

ეს მეთოდი პრაქტიკაში ასე გამოიყენება. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ A ფორმულა არის თეორემა ვუშვებთ საწინააღმდეგოს. ე.ი. A არის მცდარი და ვცდილობთ დავამტკიცოთ, რომ როგორც რომელიღაც B ფორმულა ასევე მისი უარყოფა $\neg B$ ფორმულა არიან თეორემები. წარმატების შემთხვევაში ვიტყვით, ეს აბსურდია. მაშასადამე ჩვენი დაშვება არ არის სწორი და A არის თეორემა. ეს მეთოდი ცნობილია როგორც ***აბსურდამდე მიყვანის მეთოდი.***

III. თუ $A \vee B$, $A \to C$ და $B \to C$, თეორემებია, მაშინ C არის თეორემა.

პრაქტიკაში ეს მეთოდი ასე გამოიყენება. ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ $A \vee B$ არის თეორემა და გვინდა დავამტკიცოთ, რომ C ფორმულა არის თეორემა. ამისათვის საკმარისია ჯერ A ჰიპოტეზის დაშვებით, ხოლო შემდეგ კი $B-$ ჰიპოტეზის დაშვებით ვაჩვენოთ, რომ C ფორმულა არის თეორემა.

ეი. დამხმარე ჰიპოტეზის მეთოდის დახმარებით ვაჩვენოთ, რომ $A \to C$ და $B \to C$ ფორმულები არიან თეორემები. ეს მეთოდი ცნობილია როგორც ***შემთხვევათა დაყოფის მეთოდი***. იგი შეიძლება ჩავწეროთ აგრეთვე, როგორც შემდეგი $\dfrac{A \vee B, A \to C, B \to C}{C}$ დასკვნის ფიგურა.

IV. ვთქვათ, x არის ცვლადი, რომელიც არ გვხვდება B ფორმულაში, ხოლო $(T/x)A$ არის თეორემა. თუ A ჰიპოტეზის დაშვებით დამტკიცდა B ფორმულა, მაშინ B არის თეორემა.

ეს მეთოდი ცნობილია როგორც ***დამხმარე კონსტანტის მეთოდი*** და პრაქტიკაში ასე გამოიყენება. ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ x არის A თვისების მქონე ნებისმიერი საგანი. მას უწოდებენ დამხმარე კონსტანტას და იგი გამოიყენება მხოლოდ B ფორმულის დამტკიცების პროცესში. რადგან B ფორმულა x ცვლადს არ შეიცავს, ამიტომ B ფორმულა ანუ რაც იგივეა დასკვნა არ არის დამოკიდებული x ცვლადზე. ე.ი. B არის თეორემა.

V. ვთქვათ, x ცვლადის ცვლილების არეა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე და $A\{x\}$ არის მხოლოდ x ცვლადზე დამოკიდებული ფორმულა. თუ $A\{1\}$ და $\forall x[A\{x\} \to A\{x+1\}]$ ფორმულები თეორემებია, მაშინ $\forall x A\{x\}$ ფორმულაც არის თეორემა.

ეს მეთოდი ცნობილია, როგორც ***მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი***. აქ მოყვანილია ამ პრინციპის მარტივი ფორმა, რომელიც პრაქტიკაში ასე გამოიყენება. იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ ყველა ნატურალურ რიცხვს აქვს $A\{x\}$ თვისება, საჭიროა ჯერ ვაჩვენოთ რომ პირველი ნატურალური რიცხვი 1-იანი ფლობს ამ თვისებას. ე.ი. $A\{1\}$ არის თეორემა, ხოლო შემდეგ ვაჩვენოთ, რომ A თვისების ყოველი ნატურალური რიცხვის მომდევნოსაც აქვს A თვისება. ე.ი. $\forall x[A\{x\} \to A\{x+1\}]$. ამ მეთოდის შესაბამისი დასკვნის ფიგურა ჩაიწერება ასე $\dfrac{A\{1\}, \forall x[A\{x\} \to A\{x+1\}}{\forall x A\{x\}}$

ქვემოთ მოვიყვანოთ რამდენიმე გამოყვანის წესი ჩაწერილი დასკვნის ფიგურის სახით:

1. $\dfrac{A, A \to B}{B}$; 2. $\dfrac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$; 3. $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$;

4. $\dfrac{\neg A \vee \neg B}{\neg[A \wedge B]}$; 5. $\dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg[A \vee B]}$; 6. $\dfrac{A \wedge [B \vee C]}{[A \wedge B] \vee [A \wedge C]}$.

