სრული პროფესორი როლანდ ომანაძე
ასისტენტ პროფესორი არჩილ ყიფიანი

მათემატიკური ლოგიკა და დისკრეტული მათემატიკა

(ლექციების კურსი)

თბილისი 2010

წინადადებათა აღრიცხვა

პროპოზიციული ოპერაციები. ჭეშმარიტობის ცხრილები. ტავტოლოგიები

წინადადებებიდან, მათი სხვადასხვა მეთოდით შეერთებით, შეიძლება შევადგინოთ ახალი, უფრო რთული წინადადებები. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ჭეშმარიტულ-ფუნქციონალურ კომბინაციებს, სადაც ახალი წინადადების ჭეშმარიტობა ან მცდარობა განისაზღვრება შემადგენელი წინადადებების ჭეშმარიტობით ან მცდარობით.

წინადადებების აღსანიშნავად ვისარგებლებთ ლათინური ასოებით $A,B,C,\ldots$ და მათ ვუწოდებთ პროპოზიციულ ცვლადებს. წინადადებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებს აღსანიშნავად გამოვიყენებთ 1 და 0-ს. ამასთან 1 შეესაბამება მნიშვნელობას „ჭეშმარიტი“, ხოლო 0 შეესაბამება მნიშვნელობას „მცდარი“.

ყველაზე მარტივი ოპერაცია წინადადებებზე არის უარყოფის ოპერაცია $\neg$. თუ A არის წინადადება და მაშინ $\neg A$ არის წინადადება, ის იკითხება „არა A“.

შემდეგი ოპერაცია არის კონიუნქცია. A და B წინადადებების კონიუნქცია აღინიშნება $A\&B$.

მომდევნო ოპერაცია არის დიზიუნქცია, A და B წინადადებების დიზიუნქცია აღინიშნება $A\vee B$ და იკითხება „A ან B“.

შემდეგი მნიშვნელოვანი ოპერაცია არის იმპლიკაციის ანუ გამომდინარეობის ოპერაცია: $A\Rightarrow B$, იკითხება „თუ A, მაშინ B“.

ბოლოს, ეკვივალენტობის ოპერაცია: $A\Leftrightarrow B$, იკითხება „A ეკვივალენტურია B-სი“.

ქვემოთ მოცემული ცხრილები იძლევიან ამ ოპერაციების განსაზღვრებებს.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A\&B$	$A\vee B$	$A\Rightarrow B$	$A\Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

ამ ოპერაციებით აგებულ ყოველ წინადადებას აქვს გარკვეული ჭეშმარიტული მნიშვნელობა, რომელიც დამოკიდებულია მასში შემავალი წინადადებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებზე.

პროპოზიციული ცვლადებითა და ლოგიკური ოპერაციებით აგებული გამოსახულებისათვის გამოვიყენებთ ტერმინს პროპოზიციული ფორმა. უფრო ზუსტად **პროპოზიციული ფორმა შემდეგი სამი პუნქტით განისაზღვრება**:

(1) ყველა პროპოზიციული ცვლადი (რიცხვითი ინდექსით ან ინდექსის გარეშე) არის პროპოზიციული ფორმა.

(2) თუ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ – პროპოზიციული ფორმებია, მაშინ $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}\&\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ და $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ ასევე პროპოზიციული ფორმებია.

(3) მხოლოდ (1) და (2) პუნქტებით განსაზღვრული გამოსახულებებია პროპოზიციული ფორმები.

პროპოზიციულ ფორმაში შემავალ პროპოზიციული ცვლადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ყოველ ერთობლიობას შეესაბამება ამ პროპოზიციული ფორმის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა.

ამრიგად, ყოველი პროპოზიციული ფორმა განსაზღვრავს გარკვეულ ჭეშმარიტულ ფუნქციას, რომელიც შეიძლება მოცემული იყოს ამ პროპოზიციული ფორმის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილით. მაგალითად $(((\neg A)\vee B)\Rightarrow C)$ პროპოზიციულ ფორმას აქვს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა შემდეგი ცხრილი:

A	B	C	$(\neg A)$	$((\neg A)\vee B)$	$(((\neg A)\vee B)\Rightarrow C)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

თუ პროპოზიციულ ფორმაში არის n განსხვავებული ცვლადი, მაშინ ამ ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა განსხვავებული 2^n ერთობლიობა არსებობს და, მაშასადამე, ამ

პროპოზიციული ფორმის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ცხრილი შეიცავს 2^n სტრიქონს (დაამტკიცეთ!).

n ცვლადის **ჭეშმარიტული ფუნქცია** ეწოდება n ცვლადის ყოველ ფუნქციას, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს 0 ან 1, როცა მისი არგუმენტებიც ღებულობენ იგივე 0 ან 1 მნიშვნელობებს. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ n ცვლადის ჭეშმარიტული ფუნქცია ეწოდება ნებისმიერ ასახვას $\{0,1\}^n$ სიმრავლიდან $\{0,1\}$ სიმრავლეში ე.ი. $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ტიპის ასახვას (ასეთ ფუნქციებს ბულის ფუნქციებსაც უწოდებენ. როგორც ვნახეთ, ყოველი პროპოზიციული ფორმა განსაზღვრავს გარკვეულ ჭეშმარიტულ ფუნქციას.

პროპოზიციულ ფორმას, რომელიც მასში შემავალი ცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერ ერთობლიობაზე ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას, **ტავტოლოგია** ეწოდება. ცხადია, რომ პროპოზიციული ფორმა ტავტოლოგიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისი ჭეშმარიტული ფუნქციის მნიშვნელობა არის ყოველთვის 1. თუ $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ არის ტავტოლოგია, მაშინ ამბობენ, რომ $\mathcal{A}$-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს $\mathcal{B}$. ან ამბობენ, რომ $\mathcal{B}$ არის $\mathcal{A}$-ს ლოგიკური შედეგი (წინადადებათა აღრიცხვაში). თუ $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ არის ტავტოლოგია, მაშინ ამბობენ, რომ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ლოგიკურად ეკვივალენტურია (წინადადებათა აღრიცხვაში).

ტავტოლოგიის მაგალითებია $(A \vee (\neg A))$ („მესამის გამორიცხვის კანონი“), $(\neg(A \,\&\, (\neg A)))$. აღვნიშნოთ ასევე, რომ $(A \& B)$-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს A, $(A \& (A \Rightarrow B))$-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს B, ხოლო $(A \Rightarrow B)$ და $((\neg A) \vee B))$ ლოგიკურად ეკვივალენტურებია.

პროპოზიციულ ფორმას, რომელიც მასში შემავალი ცვლადების მნიშვნელობათა ყველა ერთობლიობაზე ღებულობს მნიშვნელობას 0, ეწოდება **წინააღმდეგობა**.

წინადადებას, რომელიც მიიღება რაიმე ტავტოლოგიიდან მასში პროპოზიციული ცვლადების ნაცვლად წინადადებების ჩასმით, იმ პირობით, რომ ერთი და იგივე ცვლადის შემოსვლები იცვლება ერთი და იგივე წინადადებით, ეწოდება **ლოგიკურად ჭეშმარიტი** (პროპოზიციულ აღრიცხვაში). მაგალითად გამოდგება შემდეგი წინადადება: „თუ წვიმს ან თოვს, და არ თოვს, მაშინ წვიმს“, რომელიც მიიღება $(((A \vee B) \,\&\, (\neg B)) \Rightarrow A)$ ტავტოლოგიიდან ჩასმით.

ანალოგიურად წინადადებას, რომელიც მიიღება წინააღმდეგობიდან ჩასმით, ეწოდება ლოგიკურად მცდარი (წინადადებათა აღრიცხვაში).

დავადგინოთ ტავტოლოგიების შესახებ რამდენიმე ზოგადი სახის წინადადება.

წინადადება 1.1. თუ $\mathcal{A}$ და $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ ტავტოლოგიებია, მაშინ $\mathcal{B}$ -ტავტოლოგიაა.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathcal{A}$ და $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ ტავტოლოგიებია ხოლო $\mathcal{B}$ არაა ტავტოლოგია. მაშინ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$-ში შემავალი ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა რაიმე ერთობლიობაზე $\mathcal{B}$ -ს მნიშვნელობა იქნება 0. რადგან $\mathcal{A}$ ტავტოლოგიაა, ამიტომ ცვლადების მნიშვნელობათა იგივე ერთობლიობაზე $\mathcal{A}$ მიიღებს მნიშვნელობას 1. მაშინ $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ მიიღებს მნიშვნელობას 0. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ არის ტავტოლოგია. ♦

წინადადება 1.2. თუ $\mathcal{A}$ არის ტავტოლოგია, რომელიც შეიცავს $A_1, A_2, \ldots, A_n$ პროპოზიციულ ცვლადებს, და $\mathcal{B}$ ფორმა მიიღება $\mathcal{A}$-დან მასში $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ცვლადების ნაცვლად შესაბამისად $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ პროპოზიციული ფორმების ჩასმით, მაშინ $\mathcal{B}$ -ფორმაც იქნება ტავტოლოგია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\mathcal{A}$ არის ტავტოლოგია და მოცემულია $\mathcal{B}$ -ში შემავალი ყველა პროპოზიციული ცვლადის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ნებისმიერი ერთობლიობა. მაშინ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ფორმები ამ ერთობლიობაზე მიიღებენ რაღაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებს (ყოველი x_i არის 0 ან 1). თუ ჩვენ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ცვლადებს შესაბამისად მივანიჭებთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებს, მაშინ $\mathcal{A}$-ს მნიშვნელობა დაემთხვევა $\mathcal{B}$-ს ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას მასში შემავალი ცვლადების მნიშვნელობათა მოცემულ ერთობლიობისათვის. რადგან $\mathcal{A}$ არის ტავტოლოგია, $\mathcal{B}$-ს მნიშვნელობა მასში შემავალი ცვლადების მნიშვნელობათა მოცემულ ერთობლიობაზეც 1 იქნება. მაშასადამე, $\mathcal{B}$ ყოველთვის ღებულობს 1-ის ტოლ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. ♦

მოკლედ **წინადადება 1.2**. ასე შეიძლება გამოვთქვათ: ტავტოლოგიის კერძო შემთხვევა ტავტოლოგიაა.

წინადადება 1.3. თუ $\mathcal{B}_1$ მიიღება $\mathcal{A}_1$-დან მასში $\mathcal{B}$-ს ჩასმით $\mathcal{A}$-ს ერთი ან რამდენიმე შემოსვლის ნაცვლად, მაშინ $((\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1))$ არის ტავტოლოგია, და, მაშასადამე, თუ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ლოგიკურად ეკვივალენტურია, მაშინ ასევე $\mathcal{A}_1$ და $\mathcal{B}_1$ ლოგიკურად ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. განვიხილოთ პროპოზიციული ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ნებისმიერი ერთობლიობა. თუ ამ ერთობლიობაზე $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$-ს აქვთ განსხვავებული მნიშვნელობები, მაშინ $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ ღებულობს მნიშვნელობას 0 და $((\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \Rightarrow (\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1))$ ღებულობს მნიშვნელობას 1. თუ ამ ერთობლიობაზე $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ღებულობენ ერთსა და იგივე მნიშვნელობებს, მაშინ ერთსა და იგივე მნიშვნელობებს მიიღებენ ასევე $\mathcal{A}_1$ და $\mathcal{B}_1$, რადგან $\mathcal{B}_1$ განსხვავდება $\mathcal{A}_1$-სგან იმით, რომ ზოგ ადგილზე $\mathcal{A}$-ს ნაცვლად შეიცავს $\mathcal{B}$-ს. ამრიგად, ამ შემთხვევაში $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ არის 1 ამიტომ $((\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1))$ არის 1. ♦

ფრჩხილების გამოტოვება.

ფორმებში ფრჩხილების უფრო ეკონომიური გამოყენებისათვის შემოვიღოთ ზოგიერთი შეთანხმება. ეს შეთანხმება ამარტივებს რთული გამოსახულების ჩაწერასა და წაკითხვას. პირველ რიგში, ჩვენ გამოვტოვებთ პროპოზიციულ ფორმაში გარე ფრჩხილთა წყვილს. მეორე, თუ ფორმა შეიცავს მხოლოდ ერთი ბინარული ოპერაციის შემოსვლებს (ე.ი. $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$ ან $\&$), მაშინ ამ ოპერაციის ყოველი შემოსვლისათვის იმ ორი ფორმიდან, რომლებიც ამ ოპერაციის მოცემული შემოსვლით არიან დაკავშირებულნი, გარე ფრჩხილებს გამოვტოვებთ მარცხნივ მდგომ ფორმაში.

მაგალითი. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow C)$-ის ნაცვლად ვწერთ $A \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C$-ს, ხოლო $(((B \vee B) \vee A) \vee (C \vee A))$-ის ნაცვლად კი ვწერთ $B \vee B \vee A \vee (C \vee A)$-ს

მესამე, შევთანხმდეთ და ჩავთვალოთ, რომ ოპერაციები დალაგებულია შემდეგნაირად: ¬, &, ∨, ⇒, ⇔ ⇔, ⇒, ∨, &, ¬ და ყოველ პროპოზიციულ ფორმაში გამოვტოვებთ ყველა იმ ფრჩხილთა წყვილს, რომელთა გარეშე შეიძლება ამ ფორმის აღდგენა შემდეგი წესის საფუძველზე.

¬ ნიშნის ყოველი შემოსვლა ეხება მის შემდეგ მყოფ უმცირეს პროპოზიციულ ფორმას; ¬ ნიშნის ყოველი შემოსვლის შესაბამისი ყველა ფრჩხილის დასმის შემდეგ, & ნიშნის ყოველი შემოსვლა აკავშირებს ამ შემოსვლის სხვადასხვა მხარეს მდგომ უმცირეს ფორმებს; შემდეგ (ანუ ყველა ფრჩხილის დასმის შემდეგ, რომლებიც ეხება ¬ და & ნიშნების ყველა შემოსვლას) ∨ ნიშნის ყოველი შემოსვლა აკავშირებს ამ შემოსვლის ორივე მხარეს მდგომ უმცირეს ფორმებს და ამის მსგავსად ⇒ და ⇔-სთვის. ამ წესის გამოყენებით ერთსა და იგივე ოპერაციაზე ფრჩხილების აღდგენა ხდება მარცხნიდან მარჯვნივ.

მაგალითი. ფორმაში $A \vee \neg B \Rightarrow C \Leftrightarrow A$ ფრჩხილები აღდგება შემდეგი ნაბიჯებით:

$$A \vee (\neg B) \Rightarrow C \Leftrightarrow A$$
$$(A \vee (\neg B)) \Rightarrow C \Leftrightarrow A$$
$$((A \vee (\neg B)) \Rightarrow C) \Leftrightarrow A$$
$$((A \vee (\neg B)) \Rightarrow C) \Leftrightarrow A) .$$

სავარჯიშოს სახით აჩვენეთ, რომ $D \Leftrightarrow C \Leftrightarrow A \& D \& B \vee \neg D \Rightarrow B$ აღნიშნავს

$$((D \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow ((((A \& D) \& B) \vee (\neg D)) \Rightarrow B))\text{-ს.}$$

შევნიშნოთ ამასთანავე, რომ არ შეიძლება ფრჩხილების გარეშე ყოველი ფორმის ჩაწერა. ასე, მაგალითად, ფორმებში $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $\neg (A \vee B)$, $A \& (B \Rightarrow C)$ შეუძლებელია ფრჩხილების შემდგომი გამოტოვება.

ოპერაციათა სრული სისტემები

n ცვლადის შემცველი პროპოზიციული ფორმა წარმოქმნის შესაბამის n ცვლადის ჭეშმარიტულ ფუნქციას. ბუნებრივად ისმის კითხვა: ჭეშმარიტობის ყველა ფუნქცია წარმოიქმნება თუ არა ამგვარად? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი

წინადადება 1-4. ყოველი ჭეშმარიტული ფუნქცია წარმოიქმნება გარკვეული პროპოზიციული ფორმით, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ¬, & და ∨ ოპერაციებს.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n)$ არის მოცემული ჭეშმარიტული ფუნქცია. ცხადია, f შეიძლება წარმოდგენილი იქნას გარკვეული ჭეშმარიტობის ცხრილით, რომელიც შეიცავს 2^n ცალ სტრიქონს და რომელშიც ყოველი სტრიქონი შეიცავს $x_1,\cdots,x_n$ ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა გარკვეულ ერთობლიობას და $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას. ამ ცხრილის სტრიქონები დავნომროთ ნატურალური რიცხვებით $1,2,3,\cdots,2^n$. ვთქვათ ყოველი i-სთვის, $1\le i\le 2^n$, C_i აღნიშნავს $U_1^i \,\&\cdots\&\, U_n^i$ კონიუნქციას, სადაც ყოველი U_j^i $(1\le i,j\le 2^n)$ არის A_j, თუ ჭეშმარიტობის მოცემული ცხრილის i-ურ სტრიქონში x_j-ს მნიშვნელობა არის 1, ხოლო U_j^i არის $\neg A_j$, თუ x_j ღებულობს მნიშვნელობას 0. აღვნიშნოთ D-თი ყველა ისეთი C_i-ს დიზიუნქცია, რომ f ფუნქცია i-ურ სტრიქონში ღებულობს მნიშვნელობას 1 (თუ ასეთი სტრიქონები არაა, მაშინ f ყოველთვის ღებულობს მნიშვნელობას 0 და, მაშინ დასამტკიცებელ დებულებას აკმაყოფილებს $A_1 \,\&\, \neg A_1$ ფორმა). ცხადია,რომ D ფორმით განსაზღვრული ჭეშმარიტული ფუნქცია ემთხვევა f-ს. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია $A_1,\ldots,A_n$ ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა რაიმე განაწილება (ერთობლიობა) და დავუშვათ, რომ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ეს ერთობლიობა $x_1,\ldots,x_n$ ცვლადებისათვის მოცემულია f ფუნქციის ჭეშმარიტობის ცხრილის k-ურ სტრიქონში. ამ ერთობლიობისათვის C_k-ს მნიშვნელობა არის 1 მაშინ, როცა ყველა C_i-ს $(i\ne k)$ მნიშვნელობა არის 0. თუ k-ურ სტრიქონში f-ის მნიშვნელობა არის 0, მაშინ C_k არ იქნება D-ს დიზიუნქციური წევრი და მოცემულ ერთობლიობაზე D-ს ყველა დიზიუნქციური წევრი ღებულობს მნიშვნელობას 0. თუ k-ურ სტრიქონში f-ის მნიშვნელობა არის 1, მაშინ C_k არის D-ს დიზიუნქციური წევრი და, მაშასადამე, ამ ერთობლიობაზე D-ს მნიშვნელობა არის 1. ამგვარად, D ფორმით წარმოქმნილი ჭეშმარიტობის ფუნქცია არის f.

მაგალითები. ვთქვათ f-ის შესაბამისი ცხრილია:

1)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

მაშინ საძებნი ფორმა D არის

$$(\neg A_1 \,\&\, \neg A_2) \vee (\neg A_1 \,\&\, A_2) \vee (A_1 \,\&\, \neg A_2).$$

2)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

მაშინ საძებნი ფორმა D არის

$$(\neg A_1 \,\&\, \neg A_2 \,\&\, \neg A_3) \vee (\neg A_1 \,\&\, \neg A_2 \,\&\, A_3) \vee (A_1 \,\&\, \neg A_2 \,\&\, A_3) \vee$$
$$\vee (A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3).$$

შედეგი 1.5. ოპერაციათა ნებისმიერი შემდეგი სამი წყვილიდან $\&$ და $\neg$, $\vee$ და $\neg$, $\Rightarrow$ და $\neg$ და ნებისმიერი ჭეშმარიტობის f ფუნქციისათვის არსებობს პროპოზიციული ფორმა, რომელიც შეიცავს ოპერაციებს მხოლოდ ამ წყვილიდან და წარმოქმნის f-ს.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $A \vee B$ ლოგიკურად ეკვივალენტურია $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ ფორმის. მაშასადამე, წინადადება 1.3-ის მეორე ნაწილის თანახმად, ყოველი პროპოზიციული ფორმა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ $\&$, $\vee$, $\neg$ ოპერაციებს, ლოგიკურად ეკვივალენტურია ისეთი პროპოზიციული ფორმისა, რომელიც მხოლოდ $\&$ და $\neg$ ოპერაციებს შეიცავს (ეს ფორმა მიიღება ყველა $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ სახის გამოსახულების ნაცვლად $\neg(\mathcal{A} \,\&\, \neg \mathcal{B})$-ის ჩასმით).

დასამტკიცებელი შედეგის დანარჩენი ნაწილი მსგავსად მიიღება შემდეგი ტავტოლოგიებიდან:

$$A \& B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B),$$
$$A \vee B \Leftrightarrow ((\neg A) \Rightarrow B),$$
$$A \& B \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B).$$

როგორც ვნახეთ, ოპერაციათა $\neg$, & წყვილით შეიძლება გამოისახოს (შედეგი 1.5-ის აზრით) ყველა ჭეშმარიტული ფუნქცია. იგივე ეფექტის მიღწევა შეიძლება ერთი ოპერაციის $\downarrow$ (უარყოფათა კონიუნქციის) დახმარებით, რომელიც მოიცემა შემდეგი ცხრილით

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$A \downarrow B$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ორივე მცდარია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფორმები $\neg A \Leftrightarrow (A \downarrow A)$ და $(A \& B) \Leftrightarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$ არიან ტავტოლოგიები, და ამიტომ, შედეგი 1.5-ის ძალით, ერთი ოპერაცია $\downarrow$ საკმარისია ყველა ჭეშმარიტობის ფუნქციის ასაგებად.

მეორე ოპერაცია, რომელიც საკმარისია ყველა ჭეშმარიტული ფუნქციის ასაგებად, არის $|$ (უარყოფათა დიზიუნქცია ანუ შეფერის შტრიხი), განსაზღვრული შემდეგი ცხრილით

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ანუ $A|B$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ორივე ჭეშმარიტია.

წინადადება 1.6. $\downarrow$ და $|$ ბინარული ოპერაციების გარდა არ არსებობს ბინარული ოპერაცია, რომელიც ერთადერთია საკმარისი ყველა ჭეშმარიტული ფუნქციის ასაგებად.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $h(A,B)$ არის ბინარული ოპერაცია, რომელიც საკმარისია ყველა ჭეშმარიტული ფუნქციის ასაგებად. თუ $h(1,1)=1$, მაშინ ნებისმიერი პროპოზიციული ფორმა, რომელიც მხოლოდ h-ით აიგებოდა, მიიღებდა მნიშვნელობას 1, როცა მასში შემავალი ყველა ცვლადის მნიშვნელობა იქნებოდა 1. მაშასადამე, ფორმა $\neg A$ არ შეიძლება გამოისახოს მხოლოდ h-ით. ამიტომ, $h(1,1)=0$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $h(0,0)=1$, მაშასადამე, გვაქვს ცხრილი

A	B	$h(A,B)$
0	0	1
0	1	
1	0	
1	1	0

თუ ამ ცხრილის მეორე და მესამე სტრიქონებში შესაბამისად იქნებოდა 1, 1 ან 0, 0, მაშინ ჩვენ მივიღებდით ოპერაციას | ან ოპერაციას ↓. თუ ამ ადგილებზე იქნება 0, 1 ან 1, 0, მაშინ ფორმები $h(A,B) \Leftrightarrow \neg B$ და შესაბამისად, $h(A,B) \Leftrightarrow \neg A$ იქნებიან ტავტოლოგიები. ორივე შემთხვევაში h ფუნქცია გამოსახულია ¬-ით. მაგრამ ოპერაცია ¬ არაა საკმარისი განსახილველი აზრით, რადგან ერთი ცვლადის ერთადერთი ჭეშმარიტული ფუნქცია, რომელიც შეიძლება გამოისახოს ¬-ით, არის ფუნქცია, რომელიც იგივურად ტოლია თვით ცვლადის, ან ცვლადის უარყოფის. მაგრამ, მაგალითად, იგივურად 1-ის ტოლი ფუნქცია არ გამოისახება ¬-ით.

აქსიომათა სისტემა წინადადებათა აღრიცხვისათვის

ჭეშმარიტობის ცხრილები საშუალებას იძლევიან ვუპასუხოთ წინადადებათა აღრიცხვის მრავალ მნიშვნელოვან კითხვას, რომელიც ეხება ლოგიკურ ოპერაციებს, მათ შორის ასეთ კითხვებს: ა) არის თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმა ტავტოლოგია, წინააღმდეგობა ან არც ერთი და არც მეორე? ბ) ლოგიკურად გამომდინარეობს თუ არა მოცემული ფორმიდან სხვა ფორმა ან არის თუ არა ერთმანეთის ლოგიკურად ეკვივალენტური მოცემული ორი ფორმა?

ლოგიკის უფრო რთული კითხვები, რომლებსაც ჩვენ შემდეგში შევხვდებით, არ შეიძლება გადაწყდეს ჭეშმარიტობის ცხრილებით ან სხვა მსგავსი მარტივი ეფექტური მეთოდით. ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ სხვა მეთოდს – ***ფორმალურ თეორიათა მეთოდს***. როგორც ვნახეთ, წინადადებათა ალგებრაში წამოჭრილი ყველა ძირითადი საკითხი შეიძლება გადაწყდეს ჭეშმარიტობის ცხრილების დახმარებით, ამავე დროს საყურადღებოა აქსიომატური მეთოდის ილუსტრაცია ლოგიკის ამ მარტივ განშტოებაზე.

ფორმალური (აქსიომატური) თეორია $\mathcal{T}$ განსაზღვრულია, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(1) მოცემულია სიმბოლოთა რაიმე თვლადი სიმრავლე – $\mathcal{T}$ თეორიის სიმბოლოები. $\mathcal{T}$ თეორიის სიმბოლოთა სასრულ მიმდევრობას ეწოდება $\mathcal{T}$ თეორიის გამოსახულება.

(2) არსებობს $\mathcal{T}$ თეორიის გამოსახულებათა ქვესიმრავლე, რომლებსაც ეწოდება $\mathcal{T}$ თეორიის ფორმულები (ჩვეულებრივ არსებობს ეფექტური პროცედურა, რომელიც საშუალებას იძლევა მოცემული გამოსახულებისათვის განისაზღვროს არის თუ არა ის ფორმულა).

(3) გამოყოფილია ფორმულათა გარკვეული სიმრავლე, რომლებსაც $\mathcal{T}$ თეორიის აქსიომები ეწოდებათ. (ხშირად $\mathcal{T}$ თეორია ისეთია, რომ არსებობს ეფექტური პროცედურა ანუ ალგორითმი იმის გასარკვევად, არის თუ არა ესა თუ ის ფორმულა $\mathcal{T}$ თეორიის აქსიომა. ასეთი შემთხვევაში $\mathcal{T}$ ს ეფექტურად აქსიომატიზირებული თეორია ან აქსიომატური თეორია ეწოდება).

(4) არსებობს ფორმულათა შორის მიმართებათა სასრული სიმრავლე $R_1,\ldots,R_n$, რომლებსაც გამოყვანის წესები ეწოდებათ. ყოველი R_i-თვის არსებობს ნატურალური რიცხვი j ისეთი, რომ ყოველი j რაოდენობა ფორმულებისაგან შედგენილი სიმრავლისათვის და ყოველი $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის ეფექტურად წყდება საკითხი იმის შესახებ, რომ არის თუ არა მოცემული j რაოდენობა ფორმულები R_i მიმართებაში $\mathcal{A}$ ფორმულასთან, და თუ არის, მაშინ $\mathcal{A}$-ს ეწოდება მოცემულ j ფორმულათა უშუალო შედეგი R_i გამოყვანის წესით.