რეზოლუციის მეთოდი წინადადებათა ლოგიკისათვის

წინა პარაგრაფებში ფორმულის იგივურად ჭეშმარიტობის(იგივურად მცდარობის) დასადგენად გამოყენებული მეთოდების გარდა საინტერესოა ე.წ. რეზოლუციის მეთოდი. რომლის არსს ქვემოთ გავეცნობით.

თუ გვაქვს შემდეგი ორი სახის ელემენტარული დიზიუნქცია $C \vee A_1 \vee \ldots \vee A_n$ და $\neg C \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n$, მაშინ $(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \vee (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$ ფორმულას ეწოდება მოცემული ორი ფორმულის რეზოლვენტა, თვით ამ რეზოლვენტის მიღების წესს ეწოდება **რეზოლუციის წესი**, ანუ **რეზოლუციის მეთოდი**.

A და $\neg A$ სახის ელემენტარული დიზიუნქციების რეზოლვენტას უწოდებენ ცარიელ დიზუნქტს და აღნიშნავენ $\square$

მაგალითი 2.5.1

$A_1 : \neg P \vee \neg R \vee Q$

$A_2 : P \vee \neg R$

A_1 და A_2-ის რეზოლვენტა არის $\neg R \vee Q$.

მაგალითი 2.5.2.

$A_1 : Q \vee \neg R \vee S$

$A_2 : P \vee \neg R \vee Q$

რადგან A_1–ში არ არის ისეთი ლიტერა, რომელიც კონტრალული იქნება A_2–ის რომელიმე ლიტერის, ამიტომ A_1 და A_2–ის რეზოლვენტა არ არსებობს.

თეორემა 2.5.1 A_1 და A_2 ელემენტარული დიზიუნქციბის A რეზოლვენტა არის A_1 და A_2 ფორმულების ლოგიკური შედეგი.

დამტკიცება. პირობის თანახმად A_1 და A_2 ელემენტარულ დიზიუნქციებს გააჩნიათ A რეზოლვენტა. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A_1 არის $B \vee A_1'$, ხოლო A_2–კი $\neg B \vee A_2'$. მაშინ A არის $A_1' \vee A_2'$. ვაჩვენოთ, რომ იმ ინტერპრეტაციაში, სადაც $A_1 \wedge A_2$ ფორმულა ჭეშმარიტია, იქ A ფორმულაც ჭეშმარიტია. თუ $A_1 \wedge A_2$ ჭეშმარიტია, მაშინ A_1 დ A_2 ჭეშმარიტია. თუ A_1 ჭეშამარიტია, მაშინ ან B არის ჭეშმარიტი, ან A_1'.

ვთქვათ, B არის ჭეშმარიტი, მაშინ $\neg B$ არის მცდარი და რადგან A_2 ჭეშმარიტია, ამიტომ $A_2^{'}$ არის ჭეშმარიტი. ე.ი. $A_1^{'} \vee A_2^{'}$ არის ჭეშმარიტი და ანუ, რაც იგივეა, A არის ჭეშმარიტი. თუ დავუშვებთ რომ B მცდარია, მაშინ $A_1^{'}$ იქნება ჭეშმარიტი და მაშასადამე, A ფორმულაც ჭეშმარიტია.

მაგალითი 2.5.3. რეზოლუციის მეთოდით ვაჩვენოთ, რომ ფორმულა $\neg[[P \wedge Q \wedge [[P \wedge Q] \to R]] \to R]$ არის იგივურად მცდარი.

რეზოლუციის მეთოდით ფორმულის იგივურად მცდარობის საჩვენებლად საჭიროა ჯერ იგი მივიყვანოთ კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმამდე.

$$\neg[[P \wedge Q \wedge [[P \wedge Q] \to R]] \to R] \overset{8}{\equiv} \neg[\neg[P \wedge Q \wedge [\neg[P \wedge Q] \vee R]] \vee R] \overset{16}{\equiv}$$

$$\overset{16}{\equiv} \neg\neg[P \wedge Q \wedge [\neg[P \wedge Q] \vee R]] \wedge \neg R \overset{15,17}{\equiv} P \wedge Q \wedge [\neg P \vee \neg Q \vee R] \wedge \neg R$$

ამოვწეროთ ამ კონიუნქციურ ფორმაში შემავალი დიზიუნქტების სიმრავლე:

1. P
2. Q
3. $\neg P \vee \neg Q \vee R$
4. $\neg R$

ამ დიზიუნქტებზე გამოვიყენოთ რეზოლუციის წესი, მივიღებთ:

5. $\neg Q \vee R$ (1 და 3-დან),
6. R (2 და 5-დან),
7. $\square$ (4 და 6-დან).

მაგალითი 2.5.4. ქიმიური სინთეზის ამოცანის მოდელირება წინადადებათა ლოგიკის ენაზე

ქიმიური სინთეზის ამოცანის არსი ზოგადად მდგომარეობს შემდეგში.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სხვადასხვა ნივთიერებების გარკვეული რაოდენობა და ცნობილია, რომ შეიძლება რაღაც ქიმიური რეაქციების ჩატარება. ვაჩვენოთ, რომ ასეთ პირობებში შეიძლება (ან არ შეიძლება) ჩვენთვის სასურველი ნივთიერების მიღება. ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნას წინადადებათა ლოგიკა წარმატებით წყვეტს.

წინადადებათა ლოგიკის დახმარებით ქიმიური სინთეზის ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა:

ა) ამოცანა ჩაიწეროს წინადადებათა ლოგიკის ენაზე – შეიქმნას ამოცანის ლოგიკური მოდელი.

ბ) მიღებულ ლოგიკურ მოდელზე ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაეცეს კითხვაზე პასუხი.

ცნობილია, რომ მოდელირება არის საკვლევი ობიექტის შესწავლა მის მოდელში. ქიმიურ სინთეზის ამოცანის შესწავლა ჩვენ გადაწყვიტეთ მის ლოგიკურ მოდელში, ამიტომ ქვემოთ საქმე გვექნება ქიმიური სინთეზის ამოცანის ლოგიკურ მოდელირებასთან.

დავსვათ ქიმიური სინთეზის კონკრეტული ამოცანა და მოვახდინოთ მისი მოდელირება.

ვთქვათ, გვაქვს ნახშირბადის ერთი ატომი და ჟანგბადის ორი ატომი. გარდა ამისა, ცნობილია შემდეგი ქიმიური რეაქცია $C+O_2 = CO_2$. ვაჩვენოთ, რომ მართლაც შეგვიძლია ნახშირბადის ოქსიდის მიღება.

როგორც ცნობილია, მარტივი წინადადებების მოდელი წინადადებათა ლოგიკის ენაზე არის ატომარული ფორმულები. შევინარჩუნებთ რა მენდელეევის პერიოდულ სისტემაში შემოტანილ აღნიშვნებს - წინადადებების „მაქვს ნახშირბადის ერთი ატომი'', „მაქვს ჟანგბადის ორი ატომი'' და „ მაქვს ერთი მოლეკულა ნახშირბადის ოქსიდი''- ლოგიკური მოდელია შესაბამისად C, O_2 და CO_2 ატომალური ფორმულები. აქედან გამომდინარე „ თუ მაქვს ნახშირბადის ერთი ატომი და ჟანგბადის ორი ატომი, მაშინ მექნება ერთი მოლეკულა ნახშირბადის ოქსიდი'' წინადადების ლოგიკური მოდელია: $(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2$

თვით დასმული ამოცანის ლოგიკური მოდელია:

მოც: 1. C

2. O_2

3. $\underline{(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2}$

გას: CO_2

ე. ი. მოცემული გვაქვს C, O_2, $(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2$ ფორმულები და გვაინტერესებს CO_2 არის თუ არა მოცემული ფორმულების ლოგიკური შედეგი. იმისათვის, რომ CO_2 იყოს C, O_2, $(C \wedge O_2) \rightarrow CO_2$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი, საკმარისია შემდეგი ფორმულა $(C \wedge O_2 \wedge ((C \wedge O_2) \rightarrow CO_2)) \rightarrow CO_2$ იყოს იგივურად ჭეშმარიტი(იხ. თეორემა 1.6.1.).