$\mathcal{T}$ თეორიაში გამოყვანა ეწოდება $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n$ ფორმულათა ყოველ ისეთ მიმდევრობას, რომ ნებისმიერი i-თვის A_i ფორმულა

არის ან $\mathcal{T}$ თეორიის აქსიომა, ან მიმდევრობაში მის წინ მდგომ ფორმულათა უშუალო შედეგი რომელიმე გამოყვანის წესით.

$\mathcal{T}$ თეორიის $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება $\mathcal{T}$ თეორიის თეორემა, თუ არსებობს $\mathcal{F}$-ში ისეთი გამოყვანა, რომლის ბოლო ფორმულა არის $\mathcal{A}$; ასეთ გამოყვანას ეწოდება $\mathcal{A}$ ფორმულის გამოყვანა.

$\mathcal{T}$ თეორიის ეფექტურად აქსიომატიზაციის შემთხვევაშიც კი, ანუ როცა არსებობს ეფექტური პროცედურა იმის გარკვევისა არის თუ არა მოცემული ფორმულა აქსიომა, თეორემის ცნება არაა აუცილებლად ეფექტური; რადგან, საზოგადოდ, შეიძლება არ არსებობდეს ეფექტური პროცედურა (ალგორითმი), რომელიც საშუალებას იძლევა მოცემული ფორმულისათვის გაარკვიოს, არის თუ არა ეს ფორმულა თეორემა, ანუ არსებობს თუ არა მისი გამოყვანა $\mathcal{F}$-ში. თეორიას, რომლისთვისაც ასეთი ალგორითმი არსებობს, ეწოდება ამოხსნადი (გადაწყვეტადი), წინააღმდეგ შემთხვევაში თეორიას ამოუხსნადი ეწოდება.

ვთქვათ $\mathcal{A}$ $\mathcal{T}$ თეორიის რაიმე ფორმულაა, ხოლო Γ არის ამავე თეორიის ფორმულათა რაიმე სიმრავლე. $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება $\mathcal{T}$ თეორიის Γ ფორმულათა შედეგი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n$ ფორმულათა ისეთი მიმდევრობა, რომ $\mathcal{A}_n$ არის $\mathcal{A}$, და ნებისმიერი i-თვის $\mathcal{A}_i$ არის ან $\mathcal{T}$ –ს აქსიომა, ან რაიმე ფორმულა Γ სიმრავლიდან, ან კიდევ მის წინ მდგომ ფორმულათა უშუალო შედეგი რომელიმე გამოყვანის წესის მიხედვით. ასეთ მიმდევრობას ეწოდება $\mathcal{A}$-ს ***გამოყვანა*** Γ-დან. Γ-ში შემავალ ფორმულებს ეწოდება გამოყვანის ჰიპოთეზები ან წანამძღვრები. ჩანაწერის „$\mathcal{A}$ არის Γ-ს შედეგი $\mathcal{T}$ თეორიაში" აღსანიშნავად გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. თუკი გასაგებია რომელ თეორიაზეა საუბარი, მაშინ გამოვიყენებთ $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ ჩანაწერს. თუ ფორმულათა Γ სიმრავლე სასრულია და $\Gamma = \{\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_n\}$, მაშინ ნაცვლად $\{\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_n\} \vdash \mathcal{A}$, ჩავწერთ $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_n \vdash \mathcal{A}$. თუ Γ ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ არის თეორემა. ნაცვლად $\varnothing \vdash \mathcal{A}$, მიღებულია ჩაწერა $\vdash \mathcal{A}$. ამრიგად, $\vdash \mathcal{A}$ არის შემოკლებული აღნიშვნა წინადადებისა „$\mathcal{A}$ არის თეორემა".

მოვიყვანოთ გამოყვანის ცნების რამდენიმე მარტივი თვისება.

(1) თუ $\Gamma \subseteq \Delta$ და $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, მაშინ $\Delta \vdash \mathcal{A}$.

(2) $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ-ში არსებობს სასრული ქვესიმრავლე Δ, რომლისთვისაც $\Delta \vdash \mathcal{A}$.

(3) თუ $\Delta \vdash \mathcal{A}$ და $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ ნებისმიერი $\mathcal{B}$-სთვის Δ სიმრავლიდან, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

ახლა აღვწერთ ერთ ფორმალურ აქსიომატურ თეორიას წინადადებათა აღრიცხვისათვის რომელსაც L –ით აღვნიშნავთ.

(1) **L თეორიის სიმბოლოები**. L-ის სიმბოლოებია $\neg$, $\Rightarrow$, (,) და ასოები A_i, დადებითი მთელი რიცხვებიანი ინდექსებით: $\neg$ და $\Rightarrow$ სიმბოლოებს პრიმიტიული ოპერაციები ეწოდებათ, ხოლო A_i, $i \in \mathbf{N}$ ასოებს პროპოზიციული ასოები.

(2) **L თეორიის ფორმულები.** L თეორიაში ფორმულის ცნება განისაზღვრება შემდეგი სამი პუნქტით:

(ა) ყველა პროპოზიციული ასო არის ფორმულა.

(ბ) თუ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულებია, მაშინ $(\neg \mathcal{A})$ და $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ აგრეთვე ფორმულებია.

(გ) რაიმე გამოსახულება არის L თეორიის ფორმულა მხოლოდ მაშინ თუკი ეს გამომდინარეობს (ა) და (ბ) პუნქტებიდან.

ამრიგად, L თეორიის ყოველი ფორმულა არის პროპოზიციული A_i ასოებისგან $\neg$, $\Rightarrow$ ოპერაციების გამოყენებით "სწორად აგებული" პროპოზიციული ფორმა და მხოლოდ ისინი.

(3) **L თეორიის აქსიომები**. თუ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ L თეორიის ფორმულებია, მაშინ (და მხოლოდ მაშინ) შემდეგი ფორმულები არიან L თეორიის აქსიომები:

($A1$) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$;

($A2$) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{G})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$;

($A3$) $((\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}))$.

(4) ერთადერთი გამოყვანის წესი არის modus ponens: $\mathcal{B}$ არის უშუალო შედეგი $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. შემოკლებით ამ გამოყვანის წესს აღვნიშნავთ MP- ით.

ჩვენ ვისარგებლებთ ადრე მიღებული შეთანხმებით ფრჩხილების გამოტოვების შესახებ.

აღვნიშნოთ, რომ L თეორიის აქსიომათა სიმრავლე მოცემულია მხოლოდ სამი ($A1$), ($A2$), ($A3$) აქსიომური სქემით, რომელთაგან თითოეული წარმოქმნის აქსიომათა უსასრულო სიმრავლეს. ნებისმიერი ფორმულისათვის ადვილი შესამოწმებელია, არის თუ არა

ის აქსიომა, და, ამრიგად, L არის ეფექტურად აქსიომატიზირებული თეორია.

დანარჩენი ოპერაციები შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებების დახმარებით:

($D1$) $(\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B})$ აღნიშნავს $\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})$;

($D2$) $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ აღნიშნავს $(\neg\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B}$;

($D3$) $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ აღნიშნავს $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\&(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$.

ლემა 1.7. $\vdash_L \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$ ნებისმიერი $\mathcal{A}$ ფორმულისთვის.

დამტკიცება. ავაგოთ $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$ ფორმულის გამოყვანა (დამტკიცება) L-ში.

(1) $(\mathcal{A}\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A}))\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}))\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}))$
((A2) აქსიომის სქემაში ჩასმით).

(2) $(\mathcal{A}\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A})$ ((A1) აქსიომის სქემა).

(3) $(\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}))\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})$ ((1) და (2)-დან MP-ით).

(4) $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})$ ((A1) აქსიომის სქემა.

(5) $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$ ((3) და (4)-დან MP-ით).

ხშირად მათემატიკურ მსჯელობებში რაიმე $\mathcal{B}$ დებულება მტკიცდება სხვა $\mathcal{A}$ დებულების სამართლიანობის დაშვებით, რის შემდეგ აკეთებენ დასკვნას, რომ სამართლიანია დებულება „თუ $\mathcal{A}$, მაშინ $\mathcal{B}$“. L სისტემისათვის ეს მეთოდი დაფუძნდება შემდეგი თეორემით:

წინადადება 1.8. (დედუქციის თეორემა). თუ Γ არის L თეორიის ფორმულათა რაიმე სიმრავლე, $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ კი L-ის ფორმულებია და $\Gamma,\mathcal{A}\vdash\mathcal{B}$, მაშინ $\Gamma\vdash\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_n$ არის $\Gamma\cup\{\mathcal{A}\}$-დან $\mathcal{B}$-ს გამოყვანა, სადაც $\mathcal{B}=\mathcal{B}_n$. i-ს მიმართ ინდუქციით $(1\le i\le n)$ დავამტკიცოთ, რომ $\Gamma\vdash\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}_i$. დასაწყისისათვის შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{B}_1$ იქნება ან Γ-ს ელემენტი, ან L სისტემის აქსიომა, ან ემთხვეოდეს $\mathcal{A}$-ს (ცხადია არაა გამორიცხული, რომ რომელიმე ორი ამ შემთხვევათაგანი ან სამივე ერთდროულად შესრულდეს). აქსიომათა (A1) სქემის ძალით $\mathcal{B}_1\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}_1)$ არის აქსიომა. ამიტომ პირველ

ორ შემთხვევაში MP-ის ძალით $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1$. მესამე შემთხვევაში ანუ, როცა $\mathcal{B}_1$ არის $\mathcal{A}$, ლემა 1.7-ის ძალით გვაქვს $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1$, და, მაშასადამე, $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_1$. ამით შემთხვევა $i=1$ ამოწურულია. ახლა დავუშვათ, რომ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_k$ ნებისმიერი $k < i$. $\mathcal{B}_i$-თვის გვაქვს ოთხი შემთხვევიდან ერთ-ერთი: $\mathcal{B}_i$ არის აქსიომა, ან $\mathcal{B}_i \in \Gamma$, ან $\mathcal{B}_i$ არის $\mathcal{A}$, ან $\mathcal{B}_i$ გამომდინარეობს MP-ით $\mathcal{B}_j$ და $\mathcal{B}_m$ ფორმულებიდან, სადაც $j < i$, $m < i$ და $\mathcal{B}_m$-ს აქვს სახე $\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i$. პირველ სამ შემთხვევაში $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$ მტკიცდება ისე, როგორც $i=1$ შემთხვევაში. ბოლო შემთხვევაში გამოვიყენოთ ინდუქციური დაშვება, რომლის თანახმად $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$ და $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i)$. (A2) აქსიომის სქემის თანახმად, $\vdash (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i)) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i))$. მაშასადამე, MP-ს ძალით $\Gamma \vdash (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ და, კვლავ MP-ს ძალით, $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$. ამრიგად, ჩვენი დამტკიცება ინდუქციის გამოყენებით, დამთავრებულია, და $i=n$-თვის მივიღებთ დასამტკიცებელ წინადადებას.

შედეგი 1.9.
(i) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.
(ii) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$, $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.

დამტკიცება. (i)
(a) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, ჰიპოთეზა
(b) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, ჰიპოთეზა
(c) $\mathcal{A}$, ჰიპოთეზა
(d) $\mathcal{B}$ (a), (c) , MP
(e) $\mathcal{C}$ (b), (d), MP.
ამრიგად, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{C}$. აქედან დედუქციის თეორემით, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.
(ii) დაამტკიცეთ დამოუკიდებლად.

ლემა 1.10. ნებისმიერი $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულებისათვის, შემდეგი ფორმულები არიან *L*-ის თეორემები.
(a) $\neg\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$;
(b) $\mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg \mathcal{A}$;
(c) $\neg \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$;

(d) $(\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg\, \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$;

(e) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\, \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A})$;

(f) $\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\, \mathcal{B} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}))$;

(g) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow ((\neg\, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B})$.

ეს ლემა მტკიცდება დედუქციის თეორემის გამოყენებით.

ჩვენი შემდეგი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ L თეორიის ფორმულა თეორემაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ტავტოლოგიაა. ამ დებულების ერთი ნახევარი ნათელია. ანუ სამართლიანია შემდეგი წინადადება.

წინადადება 1.11. L თეორიის ყოველი თეორემა არის ტავტოლოგია.

დამტკიცება. სავარჯიშოს სახით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ L თეორიის ყოველი აქსიომა არის ტავტოლოგია. წინადადება 1.1 ძალით MP წესის გამოყენება ტავტოლოგიებზე გვაძლევს ტავტოლოგიას. ამიტომ L თეორიის ნებისმიერ გამოყვანაში შემავალი ნებისმიერი ფორმულა ტავტოლოგიაა და მაშასადამე, L თეორიის ყოველი თეორემაც არის ტავტოლოგია.

შემდეგი ლემა გამოყენებული იქნება იმის დასამტკიცებლად, რომ ყოველი ტავტოლოგია ამავე დროს არის L-ის თეორემა.

ლემა 1.12. ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის ფორმულა, $B_1,\ldots,B_n$ კი $\mathcal{A}$-ში შემავალი პროპოზიციული ცვლადებია, და ვთქვათ მოცემულია $B_1,\ldots,B_n$-ის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა რაიმე სისტემა. ვთქვათ B_i' არის B_i, თუ ამ სისტემაში B_i ღებულობს მნიშვნელობას 1 და $\neg B_i$, თუ B_i ღებულობს მნიშვნელობას 0, და ბოლოს ვთქვათ $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$, თუ ცვლადების მოცემულ მნიშვნელობებზე $\mathcal{A}$-ს მნიშვნელობა არის 1, და $\neg \mathcal{A}$, თუ $\mathcal{A}$-ს მნიშვნელობა არის 0. მაშინ $B_1',\ldots,B_n' \vdash \mathcal{A}'$.

თუ, მაგალითად, $\mathcal{A}$ აღნიშნავს $\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$ მაშინ, ამ ფორმულის ჭეშმარიტობის ცხრილის ყოველი სტრიქონისათვის

A_2	A_5	$\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ლემა 1.12 ამტკიცებს სათანადო გამოყვანის ფაქტს. კერძოდ მესამე სტრიქონს შეესაბამება დებულება $A_2, \neg A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$, ხოლო მეოთხეს $A_2,\ A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$.

დამტკიცება. დამტკიცება მოხდება ინდუქციით $\mathcal{A}$-ში ოპერაციათა n რიცხვის მიხედვით. თუ $n=0$, მაშინ $\mathcal{A}$ არის უბრალოდ პროპოზიციული ცვლადი B_1 და ლემა დაიყვანება $B_1 \vdash B_1$ და $\neg B_1 \vdash \neg B_1$ ტრივიალური წინადადებების დამტკიცებაზე. ახლა დავუშვათ, რომ ლემა სამართლიანია ნებისმიერი $j < n$-სთვის.

შემთხვევა 1. $\mathcal{A}$-ს აქვს სახე $\neg\mathcal{B}$. ცხადია $\mathcal{B}$-ში ოპერაციათა შემოსვლების რიცხვი ნაკლებია n-ზე.

შემთხვევა 1a. ვთქვათ $\mathcal{B}$-ში შემავალი ცვლადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობების მოცემულ ერთობლიობაზე $\mathcal{B}$-ს მნიშვნელობა არის 1. მაშინ $\mathcal{A}$-ს მნიშვნელობა იქნება 0. ამრიგად, $\mathcal{B}'$ არის $\mathcal{B}$, ხოლო $\mathcal{A}'$ არის $\neg\mathcal{A}$. ინდუქციური დაშვებით გვაქვს $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{B}$. მაშასადამე, ლემა 1.1 (b) და MP ძალით $B_1', \ldots, B_n' \vdash \neg\neg\mathcal{B}$. მაგრამ $\neg\neg\mathcal{B}$ არის $\mathcal{A}'$.

შემთხვევა 1b. ვთქვათ $\mathcal{B}$-ს მნიშვნელობა არის 0; მაშინ $\mathcal{B}'$ არის $\neg\mathcal{B}$, ხოლო $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$. ინდუქციური დაშვებით გვაქვს, რომ $B_1', \ldots, B_n' \vdash \neg\mathcal{B}$, რაც მოითხოვება, რადგან $\neg\mathcal{B}$ არის $\mathcal{A}'$.

შემთხვევა 2. $\mathcal{A}$-ს აქვს სახე $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$. მაშინ ლოგიკურ ოპერაციათა შემოსვლის რიცხვი $\mathcal{B}$-ში და $\mathcal{C}$-ში, ნაკლებია ვიდრე $\mathcal{A}$-ში. ამიტომ ინდუქციური დაშვების ძალით, $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{B}'$ და $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{C}'$.

შემთხვევა 2a. **$\mathcal{B}$ ღებულობს მნიშვნელობას 0**. მაშინ $\mathcal{A}$ მიიღებს მნიშვნელობას 1, და $\mathcal{B}'$ არის $\neg\mathcal{B}$, ხოლო $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$. ამრიგად, $B_1', \ldots, B_n' \vdash \neg\mathcal{B}$ და, ლემა 1.10 (c)-ით, $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, მაგრამ $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ არის $\mathcal{A}$.

შემთხვევა 2b. **$\mathcal{C}$ ღებულობს მნიშვნელობას 1.** მაშასადამე, $\mathcal{A}$ მიიღებს მნიშვნელობას 1 და $\mathcal{C}'$ და $\mathcal{C}$, ხოლო $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$. გვაქვს $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{C}$, და მაშინ, (A1) აქსიომის სქემით, $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, სადაც $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ ემთხვევა $\mathcal{A}'$-ს.

შემთხვევა 2c. $\mathcal{B}$ ღებულობს მნიშვნელობას 1 და $\mathcal{C}$ ღებულობს მნიშვნელობას 0. მაშინ $\mathcal{A}'$ არის $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{B}'$ არის $\mathcal{B}$ და $\mathcal{C}'$ არის $\neg\mathcal{C}$. გვაქვს $B_1', \ldots, B_n' \vdash \mathcal{B}$ და $B_1', \ldots, B_n' \vdash \neg\mathcal{C}$. აქედან,

ლემა 1.10(f)-ით, მივიღებთ $B'_1,\ldots,B'_n \vdash \neg(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})$, სადაც $\neg(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})$ არის $\mathcal{A}'$.

წინადადება 1.13. (თეორემა სისრულის შესახებ). თუ L თეორიის $\mathcal{A}$ ფორმულა არის ტავტოლოგია, მაშინ ის არის თეორემა.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\mathcal{A}$ არის ტავტოლოგია და $B_1,\ldots,B_n$ $\mathcal{A}$-ში შემავალი პროპოზიციული ცვლადები. $B_1,\ldots,B_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველ ერთობლიობაზე ლემა 1.12-ის ძალით გვაქვს: $B'_1,\ldots,B'_n \vdash \mathcal{A}$. ამიტომ იმ შემთხვევაში, თუ B_n ღებულობს მნიშვნელობას 1, ჩვენ გამოვიყენებთ ლემა 1.12-ს და მივიღებთ $B'_1,\ldots,B'_{n-1},B_n \vdash \mathcal{A}$. ხოლო როცა B_n ღებულობს მნიშვნელობას 0, იგივე ლემით მივიღებთ $B'_1,\ldots,B'_n,\neg B_n \vdash \mathcal{A}$. აქედან დედუქციის თეორემის გამო გვაქვს: $B'_1,\ldots,B'_{n-1} \vdash B_n \Rightarrow \mathcal{A}$ და $B'_1,\ldots,B'_{n-1} \vdash \neg B_n \Rightarrow \mathcal{A}$. გამოვიყენოთ ახლა ლემა 1.10(g) და მივიღებთ $B'_1,\ldots,B'_{n-1} \vdash \mathcal{A}$. ზუსტად ასევე, ორი შემთხვევის განხილვით, როცა B_{n-1} ღებულობს მნიშვნელობებს 1 და 0 და ლემა 1.12-ის, დედუქციის თეორემის და ლემა 1.10(g) – გამოყენებით ჩვენ გამოვრიცხავთ B_{n-1}-ს და მივიღებთ, რომ $B'_1,\ldots,B'_{n-2} \vdash \mathcal{A}$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, n ასეთი ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ, რომ $\vdash \mathcal{A}$.

შედეგი 1.14. თუ $\mathcal{B}$ გამოსახულება შეიცავს ოპერაციებს $\neg$, $\Rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ და არის შემოკლება (იხ. განსაზღვრებები D1-D3) L თეორიის რაიმე $\mathcal{A}$ ფორმულისა, მაშინ $\mathcal{B}$ არის ტავტოლოგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ არის L-ის თეორემა.

დამტკიცება. D1-D3 განსაზღვრებებით შემოტანილი გამოსახულებები წარმოადგენენ პროპოზიციულ ფორმებს, რომლებიც ლოგიკურად ეკვივალენტურია მათ მიერ აღნიშნული პროპოზიციული ფორმების. მაშასადამე, წინადადება 1.3-ის ძალით, $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ლოგიკურად ეკვივალენტურია და ამიტომ $\mathcal{B}$ არის ტავტოლოგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ არის ტავტოლოგია. ახლა დარჩა ვისარგებლოთ წინადადება 1.13-ით.

შედეგი 1.15. L სისტემა არაწინააღმდეგობრივია, ანუ არ არსებობს ისეთი ფორმულა $\mathcal{A}$, რომ $\mathcal{A}$ და $\neg\mathcal{A}$ იყოს თეორემები L-ში.

დამტკიცება. წინადადება 1.11-ის ძალით, L-თეორიის ყოველი თეორემა არის ტავტოლოგია. ტავტოლოგიის უარყოფა არაა ტავტოლოგია. მაშასადამე, შეუძლებელია, რომელიმე $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის $\mathcal{A}$ და $\neg\mathcal{A}$ ორივე იყოს L თეორიის თეორემა.

L-ის არაწინააღმდეგობრიობიდან გამომდინარეობს ისეთი ფორმულის არსებობა, რომელიც არ არის L-ის თეორემა (მაგალითად, ნებისმიერი თეორემის უარყოფა). მეორე მხრივ, L-ის არაწინააღმდეგობრიობა შეიძლებოდა გამოგვეყვანა უშუალოდ იმ ფაქტიდან, რომ არსებობს L თეორიის ფორმულა, რომელიც არ არის თეორემა. მართლაც, ლემა 1.10 (c)-დან გვაქვს $\vdash_L \neg\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, და, მაშასადამე, თუ L თეორია წინააღმდეგობრივია, ანუ თუ რაიმე $\mathcal{A}$ ფორმულა გამოყვანადია L-ში მის უარყოფასთან ე.ი. $\neg\mathcal{A}$ ერთად, მაშინ $\vdash_L \neg\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$-ისა და MP-ს ძალით, L-ში გამოყვანადი იქნება ყოველი $\mathcal{B}$ ფორმულა. თეორიას, რომელშიდაც არსებობენ ფორმულები, რომლებიც არ არიან თეორემები, ხშირად უწოდებენ აბსოლუტურად არაწინააღმდეგობრივს. ეს განსაზღვრა მიესადაგება იმ თეორიებსაც, რომლებიც არ შეიცავენ უარყოფის ოპერაციას.

დამოუკიდებლობა. მრავალმნიშვნელობიანი ლოგიკები

მოცემული აქსიომატური თეორიის ყველა აქსიომათა სიმრავლის X ქვესიმრავლეს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ X-სიმრავლეში შემავალი რომელიმე აქსიომა არ შეიძლება გამოყვანილ იქნეს ამ თეორიის გამოყვანის წესებით X - სიმრავლეში არშემავალი აქსიომებიდან.

წინადადება 1.16. აქსიომათა (A1) - (A3) სქემებიდან თითოეული არის დამოუკიდებელი.

დამტკიცება.

(a) (A1)-ის დამოუკიდებლობა. განვიხილოთ შემდეგი ცხრილები:

A	¬A

A	B	$A \Rightarrow B$

0	1	0	0	0
1	1	1	0	2
2	0	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	2
		1	2	0
		2	2	0

$\mathcal{A}$ ფორმულაში შემავალი ცვლადების 0,1,2 მნიშვნელობათა ყოველი განაწილებისათვის, ეს ცხრილები საშუალებას გვაძლევენ ვიპოვოთ $\mathcal{A}$ ფორმულის შესაბამისი მნიშვნელობა.
მართლაც, თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა ყოველთვის ღებულობს მნიშვნელობას 0, მაშინ მას ვუწოდოთ გამოყოფილი. Modus ponens-ი ინახავს გამოყოფის თვისებას. მკითხველი ამაში თავად დარწმუნდება იმის ჩვენებით, რომ თუ ფორმულები $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ და $\mathcal{A}$ გამოყოფილებია, მაშინ $\mathcal{B}$ ფორმულაც იქნება გამოყოფილი. ასევე არაა ძნელი იმის შემოწმება, რომ (A2) ან (A3) სქემებიდან მიღებული ყოველი აქსიომა არის გამოყოფილი, მაშასადამე გამოყოფილი იქნება ყოველი ფორმულა, რომელიც გამოიყვანება (A2) და (A3)-დან modus ponens-ით. ამასთანავე, ფორმულა $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)$, რომელიც არის (A1)-ის კერძო შემთხვევა, არ არის გამოყოფილი, რადგან ის ღებულობს მნიშვნელობას 2, როცა A_1-ის მნიშვნელობაა 1 და A_2-ის მნიშვნელობა 2. ამიტომ ცხადია (A1) სქემა დამოუკიდებელია

(b) (A2)-ის დამოუკიდებლობა. განვიხილოთ შემდეგი ცხრილები:

A	¬ A	A	B	$A \Rightarrow B$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	1
		1	2	0
		2	2	0

ყოველ ფორმულას, რომელიც ამ ცხრილების თანახმად, ყოველთვის ღებულობს მნიშვნელობას 0, ეწოდება გროტესკული. Modus ponens ინახავს გროტესკულობას და (A1) და (A3)-ის ყოველი კერძო შემთხვევა არის გროტესკული (შეამოწმეთ თვითონ). ამასთანავე, (A2) სქემის კერძო შემთხვევა $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow \Rightarrow A_2) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))$ არ არის გროტესკული, რადგან ღებულობს მნიშვნელობას 2, როცა A_1, A_2, A_3-ის მნიშვნელობებია შესაბამისად 0, 0 და 1.

(c) (A3)-ის დამოუკიდებლობა. ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის ნებისმიერი ფორმულა და $h(\mathcal{A})$ არის ფორმულა, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}$-დან, თუ $\mathcal{A}$-ში წავშლით ¬-ის ყოველ შემოსვლას. (A1) და (A2) სქემების ყოველი კერძო შემთხვევისათვის $\mathcal{A}$ $h(\mathcal{A})$ არის ტავტოლოგია. Modus ponens-ი ინახავს თვისებას $\mathcal{A}$-ს, რომ $h(\mathcal{A})$ იყოს ტავტოლოგია, რადგან თუ $h(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ და $h(\mathcal{A})$ ტავტოლოგიებია, მაშინ $h(\mathcal{B})$ არის ტავტოლოგია (საკმარისია მხოლოდ შევნიშნოთ, რომ $h(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ ემთხვევა $h(\mathcal{A}) \Rightarrow h(\mathcal{B})$). მაშასადამე, ყოველ $\mathcal{A}$ ფორმულას, რომელიც გამოყვანა და (A1)-(A2)-დან modus ponens-ით, $h(\mathcal{A})$ აქვს ტავტოლოგია. მაგრამ $h((\neg A_1 \Rightarrow \neg A_1) \Rightarrow ((\neg A_1 \Rightarrow \neg A_1) \Rightarrow A_1))$ ემთხვევა $(A_1 \Rightarrow A_1) \Rightarrow ((A_1 \Rightarrow A_1) \Rightarrow A_1)$, ხოლო ეს უკანასკნელი არ არის ტავტოლოგია. მაშასადამე $((\neg A_1 \Rightarrow \neg A_1) \Rightarrow ((\neg A_1 \Rightarrow A_1) \Rightarrow A_1)$, (A3)-ის კერძო შემთხვევა, არ გამოიყვანება (A1) და (A2)-დან modus ponens-ით.

(A1)-(A3) აქსიომათა სქემების დამოუკიდებლობის დამტკიცებისათვის გამოყენებული იდეის განზოგადოებას მივყავართ მრავალმნიშვნელობიანი ლოგიკის შემდეგ ცნებამდე. $0,1,\cdots,n$ რიცხვებს ვუწოდოთ „ჭეშმარიტული მნიშვნელობები“ და ავირჩიოთ რაიმე m რიცხვი პირობით $0 \le m < n$. რიცხვებს $0,1,\cdots,m$ ვუწოდებთ გამოყოფილ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებს. ავიღოთ რაიმე სასრული რიცხვი „ჭეშმარიტული ცხრილების“, რომლებიც წარმოადგენენ $\{0,1,\cdots,n\}$ სიმრავლის თავის თავში გადასახვათა ფუნქციებს. ყოველი ცხრილისათვის შემოვიტანოთ ნიშანი, რომელსაც ვუწოდებთ ამ ცხრილის შესაბამის ოპერაციას. ამ ოპერაციათა და პროპოზიციული ასოების დახმარებით შეგვიძლია ავაგოთ პროპოზიციული ფორმები. ყოველი ასეთი ფორმა განსაზღვრავს გარკვეულ „ჭეშმარიტობის ფუნქციას“, რომელიც $\{0,1,\cdots,n\}$ სიმ-

რავლეს გადასახავს თავის თავში. პროპოზიციულ ფორმას, რომელიც ღებულობს მხოლოდ გამოყოფილ მნიშვნელობებს, ეწოდება გამოყოფილი. ამბობენ, რომ რიცხვები n, m და ძირითადი ჭეშმარიტობის ცხრილები განსაზღვრავენ გარკვეულ (სასრულ) მრავალმნიშვნელობიან ლოგიკას M. აქსიომატურ თეორიას, რომელიც შეიცავს M ლოგიკის პროპოზიციულ ასოებს და ოპერაციებს, ეწოდება M ლოგიკისათვის შესაბამისი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ თეორიის თეორემათა სიმრავლე ემთხვევა M ლოგიკის გამოყოფილ პროპოზიციულ ფორმათა სიმრავლეს (ცხადია, ყველა ეს ცნება შეიძლება განზოგადოვდეს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობების უსასრულობის შემთხვევაში).

ამ თავში შესწავლილია 2-მნიშვნელობიანი ლოგიკა, რომელიც შეესაბამება შემთხვევას $n=1$, $m=0$ და § 1-ში შემოტანილ ჭეშმარიტობის ცხრილებს $\neg$ და $\Rightarrow$ ოპერაციებისათვის. ამ ლოგიკის გამოყოფილ ფორმულებს ეწოდებოდათ ტავტოლოგიები.

წინადადებები 1.11 და 1.13 ადგენენ იმ ფაქტს, რომ L თეორია არის შესაბამისი აქსიომატური თეორია ამ ლოგიკისათვის. ორი სამმნიშვნელობიანი ლოგიკა იყო გამოყენებული (A1)-(A3) აქსიომათა სქემების დამოუკიდებლობის დამტკიცების დროს.

აქსიომათა სხვა სისტემები

აქსიომათა L სისტემა ძალიან მარტივია, მიუხედავად ამისა არსებობს მრავალი სხვა სისტემა, რომლებიც ასევე კარგად მუშაობენ.

ნაცვლად $\neg$ და $\Rightarrow$ ოპერაციებისა შეიძლება გამოყენებული იყოს ოპერაციათა სხვა ერთობლიობა, ოღონდ მათი საშუალებით უნდა იყოს შესაძლებელი ყველა სხვა ოპერაციის გამოსახვა.

მაგალითები. L_1: საწყისი ოპერაციებია $\vee$, $\neg$. $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ არის $\neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$-ს შემოკლება. აქ არის ოთხი აქსიომის სქემა: (1) $\mathcal{A}\vee\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$; (2) $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$; (3) $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{B}\vee\mathcal{A}$; (4) $(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\vee\mathcal{C})$. ერთადერთი გამოყვანის წესია – modus ponens.

L_2: ოპერაციებია: & და $\neg$. $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ არის $\neg(\mathcal{A}\&\neg\mathcal{B})$ შემოკლება. სამი აქსიომის სქემა: (1) $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{A}\&\mathcal{A})$; (2) $(\mathcal{A}\&\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{A}$; (3) $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\neg(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\Rightarrow\neg(\mathcal{C}\&\mathcal{A}))$. Modus ponens არის ერთადერთი გამოყვანის წესი.

L_3: ეს სისტემა ძალიან ჰგავს L-ს; განსხვავება იმაშია, რომ ნაცვლად სამი (A1)-(A3) აქსიომის სქემისა აქ არის სამი კონკრეტული აქსიომა: (1) $A_1\Rightarrow(A_2\Rightarrow A_1)$; (2) $(A_1\Rightarrow(A_2\Rightarrow A_3))\Rightarrow$

$((A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))$; (3) $(\neg A_2 \Rightarrow \neg A_1) \Rightarrow ((\neg A_2 \Rightarrow A_1) \Rightarrow A_2)$, სამაგიეროდ გარდა modus ponens-ისა არის კიდევ ერთი გამოყვანის წესი – ჩასმის წესი, რომელიც უშვებს მოცემულ ფორმულაში მოცემული პროპოზიციული ცვლადის ყველა შემოსვლის ნაცვლად ნებისმიერი ფორმულის ჩასმას.

პირველი რიგის თეორიები

§ 1. კვანტორები

არსებობენ ისეთი სახის ლოგიკური მსჯელობები, რომლებიც შეუძლებელია დაფუძნებულ იქნან წინადადებათა აღრიცხვის ჩარჩოებში. ასეთი მსჯელობების მაგალითებია:

(1) მარტინის ყოველი მეგობარი არის ჯონის მეგობარი. პიტერი არ არის ჯონის მეგობარი. მაშასადამე, პიტერი არ არის მარტინის მეგობარი.

(2) ყველა ადამიანი უკვდავია. სოკრატი ადამიანია. მაშასადამე, სოკრატი უკვდავია.

(3) ყველა ადამიანი ცხოველია. მაშასადამე, ადამიანის თავი არის ცხოველის თავი.

ამ დასკვნათა კორექტულობა ეყრდნობა არა მხოლოდ მათში შემავალ წინადადებებს შორის ჭეშმარიტულ-ფუნქციონალურ მიმართებებს, არამედ თვით წინადადებების შინაგან სტრუქტურებსაც და ასევე ისეთი გამოთქმების გაგებას, როგორიცაა „ყველა“, „ყოველი“ და ა.შ.

იმისათვის, რომ რთულ წინადადებათა (გამონათქვამთა) სტრუქტურა გავხადოთ უფრო ცხადი, ხელსაყრელია ზოგიერთი გამონათქვამისათვის შემოვიტანოთ სპეციალური აღნიშვნა. თუ $P(x)$ აღნიშნავს, რომ x-ს აქვს P თვისება, მაშინ შევთანხმდეთ, რომ $\forall x P(x)$ აღნიშნავს წინადადებას: „ყოველი x საგნისთვის P თვისება შესრულებულია“, ან „ყველა x აქვს P თვისება“. ჩანაწერი $\exists x P(x)$ აღნიშნავს, რომ „არსებობს x საგანი, რომელსაც აქვს P თვისება“. გამოსახულებაში $\forall x P(x)$ $\forall x$ ნაწილს ეწოდება ზოგა-დობის კვანტორი, ხოლო $\exists x P(x)$ გამოსახულებაში $\exists x$ ნაწილს ეწოდება არსებობის კვანტორი.

მაგალითები. ვთქვათ m, j, p, s, $F(x,y)$, $M(x)$, $I(x)$, $A(x)$, $h(x)$ შესაბამისად აღნიშნავენ „მარტინი“, „ჯონი“, „პიტერი“, „სოკრატი“, „ x არის y-ის მეგობარი“, „x არის ადამიანი“, „x

უკვდავია“, „x არის ცხოველი“, „თავი x“ მაშინ (1)-(3) მსჯელობები შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

(1′) $$\frac{(\forall x)(F(x,m) \Rightarrow F(x,j)) \quad \neg F(p,j)}{\neg F(p,m)};$$

(2′) $$\frac{(\forall x)(M(x) \Rightarrow I(x)) \quad M(s)}{I(s)};$$

(3′) $$\frac{(\forall x)(M(x) \Rightarrow A(x))}{(\forall x)((\exists y)(x = h(y) \,\&\, M(y)) \Rightarrow (\exists y)(x = h(y) \,\&\, A(y))}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ დასკვნათა სამართლიანობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი კონკრეტული აზრი აქვთ სიმბოლოებს m, j, p, s, F, M, I, A, h.

შესაძლებელია დასკვნები (ისეთები, როგორიცაა (1)-(3)), რომლებიც შეიცავენ კვანტორებს, წარმოვადგინოთ აბსტრაქტული ფორმით, როგორც ეს გაკეთდა (1′)-(3′)-ში. ამ მიზნით გამოვიყენებთ მძიმეებს, ფრჩხილებს, პროპოზიციულ ოპერაციებს $\neg$, $\Rightarrow$ და $\forall$ სიმბოლოს, საგნობრივ (ინდივიდურ) ცვლადებს $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, საგნობრივ (ინდივიდურ) მუდმივებს $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, პრედიკატულ ასოებს $A_1^1, A_1^2, \cdots A_k^j, \cdots$ და ფუნქცონალურ ასოებს $f_1^1, f_1^2, \cdots f_k^j, \cdots$ პრედიკატული ან ფუნქციონალური ასოების ზედა ინდექსი მიუთითებს არგუმენტთა რიცხვს, ხოლო ქვედა ინდექსი გამოიყენება ერთი და იგივე რაოდენობა არგუმენტების მქონე ასოთა განსასხვავებლად. ზოგიერთ მოყვანილ მაგალითებში m, j, p, s არიან საგნობრივი მუდმივები, F და = ორადგილიანი პრედიკატული ასოები (ანუ ორარგუმენტიანი ასოები), h ასრულებდა ერთადგილიანი ფუნქციონალური ასოს როლს.

საგნობრივ ცვლადებზე და მუდმივებზე გამოყენებული ფუნქციონალური ასოები წარმოქმნიან ტერმებს. უფრო ზუსტად:

(a) ყოველი საგნობრივი ცვლადი ან საგნობრივი კონსტანტა არის ტერმი.

(b) თუ f_i^n არის ფუნქციონალური ასო და $t_1, \cdots, t_n$ – ტერმები, მაშინ $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ არის ტერმი.

(c) გამოსახულება არის ტერმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ეს გამომდინარეობს (a) და (b) წესებიდან.

ტერმებზე გამოყენებული პრედიკატული ასოები წარმოქმნიან ელენტარულ ფორმულებს, ან უფრო ზუსტად: თუ A_i^n არის პრედიკატული ასო, ხოლო $t_1,\cdots,t_n$ – ტერმები, მაშინ $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ არის ელემენტარული ფორმულა.

პრედიკატთა აღრიცხვის ფორმულები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

(a) ყოველი ელემენტარული ფორმულა არის ფორმულა.

(b) თუ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულებია და y არის საგნობრივი ცვლადი, მაშინ $(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ და $(\forall y\,\mathcal{A})$ გამოსახულებიდან თითოეული არის ფორმულა.

(c) გამოსახულება არის ფორმულა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს გამომდინარეობს (a) და (b) წესებიდან.

გამოსახულებაში $(\forall y\,\mathcal{A})$ „$\mathcal{A}$“ ეწოდება $\forall y$ კვანტორის მოქმედების არე. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ შეიძლება არ შეიცავდეს y ცვლადს, ასეთ შემთხვევაში ჩვეულებრივ ვთვლით, რომ შინაარსობრივი აზრი $\mathcal{A}$ და $(\forall y\,\mathcal{A})$ ერთი და იგივეა. გამოსახულებები $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$ ისევე განისაზღვრებიან, როგორც წინადადებათა (გამონათქვამთა) აღრიცხვაში. არ არის აუცილებლობა იმისა, რომ ძირითად სიმბოლოთა შორის იყოს ჩართული არსებობის კვანტორის სიმბოლო $\exists$, რადგან $\exists x\,\mathcal{A}$ შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც $(\neg(\forall x(\neg\mathcal{A})))$ გამოსახულების შემოკლებული ჩაწერა. ცხადია, ასეთი განსაზღვრა სწორად ასახავს კვანტორთა შინაარსობრივ აზრს.

ფრჩხილების ჩამოშორების შესახებ წინადადებათა აღრიცხვაში არსებული შეთანხმება ძალაში რჩება. დამატებით ჩავთვლით, რომ კვანტორების $\forall y$ და $\exists y$ სიძლიერით განლაგებული არიან $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ და $\vee$, $\&$, $\neg$ ოპერაციებს შორის.

მაგალითები. ნაცვლად $((\forall x_1 A_1^1(x_1))\Rightarrow A_1^2(x_1,x_2))$ ვწერთ $\forall x_1 A_1^1(x_1)\Rightarrow A_1^2(x_1,x_2)$, ხოლო ნაცვლად $(\forall x_1(A_1^1(x_1)\vee A_1^2(x_1,x_2)))$ ვწერთ $\forall x_1 A_1^1(x_1)\vee A_1^2(x_1,x_2)$.

შევთანხმდეთ ასევე, რომ გამოვტოვებთ ფრჩხილებს, რომლებშიც მოთავსებულია ფორმულა $\theta\mathcal{A}$ $\theta_1(\theta\mathcal{A})$ სახის ფორმულებში, სადაც θ და θ_1 – ნებისმიერი კვანტორებია.

მაგალითი. ნაცვლად ფორმულისა $(\forall x_1(\exists x_2(\forall x_4 A_1^3(x_1,x_2,x_4))))$ ვწერთ $\forall x_1\exists x_2\forall x_4 A_1^3(x_1,x_2,x_4)$.

შემოვიყვანოთ ფორმულაში ცვლადის თავისუფალი და დაბმული შემოსვლების ცნებები; x ცვლადის შემოსვლას მოცემულ ეწოდება დაბმული, თუ x არის ამ ფორმულაში შემავალი $\forall x$ კვანტორის ცვლადი ან იმყოფება ამ ფორმულაში შემავალი $\forall x$ კვანტორის მოქმედების არეში; წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემულ ფორმულაში x ცვლადის შემოსვლას ეწოდება თავისუფალი.

მაგალითები. (i) $A_1^2(x_1, x_2)$;

(ii) $A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow \forall x_1 A_1'(x_1)$;

(iii) $\forall x_1 (A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow \forall x_1 A_1'(x_1))$.

(i) ფორმულაში x_1 ცვლადის ერთადერთი შემოსვლა არის თავისუფალი. (ii) ფორმულაში x_1 ცვლადის პირველი შემოსვლა არის თავისუფალი, ხოლო მეორე და მესამე – დაბმული. x_1 – ცვლადის ყველა შემოსვლა (III) ფორმულაში არის დაბმული. x_2 ცვლადის ყოველი შემოსვლა სამივე ფორმულაში არის თავისუფალი. შევნიშნოთ, რომ ერთსა და იმავე ცვლადს ერთსა და იგივე ფორმულაში შეიძლება ჰქონდეს, როგორც თავისუფალი, ასევე დაბმული შემოსვლები (მაგალითად, (II)-ში). შევნიშნოთ ასევე, რომ ცვლადის შემოსვლა შეიძლება იყოს დაბმული რაიმე $\mathcal{A}$ ფორმულის რაიმე ქვეფორმულაში და ამავე დროს თავისუფალი $\mathcal{A}$ ფორმულის რაიმე ქვეფორმულაში; მაგალითად, x_1 ცვლადის პირველი შემოსვლა არის თავისუფალი (ii) ფორმულაში. მაგრამ (ii) ფორმულა არის (iii) ფორმულის ქვეფორმულა, სადაც x_1-ის იგივე შემოსვლა დაბმულია.

ცვლადს ეწოდება თავისუფალი (დაბმული) მოცემულ ფორმულაში, თუ არსებობენ ამ ფორმულაში მისი თავისუფალი (დაბმული) შემოსვლები. მაშასადამე, ერთსა და იგივე ფორმულაში ერთდროულად ცვლადი შეიძლება იყოს თავისუფალი და დაბმული. ასეთია, მაგალითად, x_1 ცვლადი (ii) მაგალითში.

ვთქვათ $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ – ცვლადებია და $\mathcal{A}$ არის ფორმულა. არ გავამახვილებთ ყურადღებას იმაზე, რომ არიან თუ არა ეს ცვლადები თავისუფალი $\mathcal{A}$-ში და არსებობს თუ არა $\mathcal{A}$-ში სხვა თავისუფალი ცვლადები, $\mathcal{A}$ ფორმულის აღსანიშნავად ზოგჯერ გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\mathcal{A}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ იმისათვის, რომ შემდეგში $\mathcal{A}(t_1, \cdots, t_k)$-ით აღვნიშნოთ $\mathcal{A}$-ში $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ ცვლადების შემოსვ-

ლების (თუ ასეთები არსებობენ!) ნაცვლად $t_1,\cdots,t_k$ ტერმების ჩასმის შედეგი.

t ტერმს ეწოდება თავისუფალი x_i ცვლადისათვის $\mathcal{A}$ ფორმულაში, თუ $\mathcal{A}$-ში x_i-ს არცერთი თავისუფალი შემოსვლა არ იმყოფება არცერთი $\forall x_j$ კვანტორის მოქმედების არეში, სადაც x_j არის t-ში შემავალი ცვლადი.

მაგალითები. (a) x_j ტერმი თავისუფალია x_i-სათვის $A_1'(x_i)$-ში, მაგრამ არაა თავისუფალი x_i-სთვის $\forall x_j A_1^1(x_i)$-ში. ტერმი $f_1^2(x_1,x_3)$ თავისუფალია x_1-სთვის $\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)\Rightarrow A_1^1(x_1)$-ში, მაგრამ არაა თავისუფალი x_1-სთვის $\exists x_3\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)\Rightarrow A_1^1(x_1)$-ში.

(b) ყოველი ტერმი, რომელიც არ შეიცავს ცვლადებს, თავისუფალია ნებისმიერი ცვლადისათვის ნებისმიერ ფორმულაში.

(c) t ტერმი თავისუფალია ნებისმიერი ცვლადისათვის $\mathcal{A}$ ფორმულაში, თუ t ტერმის არცერთი ცვლადი არ არის დაბმული ცვლადი $\mathcal{A}$-ში.

(d) x_i თავისუფალია x_i-სთვის ნებისმიერ ფორმულაში.

(e) ნებისმიერი ტერმი თავისუფალია x_i-სთვის $\mathcal{A}$-ში, თუ $\mathcal{A}$ არ შეიცავს x_i-ის თავისუფალ შემოსვლებს.

§ 2. ინტერპრეტაციები. შესრულებადობა და ჭეშმარიტობა. მოდელები

ფორმულებს აზრი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს მასში შემავალი სიმბოლოების რაიმე ინტერპრეტაცია. ინტერპრეტაციის ქვეშ ვიგულისხმებთ, ყოველგვარ სისტემას, რომელიც შედგება არაცარიელი D სიმრავლისაგან, რომელსაც ეწოდება ინტერპრეტაციის არე, და რაიმე შესაბამისობისაგან, რომელიც ყოველ პრედიკატულ ასო A_j^n. შეუსაბამებს D-ში n-ადგილიან მიმართებას, ყოველ ფუნქციონალურ ასო f_j^n-ს შეუსაბამებს D-ში რაიმე n-ადგილიან ოპერაციას (ანუ ფუნქციას, რომელიც D^n სიმრავლეს გადასახავს D-ში) და ყოველ საგნობრივ მუდმივს a_j – შეუსაბამებს D-ს რაიმე ელემენტს. მოცემული ინტერპრეტაციის დროს საგნობრივი ცვლადები იცვლებიან ინტერპრეტაციის D არეზე, ხოლო ოპერაციებს ¬, $\Rightarrow$ და კვანტორებს

ეძლევათ ჩვეულებრივი აზრი (შეგახსენებთ, რომ ყოველი n-ადგილიანი მიმართება D-ში შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც D^n-ის რაიმე ქვესიმრავლე).

მოცემული ინტერპრეტაციისათვის ყოველი ფორმულა, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი ცვლადები (ანუ, სხვაგვარად, ჩაკეტილი ფორმულა) წარმოადგენს გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია ან მცდარია, ხოლო ყოველი ფორმულა თავისუფალი ცვლადებით გამოხატავს გარკვეულ მიმართებას ინტერპრეტაციის არეზე; ეს მიმართებები შეიძლება შესრულდეს (ჭეშმარიტი იყოს) ცვლადების გარკვეული მნიშვნელობისათვის (ინტერპრეტაციის არედან) და არ შესრულდეს (მცდარი იყოს) სხვა მნიშვნელობისათვის.

მაგალითები. (i) $A_1^2(x_1, x_2)$;

(ii) $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$;

(iii) $\exists x_2 \forall x_1 A_1^2(x_1, x_2)$.

თუ ჩვენ ავიღებთ ინტერპრეტაციის არედ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეს და $A_1^2(x_1, x_2)$ გავუკეთებთ ინტერპრეტაციას, როგორც $x_1 \le x_2$, მაშინ (i) წარმოადგენს მიმართებას $x_1 \le x_2$, რომელიც სრულდება მთელ დადებით რიცხვთა ყველა ისეთი დალაგებული (a, b) წყვილისთვის, რომელთათვისაც $a \le b$; (ii) წარმოადგენს თვისებას (ანუ ერთარგუმენტიან მიმართებას) „ყოველი მთელი დადებითი x_2-სათვის, $x_1 \le x_2$“, რომელიც სრულდება 1-სთვის; ბოლოს (iii) არის ჭეშმარიტი გამონათქვამი, რომელიც ამტკიცებს უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვის არსებობას. თუ ჩვენ ავიღებდით ინტერპრეტაციის არის როლში ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლეს, მაშინ (iii) იქნებოდა მცდარი.

ინტუიციურად შესრულებადობისა და ჭეშმარიტობის ცნებები გასაგებია, მაგრამ სკეპტიკოსებისათვის ისინი შეიძლება დაზუსტდეს შემდეგნაირად. ვთქვათ მოცემულია რაიმე ინტერპრეტაცია D არით და ვთქვათ Σ არის D-დან აღებულ ელემენტთა ყველა თვლადი მიმდევრობების სიმრავლეა. ახლა ჩვენ განვსაზღვრავთ, რას ნიშნავს, რომ $\mathcal{A}$ ფორმულა შესრულებულია $s = (b_1, b_2, \cdots)$ მიმდევრობაზე Σ-დან, მოცემული ინტერპრეტაციის დროს.

წინასწარ განვსაზღვრავთ ერთადგილიან s^* ფუნქციას მნიშვნელობებით D-დან და განსაზღვრულს ყველა ტერმთა სიმრავლეზე.

(1) თუ t ტერმი არის საგნობრივი ცვლადი x_i, მაშინ $s^*(t) = b_i$.

(2) თუ t არის საგნობრივი მუდმივი, მაშინ $s^*(t)$ ემთხვევა D-ში ამ მუდმივის ინტერპრეტაციას.

(3) თუ f_j^n არის ფუნქციონალური ასო, რომლის ინტერპრეტაციაა D-ში g-ოპერაცია, და $t_1, \cdots, t_n$ არიან ტერმები, მაშინ $s^*(f_j^n(t_1, \cdots, t_n)) = g(s^*(t_1), \cdots, s^*(t_n))$.

ამრიგად, s^* არის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია s მიმდევრობით და, რომელიც გადასახავს ყველა ტერმთა სიმრავლეს D-ში. თუ არაფორმალურად ვიტყვით, მაშინ ნებისმიერი მიმდევრობისათვის $s = (b_1, b_2, \cdots)$ და ნებისმიერი t ტერმისათვის $s^*(t)$ არის D სიმრავლის ელემენტი, რომელიც მიიღება ყოველი i-სთვის b_i ელემენტის ჩასმით t ტერმში x_i ცვლადის ყოველი შემოსვლის ნაცვლად და შემდეგ ინტერპრეტაციის ყველა ოპერაციის შესრულებით, რომლებიც შეესაბამებიან t ტერმის ფუნქციონალურ ასოებს. მაგალითად, თუ t არის $f_2^2(x_3, f_1^2(x_1, a_1))$, ინტერპრეტაციის არე არის მთელ რიცხვთა სიმრავლე, f_2^2 და f_1^2 ინტერპრეტირებულია შესაბამისად როგორც ჩვეულებრივი გამრავლება და შეკრება, ხოლო a_1-როგორც რიცხვი 2, მაშინ $s = (b_1, b_2, \cdots)$ მიმდევრობისათვის $s^*(t)$ არის მთელი რიცხვი $b_3 \times (b_1 + 2)$.

ახლა გადავიდეთ ძირითად განსაზღვრაზე, რომლის ფორმულირებას მოვახდენთ ფორმულის განსაზღვრის ინდუქციური ნაბიჯების შესაბამისად.

(i) თუ $\mathcal{A}$ არის ელემენტარული ფორმულა $A_j^n(t_1, \cdots, t_n)$, ხოლო B_j^n მისი შესაბამისი მიმართება ინტერპრეტაციაში, მაშინ $\mathcal{A}$ ფორმულა ითვლება შესრულებულად s მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $B_j^n(s^*(t_1), \cdots, s^*(t_n))$ ჭეშმარიტია, ანუ თუ n-ეული $(s^*(t_1), \cdots, s^*(t_n))$ ეკუთვნის B_j^n მიმართებას.

(ii) ფორმულა $\neg\mathcal{A}$ შესრულებულია s მიმდევრობაზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\mathcal{A}$ არაა შესრულებული s-ზე.

(iii) ფორმულა $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ შესრულებულია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\mathcal{A}$ არაა შესრულებული s-ზე ან როცა ფორმულა $\mathcal{B}$ შესრულებულია s-ზე.

(iv) ფორმულა $\forall x_i\,\mathcal{A}$ შესრულებულია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\mathcal{A}$ შესრულებულია ნებისმიერ მიმდევრობაზე Σ-დან, რომელიც განსხვავდება s-სგან არა უმეტეს თავისი i-ური კომპონენტით.

სხვა სიტყვებით, ფორმულა $\mathcal{A}$ შესრულებულია მიმდევრობაზე $s=(b_1,b_2,\cdots)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჩასმა ყოველი i-სთვის b_i სიმბოლოსა $\mathcal{A}$-ში x_i-ს ყველა თავისუფალი შემოსვლის ნაცვლად, მიგვიყვანს მოცემულ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტ წინადადებამდე.

ფორმულა $\mathcal{A}$ ეწოდება ჭეშმარიტი (მოცემულ ინტერპრეტაციაში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებულია Σ-ს ყოველ მიმდევრობაზე.

ფორმულა $\mathcal{A}$ ეწოდება მცდარი (მოცემულ ინტერპრეტაციაში), თუ ის არაა შესრულებული Σ-ს არცერთ მიმდევრობაზე.

მოცემულ ინტერპრეტაციას ეწოდება მოდელი – ფორმულათა მოცემული Γ სიმრავლისთვის, თუ Γ-ს ყოველი ფორმულა ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში.

მკითხველს საშუალება ეძლევა თვითონ დარწმუნდეს განსაზღვრიდან გამომდინარე ქვემოთ მოცემული შედეგების სამართლიანობაში.

(I) $\mathcal{A}$ მცდარია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია იგივე ინტერპრეტაციაში, და $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\mathcal{A}$ მცდარია.

(II) არცერთი ფორმულა არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტი და მცდარი ერთსა და იგივე ინტერპრეტაციაში.