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ძირითად ტოლძალოვნებებს და მოვახდენთ მოცემული ფორმულის ტოლძალოვან გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$(C \wedge O_2 \wedge ((C \wedge O_2) \to CO_2)) \to CO_2 \equiv \neg(C \wedge O_2 \wedge ((C \wedge O_2) \to CO_2)) \vee CO_2 \equiv$$
$$\neg(C \wedge O_2) \vee \neg(\neg(C \wedge O_2) \vee CO_2) \vee CO_2 \equiv \neg(C \wedge O_2) \vee ((C \wedge O_2) \wedge \neg CO_2) \vee$$
$$\vee CO_2 \equiv ((\neg(C \wedge O_2) \vee (C \wedge O_2)) \wedge (\neg(C \wedge O_2) \vee \neg CO_2)) \vee CO_2 \equiv (\text{ჭ} \wedge (\neg(C \wedge O_2) \vee$$
$$\vee \neg CO_2)) \vee \vee CO_2 \equiv (\neg(C \wedge O_2) \vee \neg CO_2)) \vee CO_2 \equiv \neg(C \wedge O_2) \vee \neg CO_2 \vee CO_2 \equiv$$
$$\equiv \neg(C \wedge O_2) \vee \text{ჭ} \equiv \text{ჭ}$$

ე.ი. ეს ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტია. მაშასადამე, თეორემა 1.6.1-ის თანახმად CO_2 ფორმულა არის C, O_2 და $(C \wedge O_2) \to CO_2$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი. ლოგიკური შედეგის განსაზღვრების თანახმად, ,თუ წინადადებები „მაქვს ნახშირბადის ერთი ატომი'', „გვაქვს ჟანგბადის ორი ატომი'' და „ თუ მაქვს ნახშირბადის ერთი ატომი და ჟანგბადის ორი ატომი, მაშინ მექნება ნახშირბადის ერთი მოლეკულა'' ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია წინადადება „ მექნება ნახშირბადის ოქსიდის ერთი მოლეკულა.''

ამავე ტიპის ამოცანების ამოხსნა შეიძლება რეზოლუციის მეთოდით. იმისათვის, რომ CO_2 იყოს C, O_2 და $(C \wedge O_2) \to CO_2$ ფორმულების ლოგიკური შედეგი საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ $(C \wedge O_2 \wedge ((C \wedge O_2) \to CO_2)) \wedge \neg CO_2$ ფორმულა არის იგივურად მცდარი (იხ. თეორემა 1.6.2.). ამ ფორმულის იგივურად მცდარობის საჩვენებლად საჭიროა ჯერ იგი მივიყვანოთ კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმამდე.

$$C \wedge O_2 \wedge ((C \wedge O_2) \to CO_2)) \wedge \neg CO_2 \equiv C \wedge O_2 \wedge (\neg(C \wedge O_2) \vee CO_2) \wedge \neg CO_2 \equiv$$
$$\equiv C \wedge O_2 \wedge (\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2) \wedge \neg CO_2$$

ამოვწეროთ ამ კონიუნქციურ ფორმაში შემავალი დიზიუნქტების სიმრავლე:

1. C
2. O_2
3. $\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2$
4. $\neg CO_2$

ამ დიზიუნქტებზე გამოვიყენოთ რეზოლუციის წესი, მივიღებთ:

5. $\neg O_2 \vee CO_2$ (1 და 3-დან),
6. CO_2 (2 და 5-დან),
7. □ (4 და 6-დან)

მივიღეთ ცარიელი დიზიუნქტი. რაც იმას ნიშნავს რომ მოცემული ფორმულა არის იგივურად მცდარი.

რეზოლუციის მეთოდი რეალიზებულია თანამედროვე პერსონალურ კომპიუტერზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ქიმიური სინთეზის ამოცანის

ამოხსნისას შეიძლება წარმატებით გამოყენებულ იქნეს პერსონალური კომპიუტერი.

ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე ქიმიური სინთეზის ამოცანის მოდელირებისათვის გამოყენებული ცოდნის მრავალმხრიობა-სხვადასხვა დარგის ამოცანათა წინადადებათა ლოგიკის ენაზე მოდელირების შესაძლებლობა.