(III) თუ მოცემულ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტი $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, მაშინ ჭეშმარიტია $\mathcal{B}$.

(IV) $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ მცდარია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ ამ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია, ხოლო $\mathcal{B}$ მცდარი.

(V) (i) $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$ შესრულებულია s მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ შესრულებულია s-ზე და $\mathcal{B}$ შესრულე-

ბულია s-ზე. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ შესრულებულია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ შესრულებულია s-ზე ან $\mathcal{B}$ შესრულებულია s-ზე. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ შესრულებილია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან $\mathcal{A}$ შესრულებულია s-ზე და $\mathcal{B}$ შესრულებულია s-ზე, ან $\mathcal{A}$ არაა შესრულებული s-ზე და $\mathcal{B}$ არაა შესრულებული s-ზე.

(ii) $\exists x_i \mathcal{A}$ შესრულებულია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ შესრულებულია ერთ მაინც s' მიმდევრობაზე, რომელიც განსხვავდება s-სგან არაუმეტეს ერთი (მხოლოდ) i-ური კომპონენტით.

(VI) $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია $\exists x_i \mathcal{A}$. მოცემული $\mathcal{A}$ ფორმულის ჩაკეტვა ეწოდება ფორმულას, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}$-ს წინ იმ ზოგადობის კვანტორების ნიშნის მიწერით, რომლებიც შეიცავენ $\mathcal{A}$-ში შემავალ ყველა თავისუფალ ცვლადს ინდექსთა კლებადობის მიხედვით.

იმ $\mathcal{A}$ ფორმულის ჩაკეტვა, რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადს, ეწოდება თვით $\mathcal{A}$ ფორმულას (მაგალითად, თუ $\mathcal{A}$ არის $A_1^2(x_2, x_5) \Rightarrow \neg \exists x_2 A_1^3(x_1, x_2, x_3)$, მაშინ $\mathcal{A}$ ჩაკეტვა იქნება ფორმულა $\forall x_5 \forall x_3 \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$).

(VII) ყოველი ტავტოლოგიის ყოველი კერძო შემთხვევა ჭეშმარიტია ყოველ ინტერპრეტაციაში (მოცემული პროპოზიციული ფორმულის კერძო შემთხვევა ეწოდება ფორმულას, რომელიც მიიღება ამ ფორმულაში პროპოზიციული ასოების ნაცვლად ფორმულების ჩასმით იმ პირობით, რომ ერთი და იგივე პროპოზიციული ასოს ნაცვლად ისმება ერთი და იგივე ფორმულა). (მითითება. აჩვენეთ, რომ L სისტემის აქსიომათა სისტემის ყველა კერძო შემთხვევა არის ჭეშმარიტი, ხოლო შემდეგ გამოიყენეთ (III) და წინადადება 1.13).

(VIII) ვთქვათ $\mathcal{A}$ ფორმულის თავისუფალი ცვლადები (თუ ასეთები არსებობენ) იმყოფებიან $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$ ცვლადებს შორის. მაშინ თუ s და s' მიმდევრობების $i_1, \cdots, i_n$ ნომრების კომპონენტები ემთხვევიან, მაშინ $\mathcal{A}$ ფორმულა შესრულებულია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებულია s'-ზე. (მითითება. $\mathcal{A}$ ფორმულაში ოპერაციათა და კვანტორთა რიცხვის მიხედვით ინდუქცია. დასაწყისში დაამტკიცეთ, რომ თუ t თერმის ცვლადები გვხვდებიან $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$ ცვლადებს შორის, ხოლო s და s' მიმდევრობათა $i_1, \cdots, i_n$ ნომრებიანი წევრები ერთმანეთს ემთხვევიან,

მაშინ $s^*(t) = (s')^*(t)$. კერძოდ, თუ t არ შეიცავს ცვლადებს, მაშინ $s_1^*(t) = s_2^*(t)$ ნებისმიერი s_1 და s_2 მიმდევრობისათვის).

D არის ყველა n-ეულთა $(b_{i_1}, \cdots, b_{i_n})$ სიმრავლეს, რომლისთვისაც $\mathcal{A}$ ფორმულა შესრულებულია ყოველ s მიმდევრობაზე, რომლის $i_1, \cdots, i_n$ კოორდინატები ემთხვევიან შესაბამისად $b_{i_1}, \cdots, b_{i_n}$ ეწოდება ინტერპრეტაციის მიმართება (ან თვისება), რომელიც შეესაბამება $\mathcal{A}$-ფორმულას.

(IX) თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა ჩაკეტილია, მაშინ ნებისმიერ მოცემულ ინტერპრეტაციაში ან ჭეშმარიტია $\mathcal{A}$, ან ჭეშმარიტია $\neg\mathcal{A}$.

(X) **ლემა**. ვთქვათ t და v ტერმებია, s-მიმდევრობაა Σ-დან, t' მიიღება t-დან v-ს ჩასმით x_i-ს ყველა შემოსვლის ნაცვლად და s' მიიღება s-დან მასში i-ური კომპონენტის ნაცვლად $s^*(v)$-ის ჩასმით, მაშინ $s^*(t') = (s'')^*(t)$ (მითითება. ინდუქცია t-ს სიგრძეზე).

ახლა ვთქვათ $\mathcal{A}(x_i)$ არის ფორმულა, t-ტერმი, რომელიც თავისუფალია x_i-სთვის $\mathcal{A}(x_i)$-ში და $\mathcal{A}(t)$ არის ფორმულა, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}(x_i)$-ში x_i-ს ყველა თავისუფალი შემოსვლის ნაცვლად t-ს ჩასმით. მტკიცდება, რომ ფორმულა $\mathcal{A}(t)$ შესრულებულია $s = (b_1, b_2, \cdots)$ მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}(x_i)$ შესრულებულია s' მიმდევრობაზე, რომელიც მიიღება s-დან b_i-ს ნაცვლად $s^*(t)$-ს ჩასმით. (მითითება. $\mathcal{A}(x_i)$-ში ოპერაციათა და კვანტორთა რიცხვზე ინდუქცია ლემის გამოყენებით).

შედეგი. თუ s მიმდევრობაზე შესრულებულია $\forall x_i \mathcal{A}(x_i)$ ფორმულა და t ტერმი თავისუფალია x_i-სთვის $\mathcal{A}(x_i)$-ში, მაშინ s-ზე შესრულებულია $\mathcal{A}(t)$ ფორმულაც. მაშასადამე, ფორმულა $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Rightarrow \mathcal{A}(t)$ ჭეშმარიტია ყოველ ინტერპრეტაციაში.

(XI) თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა არ შეიცავს x_i-ს, როგორც თავისუფალ ცვლადს, მაშინ ფორმულა

$$\forall x_i (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$$

ჭეშმარიტია ყოველ ინტერპრეტაციაში.

$\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება ლოგიკურად ზოგადმართებული (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ის ჭეშმარიტია ყოველ ინტერპრეტაციაში.

$\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება შესრულებადია (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ არსებობს ინტერპრეტაცია, რომელშიც $\mathcal{A}$ შესრულებულია თუნდაც ერთ მიმდევრობაზე Σ-დან.

$\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება წინააღმდეგობა (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ $\neg\mathcal{A}$ ფორმულა არის ლოგიკურად ზოგადმართებული, ანუ, თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა მცდარია ყოველ ინტერპრეტაციში.

ამბობენ, რომ $\mathcal{A}$ ფორმულიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს $\mathcal{B}$ ფორმულა (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში $\mathcal{B}$ ფორმულა შესრულებულია ყოველ მიმდევრობაზე, რომელზეც შესრულებულია $\mathcal{A}$ ფორმულა. (უფრო ზოგადად, ამბობენ, რომ $\mathcal{B}$ ფორმულა არის ფორმულათა Γ სიმრავლის ლოგიკური შედეგი (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ყოველ ინტერპრეტაციაში $\mathcal{B}$ ფორმულა შესრულებულია ყოველ მიმდევრობაზე, რომელზეც შესრულებულია Γ-ს ყოველი ფორმულა).

ფორმულებს ეწოდებათ ლოგიკურად ეკვივალენტური (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ყოველი მათგანისგან ლოგიკურად გამომდინარეობს მეორე.

ამ განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები:

(a) $\mathcal{A}$ ფორმულიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს $\mathcal{B}$ ფორმულა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ ფორმულა ლოგიკურად ზოგადმართებულია.

(b) $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულები ლოგიკურად ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$ ფორმულა ზოგადმართებულია.

(c) თუ $\mathcal{A}$ ფორმულიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს $\mathcal{B}$ ფორმულა და $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ამ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია $\mathcal{B}$.

(d) თუ $\mathcal{B}$ ფორმულა არის ლოგიკური შედეგი ფორმულათა რაიმე Γ სიმრავლის, რომლებიც ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ამ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია $\mathcal{B}$ ფორმულაც.

რაიმე ფორმალური ან ბუნებრივი ენის წინადადებას ეწოდება ლოგიკურად ჭეშმარიტი (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ის არის რაიმე ლოგიკურად ზოგადმართებული ფორმულის კერძო შემთხვევა, და ეწოდება ლოგიკურად მცდარი (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ის არის რაიმე წინააღმდეგობის კერძო შემთხვევა.

მაგალითი. ფორმულა $\forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow \exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ არ არის ლოგიკურად ზოგადმართებული. კონტრმაგალითისათვის განვიხილოთ არე D, რომელიც შედგება ყველა მთელი რიცხვებისაგან, და $A_1^2(y, z)$-ის ინტერპრეტაცია იყოს $y < z$. მაშინ $\forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2)$ ჭეშმარიტია, ხოლო $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ მცდარი.

§ 3. პირველი რიგის თეორიები

პროპოზიციული აღრიცხვის შემთხვევაში ჭეშმარიტობის ცხრილთა მეთოდი გვაძლევს ეფექტურ საშუალებას იმისათვის, რომ შემოწმდეს არის თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმა ტავტოლოგია. ამასთანავე საეჭვოა ისეთი ეფექტური პროცესის არსებობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს, შევამოწმოთ მოცემული ფორმულა არის თუ არა ლოგიკურად ზოგადმართებული, რადგან ახლა უკვე ყოველი ფორმულისათვის საქმე გვაქვს მისი ჭეშმარიტობის შემოწმებასთან ინტერპრეტაციებში, რომელთა არე არის ძალიან დიდი სასრული და ასევე, უსასრულო. აქსიომატური მეთოდი, რომელიც პროპოზიციული (წინადადებათა) აღრიცხვის დროს იყო ზედმეტი ფუფუნება, არის აუცილებელი კვანტორების შემცველ ფორმულათა შესასწავლად. ამიტომ ვიწყებთ პირველი რიგის თეორიის (ელემენტარული თეორიის) განხილვას.

პირველი რიგის ყოველი K თეორიის სიმბოლოები არსებითად იგივეა, რაც ჩვენ შემოვიტანეთ ამ თავის დასაწყისში: ოპერაციები $\neg$, $\Rightarrow$ და კვანტორის ნიშანი $\forall$; პუნქტუაციის ნიშნები (,) , , (მკაცრად რომ ვთქვათ, მძიმე არ არის აუცილებელი, მაგრამ მოხერხებულია ფორმულათა წაკითხვის გასამარტივებლად); ცვლადების უსასრულო თვლადი სიმრავლე $x_1, x_2, \cdots$; პრედიკატული ასოების არაცარიელი, არაუმეტეს თვლადი, სიმრავლე A_j^n $(n, j \geq 1)$; ფუნქციონალური ასოების f_j^n $(n, j \geq 1)$ არაუმეტეს თვლადი (შეიძლება ცარიელი) სიმრავლე; და, ბოლოს, საგნობრივი კონსტანტების (მუდმივების) არაუმეტეს თვლადი (შეიძლება ცარიელი) სიმრავლე a_i $(i \geq 1)$. ამრიგად, K თეორიაში შეიძლება არ შეგვხვდეს ზოგიერთი ან არცერთი ფუნქციონალური ასო და და საგნობრივი კონსტანტა, ასევე, ზოგიერთი – მაგრამ არა ყველა! პრედიკატული ასო. სხვადასხვა თეორიები ერთმანეთისგან შეიძლება განსხვავდებოდეს სიმბოლოებით.

§ 1-ში მოცემული განსაზღვრებები ტერმის, ფორმულის და პროპოზიციული ოპერაციების &, ∨, ⇔, ძალაშია ნებისმიერი პირველი რიგის თეორიისათვის.

K თეორიის აქსიომები იყოფა ორ კლასად: ლოგიკური აქსიომები და საკუთრივი (ან არალოგიკური) აქსიომები.

ლოგიკური აქსიომები: როგორიც არ უნდა იყოს K თეორიის ფორმულები $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, შემდეგი ფორმულები არიან K თეორიის ლოგიკური აქსიომები.

(1) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$;

(2) $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}))$;

(3) $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}))$;

(4) $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Rightarrow \mathcal{A}(t)$, სადაც $\mathcal{A}(x_i)$ არის K თეორიის ფორმულა და t არის K თეორიის ტერმი, რომელიც თავისუფალია x_i-სთვის $\mathcal{A}(x_i)$-ში. შევნიშნოთ, რომ t შეიძლება ემთხვეოდეს x_i-ს, და მაშინ მივიღებთ აქსიომას $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Rightarrow \mathcal{A}(x_i)$.

(5) $\forall x_i (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x_i \mathcal{B})$, თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა არ შეიცავს x_i-ის თავისუფალ შემოსვლებს.

საკუთრივი აქსიომები: ზოგად შემთხვევაში ასეთი აქსიომები არ შეიძლება ჩამოყალიბდეს, რადგან ისინი თეორიიდან თეორიამდე იცვლებიან. პირველი რიგის თეორიას, რომელიც არ შეიცავს საკუთრივ აქსიომებს, ეწოდება პრედიკატთა პირველი რიგის აღრიცხვა.

ყოველ პირველი რიგის თეორიაში გამოყვანის წესებია.

(i) Modus ponens: $\mathcal{A}$-დან და $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ გამომდინარეობს $\mathcal{B}$.

(ii) განზოგადოების წესი: $\mathcal{A}$-დან გამომდინარეობს $\forall x_i \mathcal{A}$.

შემდეგში ამ წესების გამოყენება მოკლედ იქნება აღნიშნული, როგორც MP და Gen (ინგლისური სიტყვიდან „generalization“).

პირველი რიგის K თეორიის მოდელი ეწოდება ყოველ ინტერპრეტაციას, რომელშიც K თეორიის ყველა აქსიომა არის ჭეშმარიტი. (III) და (VI)-ს თანახმად, თუ MP და Gen გამოყენებულია ფორმულებზე, რომლებიც ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ შედეგიც იქნება ჭეშმარიტი იგივე ინტერპრეტაციაში. მაშასადამე, K თეორიის ყოველი თეორემა ჭეშმარიტია მის ყოველ მოდელში.

(4) და (5) აქსიომებში მოცემული შეზღუდვები საჭიროებენ გარკვეულ ახსნას. თუ (4) სქემის შემთხვევაში, t ტერმი შეიძლება არ იყოს თავისუფალი x_i-სთვის $\mathcal{A}(x_i)$-ში, მაშინ შესაძლებელი

იქნებოდა შემდეგი არასასიამოვნო შედეგი. ვთქვათ $\mathcal{A}(x_i)$ არის $\neg \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ და t არის x_2. შევნიშნოთ, რომ მაშინ t ტერმი არ არის თავისუფალი x_1-სთვის $\mathcal{A}(x_1)$-ში. განვიხილოთ (4) სქემის ასეთი კერძო შემთხვევა:

$$\forall x_1(\neg \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)) \Rightarrow \neg \forall x_2 A_1^2(x_2, x_2), \qquad (*)$$

და ავიღოთ ინტერპრეტაციის როლში ნებისმიერი არე, რომელიც შეიცავს არანაკლებ ორი ელემენტისა, ხოლო A_1^2-ის როლში ტოლობის მიმართება. მაშინ (*)-ში წანამძღვარი ჭეშმარიტია, ხოლო დასკვნა მცდარი.

(5)-ე სქემაში უარის თქმა იმაზე, რომ x_i არ შედიოდეს თავისუფლად $\mathcal{A}$-ში, ასევე მიგვიყვანს უსიამოვნებამდე. ვთქვათ, მაგალითად, $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ არიან $A_1^1(x_1)$, ამრიგად, ახლა x_1 თავისუფლად შედის $\mathcal{A}$-ში. განვიხილოთ (5) სქემის კერძო შემთხვევა:

$$\forall x_1(A_1'(x_1) \Rightarrow A_1'(x_1)) \Rightarrow (A_1'(x_1) \Rightarrow \forall x_1 A_1'(x_1)). \qquad (**)$$

(**)-ში წანამძღვარი ლოგიკურად ზოგადმართებულია. ამასთან, თუ ჩვენ ავიღებთ რაიმე ინტერპრეტაციას, რომელშიც A_1' სრულდება ზოგიერთი, მაგრამ არეს არა ყოველი ელემენტისათვის, მაშინ ვნახავთ, რომ დასკვნა არ არის ჭეშმარიტი.

პირველი რიგის თეორიების მაგალითები.

(i) **ნაწილობრივი დალაგების თეორია**. ვთქვათ K შეიცავს ერთადერთ პრედიკატულ ასოს A_1^2 და არ შეიცავს ფუნქციონალურ ასოებს და საგნობრივ კონსტანტებს. ნაცვლად $A_1^2(x_1, x_2)$ და $\neg A_1^2(x_1, x_2)$ შესაბამისად ვწერთ $x_1 < x_2$ და $x_1 \not< x_2$. ვთქვათ, რომ K შეიცავს ორ საკუთრივ აქსიომას:

(a) $\forall x_1(x_1 \not< x_1)$ (არარეფლექსურობა);

(b) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(x_1 < x_2 \,\&\, x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3)$ (ტრანზიტულობა).

ამ თეორიის ყოველ მოდელს ეწოდება ნაწილობრივად დალაგებული სტრუქტურა.

(ii) **ჯგუფთა თეორია**. ვთქვათ K-ს აქვს ერთი პრედიკატული ასო A_1^2, ერთი ფუნქციონალური ასო f_1^2 და ერთი საგნობრივი მუდმივი a_1. (ჩვეულებრივი აღნიშვნების შესაბამისად ჩვენ ჩავწერთ: $t = s$ ნაცვლად $A_1^2(t, s)$, $t + s$ ნაცვლად $f_1^2(t, s)$ და 0 ნაცვლად a_1) K თეორიის საკუთრივი აქსიომები არიან შემდეგი ფორმულები:

(a) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ (ასოციატიურობა);

(b) $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$;

(c) $\forall x_1 \exists x_2 (x_2 + x_1 = 0)$ (შებრუნებული ელემენტის არსებობა);

(d) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ (ტოლობის რეფლექსურობა);

(e) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$ (ტოლობის სიმეტრიულობა);

(f) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3))$
(ტოლობის ტრანზიტულობა);

(g) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_2 = x_3 \Rightarrow (x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \,\&\, x_2 + x_1 = x_3 + x_1)$
(ტოლობის ჩასმადობა).

ამ თეორიის ყოველ მოდელს ეწოდება ჯგუფი.

თუ ჯგუფში ჭეშმარიტია ფორმულა $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$, მაშინ ჯგუფს ეწოდება აბელური ანუ კომუტაციური.

ნაწილობრივად დალაგების თეორია და ჯგუფთა თეორია ორივე არის ეფექტურად აქსიომატიზირებული. საზოგადოდ ყოველი თეორია, რომელსაც აქვს საკუთრივი აქსიომების სასრული რიცხვი, არის ეფექტურად აქსიომატიზირებული, რადგან არსებობს შესაძლებლობა, რომ ნებისმიერი მოცემული ფორმულისათვის ეფექტურად გადაწყდეს საკითხი, ეკუთვნის თუ არა ის ლოგიკურ აქსიომათა რიცხვს.

§ 4. პირველი რიგის თეორიის თვისებები

ამ პარაგრაფის ყოველი შედეგი ეკუთვნის პირველი რიგის ნებისმიერ თეორიას (თუ არ იქნება გაკეთებული სპეციალური შენიშვნა). შევნიშნოთ, რომ პირველი რიგის ყოველი თეორია არის ფორმალური თეორია.

წინადადება 2.1. თუ K თეორიის $\mathcal{A}$ ფორმულა არის ტავტოლოგიის კერძო შემთხვევა, მაშინ $\mathcal{A}$ არის K თეორიის თეორემა და შეიძლება გამოყვანილ იქნეს მხოლოდ (1)-(3) აქსიომათა სქემით და modus ponens-ის წესით.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathcal{A}$ მიღებული რაიმე W ტავტოლოგიიდან ჩასმით. წინადადება 1.13-ის თანახმად, არსებობს W-ს გამოყვანა L-ში. ამ გამოყვანაში მოვახდინოთ ჩასმა შემდეგი წესის მიხედვით: (i) თუ რაიმე პროპოზიციული ასო შედის W-ში, მაშინ გამოყვანის ყოველ ფორმულაში მის ადგილზე ვსვამთ K თეორიის იმავე

ფორმულას, რაც ჩასმული იყო W-ში იგივე ასოს ნაცვლად $\mathcal{A}$ ფორმულის აგებისას, (ii) თუ მოცემული პროპოზიციული ასო არ შედის W-ში, გამოყვანის ფორმულებში მის ნაცვლად ყველგან ვსვამთ ნებისმიერ ფორმულას (ერთსა და იგივეს მოცემული ასოსათვის) K თეორიიდან. ამ გზით მიღებული ფორმულათა მიმდევრობა იქნება K-ში $\mathcal{A}$ ფორმულის გამოყვანა და, ამასთანავე, გამოყვანა იყენებს მხოლოდ (1)-(3) აქსიომათა სქემას და MP-ს.

წინადადება 2.2. პრედიკატთა პირველი რიგის ყოველი K აღრიცხვა არაწინააღმდეგობრივია.

დამტკიცება. ნებისმიერი $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის აღვნიშნოთ $h(\mathcal{A})$-ით გამოსახულება, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}$-დან მისი შემდეგნაირად გარდაქმნის გზით: $\mathcal{A}$-ში ვშლით ყველა ტერმს და კვანტორს (შესაბამისი ფრჩხილებითა და მძიმეებით). მაგალითად, $h(\forall x_1 A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1))$ არის $A_1^2 \Rightarrow A_1^1$. არსებითად, $h(\mathcal{A})$ ყოველთვის არის პროპოზიციული ფორმა, რომელშიც პროპოზიციული ასოების როლს თამაშობენ სიმბოლოები A_j^k. ცხადია, $h(\neg\mathcal{A}) = \neg h(\mathcal{A})$ და $h(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = h(\mathcal{A}) \Rightarrow h(\mathcal{B})$. ნებისმიერი $\mathcal{A}$ აქსიომისათვის, რომელიც მიიღება (1)-(5) სქემიდან, $h(\mathcal{A})$ არის ტავტოლოგია. ეს ცხადია (1)-(3)-სთვის. (4) აქსიომის სქემის ყოველი კერძო შემთხვევა $\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Rightarrow \mathcal{A}(t)$ h ოპერაციით გარდაიქმნება $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ სახის ტავტოლოგიად, ხოლო (5) აქსიომის სქემის ყოველი კერძო შემთხვევა გარდაიქმნება $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C})$ სახის ტავტოლოგიად. ბოლოს, თუ $h(\mathcal{A})$ და $h(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ არის ტავტოლოგიები, მაშინ წინადადება 1.1-ის ძალით $h(\mathcal{A})$ ტავტოლოგია; ხოლო თუ $h(\mathcal{A})$ ტავტოლოგიაა, მაშინ $h(\forall x_i \mathcal{A})$ ტავტოლოგიაა. მაშასადამე, თუ $\mathcal{A}$ არის თეორემა K-ში, მაშინ $h(\mathcal{A})$ არის ტავტოლოგია. თუ იარსებებდა $\mathcal{B}$ ფორმულა K-ში ისეთი, რომ $\vdash_K \mathcal{B}$ და $\vdash_K \neg\mathcal{B}$, მაშინ $h(\mathcal{B})$ და $\neg h(\mathcal{B})$ იქნებოდნენ ტავტოლოგიები, რაც შეუძლებელია. ამრიგად K არაწინააღმდეგობრივია.

პროპოზიციული აღრიცხვის დედუქციის თეორემა არ შეიძლება შესაბამისი მოდიფიკაციის გარეშე იქნეს გატარებული პირველი რიგის ნებისმიერი K თეორიისათვის. მაგალითად, $\mathcal{A} \vdash_K \forall x_i \mathcal{A}$ ნებისმიერი $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის, მაგრამ ყოველთვის არაა

სამართლიანი $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \forall x_i \mathcal{A}$. მართლაც, განვიხილოთ ინტერპრეტაციის არე, რომელიც შეიცავს ორ c და d ელემენტს მაინც. ვთქვათ K პრედიკატთა რაიმე აღრიცხვაა, და ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის $A_1^1(x_1)$. A_1^1 ინტერპრეტაცია იყოს თვისება, რომელსაც ფლობს მხოლოდ c ელემენტი. მაშინ $A_1^1(x_1)$ შესრულებულია ყოველ მიმდევრობაზე $s = (b_1, b_2, \cdots)$, სადაც $b_1 = c$, ამასთანავე $\forall x_1 \mathcal{A}(x_i)$ არაა შესრულებული საზოგადოდ არცერთ მიმდევრობაზე. მაშასადამე, $A_1'(x_1) \Rightarrow \forall x_1 A_1'(x_1)$ ფორმულა არაა ჭეშმარიტი ამ ინტერპრეტაციაში და ამიტომ არ არის ლოგიკურად ზოგადმართებული. ამასთანავე, ადვილი დასანახია (წინადადება 2.7), რომ პრედიკატთა ყოველი აღრიცხვის ყველა თეორემა არის ლოგიკურად ზოგადმართებული.

გარკვეული შესუსტებული, მაგრამ სასარგებლო, ფორმა დედუქციის თეორემისა შეიძლება აქაც იქნეს დამტკიცებული.

ვთქვათ $\mathcal{A}$ რაიმე ფორმულაა, რომელიც ეკუთვნის ფორმულათა მოცემულ Γ სიმრავლეს და ვთქვათ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ არის Γ-დან რაიმე გამოყვანა, რომელიც აღჭურვილია მასში შემავალი ყოველი ნაბიჯის დაფუძნებით. ვიტყვით, რომ ამ გამოყვანაში $\mathcal{B}_i$ დამოკიდებულია $\mathcal{A}$-გან, თუ

(1) $\mathcal{B}_i$ არის $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}_i$-ს დაფუძნებას წარმოადგენს $\mathcal{B}_i$-ს კუთვნილება Γ-ში.

(2) $\mathcal{B}_i$ დაფუძნებულია, როგორც MP-ით ან Gen-ით უშუალო შედეგი ამ გამოყვანაში მის წინ მდგომი ფორმულებიდან, რომელთაგან ერთი მაინც დამოკიდებულია $\mathcal{A}$-გან.

მაგალითი. $\mathcal{A}$, $\forall x_1 \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \forall x_1 \mathcal{C}$.

($\mathcal{B}_1$) $\mathcal{A}$ (ჰიპოთეზა)

($\mathcal{B}_2$) $\forall x_1 \mathcal{A}$ ($\mathcal{B}_1$), Gen

($\mathcal{B}_3$) $\forall x_i \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$ ჰიპოთეზა

($\mathcal{B}_4$) $\mathcal{C}$ ($\mathcal{B}_2$), ($\mathcal{B}_3$), MP

($\mathcal{B}_5$) $\forall x_1 \mathcal{C}$ ($\mathcal{B}_4$), Gen.

აქ $\mathcal{B}_1$ დამოკიდებულია $\mathcal{A}$-ზე, $\mathcal{B}_2$ დამოკიდებულია $\mathcal{A}$-ზე, $\mathcal{B}_3$ დამოკიდებულია $\forall x_1 \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{B}_4$ დამოკიდებულია $\mathcal{A}$-ზე და $\forall x_1 \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$-ზე და $\mathcal{B}_5$ დამოკიდებულია $\mathcal{A}$-ზე და $\forall x_1 \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.

წინადადება 2.3. თუ $\mathcal{B}$ არ არის დამოკიდებული $\mathcal{A}$-გან გამოყვანაში $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$ არის $\mathcal{B}$-ს გამოყვანა Γ-დან და $\mathcal{A}$-დან, რომელშიც $\mathcal{B}$ არაა დამოკიდებული $\mathcal{A}$-გან. ინდუქციური დაშვების როლში ვთქვათ, რომ დასამტკიცებელი წინადადება სამართლიანია ყველა გამოყვანისათვის, რომლის სიგრძე ნაკლებია n-ზე. თუ $\mathcal{B}$ ეკუთვნის Γ-ს ან არის აქსიომა, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. თუ $\mathcal{B}$ არის წინ მდგომ ფორმულათა უშუალო შედეგი, მაშინ, რადგან $\mathcal{B}$ არაა დამოკიდებული $\mathcal{A}$-ზე, არაა დამოკი-დებული $\mathcal{A}$-ზე არცერთი ეს ფორმულა. მაშასადამე, ინდუქციური დაშვებით, Γ-დან გამოყვანადია ეს (ერთი ან ორი) ფორმულები, და მათთან ერთად $\mathcal{B}$ ფორმულა.

წინადადება 2.4. (დედუქციის თეორემა). ვთქვათ $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, და ამასთან, ვთქვათ არსებობს $\{\Gamma, \mathcal{A}\}$-დან $\mathcal{B}$-ს ისეთი გამოყვანა, რომელშიც იმ ფორმულებში, რომლებიც ამ გამოყვანაში დამოკიდებული არიან $\mathcal{A}$-გან, განზოგადების წესის არცერთი გამოყენებით არ ხდება $\mathcal{A}$ ფორმულის არცერთი თავისუფალი ცვლადის დაბმა კვანტორით. მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$,

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$ არის $\mathcal{B}$-ს გამოყვანა, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობას. ინდუქციით დავამტკიცებთ, რომ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$ ნებისმიერი i-სთვის, $i \le n$. თუ $\mathcal{B}_i$ არის აქსიომა ან ეკუთვნის Γ-ს, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$, რადგან $\mathcal{B}_i \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$ აქსიომაა. თუ $\mathcal{B}_i$ ემთხვევა $\mathcal{A}$-ს, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ რადგან $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ (წინადადება 2.1). თუ არსებობენ j და k, $j < n$, $k < n$ ისეთები, რომ $\mathcal{B}_k$ არის $\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i$, მაშინ, ინდუქციური დაშვების თანახმად, $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$ და $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}_j \Rightarrow \mathcal{B}_i)$. მაშასადამე, აქსიომათა (2) სქემით და MP-ით, $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$. დავუშვათ, რომ არსებობს j, $j < i$, ისეთი, რომ $\mathcal{B}_i$ არის $\forall x_k \mathcal{B}_j$. დაშვებით $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$, და ან $\mathcal{B}_j$ არაა დამოკიდებული $\mathcal{A}$-გან, ან x_k არ არის $\mathcal{A}$ ფორმულის თავისუფალი ცვლადი. თუ $\mathcal{B}_j$ არაა დამო-კიდებული $\mathcal{A}$-ზე, მაშინ, წინადადება 2.3-ის ძალით, $\Gamma \vdash \mathcal{B}_j$, და მაშინ, Gen-ის გამოყენებით მივიღებთ $\Gamma \vdash \forall x_k \mathcal{B}_j$, ანუ $\Gamma \vdash \mathcal{B}_i$. (1) აქსიომის სქემით, $\vdash \mathcal{B}_i \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i)$. აქედან MP-ით მივიღებთ $\Gamma \vdash$

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$. თუ x_k არ არის თავისუფალი ცვლადი $\mathcal{A}$ ფორმულის, მაშინ (5) აქსიომის სქემით. $\Gamma \vdash \forall x_k\ (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x_k \mathcal{B}_j)$. რადგან $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$, მაშინ, Gen წესით, მივიღებთ $\Gamma \vdash \forall x_k\ (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j)$ და, ბოლოს, MP-ით: $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \forall x_k \mathcal{B}_j$, ანუ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_i$. ამით ინდუქცია დამთავრებულია. დასამტკიცებელ დებულებას მივიღებთ, $i = n$.

შედეგი 2.5. თუ $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ და არსებობს გამოყვანა $\mathcal{A}$ ფორმულის თავისუფალ ცვლადებზე განზოგადების წესის გამოყენების გარეშე, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

შედეგი 2.6. თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა ჩაკეტილია და $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, მაშინ $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

შემდეგი დამატებითი დასკვნა შეიძლება გამოტანილ იქნეს წინადადება 2.3-2.6-ის დამტკიცებებიდან. $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ($\Gamma \vdash \mathcal{B}$) გამოყვანის აგებისას, რაიმე ფორმულაზე, რომელიც დამოკიდებულია Γ-ს რაიმე $\mathcal{C}$ ფორმულაზე, Gen-ის გამოყენება მოითხოვება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულ გამოყვანაშიც, ანუ $\{\Gamma\ \mathcal{A}\}$-დან $\mathcal{B}$-ს გამოყვანაში არსებობს Gen-ის გამოყენება (იგივე დასაბმელი ცვლადით) გარკვეულ ფორმულაზე, რომელიც დამოკიდებულია $\mathcal{C}$ –ზე. (ძნელი არაა იმის დანახვა, რომ წინადადება 2.4-ის დამტკიცებიდან $\mathcal{B}_j$ დამოკიდებულია Γ-დან ამა თუ იმ $\mathcal{C}$-წანამძღვარზე საწყის გამოყვანაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}_j$ დამოკიდებულია $\mathcal{C}$-ზე ახალ გამოყვანაში).

ეს დამატებითი შენიშვნა სასარგებლოა, როცა გვინდა დედუქციის თეორემის გამოყენება რამდენჯერმე მიმდევრობით, გამოყვანის შესახებ დებულების დამტკიცების პროცესში, მაგალითად, რომ მივიღოთ $\Gamma \vdash \mathcal{D} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ $\Gamma, \mathcal{D}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$-დან. ამიტომ შემდეგში ამ შენიშვნას განვიხილავთ, როგორც ნაწილი წინადადება 2.3-2.6-ის დასკვნისა.

მაგალითი. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$.

დამტკიცება.

1.	$\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A}$	ჰიპოთეზა
2.	$\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \Rightarrow \forall x_2 \mathcal{A}$	(4) აქსიომის სქემა
3.	$\forall x_2 \mathcal{A}$	1, 2, MP
4.	$\forall x_2 \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	(4) აქსიომის სქემა
5.	$\mathcal{A}$	3, 4, MP

6. $\forall x_1 \mathcal{A}$ 5, Gen

7. $\forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$ 6, Gen.

ამრიგად, 1-7-ის ძალით გვაქვს $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \vdash \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$, ამასთანავე, გამოყვანის აგებისას Gen-ის არცერთი გამოყენებისას არ ხდება $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A}$ ფორმულის თავისუფალი ცვლადის დაბმა. ამიტომ, შედეგი 2.5-ის საფუძველზე, $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \mathcal{A}$.

§ 5. თეორემები სისრულის შესახებ

წინადადება 2.7. პირველი რიგის პრედიკატთა ყოველ აღრიცხვაში ყოველი თეორემა არის ლოგიკურად ზოგადმართებული.

დამტკიცება. ფორმულის ჭეშმარიტობის (VII) თვისების ძალით, (1)-(3) სქემებით მოცემული აქსიომები, ლოგიკურად ზოგადმართებულია. (X) და (XI) თვისებების ძალით, ლოგიკურად ზოგადმართებულია (4) და (5) სქემებით წარმოქმნილი აქსიომები. (III) და (IV), MP და Gen წესები ინახავენ ლოგიკურად ზოგადმართებულობის თვისებას. ამრიგად, პრედიკატთა ნებისმიერი აღრიცხვის ყოველი თეორემა ლოგიკურად ზოგადმართებულია.

ვთქვათ x_i და x_j ცვლადები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან და $\mathcal{A}(x_j)$ ფორმულა მიიღება $\mathcal{A}(x_i)$ ფორმულიდან მასში x_i-ს ყველა თავისუფალი შემოსვლის ნაცვლად x_j-ს ჩასმით, მაშინ $\mathcal{A}(x_i)$ და $\mathcal{A}(x_j)$-ს ეწოდება მსგავსები, თუ x_j თავისუფალია x_i-სთვის $\mathcal{A}(x_i)$ და $\mathcal{A}(x_i)$-ს არ აქვს x_j-ს თავისუფალი შემოსვლები. თუ $\mathcal{A}(x_i)$ და $\mathcal{A}(x_j)$ მსგავსებია, მაშინ x_i თავისუფალია x_j-სთვის $\mathcal{A}(x_j)$-ში და $\mathcal{A}(x_j)$-ს არ აქვს x_i-ს თავისუფალი შემოსვლები. ამრიგად, მსგავსება არის სიმეტრიული მიმართება. სხვაგვარად, $\mathcal{A}(x_i)$ და $\mathcal{A}(x_j)$ მსგავსებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}(x_j)$-ს აქვს x_j-ს თავისუფალი შემოსვლები ზუსტად იმ ადგილებში, რომლებშიც $\mathcal{A}(x_i)$-ს აქვს x_i-ს თავისუფალი შემოსვლები.

ლემა 2.8. თუ $\mathcal{A}(x_i)$ და $\mathcal{A}(x_j)$ ფორმულები მსგავსებია, მაშინ $\vdash \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Leftrightarrow \forall x_j \mathcal{A}(x_j)$.

დამტკიცება. (4) აქსიომის სქემით, $\vdash \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x_j)$. გამოვიყენოთ Gen წესი: $\vdash \forall x_j(\forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x_j))$ და (5) აქსიომის სქემით, მივიღებთ $\vdash \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Rightarrow \forall x_j \mathcal{A}(x_j)$. ზუსტად ასევე, დავამტკიცებთ, რომ $\vdash \forall x_j \mathcal{A}(x_j) \Rightarrow \forall x_i \mathcal{A}(x_i)$. $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1 \,\&\, A_2))$ ტავტოლოგიის და წინადადება 2.1-ის გამოყენებით, მივიღებთ, რომ $\vdash \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \Leftrightarrow \forall x_j \mathcal{A}(x_j)$.

ლემა 2.9. თუ K თეორიის ჩაკეტილი $\neg\mathcal{A}$ ფორმულა არ არის გამოყვანადი K-ში, მაშინ K' თეორია, რომელიც მიიღება K-დან აქსიომად $\mathcal{A}$-ს დამატებით, არასაწინააღმდეგობრივია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ K' თეორია წინააღმდეგობრივია. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს $\mathcal{B}$ ფორმულა, რომლისთვისაც $\vdash_{K^1} \mathcal{B}$ და $\vdash_{K^1} \neg\mathcal{B}$. წინადადება 2.1-ის ძალით, გვაქვს $\vdash_{K^1} \mathcal{B} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$. მაშასადამე $\vdash_{K^1} \neg\mathcal{A}$ და $\mathcal{A} \vdash_K \neg\mathcal{A}$. რადგან $\mathcal{A}$ ჩაკეტილი ფორმულაა, მაშინ. დედუქციის თეორემის შედეგი 2.6-ის ძალით, $\vdash_K \mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$. მეორე მხრივ, წინადადება 2.1-ის $\vdash_K (\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow \neg\mathcal{A}$. ამიტომ $\vdash_K \neg\mathcal{A}$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. (ანალოგიურად, თუ $\mathcal{A}$ ფორმულა არაა გამოყვანადი K-ში, მაშინ $\neg\mathcal{A}$-ს დამატებით ახალ აქსიომად, წინააღმდეგობა არ მიიღება).

ლემა 2.10. პირველი რიგის ყოველი თეორიის ყველა გამოსახულებათა სიმრავლე თვლადია (მაშასადამე, კერძოდ თვლადია: ყველა ტერმთა სიმრავლე, ყველა ფორმულათა სიმრავლე, ყველა ჩაკეტილ ფორმულათა სიმრავლე).

დამტკიცება. ყოველ u სიმბოლოს შევუსაბამოთ კენტი რიცხვი $g(u)$ შემდეგი წესით: $g(() = 3$, $g()) = 5$, $g(,) = 7$, $g(\neg) = 9$, $g(\Rightarrow) = 11$, $g(x_k) = 5 + 8k$, $g(a_k) = 7 + 9k$, $g(f_l^n) = 9 + 8 + (2^n \cdot 3^k)$, $g(A_k^n) = 11 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$; ამასთან ჩავთვლით, რომ $g(\forall x_i) = g((x_i))$. ახლა გამოსახულებას $u_0 u_1 \cdots u_r$ შევუსამაბამოთ რიცხვი $2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \cdots P_r^{g(u_r)}$, სადაც P_i არის i-ური მარტივი რიცხვი. ცხადია, ასეთი ნუმერაციის დროს განსხვავებული გამოსახულებები ღებულობენ სხვადასხვა ნომერს, და ჩვენ შეგვიძლია გადავთვალოთ

ყველა გამოსახულება მათი შესაბამისი რიცხვების ზრდის მიხედვით.

პირველი რიგის K თეორიას ეწოდება სრული, თუ ნებისმიერი ჩაკეტილი $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის (K-დან) $\vdash_K \mathcal{A}$, ან $\vdash_K \neg\mathcal{A}$.

პირველი რიგის K' თეორიას, რომელსაც აქვს იგივე სიმბოლოები, რაც პირველი რიგის K თეორიას, ეწოდება K თეორიის გაფართოება, თუ K თეორიის ყოველი თეორემა არის K'-ის თეორემა. (ცხადია, იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ K' არის K-ს გაფართოება, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ K-ს ყველა საკუთრივი აქსიომა არის K'-ის თეორემა).

ლემა 2.11. (ლინდენბაუმის ლემა). თუ პირველი რიგის K თეორია არაწინააღმდეგობრივია, მაშინ არსებობს მისი არაწინააღმდეგობრივი სრული გაფართოება.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots$ – არის K თეორიის ყველა ჩაკეტილ ფორმულათა რაიმე გადათვლა. განვსაზღვროთ $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$,... თეორიათა მიმდევრობა შემდეგნაირად. ვთქვათ $\mathcal{T}_0$ არის K. დავუშვათ $\mathcal{T}_n$ $(n \geq 0)$ თეორია განსაზღვრულია. თუ არა სამართლიანია $\vdash_{\mathcal{T}_n} \neg\mathcal{B}_{n+1}$, მაშინ $\mathcal{T}_{n+1}$ განვსაზღვროთ, როგორც თეორია, რომელიც მიიღება $\mathcal{T}_n$-სგან $\mathcal{B}_{n+1}$-ის დამატებით ახალი აქსიომის როლში. თუ კი $\vdash_{\mathcal{T}_n} \neg\mathcal{B}_{n+1}$, მაშინ ჩავთვალოთ $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n$.

ვთქვათ $\mathcal{T}$ არის პირველი რიგის თეორია, რომელიც მიიღება, თუ აქსიომების როლში ავიღებთ ყველა $\mathcal{T}_i$ თეორიის ყველა აქსიომას. ცხადია, $\mathcal{T}_{n+1}$ არის $\mathcal{T}_n$-ის გაფართოება, ხოლო $\mathcal{T}$ არის ყოველი $\mathcal{T}_i$ თეორიის გაფართოება, მათ შორის $\mathcal{T}_0 = K$ თეორიის. $\mathcal{T}$ თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის დასამტკიცებლად საკმარისია ყოველი $\mathcal{T}_i$ თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის დამტკიცება, რადგან $\mathcal{T}$-ს წინააღმდეგობის ყოველი გამოყვანა იყენებს მხოლოდ აქსიომათა სასრულ რიცხვს და, მაშასადამე, არის გამოყვანა წინააღმდეგობისა რომელიღაც $\mathcal{T}_n$ თეორიაში. დავამტკიცოთ $\mathcal{T}_i$ თეორიის არაწინააღმდეგობა ინდუქციით i ნომრით. პირობით, თეორია $\mathcal{T}_0 = K$ არაწინააღმდეგობრივია. დავუშვათ, რომ თეორია $\mathcal{T}_i$ არაწინააღმდეგობრივია. მაშინ, თუ $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}_{i+1}$ თეორიაც

არაწინააღმდეგობრივია, თუ კი $\mathcal{T}_{i+1} \neq \mathcal{T}_i$ და, მაშას-ადამე, $\mathcal{T}_{i+1}$-ის განსაზღვრის თანახმად, ფორმულა $\neg\mathcal{B}_{i+1}$ არაა გამოყვანადი $\mathcal{T}_i$-ში, მაშინ, ლემა 2.9-ით, $\mathcal{T}_{i+1}$ თეორიაც ასევე არასაწინააღმდეგობრივია. ამრიგად, $\mathcal{T}_i$-ს არაწინააღმდეგობრიობიდან გამომდინარეობს $\mathcal{T}_{i+1}$-ის არაწინააღმდეგობრიობა, და ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ყოველი $\mathcal{T}_i$ თეორია არაწინააღმდეგობრივია; არაწინააღმდეგობრივია, მაშასადამე, $\mathcal{T}$ თეორიაც. $\mathcal{T}$ თეორიის სისრულის დასამტკიცებლად განვიხილოთ K თეორიის ნებისმიერი ჩაკეტილი $\mathcal{A}$ ფორმულა. ცხადია, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{j+1}$ რაღაც j $(j \geq 0)$-სთვის. $\mathcal{T}_i$ თეორიის განსაზღვრის თანახმად, ან $\vdash_{\mathcal{T}_j} \neg\mathcal{B}_{j+1}$, ან $\vdash_{\mathcal{T}_{j+1}} \mathcal{B}_{j+1}$, რადგან თუ არაა $\vdash_{\mathcal{T}_j} \neg\mathcal{B}_{j+1}$, მაშინ $\mathcal{B}_{j+1}$ ცხადდება აქსიომად $\mathcal{T}_{i+1}$-ში. მაშასადამე, გვაქვს $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{B}_{j+1}$ ან $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{B}_{j+1}$.

ამრიგად, $\mathcal{T}$ თეორია არის K თეორიის არაწინააღმდეგობრივი სრული გაფართოება.

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ შეგვიძლია K თეორიის აქსიომების ეფექტური გამოცნობა, მიუხედავად ამისა არ არსებობს არავითარი ეფექტური საშუალება $\mathcal{T}$ თეორიის აქსიომების გამოცნობის (ან გადათვლის), ანუ $\mathcal{T}$ შეიძლება არ იყოს ეფექტურად აქსიომატიზირებადი, მაშინაც კი თუ K ასეთია. ამის მიზეზი შეიძლება იყოს ეფექტური საშუალების შეუძლებლობა, ნებისმიერი n-სთვის დაადგინოს, გამოყვანადია თუ არა ფორმულა $\neg\mathcal{B}_{n+1}$ $\mathcal{T}_n$-ში.

წინადადება 2.12. პირველი რიგის ყოველ არაწინააღმდეგობრივ თეორიას აქვს თვლადი მოდელი (ანუ მოდელი თვლადი არეთი).

დამტკიცება. K თეორიის სიმბოლოებს დავუმატოთ ახალი საგნობრივი კონსტანტების თვლადი სიმრავლე $\{b_1, b_2, \cdots\}$. ასე მიღებულ ახალ თეორიას ვუწოდოთ K_0 თეორია. მისი აქსიომებია K თეორიის ყველა აქსიომა, ასევე ლოგიკური აქსიომების ყველა კერძო შემთხვევა, რომელიც შეიცავს ახალ საგნობრივ კონსტანტებს. K_0 თეორია არაწინააღმდეგობრივია. მართლაც, დავუშვათ, რომ რაიმე $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის არსებობს გამოყვანა $\mathcal{A}\,\&\,\neg\mathcal{A}$ ფორმულისა K_0-ში. ამ გამოყვანაში ყველგან შევცვალოთ მასში შემხვედრი ყველა საგნობრივი კონსტანტა b_i რაიმე საგნობრივი

ცვლადით, რომელიც არ შედის ამ გამოყვანაში. ასეთი შეცვლით ამ გამოყვანაში მონაწილე ყველა აქსიომა დარჩება აქსიომად და შენარჩუნდება ფორმულათა თვისება იყოს უშუალო შედეგი მის წინ მდგომ ფორმულებისა გამოყვანის წესებით. ამრიგად, ამ შეცვლის შემდეგ ჩვენ კვლავ მივიღებთ გამოყვანას, მაგრამ ახლა ეს იქნება გამოყვანა K-ში, რადგან ახალი გამოყვანის არცერთი ფორმულა არ შეიცავს საგნობრივ კონსტანტებს $b_1, b_2, \cdots$. ამ გამოყვანის ბოლო ფორმულა ასევე არის წინააღმდეგობა, რაც ეწინააღმდეგება K თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის პირობას. ამრიგად, K_0 თეორია არაწინააღმდეგობრივია.

ვთქვათ $F_1(x_{i_1}),\ F_2(x_{i_2}),\ \cdots, F_k(x_{i_k}), \cdots$ არის K_0 თეორიის ყველა იმ ფორმულათა გადათვლა, რომლებიც შეიცავენ არაუმეტეს ერთ თავისუფალ ცვლადს (ლემა 2.10). (აქ x_{i_k} არის F_k ფორმულის თავისუფალი ცვლადი, თუ F_k სინამდვილეში არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადს, მაშინ x_{i_k} არის x_1).

ავირჩიოთ რაიმე მიმდევრობა $b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_k}, \cdots$, რომელიც შედგება $\{b_1, b_2, \cdots\}$ სიმრავლის ელემენტებისგან, ისე, რომ მუდმივი b_{j_k} არ შედიოდეს $F_1(x_{i_1}), \cdots, F_k(x_{i_k})$-ში და განსხვავდებოდეს $b_{j_1}, \cdots, b_{j_{k-1}}$-გან. განვიხილოთ ფორმულა

(S_k) $\qquad \neg \forall x_{i_k} F_k(x_{i_k}) \Rightarrow \neg F_k(b_{j_k})$.

განვსაზღვროთ K_n თეორია, როგორც პირველი რიგის თეორია, რომელიც მიიღება K_0 თეორიიდან ამ თეორიის აქსიომებთან ბოლო $(S_1), \cdots, (S_n)$ ფორმულების მიერთებით ახალი აქსიომების როლში, ხოლო თეორია K_∞ – როგორც თეორია, რომელიც მიიღება ანალოგიურად K_0-ის აქსიომებზე ყველა (S_i) ფორმულის მიერთებით. K_∞ თეორიაში ყოველი გამოყვანა შეიცავს (S_i) ფორმულათა მხოლოდ სასრულ რიცხვს და ამიტომ არის გამოყვანა რომელიმე K_n თეორიაშიც. მაშასადამე, თუ ყველა K_n თეორია არაწინააღმდეგობრივია, მაშინ არაწინააღმდეგობრივია K_∞ თეორიაც. i-ს მიმართ ინდუქციით დავამტკიცოთ K_i თეორიის არაწინააღმდეგობრიობა. K_0 თეორიის არაწინააღმდეგობრიობა უკვე დამტკიცებულია. დავუშვათ, რომ რაიმე n-თვის $(n \geq 1)$ K_{n-1} თეორია არაწინააღმდეგობრივია, ხოლო K_n თეორია წინააღმდეგობრივია. მაშინ, როგორც ვიცით $A_1 \Rightarrow (\neg A_1 \Rightarrow A_2)$ ტავტოლოგიის და წინადადება 2.1-ის ძალით),

K_n-ში გამოყვანადია ნებისმიერი ფორმულა. კერძოდ, $\vdash_{K_n} \neg(S_n)$. ამიტომ $(S_n) \vdash_{K_{n-1}} \neg(S_n)$. რადგან (S_n) ფორმულა ჩაკეტილია, ამიტომ, შედეგი 2.6-ის ძალით $\vdash_{K_{n-1}} (S_n) \Rightarrow \neg(S_n)$. ახლა, $(A_1 \Rightarrow \neg A_1) \Rightarrow \neg A_1$ ტავტოლოგიის და წინადადება 2.1-ის მხედველობაში მიღებით, ჩვენ მივიღებთ $\vdash_{K_{n-1}} \neg(S_n)$, ანუ

$$\vdash_{K_{n-1}} \neg(\neg \forall x_{i_n} F_n(x_{i_n}) \Rightarrow \neg F_n(b_{j_n})).$$

შემდეგ $\neg(A_1 \Rightarrow A_1) \Rightarrow (A_1 \& \neg A_2)$, $(A_1 \& A_2) \Rightarrow A_2$, $(A_1 \& A_2) \Rightarrow A_1$ და $\neg\neg A_1 \Rightarrow A_1$ ტავტოლოგიების გამოყენებით $\vdash_{K_{n-1}} \neg \forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})$ და $\vdash_{K_{n-1}} F_n(b_{j_n}))$.

განვიხილოთ $F_n(b_{j_n})$ ფორმულის რაიმე გამოყვანა K_{n-1}-ში, ვთქვათ x_p არის ცვლადი, რომელიც არ გვხვდება ამ გამოყვანაში. მაშინ თუ ყველგან ამ გამოყვანაში შევცვლით b_{j_n}-ს x_p-ით, მივიღებთ $F_n(x_p)$-ს გამოყვანას K_{n-1}-ში, ანუ $\vdash_{K_{n-1}} F_n(x_p)$. ახლა Gen წესი მივიღებთ $\vdash_{K_{n-1}} \forall x_p F_n(x_p)$ და ბოლოს, ლემა 2.8-ით, $\vdash_{K_{n-1}} \forall x_{i_n} F(x_{i_n})$. (აქ ვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ ფორმულები $F_n(x_{i_n})$ და $F_n(x_p)$ არიან მსგავსი). მაგრამ, მეორე მხრივ, ზევით დავადგინეთ, რომ $\vdash_{K_{n-1}} \neg \forall x_{i_n} F(x_{i_n})$. ამრიგად, სახეზეა წინააღმდეგობა დაშვებასთან, რომ K_{n-1} არის არასაწინააღმდეგობრივი. ამიტომ K_n თეორიაც ასევე უნდა იყოს არაწინააღმდეგობრივი. ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ ყველა K_i თეორია, და მასთან ერთად K_∞ თეორია, არაწინააღმდეგობრივია. შევნიშნოთ, რომ K_∞ არის K_0-ის არაწინააღმდეგობრივი გაფართოება. ლემა 2.11-ით, K_∞ აქვს გარკვეული არაწინააღმდეგობრივი სრული გაფართოება $\mathcal{T}$

ჩაკეტილი ტერმი ვუწოდოთ ყოველ ტერმს, რომელიც არ შეიცავს ცვლადებს. K_0 თეორიის თვლადი ინტერპრეტაცია M-ს ექნება თავის არედ K_0 თეორიის ჩაკეტილ ტერმთა სიმრავლე. (ლემა 2.10-ით, ეს სიმრავლე თვლადია). თუ c არის K_0 საგნობრივი კონსტანტა, მაშინ ის თვითონ იქნება თავისი ინტერპრეტაცია. K-ს ფუნქციონალური ასო f_j^n იქნება ინტერპრეტირებული M-ში $(f_j^n)^*$ ოპერაციით, რომელსაც აქვს თავის არგუმენტებად K_0 თეორიის ჩაკეტილი ტერმები $t_1,\cdots,t_n$, ხოლო მნიშვნელობად – იგივე თეორიის

ჩაკეტილი ტერმი $f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$. $(A_j^n)^*$ მიმართება, რომელიც K თეორიის A_j^n პრედიკატულ ასოს ინტერპრეტაციას ახდენს, ჩაითვლება შესრულებულად M-ში $t_1,\cdots,t_n$ არგუმენტებისათვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_{\mathcal{T}} A_j^n(t_1,\cdots,t_n)$. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ M არის K_0-ის მოდელი, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ K_0 თეორიის ნებისმიერი ჩაკეტილი $\mathcal{A}$ ფორმულა ჭეშმარიტია M-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$, რადგან K_0-ის ყველა თეორემა არის ასევე $\mathcal{T}$ თეორემა. ამას ჩვენ დავამტკიცებთ ინდუქციით $\mathcal{A}$ ფორმულაში ოპერაციებისა და კვანტორების რიცხვის მიმართ. ვთქვათ დასაწყისში $\mathcal{A}$ არის ჩაკეტილი ელემენტარული ფორმულა. ამ შემთხვევაში, განსაზღვრის თანახმად, ფორმულა $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია M-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. ახლა დავუშვათ, რომ ყოველი ჩაკეტილი ფორმულა $\mathcal{B}$, რომელშიც ოპერაციების და კვანტორების რიცხვი ნაკლებია ვიდრე $\mathcal{A}$-ში, ჭეშმარიტია M-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{B}$.

შემთხვევა 1. $\mathcal{A}$-ს აქვს სახე $\neg\mathcal{B}$. თუ $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია M-ში, მაშინ $\mathcal{B}$ მცდარია M-ში და, მაშასადამე, ინდუქციური დაშვების ძალით, არა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{B}$. რადგან $\mathcal{T}$ თეორია სრულია, ხოლო $\mathcal{B}$ ფორმულა ჩაკეტილია, ამიტომ $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{B}$, ანუ $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. მეორეს მხრივ, თუ $\mathcal{A}$ არაა ჭეშმარიტი M-ში, მაშინ $\mathcal{B}$ ჭეშმარიტია M-ში, და მაშინ $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{B}$. რადგან $\mathcal{T}$ არაწინააღმდეგობრივი თეორიაა, ამიტომ არაა $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{B}$, ანუ არაა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$.

შემთხვევა 2. $\mathcal{A}$ არის $(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})$. $\mathcal{A}$ ფორმულის ჩაკეტილობიდან გამომდინარეობს $\mathcal{B}$ და $\mathcal{C}$-ს ჩაკეტილობა. თუ $\mathcal{A}$ მცდარია M-ში, $\mathcal{B}$ ჭეშმარიტია და $\mathcal{C}$ მცდარია M-ში. $\mathcal{T}$-ს სასრულის ძალით, $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{C}$. მაშინ, $A_1\Rightarrow(\neg A_2\Rightarrow\neg(A_1\Rightarrow A_2))$ ტავტოლოგიის ძალით, გვაქვს $\vdash_{\mathcal{T}} \neg(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})$, ანუ $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{A}$ და, $\mathcal{T}$-ს არაწინააღმდეგობრიობის ძალით, არაა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. მეორეს მხრივ, თუ არა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$, მაშინ $\mathcal{T}$-ს სისრულის ძალით, $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{A}$. $\neg(A_1\Rightarrow A_2)\Rightarrow A_1$ და $\neg(A_1\Rightarrow A_2)\Rightarrow\neg A_2$ ტავტოლოგიების გამოყენებით მივიღებთ $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{B}$ და $\vdash_{\mathcal{T}} \neg\mathcal{C}$. მაშასადამე, $\mathcal{B}$ ფორმულა ჭეშმარიტია M-ში. $\mathcal{T}$-ს არაწინააღმდეგობრიობის ძალით, არა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{C}$, და მაშასადამე, $\mathcal{C}$ ფორმულა მცდარია M-ში. ამრიგად $\mathcal{A}$ მცდარია M-ში.

შემთხვევა 3. $\mathcal{A}$ არის $\forall x_n \mathcal{B}$. მაშინ გარკვეული k-სთვის, $\mathcal{B}$ არის $F_k(x_{i_k})$ და x_n არის x_{i_k}. (აქ არის კიდევ იმის შესაძლებლობა, რომ $\mathcal{B}$ ჩაკეტილია და არ შეიცავს x_n-ს თავისუფლად. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{B}$ ჭეშმარიტია (იხ. (VI)) და ამიტომ $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{B}$. ამრიგად, $\mathcal{A}$-ს შესახებ ჩვენთვის საინტერესო დებულება გამოდის $\mathcal{B}$-ს შესახებ შესაბამისი დებულებიდან). დავუშვათ, რომ $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია M-ში, მაგრამ არა $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. $\mathcal{T}$-ს სისრულის ძალით $\vdash_{\mathcal{T}} \neg \mathcal{A}$, ანუ $\vdash_{\mathcal{T}} \neg \forall x_{i_k} F(x_{i_k})$. მაგრამ, როგორც ვიცით, $\vdash_{\mathcal{T}} (S_k)$. მაშასადამე, $\vdash_{\mathcal{T}} \neg F_k(b_{j_k})$. რადგან ფორმულა $\mathcal{A} = \forall x_{i_k} F_k(x_{i_k})$ ჭეშმარიტია M-ში, ამიტომ M-ში ჭეშმარიტია $F_k(b_{i_k})$ ფორმულაც (იხ. (X)). ინდუქციური დაშვებით, მივიღებთ $\vdash_{\mathcal{T}} F_k(b_{j_k})$ და ამრიგად, მივდივართ წინააღმდეგობამდე $\mathcal{T}$ თეორიის არაწინააღმდეგობრიობის ფაქტთან. ახლა დავუშვათ, რომ $\mathcal{A}$ მცდარია M-ში, მაგრამ $\vdash_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. $\forall x_{i_k} F_k(x_k)$ ფორმულის მცდარობიდან M-ში და M-ის განსაზღვრიდან, როგორც K_0 თეორიის ყველა ჩაკეტილ ტერმთა სიმრავლისა, გამომდინარეობს ((VI) და (X)-ის მეორე ნაწილის საფუძველზე), რომ გარკვეული ჩაკეტილი t ტერმისათვის K_0 თეორიისა, $F_k(t)$ მცდარია. მაგრამ. დაშვებით გვაქვს $\vdash_{\mathcal{T}} \forall x_{i_k} F_k(x_{i_k})$. მაშასადამე, (4) აქსიომით, $\vdash_{\mathcal{T}} F_k(t)$ და, შემდეგ, ინდუქციური დაშვებით $F_k(t)$ ფორმულა ჭეშმარიტია M-ში. კვლავ მიდევით წინააღმდეგობამდე.

ამრიგად, M არის $\mathcal{T}$-ს თვლადი მოდელი, და მაშასადამე, ასევე K_0-ის. რადგან K თეორიის ყოველი თეორემა არის K_0 თეორიის თეორემა, M არის თვლადი მოდელი K თეორიისთვისაც. (შევნიშნოთ, რომ M მოდელი ყოველთვის არ შეიძლება აგებულ იქნას ეფექტურად. პრედიკალურ ასოების ინტერპრეტაცია დამოკიდებულია $\mathcal{T}$-ში გამოყვანადობის ცნებაზე, ხოლო ეს უკანასკნელი, როგორც ეს აღნიშნული იყო ლემა 2.11-ის დამტკიცების შემდეგ, შეიძლება არ იყოს ეფექტურად ამოხსნადი).

შედეგი 2.13. ყოველი ლოგიკურად ზოგადმართებული ფორმულა არის K თეორიის თეორემა.

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ჩაკეტილი $\mathcal{A}$ ფორმულა, რადგან ყოველი $\mathcal{B}$ ფორმულა ლოგიკურად ზოგადმართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ლოგიკურად ზოგადმართებულია მისი ჩაკეტვა და გამოყვანადია K-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა K-ში გამოყვანადია მისი ჩაკეტვა. მაშ, ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის K თეორიის ლოგიკურად ზოგადმართებული ჩაკეტილი ფორმულა. დავუშვათ, რომ $\mathcal{A}$ არ არის თეორემა K-ში. მაშინ თუ ჩვენ $\neg\mathcal{A}$ ფორმულას დავიმატებთ ახალ აქსიომად K-თეორიას, მივიღებთ ახალ K' თეორიას, რომელიც არაწინააღმდეგობრივია ლემა 2.9-ის ძალით. K' თეორიას აქვს წინადადება 2.12-ის თანახმად, M მოდელი. რადგან $\neg\mathcal{A}$ ფორმულა არის K'-ში აქსიომა. ამიტომ $\neg\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია M-ში, ხოლო რადგან $\mathcal{A}$ ფორმულა არის ლოგიკურად ზოგადმართებული, ამიტომ ისიც ჭეშმარიტია M-ში. ამრიგად, მივიღებთ, რომ $\mathcal{A}$ ფორმულა ერთდროულად ჭეშმარიტია და მცდარია M-ში, რაც შეუძლებელია (იხ. (II)). ამრიგად, $\mathcal{A}$ ფორმულა უნდა იყოს თეორემა K თეორიის.

შედეგი 2.14. (გეოდელის თეორემა სისრულის შესახებ). პირველი რიგის პრედიკატთა ყოველ აღრიცხვაში თეორემებია ყველა ის და მხოლოდ ის ფორმულები, რომლებიც არიან ლოგიკურად ზოგადმართებული.

დამტკიცება. გამომდინარეობს წინადადება 2.7 და შედეგი 2.13-დან.

შედეგი 2.15. (a) $\mathcal{A}$ ფორმულა ჭეშმარიტია K თეორიის ყოველ თვლად მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_K \mathcal{A}$. მაშასადამე, $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია K თეორიის ყოველ მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_K \mathcal{A}$.

(b) თუ $\mathcal{B}$ ფორმულა K თეორიის ყოველ მოდელში შესრულებულია ყოველ მიმდევრობაზე, რომელზეც შესრულებულია ფორმულათა რაიმე Γ სიმრავლის ყოველი ფორმულა, მაშინ $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.

(c) თუ K თეორიის $\mathcal{B}$ ფორმულა არის K თეორიის ფორმულათა მოცემული Γ-სიმრავლის ლოგიკური შედეგი, მაშინ $\Gamma \vdash_K \mathcal{B}$.

(d) თუ K თეორიის $\mathcal{B}$ ფორმულა არის იგივე თეორიის $\mathcal{A}$ ფორმულის ლოგიკური შედეგი, მაშინ $\mathcal{A} \vdash_K \mathcal{B}$.

დამტკიცება. (a) შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\mathcal{A}$ ფორმულა ჩაკეტილია. ვთქვათ $\mathcal{A}$ ფორმულა ჭეშმარიტია K თეორიის ნებისმიერ თვლად მოდელში. თუ არა $\vdash_K \mathcal{A}$, მაშინ თეორია $K' = K + \{\neg \mathcal{A}\}$ არაწინააღმდეგობრივია. მაშასადამე, K' აქვს თვლადი მოდელი M. $\neg \mathcal{A}$ ფორმულა, როგორც K'-ის აქსიომა, ჭეშმარიტია M-ში. მაგრამ და, მაშასადამე, $\Gamma \vdash_{K+\Gamma} \mathcal{B}$. M-ში. ამრიგად, $\mathcal{A}$ ფორმულა ერთდროულად ჭეშმარიტია და მცდარია M-ში. მივედით წინააღმდეგობამდე.

(b) განვიხილოთ თეორია $K + \Gamma$. $\mathcal{B}$ ფორმულა ჭეშმარიტია ამ თეორიის ყოველ მოდელში. მაშინ (a)-ს ძალით, $\vdash_{K+\Gamma} \mathcal{B}$. M არის მოდელი K-სთვისაც და, ამიტომ $\mathcal{A}$ ჭეშმარიტია.

(c) პუნქტი გამოდის (b)-დან, ხოლო (d) არის (c)-ს კერძო შემთხვევა.

წინადადება 2.12-დან გამოდის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი კლასიკური შედეგი:

შედეგი 2.16 (სკოლემ-ლევენგეიმის თეორემა). თუ პირველი რიგის K თეორიას აქვს რაიმე მოდელი, მაშინ მას აქვს თვლადი მოდელი.

დამტკიცება. თუ K-ს აქვს მოდელი, მაშინ K არაწინააღმდეგობრივია. მაშასადამე, წინადადება 2.12-ით, K-ს აქვს თვლადი მოდელი.

§ 6. ზოგიერთი დამატებითი მეტათეორემა

პირველი რიგის კონკრეტულ თეორიებთან შემდგომი მუშაობის გამარტივებისათვის სასარგებლოა ამ თეორიების შესახებ ზოგიერთი დამატებითი ფაქტის დამტკიცება. ყველგან ამ პარაგრაფში ჩავთვლოთ, რომ საქმე გვაქვს პირველი რიგის ნებისმიერ K თეორიასთან.

მრავალ შემთხვევაში, $\forall x \mathcal{A}(x)$-ის დამტკიცების შემდეგ, სასურველია დამტკიცებული გვქონდეს $\mathcal{A}(t)$-ც, სადაც t რაიმე ტერმია,

რომელიც თავისუფალია x-სთვის $\mathcal{A}(x)$-ში. ეს შესაძლებელია და ამასთანავე მისი დაფუძნება ხდება შემდეგი წესით.

ინდივიდუალიზაციის წესი A4. თუ t ტერმი თავისუფალია x-სთვის $\mathcal{A}(x)$-ში, მაშინ $\forall x\mathcal{A}(x) \vdash \mathcal{A}(t)$.

დამტკიცება. $\forall x\mathcal{A}(x)$-დან და $\forall x\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(t)$-დან, რომელიც არის (4) აქსიომის კერძო შემთხვევა, modus ponens-ით მივიღებთ $\mathcal{A}(t)$-ს.

წინადადება 2.18. თუ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულებია და x საგნობრივი ცვლადი არ არის თავისუფალი $\mathcal{A}$-ში, მაშინ შემდეგი ფორმულები არიან თეორემები K-ში.

(a) $\mathcal{A} \Rightarrow \forall x\mathcal{A}$ (მაშასადამე, (4) აქსიომით, $\vdash \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x\mathcal{A}(x)$);

(b) $\exists x\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ (მაშასადამე, ქვემოთმოყვანილი წესით E4, $\vdash \exists x\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$);

(c) $\forall x(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \forall x\mathcal{B})$;

(d) $\forall x(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\exists x\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

დამტკიცება სავარჯიშოს სახით ევალება მკითხველს.

სასარგებლოა კიდევ შემდეგი წარმოებული წესი, რომელიც არის A4 წესის კონტრაპოზიცია.

არსებობის წესი E4. თუ t ტერმი თავისუფალია x-სთვის $\mathcal{A}(x)$-ში, მაშინ $\vdash \mathcal{A}(t) \Rightarrow \exists x\mathcal{A}(x)$ და, მაშასადამე $\mathcal{A}(t) \vdash \exists x\mathcal{A}(x)$.

დამტკიცება. (4) აქსიომით გვაქვს $\vdash \forall x\neg\mathcal{A}(x) \Rightarrow \neg\mathcal{A}(t)$. $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$ ტავტოლოგიით და MP-ით მივიღებთ $\vdash \mathcal{A}(t) \Rightarrow \neg\forall x\neg\mathcal{A}(x)$, ანუ $\vdash \mathcal{A}(t) \Rightarrow \exists x\,\mathcal{A}(x)$. მაშასადამე, $\mathcal{A}(t) \vdash \exists x\mathcal{A}(x)$.

წინადადება 2.19. ნებისმიერი $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულებისათვის

$$\vdash \forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\forall x\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x\mathcal{B}).$$

დამტკიცება.

1. $\forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$	ჰიპოთეზა
2. $\forall x\mathcal{A}$	ჰიპოთეზა
3. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	1, A4 წესი
4. $\mathcal{A}$	2, A4 წესი
5. $\mathcal{B}$	3, 4, ტავტოლოგია $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, MP
6. $\forall x\mathcal{B}$	5, Gen

7.	$\forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})\ ,\ \forall x\mathcal{A} \vdash \forall x\mathcal{B}$	1-6
8.	$\forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x\mathcal{A} \Rightarrow \forall x\mathcal{B}$	1-7, წინადადება 2.4
9.	$\forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x\mathcal{B} \Rightarrow \forall x\mathcal{A}$	მტკიცდება 8-ის ანალოგიურად.
10.	$\forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \vdash \forall x\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x\mathcal{B}$	8, 9, კონიუნქციის წესი.
11.	$\vdash \forall x(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\forall x\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x\mathcal{B})$	1-10, წინადადება 2.4.

წინადადება 2.20. (ეკვივალენტობის თეორემა). თუ $\mathcal{B}$ არის $\mathcal{A}$-ს ქვეფორმულა და $\mathcal{A}^1$ არის $\mathcal{A}$-ში $\mathcal{B}$-ს რომელიმე (შეიძლება, არცერთი) შემოსვლის $\mathcal{C}$-ით შეცვლის შედეგი და თუ $\mathcal{B}$ ფორმულის ან $\mathcal{C}$ ფორმულის ყოველი თავისუფალი ცვლადი, რომელიც ერთდროულად არის $\mathcal{A}$ ფორმულის დაბმული ცვლადი, გვხვდება $y_1,\cdots,y_k$-ს შორის, მაშინ

$$\vdash[\forall y_1 \cdots \forall y_k(\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C})] \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}').$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქცია $\mathcal{A}$-ში ოპერაციათა და კვანტორთა რიცხვის მიმართ. პირველად შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathcal{B}$-ს არცერთი შემოსვლა არ იცვლება, მაშინ $\mathcal{A}'$ ემთხვევა $\mathcal{A}$-ს და ფორმულა, რომლის გამოყვანაც მოითხოვება, არის $B \Rightarrow (A \Leftrightarrow A)$ ტავტოლოგიის კერძო შემთხვევა. თუ $\mathcal{B}$ ემთხვევა $\mathcal{A}$-ს და ეს ერთადერთი შემოსვლა იცვლება $\mathcal{C}$-ით, მაშინ ფორმულა, რომლის გამოყვანაც მოითხოვება, გამოიყვანება აქსიომიდან (4). ამრიგად, შემდეგში შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\mathcal{B}$ არის $\mathcal{A}$-ს საკუთრივი ქვეფორმულა და $\mathcal{B}$-ს ერთი მაინც შემოსვლის შეცვლა ხდება $\mathcal{C}$-ით. დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ყოველი ფორმულისათვის, რომელშიც ოპერაციათა და კვანტორთა რიცხვი ნაკლებია, ვიდრე $\mathcal{A}$-ში.

შემთხვევა 1. $\mathcal{A}$ არის ელემენტარული ფორმულა. მაშინ $\mathcal{B}$ არ შეიძლება იყოს $\mathcal{A}$-ს საკუთრივი ქვეფორმულა.

შემთხვევა 2. $\mathcal{A}$ არის $\neg\mathcal{B}$. ვთქვათ მაშინ $\mathcal{A}'$ არის $\neg\mathcal{D}'$. ინდუქციური დაშვებით $\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k(\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}')$.

აქედან $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$ ტავტოლოგიის გამოყენებით მივიღებთ

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k(\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}').$$

შემთხვევა 3. $\mathcal{A}$ არის $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$. მაშინ ვთქვათ $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{E}'$. ინდუქციური დაშვებით $\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k(\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}')$

და $\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}')$. $((A \Leftrightarrow B) \& (C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow D))$ ტავტოლოგიის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}').$$

შემთხვევა 4. $\mathcal{A}$ არის $\forall x \mathcal{D}$, მაშინ გარკვეული $\mathcal{D}'$ ფორმულისათვის $\mathcal{A}'$ ემთხვევა $\forall x \mathcal{D}'$-ს. ინდუქციური დაშვებით $\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}')$. x ცვლადი არ გვხვდება თავისუფლად $\forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C})$-ში; მართლაც, თუ x ამ უკანასკნელ ფორმულაში შევიდოდა თავისუფლად, მაშინ x შევიდოდა თავისუფლად $\mathcal{B}$-ში ან $\mathcal{C}$-ში, მაგრამ რადგან x დაბმულია $\mathcal{A}$-ში, ამიტომ x შევიდოდა მიმდევრობაში $y_1, \cdots, y_k$ და იქნებოდა დაბმული ცვლადი ფორმულაში $\forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C})$, რასაც მივყავართ წინააღმდეგობამდე. ახლა, აქსიომა (5)-ის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \forall x (\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}').$$

ამავე დროს, წინადადება 2.19-ის ძალით, გვაქვს

$$\forall x (\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}') \Rightarrow (\forall x \mathcal{D} \Leftrightarrow \forall x \mathcal{D}').$$

ბოლოს ორის შედარებით მივიღებთ

$$\vdash \forall y_1 \cdots \forall y_k (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}').$$

შედეგი 2.21. (თეორემა შეცვლის შესახებ). ვთქვათ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'$ და $\mathcal{C}$ აკმაკოფილებენ წინადადება 2.20-ის პირობებს. თუ $\vdash \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, მაშინ $\vdash \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}'$, ხოლო თუ $\vdash \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, და $\vdash \mathcal{A}$, მაშინ $\vdash \mathcal{A}'$.

შედეგი 2.22. (დაბმული ცვლადების სახელის შეცვლა). თუ $\forall x \mathcal{B}(x)$ არის $\mathcal{A}$ ფორმულის ქვეფორმულა, $\mathcal{B}(y)$ ფორმულა მსგავსია $\mathcal{B}(x)$ ფორმულის და $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$-ში $\forall x \mathcal{B}(x)$-ის ერთი მაინც შემოსვლის ნაცვლად $\forall x \mathcal{B}(y)$-ით შეცვლის შედეგი, მაშინ $\vdash \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}'$.

დამტკიცება. ლემა 2.8 და შედეგი 2.21-ის გამოყენებით.

§ 7. C ᲕᲔᲡᲘ

მათემატიკაში მეტად გავრცელებულია შემდეგი სახის დასკვნები. ვთქვათ გამოვიყვანეთ $\exists x \mathcal{A}(x)$ სახის ფორმულა. შემდეგ ვამბობთ: „ვთქვათ b არის ისეთი ობიექტი, რომ $\mathcal{A}(b)$“, და ვაგრძელებთ ჩვენს

მსჯელობას ან დამტკიცებას, ბოლოს და ბოლოს მივდივართ ფორმულამდე, რომელიც არ შეიცავს ნებისმიერად შერჩეულ ელემენტს b.

წესს, რომელიც საშუალებას იძლევა $\exists x\mathcal{A}(x)$-დან $\mathcal{A}(b)$-ზე გადასვლისა, C წესი (C – პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა choice – ამორჩევა). დიდი სიზუსტისათვის საჭირო იყო გვეთქვა „C წესით გამოყვანის“ ცნების შესახებ პირველი რიგის K თეორიაში. ეს წესი შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$\Gamma \vdash_C \mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ფორმულათა ისეთი მიმდევრობა $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_n = \mathcal{A}$, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

(I). ყოველი i-სთვის ან

(1) $\mathcal{B}_i$ არის K-ს აქსიომა, ან

(2) $\mathcal{B}_i$ ეკუთვნის Γ-ს, ან

(3) $\mathcal{B}_i$ გამომდინარეობს MP-ით ან Gen-ით ამ მიმდევრობაში მის წინ მყოფი ფორმულებიდან, ან

(4) $\mathcal{B}_i$ ფორმულა წინ უსწრებს $\forall x\mathcal{C}(x)$ ფორმულა, ხოლო თვითონ $\mathcal{B}_i$ ფორმულა არის $\mathcal{C}(b)$, სადაც b – ახალი საგნობრივი ცვლადია (C წესი)

(II). (I) (1)-ში აქსიომებად დასაშვებია ასევე ყველა შესაძლო ლოგიკური აქსიომები, რომლებიც შეიცავენ ახალ საგნობრივ მუდმივებს, რომლებიც უკვე შემოტანილი არიან C წესით, ანუ (I) (4)-ით.

(III). დაუშვებელია Gen წესის გამოყენება იმ ცვალების მიმართ, რომლებიც თავისუფალნი არიან $\exists x\mathcal{C}(x)$ სახის ერთ ფორმულაში მაინც, რომელთა მიმართ ადრე გამოყენებული იყო C წესი.

(IV) $\mathcal{A}$ არ შეიცავს ახალ საგნობრივ მუდმივებს, რომლებიც შემოტანილი არიან C წესით.

საჭიროა ყურადღება გავამახვილოთ იმაზე, რომ განსაზღვრის (III) პუნქტი მართლაც აუცილებელია, რადგან ამ პუნქტის შეზღუდვის გარეშე შესაძლებელი ხდება, მაგალითად, ასეთი გამოყვანა.

1. $\forall x\exists y\mathcal{A}_1^2(x,y)$	ჰიპოთეზა
2. $\exists y\mathcal{A}_1^2(x,y)$	1, წესი A4
3. $\mathcal{A}_1^2(x,b)$	2, წესი C
4. $\forall x\mathcal{A}_1^2(x,b)$	3, Gen

5. $\exists y \forall x \mathscr{A}_1^2(x,y)$ 4, წესი E4

6. $\forall x \exists y \mathscr{A}_1^2(x,y) \vdash_C \exists y \forall x \mathscr{A}_1^2(x,y)$ 1-5

ამავე დროს ვიცით, რომ არსებობს ისეთი ინტერპრეტაცია, რომლისთვისაც ფორმულა $\forall x \exists y A_1^2(x,y)$ ჭეშმარიტია, ხოლო ფორმულა $\exists y \forall x A_1^2(x,y)$ მცდარი.

წინადადება 23. თუ $\Gamma \vdash_C \mathscr{A}$, მაშინ $\Gamma \vdash \mathscr{A}$. უფრო მეტიც, ქვემოთ-მოყვანილი დამტკიცებიდან ადვილი დასანახია, რომ თუ ახალ დამტკიცებაში გამოიყენება Gen წესი რაიმე ცვლადის მიმართ ფორმულაში, რომელიც დამოკიდებულია Γ-ს რაიმე ფორმულაზე, მაშინ ასეთივე გამოყენება იყო საწყის გამოყვანაშიც.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია რაიმე *C*-გამოყვანა $\mathscr{A}$ ფორმულის Γ-დან, და ვთქვათ $\exists y_1 \mathscr{C}_1(y_1), \cdots, \exists y_k \mathscr{C}_k(y_k)$ – ფორმულებია (მათი შემოტანის რიგის მიხედვით), რომელთა მიმართ ამ *C*-გამოყვანაში გამოიყენება *C* წესი, ხოლო $c_1, \cdots, c_k$ – ამ დროს შემოტანილი საგნობრივი მუდმივები. მაშინ, ცხადია, $\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_k(c_k) \vdash \mathscr{A}$, ხოლო საწყის *C*-გამოყვანაში Gen წესის გამოყენებაზე შეზღუდვის ძალით, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დედუქციის თეორემა და, მაშასადამე, $\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_k(c_{k-1}) \vdash \mathscr{C}_k(c_k) \Rightarrow \mathscr{A}$. თუ ყველგან შესაბამის გამოყვანაში c_k მუდმივს შევცვლით z ცვლადით, რომელიც ამ გამოყვანაში არ გვხვდება, მივიღებთ

$$\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_{k-1}(c_{k-1}) \vdash \mathscr{C}_k(c_k) \Rightarrow \mathscr{A}$$

და, მაშასადამე, Gen წესით

$$\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_{k-1}(c_{k-1}) \vdash \forall z(\mathscr{C}_k(z) \Rightarrow \mathscr{A}),$$

აქედან, წინადადება 18(d)-ს საფუძველზე, მივიღებთ

$$\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_{k-1}(c_{k-1}) \vdash \exists y_k \mathscr{C}_k(y_k) \Rightarrow \mathscr{A}.$$

მაგრამ რადგან

$$\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_{k-1}(c_{k-1}) \vdash \exists y_k \mathscr{C}_k(y_k),$$

მაშინ

$$\Gamma, \mathscr{C}_1(c_1), \cdots, \mathscr{C}_k(c_{k-1}) \vdash \mathscr{A}.$$

თუ მსჯელობის ამ სქემას გავიმეორებთ, ჩვენ რიგრიგობით გამოვრიცხავთ $\mathcal{C}_{k-1}(c_{k-1}), \mathcal{C}_{k-2}(c_{k-2}), \cdots, \mathcal{C}_1(c_1)$ რის შედეგადაც მივიღებთ $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

§ 8. პირველი რიგის ტოლობიანი თეორიები

ვთქვათ K არის პირველი რიგის თეორია, რომლის პრედიკატულ ასოთა შორის არის A_1^2. სიმოკლისათვის ჩავწერთ $t = s$ ნაცვლად $A_1^2(t,s)$ და $t \neq s$ ნაცვლად $\neg A_1^2(t,s)$. K თეორიას ეწოდება პირველი რიგის თეორია ტოლობით, თუ შემდეგი ფორმულები არიან K თეორიის თეორემები:

(6) $\forall x_1(x_1 = x_1)$ (ტოლობის რეფლექსურობა);

(7) $(x = y) \Rightarrow (\mathcal{A}(x,x) \Rightarrow \mathcal{A}(x,y))$ (ტოლობის ჩასმა),

სადაც x, y – საგნობრივი ცვლადებია, $\mathcal{A}(x,x)$ – ნებისმიერი ფორმულაა, ხოლო $\mathcal{A}(x,y)$ მიიღება $\mathcal{A}(x,x)$-დან x-ის ზოგიერთი თავისუფალი შემოსვლის (არა აუცილებლად ყველასი) y-ის შემოსვლის შეცვლით, იმ პირობის დაცვით, რომ y იყოს თავისუფალი იმ შემოსვლებისათვის, რომლებიც იცვლებიან.

(**შენიშვნა**. აქ გაგრძელებულია ლოგიკურ აქსიომათა ნუმერაცია).

წინადადება 24. ყოველ პირველი რიგის თეორიაში ტოლობით გვაქვს:

(a) $\vdash t = t$ ნებისმიერი t ტერმისათვის;

(b) $\vdash x = y \Rightarrow y = x$;

(c) $\vdash x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)$.

დამტკიცება. (a) (6)-ის ძალით $\vdash \forall x_1(x_1 = x_1)$, მაშასადამე, A4 წესით $\vdash t = t$.

(b) ვთქვათ არის $\mathcal{A}(x,x)$ არის $x = x$ და $\mathcal{A}(x,y)$ არის $y = x$. მაშინ, (7)-ის ძალით, $\vdash (x = y) \Rightarrow (x = x \Rightarrow y = x)$. მაგრამ $\vdash x = x$. $\vdash x = y \Rightarrow y = x$ მივიღებთ $B \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ტავტოლოგიის დახმარებით.

(c) ვთქვათ $\mathcal{A}(y,y)$ არის $y = z$ და $\mathcal{A}(y,x)$ არის $x = z$. მაშინ, (7)-ის ძალით x-სა და y-ის ურთიერთ შეცვლით, $\vdash y = x \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)$. მაგრამ (b)-ს ძალით, $\vdash x = y \Rightarrow y = x$. მაშასადამე

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ტავტოლოგიის გამოყენებით გვაქვს $\vdash x = y \Rightarrow \ (y = z \Rightarrow x = z)$.

წინადადება 25. თუ პირველი რიგის K თეორიისათვის თეორემებია (6) ფორმულა და, ნებისმიერი ელემენტარული $\mathcal{A}(x, x)$ ფორმულისათვის, ფორმულა (7), მაშინ K არის პირველი რიგის თეორია ტოლობით ანუ K-ში (7) სახის ყოველი ფორმულა არის თეორემა.

დამტკიცება. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ (7) სახის ყოველი ფორმულა არის K-ში თეორემა. ელემენტარული ფორმულებისათვის ეს სამართლიანია პირობით. შევნიშნოთ, რომ განსახილველი K თეორიისათვის წინადადება 24 სამართლიანია, რადგან მის დამტკიცებაში გამოიყენება (7) მხოლოდ ელემენტარული ფორმულებისათვის. ვისარგებლოთ ინდუქციით $\mathcal{A}$ ფორმულაში კავშირებისა და კვანტორების n-რიცხვის მიმართ. დავუშვათ, რომ ყოველი $k < n$ (7) სახის ყველა ფორმულა არის K-ში თეორემა.

შემთხვევა 1. $\mathcal{A}(x, x)$ არის $\neg \mathcal{B}(x, x)$. ინდუქციური დაშვებით გვაქვს $\vdash y = x \Rightarrow (\mathcal{B}(x, y) \Rightarrow \mathcal{B}(x, x))$, რადგან $\mathcal{B}(x, x)$ მიიღება $\mathcal{B}(x, y)$ -დან y-ის ზოგიერთი შემოსვლის x-ით შეცვლით. აქედან წინადადება 24(b) და $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ და $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ტავტოლოგიების გამოყენებით მივიღებთ $\vdash x = y \Rightarrow (\mathcal{A}(x, x) \Rightarrow \mathcal{A}(x, y))$.

შემთხვევა 2. $\mathcal{A}(x, x)$ არის $\mathcal{B}(x, x) \Rightarrow \mathcal{C}(x, x)$. ინდუქციური დაშვებისა და წინადადება 24(b)-ს ძალით, $\vdash x = y \Rightarrow (\mathcal{B}(x, y) \Rightarrow \mathcal{B}(x, x))$ და $\vdash x = y \Rightarrow (\mathcal{C}(x, x) \Rightarrow \mathcal{C}(x, y))$. აქედან $(A \Rightarrow (B_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow [(A \Rightarrow (C \Rightarrow C_1)) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (B_1 \Rightarrow C_1)))]$ ტავტოლოგიის გამოყენებით $\vdash x = y \Rightarrow (\mathcal{A}(x, x) \Rightarrow \mathcal{A}(x, y))$.

შემთხვევა 3. $\mathcal{A}(x, x)$ არის $\forall z \mathcal{B}(x, x, z)$. ინდუქციური დაშვებით, $\vdash x = y \Rightarrow (\mathcal{B}(x, x, z) \Rightarrow \mathcal{B}(x, y, z))$. გამოვიყენოთ Gen წესი და აქსიომა (5) მივიღებთ $\vdash x = y \Rightarrow \forall z(\mathcal{B}(x, x, z) \Rightarrow \mathcal{B}(x, y, z))$. შევნიშნოთ, რომ $\vdash \forall x_1(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\forall x_1 \mathcal{A} \Rightarrow \forall x_1 \mathcal{B})$. აქედან გვაქვს $\forall z(\mathcal{B}(x, x, z) \Rightarrow \mathcal{B}(x, y, z)) \Rightarrow [\forall z \mathcal{B}(x, x, z) \Rightarrow \forall z \mathcal{B}(x, y, z)]$ და $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ ტავტოლოგიის გამოყენებით საბოლოოდ ვღებულობთ $\vdash x = y \Rightarrow (\mathcal{A}(x, x) \Rightarrow \mathcal{A}(x, y))$.

წინადადება 26. ვთქვათ K არის პირველი რიგის თეორია, რომელშიც თეორემათა რიცხვს ეკუთვნის (6) ფორმულა, ასევე (7) სახის ყველა ფორმულა, რომელშიც $\mathcal{A}(x,x)$ ფორმულა ელემენტარულია, არ შეიცავს ფუნქციონალური ასოების შემოსვლებს და $\mathcal{A}(x,y)$ მიიღება $\mathcal{A}(x,x)$-დან y-ით x-ის ზუსტად ერთი შემოსვლის შეცვლით. ვთქვათ, გარდა ამისა: (*) ყოველი ფუნქციონალური ასოსათვის f_j^n და ცვლადთა ყოველი $z_1,\cdots,z_n$ ერთობლიობისათვის შესრულებულია $\vdash x=y \Rightarrow f_j^n(z_1,\cdots,z_n)=f_j^n(w_1,\cdots,w_n)$, სადაც $f_j^n(w_1,\cdots,w_n)$ მიღებულია $f_j^n(z_1,\cdots,z_n)$-დან x-ის რაიმე ერთი შემოსვლის y-ით შეცვლით. მაშინ K არის პირველი რიგის თეორია ტოლობით.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ, რომ x-ის მრავალი შემოსვლოს შეცვლა y-ით დაიყვანება მიმდევრობით აქტებზე x-ის ერთი შემოსვლის შეცვლოსა y-ით. ადვილი დასანახია, რომ წინადადება 24-იც დამტკიცებადია წინადადება 26-ის პირობებში. წინადადება 25-ის ძალით, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ K-ს თეორემებია ელემენტარული $\mathcal{A}$-ით (7) სახის ყველა ფორმულა. ამასთან არაა რთული დასამტკიცებელია, რომ $\vdash y_1=z_1 \,\&\cdots\&\, y_n=z_n \Rightarrow \mathcal{A}(y_1\cdots,y_n)\Rightarrow\mathcal{A}(z_1,\cdots,z_n)$ ცვლადების ნებისმიერი $y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_n$ ერთობლიობისათვის და ნებისმიერი ელემენტარული $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის, რომელსაც არ აქვს ფუნქციონალური ასოების შემოსვლა. A4 წესის გამოყენებით დამტკიცება შეიძლება დავიყვანოთ $\vdash x=y \Rightarrow t(x,x)-t(x,y)$ ფაქტის დადგენაზე, სადაც $t(x,x)$-ტერმია და $t(x,y)$ მიიღება $t(x,x)$-დან x-ის რაიმე შემოსვლის y-ოთ შეცვლით. ეს კი მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს (*) პირობის გამოყენებით t-ში შემავალ ფუნქციონალურ ასოთა რიცხვზე ინდუქციით და ეს უნდა გააკეთოს მკითხველმა სავარჯიშოს სახით.

მაგალითები:

1. G-ჯგუფთა ელემენტარული თეორია: პრედიკატული ასო $=$, ფუნქციონალური ასო f_1^2, საგნობრივი მუდმივი a_1. სიმოკლისათვის შემდეგში ნაცვლად $f_1^2(t,s)$ ვწერთ $t+s$ და 0 ნაცვლად a_1. საკუთრივი აქსიომები:

(a) $x_1+(x_1+x_2)=(x_1+x_2)+x_3$;

(b) $x_1 + 0 = x_1$;

(c) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$;

(d) $x_1 = x_1$;

(e) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 + x_1$;

(f) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3)$;

(g) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \,\&\, x_3 + x_1 = x_3 + x_2)$.

წინადადება 25-ზე დაყრდმობით ადვილი დასამტკიცებელია, რომ G არის პირველი რიგის თეორია ტოლობით. თუ დავუმატებთ ერთ აქსიომას:

(h) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$,

მაშინ მივიღებთ G_c თეორიას, რომელსაც ეწოდება აბელურ ჯგუფთა ელემენტარული თეორია.

2. F-ველთა ელემენტარული თეორია: პრედიკატული ასო =, ფუნქციონალური ასოები f_1^2 და f_2^2, საგნობრივი მუდმივები a_1 და a_2. შემოკლებებია: $t+s$ $f_1^2(t,s)$-სთვის, $t \cdot s$ $f_2^2(t,s)$-სთვის, 0 და 1 შესაბამისად a_1 და a_2-სთვის. საკუთრივი აქსიომებია G_c თეორიის (a)-(h) აქსიომები (წინა მაგალითიდან), და აგრეთვე ფორმულები:

(i) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 \,\&\, x_3 \cdot x_1 = x_3 \cdot x_2)$;

(j) $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$;

(k) $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3)$;

(l) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$;

(m) $x_1 \cdot 1 = x$;

(n); $x_1 \neq 0 \Rightarrow \exists x_2 (x_1 \cdot x_2 = 1)$

F არის პირველი რიგის თეორია ტოლობით: (a)-(m) აქსიომები საზღვრავენ კომუტაციურ რგოლთა ელემენტარულ თეორიას R_c-ს ერთეულით. თუ F-ს დავუმატებთ ახალ პრედიკატულ ასოს A_2^2, რომელსაც აღვნიშნავთ ნიშნით $<$, აქსიომებს

(e′) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 < x_2 \,\&\, x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3)$;

(f′) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1)$;

(g′) $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow \neg\, x_1 < x_2)$;

(h′) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + x_3 < x_2 + x_3$,

(i′) $x_1 < x_2 \,\&\, 0 < x_3 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 < x_2 \cdot x_3$.

მივიღებთ დალაგებულ ველთა ელემენტარულ თეორიას $F_<$.

ხშირად გვხვდება პირველი რიგის თეორიები, რომლებშიც ტოლობა = შეიძლება განისაზღვროს. ეს ნიშნავს, რომ ასეთ K თეორიაში არის ფორმულა $\mathcal{E}(x,y)$, რომლისთვისაც თუ $\mathcal{E}(t,s)$-ს აღვნიშნავთ $t=s$-ით. (6), (7) ფორმულები იქნებიან გამოყვანადი K-ში. ამასთან მხოლოდ საჭიროა შევთანხმდეთ ჩავთვალოთ, რომ თუ t, s-ტერმებია, რომლებიც არ არიან თავისუფალი შესაბამისად x და y-სთვის $\mathcal{E}(x,y)$-ში, მაშინ $t=s$ არის შემოკლებული აღნიშვნა არა $\mathcal{E}(x,y)$-სთვის, არამედ რაღაც $\mathcal{E}^*(t,s)$ ფორმულისათვის, რომელიც მიღებულია $\mathcal{E}(t,s)$-დან დაბმული ცვლადების შესაფერისად სახელების შეცვლით (იხ. შედეგი 22), იმნაირად, რომ t და s აღმოჩდნენ თავისუფალნი x და y-ისთვის, შესაბამისად, $\mathcal{E}^*(x,y)$-ში. ასეთი K თეორიისათვის შესაძლებელია წინადადებების 25 და 26 ანალოგიური წინადადების დამტკიცება, იმ დაშვებით, რომ (7) არის K თეორიის თეორემა $\mathcal{E}^*(x,y)$ ფორმულა შესაბამისი ტიპებისათვის. (მკითხველმა შეამოწმოს, როგორც სავარჯიშო).

პირველი რიგის თეორიებში ტოლობით გამოსახულებისათვის „არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი საგანი x ისეთი, რომ...“ შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი.

განსაზღვრა. $\exists_1 x\mathcal{A}(x)$ აღნიშნავს $\exists x\mathcal{A}(x)\,\&\,\forall x\forall y(\mathcal{A}(x)\,\&\,\mathcal{A}(y)\Rightarrow$ $\Rightarrow x=y)$.

პირველი რიგის K თეორიისათვის ტოლობით ყოველი მოდელისათვის მიმართება E, რომელიც ამ მოდელში შეესაბამება პრედიკატულ ასოს =, არის ეკვივალენტურობის მიმართება (წინადადება 24-ის ძალით). თუ რაიმე მოდელის არეში E მიმართება აღმოჩნდება იგივეობის მიმართება, მაშინ ასეთ მოდელს ეწოდება ნორმალური.

K თეორიის ყოველი M მოდელი შეიძლება შევიწროვდეს K თეორიის გარკვეულ ნორმალურ M' მოდელამდე. ამისათვის D' არეს როლში ახალ M' მოდელისა ავიღოთ ეკვივალენტურობის კლასთა სიმრავლე, რომლებიც განსაზღვრული არიან M მოდელის D არეში E მიმართებით. შემდეგ ყოველი პრედიკატული ასოსათვის A_j^n $(A_j^n)^*$ ინტერპრეტაციით M-ში განვსაზღვროთ ახალი ინტერპრეტაცია $(A_j^n)'$ M'-ში პირობით: $\mathcal{D}$-ან აღებული $b_1,\cdots,b_n$ ელემენტებით განსაზღვრული ეკვივალენტურობის ნებისმიერი კლასე-

ბისათვის $[b_1],\cdots,[b_n]$, $(A_j^n)'$ შესრულებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა M-ში $b_1,\cdots,b_n$-თვის შესრულებადია $(A_j^n)^*$. ეს განსაზღვრა არაა დამოკიდებული შესაბამისი ეკვივალენტურობის კლასების $b_1,\cdots,b_n$ წარმომადგენელთა არჩევაზე, რადგან (7)-ის საფუძველზე, $\vdash x_1 = y_1 \,\&\cdots\&^{x_n} = y_n \Rightarrow (A_j^n(x_1,\cdots,x_n) \Rightarrow A_j^n(y_1,\cdots,y_n))$. ანალოგიურად M-ში $(f_j^n)^*$ ინტერპრეტაციის f_j^n ფუნქციონალური ასოსათვის M'-ში ახალ ინტერპრეტაციას $(f_j^n)'$ განვსაზღვრავთ პირობით: $(f_j^n)'([b_1],\cdots,[b_n]) = [(f_j^n)^*(b_1,\cdots,b_n)]$. არაა ძნელი იმის დანახვა, რომ ეს განსაზღვრა არაა დამოკიდებული ეკვივალენტურობის კლასების წარმომადგენელთა არჩევაზე, რადგან (7)-ის საფუძველზე, $\vdash x_1 = y_1 \,\&\cdots\&^{x_n} = y_n \Rightarrow f_j^n(x_1,\cdots,x_n) \Rightarrow f_j^n(y_1,\cdots,y_n)$. ბოლოს ყოველი საგნობრივი კონსტანტა a_i M-ში c ინტერპრეტაციით, ინტერპრეტირებული იქნება M'-ში კლასით $[c]$. M'-ში = ასოს შესაბამისი ეკვივალენტურობის მიმართება E' არის D'-ში იგივეობის მიმართება: $E'([b_1],[b_2])$ ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია $E(b_1,b_2)$ ანუ როცა $[b_1]=[b_2]$. ინდუქციით შეიძლება მარტივად დამტკიცდეს შემდეგი ლემა: თუ $s=(b_1,b_n\cdots)$ თვლადი მიმდევრობაა D-ს ელემენტების, $[b_i]$ არის b_i-ით წარმოქმნილი ეკვივალენტურობის კლასი და $s'=([b_1],[b_n]\cdots)$, მაშინ $\mathcal{A}$ შესრულებადია M-ში s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ შესრულებადია M'-ში s'-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\mathcal{A}$ ფორმულა ჭეშმარიტია M-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჭეშმარიტია M'-ში, და რადგან M არის K მოდელი, ამიტომ M' არის K-ს ნორმალური მოდელი.

წინადადება 27. (წინადადება 12-ის გაგრძელება). ყოველი არაწინააღმდეგობრივი პირველი რიგის K თეორიას ტოლობით აქვს სასრული ან თვლადი ნორმალური მოდელი.

დამტკიცება. წინადადება 12-ის თანახმად, K-ს აქვს თვლადი M მოდელი. მაშასადამე, ზემოთ მოცემული მეთოდით M მოდელის შევიწროება მიგვიყვანს ნორმალური სასრულ ან თვლად M' მოდელზე, რადგან ეკვივალენტურობის კლასთა სიმრავლეს, რომლებადაც იყოფა D, აქვს სიმძლავრე, რომელიც არაა D-ს სიმძლავრეზე მეტი.

შედეგი 28 (სკოლემ-ლევენგეიმის თეორემის გაგრძელება). ყოველი პირველი რიგის K თეორიას ტოლობით, რომელსაც აქვს უსასრულო ნორმალური მოდელი M, აქვს თვლადი ნორმალური მოდელი.

დამტკიცება. K-ს დავუმატოთ ახალი საგნობრივი კონსტანტები $b_1, b_n \cdots \quad b_i \neq b_j \quad i \neq j$-სთვის აქსიომებთან ერთად. ახალი თეორია K' არაწინააღმდეგობრივია. K' თეორია რომ იყოს წინააღმდეგობრივი, მაშინ K'-ში იარსებებდა გარკვეული წინაადმდეგობის იარსებებდა გარკვეული წინააღმდეგობის $\mathcal{C} \& \neg \mathcal{C}$ გამოყვანა, ამასთან შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\mathcal{C}$ არის K ფორმულა. ცხადია, ასეთი გამოყვანა გამოიყენებდა ახალ აქსიომათა: $b_{i_1} \neq b_{j_1}, \cdots, b_{i_n} \neq b_{j_n}$ მხოლოდ სასრულ რიცხვს, და K თეორიის M მოდელი შეიძლება გაფართოვდეს იმ თეორიის მოდელამდე, რომელიც მიიღება K-დან თუ მას ახალ $b_{i_1} \neq b_{j_1}, \cdots, b_{i_n} \neq b_{j_n}$ აქსიომებს დავუმატებთ. მართლაც, რადგან M არის უსასრულო ნორმალური მოდელი, შეგვიძლია ისე შევარჩიოთ $b_{i_1}, b_{j_1}, \cdots, b_{i_n}, b_{j_n}$ საგნობრივი მუდმივების ინტერპრეტაციები, რომ ფორმულები $b_{i_1} \neq b_{j_1}, \cdots, b_{i_n} \neq b_{j_n}$ იყოს ჭეშმარიტი M-ში. ამიტომ $\mathcal{C} \& \neg \mathcal{C}$ გამოყვანა ამ ფორმულებიდან და K-ს აქსიომებიდან მოგვცემდა $\mathcal{C} \& \neg \mathcal{C}$-ს ჭეშმარიტობას M-ში, რაც არ შეიძლება. მაშასადამე, K'-თეორია არაწინააღმდეგობრივია. წინადადება 27-ით K'-ს აქვს სასრული ან თვლადი ნორმალური მოდელი N. ფორმულები $b_i \neq b_j \quad i \neq j$-სთვის ჭეშმარიტია N-ში, როგორც K'-ის აქსიომები. მაშასადამე, N მოდელის არეს ელემენტები, რომლებიც ახდენენ $b_1, b_n \cdots$ ინტერპრეტაციას, შესაბამისად, უნდა იყოს წყვილ-წყვილად განსხვავებულო, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ N-ის არე უსასრულოა და, მაშასადამე, თვლადია.

§ 9. ახალი ფუნქციონალური ასოებისა და საგნობრივი კონსტანტების შემოტანა

მათემატიკაში ხშირად მას შემდეგ, როცა დაამტკიცებენ, რომ ნებისმიერი $y_1, \cdots, y_n$-სთვის არსებობს ერთადერთი ობიექტი u, რომელსაც აქვს თვისება $\mathcal{A}(u, y_1, \cdots, y_n)$, შემოაქვთ ახალი ფუნქცია

$f(y_1,\cdots,y_n)$ ისეთი, რომ $\mathcal{A}(f(y_1,\cdots,y_n),y_1,\cdots,y_n)$ შესრულებადია ყოველი $y_1,\cdots,y_n$-სთვის. ანალოგიურად, თუ დამტკიცებულია ისეთი ერთადერთი u ობიექტის არსებობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\mathcal{A}(u)$, სადაც $\mathcal{A}(u)$-ს აქვს u თავის ერთადერთ თავისუფალ ცვლადად, შემოიტანენ ახალ საგნობრივ მუდმივს b. ცნობილია, რომ ასეთი განსაზღვრებები თუმცა მოსახერხებელია, მაგრამ ახალს სინამდვილეში არაფერს არ მატებენ თეორიას. ეს ფაქტი შეიძლება ზუსტად გამოიხატოს შემდეგი ფორმით.

წიდადადება 29. ვთქვათ K არის პირველი რიგის თეორია ტოლობით. დავუშვათ $\vdash_K \exists_1 u\ \mathcal{A}\ (u,y_1,\cdots,y_n)$. ვთქვათ K' არის პირველი რიგის თეორია ტოლობით, რომელიც მიიღება K-ს ახალი n-ადგილიანი ფუნქციონალური ასოს f-ის დამატებით, საკუთრივი აქსიომით $\mathcal{A}(f(y_1,\cdots,y_n),y_1,\cdots,y_n)$ და (1)-(7) აქსიომების ყველა კერძო შემთხვევის დამატებით, რომლებიც შეიცავენ f-ს. მაშინ არსებობს ეფექტური გადასახვა, რომელსაც K' თეორიის ყოველი ფორმულა $\mathcal{B}$ გადაყავს K თეორიის გარკვეულ $\mathcal{B}'$ ფორმულაში ისე, რომ

(1) თუ f არ შედის $\mathcal{B}$-ში, მაშინ $\mathcal{B}'$ ემთხვევა $\mathcal{B}$-ს,

(2) $(\neg\mathcal{B})'$ ემთხვევა $\neg(\mathcal{B}')$-ს,

(3) $(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})'$ ემთხვევა $\mathcal{B}'\Rightarrow\mathcal{C}'$-ს,

(4) $(\forall x\mathcal{B})'$ ემთხვევა $\forall x(\mathcal{B})'$,

(5) $\vdash_{K'}\mathcal{B}\equiv\mathcal{B}'$,

(6) თუ $\vdash_{K'}\mathcal{B}$, მაშინ $\vdash_K\mathcal{B}'$.

მაშასადამე, თუ $\mathcal{B}$ არ შეიცავს f და $\vdash_{K'}\mathcal{B}$, მაშინ $\vdash_K\mathcal{B}$.

დამტკიცება. ვუწოდოთ მარტივი f-ტერმი ყოველ $f(t_1,\cdots,t_n)$-ტერმს, სადაც $t_1,\cdots,t_n$ ტერმები არ შეიცავენ f-ს. ვთქვათ მოცემულია K' თეორიის ელემენტარული ფორმულა $\mathcal{B}$ და ვთქვათ $\mathcal{B}^*$ აღნიშნავს $\mathcal{B}$-ში მარტივი f-ტერმის ყველაზე მარცხენა შემოსვლის შეცვლის შედეგს პირველი u ცვლადით, რომელიც არ გვხვდება $\mathcal{B}$-ში. $\exists u(\mathcal{A}(u,t_1,\cdots,t_n)\&\mathcal{B}^*)$ ფორმულას ვუწოდოთ $\mathcal{B}$-ს f-სახე. თუ $\mathcal{B}$ ფორმულა არ შეიცავს f-ს, მაშინ ვთქვათ ის თვითონ არის თავის f-სახე. ცხადია, რომ $\vdash_K\exists_1 u\mathcal{A}(u,t_1,\cdots,t_n)\&\mathcal{B}^*)\equiv\mathcal{B}$. (აქ საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ პირობა $\vdash_K\exists_1 u\mathcal{A}(u,y_1,\cdots,y_n)$ და

K'-თეორემის $\mathcal{A}(f(y_1,\cdots,y_n),y_1,\cdots,y_n)$. $\mathcal{B}^*$-ში f ფუნქციონალური ასოს შემოსვლა ერთი ერთეულით ნაკლებია, ვიდრე $\mathcal{B}$-ში, და $\vdash_{K'}\exists u(\mathcal{A}(u,t_1,\cdots,t_n)\,\&\,\mathcal{B}^*)\equiv\mathcal{B}$, ამიტომ მიმდევრობის f-სახეების აგებით, ბოლოს და ბოლოს მივიღებთ $\mathcal{B}'$ ფორმულას, რომელიც f-ს არ შეიცავს, და $\vdash_K\mathcal{B}^*\equiv\mathcal{B}$. ვუწოდოთ $\mathcal{B}'$-ს $\mathcal{B}$-ს f-თავისუფალი სახე. გავავრცელოთ $'$ ოპერაცია K' თეორიის ყველა ფორმულაზე, $(\neg\mathcal{B})'$, განვსაზღვროთ, როგორც $\neg(\mathcal{B}')$, $(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})'$, როგორც $\mathcal{B}'\Rightarrow\mathcal{C}'$ და $(\forall x\mathcal{B})'$, როგორც $\forall x(\mathcal{B})'$. ადვილი დასანახია, რომ (1)-(5) დებულებები შესრულებულია. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (6), საკმარისია (1) და (5)-ის გამოყენებით, ვაჩვენოთ, რომ თუ $\mathcal{B}$ არ შეიცავს f-ს და $\vdash,_{K'}\mathcal{B}$ მაშინ $\vdash_K\mathcal{B}$. ამასთან შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\mathcal{B}$ ფორმულა ჩაკეტილია, რადგან ყოველი ფორმულა გამოყვანადია თავისი ჩაკეტვიდან და პირიქით.

ვთქვათ M არის K თეორიის ნებისმიერი მოდელი და M' მისი შესაბამისი ნორმალური მოდელი იგივე თეორიის. როგორც ვიცით ყოველი ფორმულა ჭეშმარიტია M-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჭეშმარიტია M'-ში. რადგან $\vdash_K\exists_1 u\mathcal{A}(u,y_1,\cdots,y_n)$, მაშინ M' მოდელის არეს ნებისმიერი $b_1,\cdots,b_n$-სთვის არსებობს ერთადერთი ელემენტი c ამავე არედან, რომლისთვისაც $\mathcal{A}(c,b_1,\cdots,b_n)$ ჭეშმარიტია M'-ში. M' მოდელიდან გამომდინარე, ახლა მივიღებთ K' თეორიის M_1 მოდელს, თუ f ფუნქციონალური ასოს ინტერპრეტაციად ავიღებთ f' ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით $f'(b_1,\cdots,b_n)=c$. მართლაც, ლოგიკური აქსიომები (K'-ის ტოლობის აქსიომის ჩათვლით) ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში, ხოლო აქსიომა $\mathcal{A}(f_1(y_1,\cdots,y_n),y_1,\cdots,y_n)$ სამართლიანია M_1-ში f' ფუნქციის განსაზღვრით. რადგან K თეორიის საკუთრივი აქსიომები არ შეიცავენ f-ს და ჭეშმარიტი არიან M'-ში, ამიტომ ისინი ჭეშმარიტია M_1-ში. ვთქვათ, $\vdash_{K''}\mathcal{B}$ და $\mathcal{B}$ არ შეიცავს f-ს. მაშინ $\mathcal{B}$ ფორმულა ჭეშმარიტია M'-ში, მაშასადამე (რადგან ის არ შეიცავს f-ს), ის ჭეშმარიტია M' და M-ში. ამრიგად, $\mathcal{B}$ ფორმულა ჭეშმარიტია K თეორიის ნებისმიერ მოდელში. აქედან სისრულის თეორემის შესახებ შედეგი 15(a)-ს ძალით, გამომდინარეობს $\vdash_K\mathcal{B}$. (იმ შემთხვევაში, როცა $\vdash_K\exists_1 u\mathcal{A}(u)$ და $\mathcal{A}(u)$ არ შეიცავს u-სგან განსხვავებულ თავისუფალ ცვლადებს, K' თეორია

აიგება ახალი საგნობრივი მუდმივის b და $\mathcal{A}(b)$ აქსიომის დამატებით. ამის შემდეგ წინადადება 29 შესაბამისი ანალოგო დამტკიცება პრაქტიკულად იგივე მსჯელობით, რაც ახლახან იყო).

აღვნიშნოთ, რომ წინადადება 29 ადგილი აქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა შემოიტანება რამდენიმე განსხვავებული სიმბოლო, მაგალითად, $f_1,\cdots,f_n$. მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ყოველი f_i სიმბოლო ემატება თეორიას, რომელიც მიიღება უკვე $f_1,\cdots,f_{i-1}$ სიმბოლოების დამატების შედეგად. ამგვარად, აქ აუცილებელია წინადადება 29-ის n-ჯერადი გამოყენება. K თეორიის $\mathcal{B}'$ ფორმულა წინადადება 29-ში შეიძლება განვიხილოთ როგორც f-სგან თავისუფალი $\mathcal{B}$ ფორმულის გადაყვანა K თეორიის ენაში.

მაგალითები. 1. ჯგუფთა ელემენტარულ G-თეორიაში გამოყვანადია $\exists_1 x_2(x_1 + x_2 = 0)$. შემოვიტანოთ ახალი ფუნქციონალური ასო f ერთი არგუმენტით და აღვნიშნოთ $-t$-ით $f(t)$, ახალი აქსიომის $x_1 + (-x_1) = 0$ დამატებით. წინადადება 29-ის თანახმად, ამ ახალი შემოტანებით, ჩვენ არ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ G არცერთი ფორმულა, რომელიც ადრე არ იყო გამოყვანადი. ამრიგად $(-t)$-ს შემოტანა არაფრით არ აძლიერებს საწყის თეორიას.

2. ველთა ელემენტარულ F თეორიაში გამოყვანადია ფორმულა $\exists_1 x_2((x_1 \neq 0 \,\hat{\&}\, x_1 \cdot x_2 = 1) \vee (x_1 = 0 \,\&\, x_2 = 0))$. შემოვიტანოთ ახალი ერთადგილიანი ფუნქციონალური ასო g და მივიღოთ შემოკლება t^{-1} $g(t)$-სთვის, ახალი აქსიომა $(x_1 \neq 0 \,\&\, x_1 \cdot x_1^{-1} = 1) \vee (x_1 = 0 \,\&\, x_1^{-1} = 0)$. ამ აქსიომიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ $x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_1^{-1} = 1$.

წინადადება 29 გვიჩვენებს, რომ პირველი რიგის თეორიებში არსებითად აუცილებელი არიან მხოლოდ პრედიკატული ასოები, ფუნქციონალური ასოებისა და საგნობრივი მუდმივების გვერდის ავლა შესაძლებელია. ფუნქციონალური ასო f_j^n შეიძლება შევცვალოთ ახალი პრედიკატული ასოთი A_k^{n+1} ახალ აქსიომასთან ერთად $\exists u_1 A_k^{n+1}(y_1,\cdots,y_n,u)$. საგნობრივი კონსტანტა იცვლება ახალი პრედიკატული ასოთი A_k^1 აქსიომით $\exists_1 u A_k^1(u)$.

მაგალითად ჯგუფთა ელემენტალურ თეორიაში შეგვიძლია შევცვალოთ ფუნქციონალური ასო + და საგნობრივი კონსტანტა 0 პრედიკატებით A_1^2 და A_1^1 დამატებითი აქსიომები $\forall x_1 \forall x_2 \exists_1 x_3 A_1^3(x_1,x_2,x_3)$ და $\exists_1 x_1 A_1^1(x)$. ამასთან, იგულისხმება, რომ აუცილებელია ძველი

აქსიომები (a), (b), (c), (g) შევცვალოთ შესაბამისად შემდეგი აქსიომებით:

(a′) $A_1^3(x_2, x_3, y_1) \& A_1^3(x_1, y_1, y_2) \& A_1^3(x_1, x_2, y_3) \& A_1^3(y_3, x_3, y_4) \Rightarrow$
$\Rightarrow y_2 = y_4$;

(b′) $A_1^1(y_1) \& A_1^3(x_1, y_1, y_2) \Rightarrow y_2 = x_1$;

(c′) $\exists x_2 \forall y_1 \forall y_2 (A_1^1(y_1) \& A_1^3(x_1, x_2, y_2) \Rightarrow y_2 = y_1)$;

(g′) $[x_1 = x_2 \& A_1^3(x_1, x_3, y_1) \& A_1^3(x_2, x_3, y_2) \& A_1^3(x_3, x_1, y_3) \&$
$\& A_1^3(x_3, x_2, y_4)] = y_1 = y_2 \& y_3 = y_4$.

§ 10. წინარული ნორმალური ფორმები

ფორმულას $\theta_1 y_1, \cdots, \theta_n y_n \mathcal{A}$, სადაც $\theta_n y_n$-არის ზოგადობის ან არსებობის კვანტორი, თუ $i \neq j$, მაშინ $y_i \neq y_j$ და $\mathcal{A}$ არ შეიცავს კვანტორებს, ეწოდება ფორმულა წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში.

ლემა. ყოველი პირველი რიგის თეორიისათვის

(I) $\vdash (\forall x \mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{D}) \equiv \exists y (\mathcal{C}(y) \Rightarrow \mathcal{D})$, თუ y არ შედის თავისუფლად არც $\mathcal{C}(x)$-ში, არც $\mathcal{D}$-ში.

(II) $\vdash \exists x \mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{D} \equiv \forall y (\mathcal{C}(y) \Rightarrow \mathcal{D})$, თუ y არ შედის თავისუფლად არც $\mathcal{C}(x)$-ში, არც $\mathcal{D}$-ში;

(III) $\vdash \mathcal{D} \Rightarrow \forall x \mathcal{C}(x) \equiv \forall y (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}(y))$, თუ y არ შედის თავისუფლად არც $\mathcal{C}(x)$-ში, არც $\mathcal{D}$-ში;

(IV) $\vdash \mathcal{D} \Rightarrow \exists x \mathcal{C}(x) \equiv \exists y (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}(y))$, თუ y არ შედის თავისუფლად არც $\mathcal{C}(x)$-ში, არც $\mathcal{D}$-ში;

(V) $\vdash \neg \forall x \mathcal{C} \equiv \exists x \neg \mathcal{C}$;

(VI) $\vdash \neg \exists x \mathcal{C} \equiv \forall x \neg \mathcal{C}$.

დამტკიცება I(A).

1. $\forall x \mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{D}$	ჰიპოთეზა
2. $\neg \exists y (\mathcal{C}(y) \Rightarrow \mathcal{D})$	ჰიპოთეზა
3. $\neg\neg \forall y \neg (\mathcal{C}(y) \Rightarrow \mathcal{D})$	2, არსებობს კვანტორის განსაზღვრა
4. $\forall y (\mathcal{C}(y) \& \neg \mathcal{D})$	3, ტავტოლოგიები $\neg\neg A \Rightarrow A$,

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv (A \& \neg B)$,
შედეგი 21.

5. $\mathscr{C}(y) \& \neg \mathscr{D}$ 4, A4 წესი
6. $\mathscr{C}(y)$ 5, ტავტოლოგია $(A \& B) \Rightarrow A$
7. $\forall y \mathscr{C}(y)$ 6, Gen
8. $\forall x \mathscr{C}(x)$ 7, ლემა 8
9. $\mathscr{D}$ 1, 8, MP
10. $\neg \mathscr{D}$ 5, ტავტოლოგია
11. $\mathscr{D} \& \neg \mathscr{D}$ 9, 10, ტავტოლოგია
12. $\forall x \mathscr{C}(x) \Rightarrow \mathscr{D}), \neg \exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D}) \vdash \mathscr{D} \& \neg \mathscr{D}$ 1-11
13. $\forall x \mathscr{C}(x) \Rightarrow \mathscr{D}) \vdash \neg \exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D}) \Rightarrow \mathscr{D} \& \neg \mathscr{D}$ 12, წინადადება 4
14. $\forall x \mathscr{C}(x) \Rightarrow \mathscr{D} \vdash \exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D})$ 13, ტავტოლოგია
15. $\vdash (\forall x \mathscr{C}(x) \Rightarrow \mathscr{D}) \Rightarrow \exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D})$ 14, წინადადება 4.

დამტკიცება I (B)

1. $\exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D})$ ჰიპოთეზა
2. $\forall x \mathscr{C}(x)$ ჰიპოთეზა
3. $\mathscr{C}(b) \Rightarrow \mathscr{D}$ 1, C წესი
4. $\mathscr{C}(b)$ 2, A4 წესი
5. $\mathscr{D}$ 3, 4, MP
6. $\exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D}), \forall y \mathscr{C}(x) \vdash_C \mathscr{D}$ 1-5
7. $\exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D}), \forall x \mathscr{C}(x) \vdash \mathscr{D}$ 6, წინადადება 23
8. $\vdash \exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D}) \Rightarrow (\forall x \mathscr{C}(x) \Rightarrow \mathscr{D})$ 7, ორჯერ წინადადება 4.

დამტკიცება I (C)

$\vdash (\forall x \mathscr{C}(x) \Rightarrow \mathscr{D}) \equiv \exists y(\mathscr{C}(y) \Rightarrow \mathscr{D})$ (A), (B), ტავტოლოგია.

(II)-(VI) მტკიცდება მარტივად და მკითხველმა უნდა დაამტკიცოს სავარჯიშოს სახით.

ლემა 30 იძლევა საშუალებას ყოველ ფორმულაში ყოველი კვანტორი თანდათან მარცხნივ გადავსწიოთ. ეს პროცესი არის არსებითი ნაწილი შემდეგი თეორემის დამტკიცებისას.

წინადადება 31. არსებობს ეფექტური პროცედურა, რომელიც გარდაქმნის ყოველ $\mathscr{A}$ ფორმულას წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში მყოფ ისეთ $\mathscr{B}$ ფორმულაში, რომ $\vdash \mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. (ასეთ

ფორმულას შემდეგში ვუწოდებთ $\mathcal{A}$ ფორმულის წინასწარულ ნორმალურ ფორმას).

დამტკიცება. $\mathcal{B}$ ფორმულის აგება აღიწერება ინდუქციით $\mathcal{A}$ ფორმულაში ყველა კავშირისა და კვანტორის k რიცხვით. (წინადადება 18 (a)-(b) ძალით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ კვანტორული თავსართების დაბმული ცვლადები, რომლებიც გვინდა მივიღოთ, წყვილწყვილად განსხვავებულია) როცა $k=0$ $\mathcal{B}$ ემთხვევა $\mathcal{A}$-ს. დავუშვათ, რომ შეგვიძლია ნებისმიერი $k< n$-სთვის შესაბამისი $\mathcal{B}$ ფორმულის აგება. ვთქვათ $\mathcal{A}$ ფორმულას აქვს n კავშირი და კვანტორი.

შემთხვევა 1. თუ $\mathcal{A}$ არის $\neg\mathcal{C}$, ინდუქციური დაშვების ძალით, შეგვიძლია ავაგოთ წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში მყოფი $\mathcal{D}$ ისეთი, რომ $\neg\mathcal{D}\equiv\mathcal{C}$. აქედან $\vdash\neg\mathcal{C}\equiv\neg\mathcal{D}$, ანუ $\vdash\mathcal{A}\equiv\neg\mathcal{D}$. ახლა ვისარგებლებთ ლემა 30-ის (V) და (VI) და შედეგი 21-ით. მაშინ ადვილია წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში მყოფი ისეთი $\mathcal{B}$ ფორმულის აგება, რომ $\vdash\neg\mathcal{D}\equiv\mathcal{B}$, აქედან $\vdash\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$.

შემთხვევა 2. თუ $\mathcal{A}$ არის $\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{E}$, მაშინ ინდუქციური დაშვებით, შეგვიძლია ავაგოთ $\mathcal{C}_1$ და $\mathcal{E}_1$ წინასწარ ნორმალურ ფორმებში ისეთები, რომ $\vdash\mathcal{C}\equiv\mathcal{C}_1$ და $\vdash\mathcal{E}\equiv\mathcal{E}_1$. შესაბამისი ტავტოლოგიის გამოყენებით მივიღებთ $\vdash(\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{E})\equiv(\mathcal{C}_1\Rightarrow\mathcal{E}_1)$, ანუ $\vdash\mathcal{A}\equiv(\mathcal{C}_1\Rightarrow\mathcal{E}_1)$. ლემა 30-ის (I)-(IV)-ის და შედეგი 2.1-ის გამოყენებით შეგვიძლია $\mathcal{C}_1$ და $\mathcal{E}_1$-ში კვანტური თავსართები გავიტანოთ $(\mathcal{C}_1\Rightarrow\mathcal{E}_1)$-ის ფრჩხილებს გარეთ, რის შედეგადაც მივიღებთ ისეთ $\mathcal{B}$ ფორმულას წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში, რომ $\vdash\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$.

შემთხვევა 3. $\mathcal{A}$ არის $\forall x\mathcal{C}$. ინდუქციური დაშვებით, შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი $\mathcal{C}_1$ ფორმულა წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში, რომ $\vdash\mathcal{C}\equiv\mathcal{C}_1$. მაშასადამე, $\vdash\forall x\mathcal{C}\equiv\forall x\mathcal{C}_1$, ანუ $\vdash\mathcal{A}\equiv\forall x\mathcal{C}_1$ მაგრამ $\forall x\mathcal{C}_1$, ცხადია, არის ფორმულა წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში.

პრედიკატთა პირველი რიგის აღრიცხვას, რომელშიც არ არის ფუნქციონალური ასოები და საგნობრივი კონსტანტები და რომელშიც ყოველი მთელი დადებითი n-სთვის არსებობს უსასრულოდ ბევრი n-ადგილიანი პრედიკატული ასოები, ეწოდება პრედიკატთა პირველი რიგის წმინდა აღრიცხვა. ფორმულას წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში ვუწოდოთ ფორმულა სკოლემის

ნორმალურ ფორმაში, თუ მასში ყველა არსებობის კვანტორი წინ უსწრებენ ყველა ზოგადობის კვანტორს.

წინადადება 32. პირველი რიგის პრედიკატთა წმინდა აღრიცხვის ყოველი $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის შეიძლება ეფექტურად ავაგოთ სკოლემის ნორმალურ ფორმაში მყოფი ისეთი $\mathcal{B}$ ფორმულა, რომ $\vdash\mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash\mathcal{B}$.

დამტკიცება. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\mathcal{A}$ ფორმულა ჩაკეტილია, რადგან ყოველი ფორმულა გამოყვანადია თავის ჩაკეტვასთან ერთდროულად. წინადადება 31-ის ძალით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\mathcal{A}$ უკვე არის ფორმულა წინასწარულ ნორმალურ ფორმაში. r-რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს $\mathcal{A}$ ფორმულაში რამდენი ზოგადობის კვანტორი უსწრებს წინ ერთ მაინც არსებობის კვანტორს, ვუწოდოთ $\mathcal{A}$ ფორმულის რანგი. სკოლემის ნორმალური ფორმის აგების პროცესი აღწერილი იქნება ინდუქციით r-ის მიმართ. როცა $r=0$ დასამტკიცებელი დებულება ცხადია. დავუშვათ, რომ შეგვიძლია, ავაგოთ საძებნი ფორმულა სკოლემის ნორმალურ ფორმაში, ყოველთვის, როცა საწყისი ფორმულის რანგი ნაკლებია r-ზე და ვთქვათ $\mathcal{A}$ ფორმულის რანგი არის r. $\mathcal{A}$ ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს $\exists y_1\cdots\exists y_n\forall u\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)$ სახით, სადაც $\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)$-ში თავისუფალი ცვლადებია მხოლოდ $y_1,\cdots,y_n,u$. ვთქვათ A_j^{n+1} არის $\mathcal{A}$-ში არა შემავალი პირველი $n+1$ ადგილიანი პრედიკატული ასო. განვიხილოთ ფორმულა $(\mathcal{A})$ $\exists y_1\cdots\exists y_n([\forall u(\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)\Rightarrow A_j^{n+1}(y_1,\cdots,y_n,u)]\Rightarrow\forall uA_j^{n+1}(y_1,\cdots,y_n,u))$. ვაჩვენოთ, რომ $\vdash\mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash\mathcal{A}_1$. ვთქვათ $\vdash\mathcal{A}_1$ განვიხილოთ $\mathcal{A}_1$ რაიმე გამოყვანა. ამ გამოყვანაში $A_j^{n+1}(z_1,\cdots,z_n,w)$ ფორმულის ყოველი შემოსვლა შევცვალოთ $\mathcal{B}^*(z_1,\cdots,z_n,w)$ ფორმულით. სადაც $\mathcal{B}^*$ მიიღება $\mathcal{B}$-დან $\mathcal{B}$-ში ყველა დაბმული ცვლადის, რომელსაც ამ გამოყვანაში სადმე აქვს თავისუფალი შემოსვლა, იმ ცვლადების შეცვლით, რომლებიც $\mathcal{B}$-ში არ გვხვდებიან. ამას ან, ცხადია, რომ მივიღებთ შემდეგი ფორმულის გამოყვანას $\exists y_1\cdots\exists y_n((\forall u(\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)\Rightarrow\mathcal{B}^*(y_1,\cdots,y_n,u)))\Rightarrow\forall u\mathcal{B}^*(y_1,\cdots,y_n,u))$. ახლა ცვლადების შებრუნებული შეცვლით, შედეგი 22-ის ძალით, დავასკვნით, რომ $\vdash\exists y_1\cdots\exists y_n[\forall u(\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)\Rightarrow\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u))\Rightarrow$

$\forall u\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)]$. რადგან $\vdash\forall u(\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)\Rightarrow\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u))$, ამიტომ შედეგი 21-ის ძალით $\vdash\exists y_1\cdots\exists y_n\forall u(\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)$, ანუ $\vdash\mathcal{A}$.

პირიქით, ვთქვათ $\vdash\mathcal{A}$. C წესით, მივიღებთ $\forall u\mathcal{B}(b_1,\cdots,b_n,u)$. მაგრამ ნებისმიერი ფორმულებისათვის $\mathcal{D}$ და $\mathcal{F}$ $\forall u\mathcal{D}(\forall u(\mathcal{D}\Rightarrow\mathcal{F})\Rightarrow\forall u\mathcal{F})$ ამიტომ $\forall u(\mathcal{B}(b_1,\cdots,b_n,u)\Rightarrow A_j^{n+1}(b_1,\cdots,b_n,u))\Rightarrow\forall uA_j^{n+1}(b_1,\cdots,b_n,u))$. ახლა E4 წესით მივიღებთ $\exists y_1\cdots\exists y_n[\forall u(\mathcal{B}(y_1,\cdots,y_n,u)\Rightarrow A_j^{n+1}(y_1,\cdots,y_n,u))]\Rightarrow\forall uA_j^{n+1}(y_1,\cdots,y_n,u)$, ანუ $\vdash_C\mathcal{A}_1$. მაგრამ მაშინ წინადადება 23-ის ძალით $\vdash\mathcal{A}_1$. $\mathcal{A}_2$ ფორმულას, რომელიც არის $\mathcal{A}_1$-ის წინასწარული ნორმალური ფორმა, აქვს სახე $\exists y_1\cdots\exists y_n\exists u\theta_1z_1,\cdots,\theta_sz_s\mathcal{G}$, სადაც $\mathcal{G}$ არ შეიცავს არსებობის კვანტორებს, ხოლო $\theta_1z_1,\cdots,\theta_sz_s$ არის $\mathcal{G}$-ს კვანტორული თავსართი ($\mathcal{A}_2$ აგებისას, ჯერ ლემა 30(1)-ით, გამოვიტანთ პირველ კვანტორს $\forall u$, რომელიც ამ დროს გადადის $\exists u$ კვანტორში, შემდეგ გამოვიტანთ პირველი იმპლიკაციის ნიშნის გარეთ $\mathcal{B}$-ში მყოფ კვანტორულ თავსართს. ამასთან, ლემა 30 (I)-(II)-ის ძალით, არსებობის კვანტორები გადადიან ზოგადობის კვანტორებში და პირიქით. მაგრამ როცა ამის შემდეგ გამოვიტანთ მიღებულ კვანტორულ თავსართს უკვე მეორე იმპლიკაციის ნიშნის გარეთ, დავუბრუნდებით კვლავ ძველ კვანტორულ თავსართს $\theta_1z_1,\cdots,\theta_sz_s$ $\mathcal{B}$-დან. ბოლოს, ლემა 30(III)-ის გამოყენებით, გარეთ გამოვიტანთ მეორე კვანტორს $\forall u$, ამავდროულად შევცვლით u ცვლადს v ცვლადით). $\mathcal{A}_2$-ის რანგი, ცხადია, ერთით ნაკლებია $\mathcal{A}$-ს რანგზე და გარდა ამისა, წინადადება 31-ის ძალით, $\vdash\mathcal{A}_1\equiv\mathcal{A}_2$. მეორე მხრივ, $\vdash\mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash\mathcal{A}_1$. მაშასადამე, $\vdash\mathcal{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash\mathcal{A}_2$. ინდუქციური დაშვებით გვაქვს $\mathcal{A}_2$-სთვის სკოლემის ნორმალური ფორმა, რომელიც, ცხადია, არის $\mathcal{A}$-ს სკოლემის ნორმალური ფორმა.

§ 11. ინტერპრეტაციათა იზომორფიზმი. თეორიების კატეგორიულობა

ვიტყვით, რომ პირველი რიგის K მოცემული თეორიის M ინტერპრეტაცია იზომორფულია K თეორიის სხვა M' ინტერპრე-

ტაციის, თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა g (რომელსაც ეწოდება იზომორფიზმი) M ინტერპრეტაციის $\mathcal{D}$ არესა M' ინტერპრეტაციის $\mathcal{D}'$ არეზე, რომ

(1) თუ $(A_j^n)^*$ და $(A_j^n)'$ არიან A_j^n პრედიკატული ასო ინტერპრეტაციები შესაბამისად M-ში და M'-ში, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $b_1,\ldots,b_n$ $\mathcal{D}$-დან, $(A_j^n)^*(b_1,\cdots,b_n)$ შესრულებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია $(A_j^n)'(g(b_1),\cdots,g(b_n))$;

(2) თუ $(f_j^n)^*$ და $(f_j^n)'$ არიან f_j^n ფუნქციონალური ასოს ინტერპრეტაციები შესაბამისად M-ში და M'-ში, მაშინ ნებისმიერი $b_1,\ldots,b_n$-სთვის $\mathcal{D}$-დან $g((f_j^n)^*(b_1,\cdots,b_n)) = (f_j^n)'(g(b_1),\cdots,g(b_n))$;

(III) თუ a_j^* და a_j' არიან a_j საგნობრივი მუდმივის ინტერპრეტაციები შესაბამისად M-ში და M'-ში, მაშინ $a_j' = g(a_j^*)$.

შევნიშნოთ, რომ თუ M და M' ინტერპრეტაციები იზომორფულია, მაშინ მათ არეებს აუცილებლად ექნებათ ერთიდაიგივე სიმძლავრე.

წინადადება 33. თუ g არის M და M' ინტერპრეტაციების იზომორფიზმი, მაშინ (I) როგორიც არ უნდა იყოს K თეორიის $\mathcal{A}$ ფორმულა და მიმდევრობა $s = (b_1, b_2, \cdots)$ $\mathcal{D}$-ს ელემენტებისა, $\mathcal{A}$ ფორმულა შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებადია მის შესაბამის $g(s) = (g(b_1), g(b_2), \cdots)$ მიმდევრობაზე და, მაშასადამე, (2) $\mathcal{A}$ ფორმულა ჭეშმარიტია M-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჭეშმარიტია M'-ში.

დამტკიცება. (2) უშუალოდ გამომდინარეობს (1)-დან. (1)-ს დამტკიცება მარტივად შეიძლება შესრულდეს ინდუქციით $\mathcal{A}$-ში შემავალი კავშირებისა და კვანტორების რიცხვის მიმართ (მკითხველმა დაამტკიცოს სავარჯიშოს სახით).

ვთქვათ m-კარდინალური რიცხვია. პირველი რიგის K თეორიას ტოლობით ეწოდება m-კატეგორიული, თუ 1) K თეორიის, m სიმძლავრის მქონე, ყოველი ორი ნორმალური მოდელი იზომორფულია და 2) K-ს აქვს m სიმძლავრის ერთი მაინც ნორმალური მოდელი.

მაგალითები 1. ვთქვათ K_1 არის პირველი რიგის თეორია ერთადერთი პრედიკატული ასო "="-ით, ფუნქციონალური

ასოებისა და საგნობრივი მუდმივების გარეშე და რომლის საკუთრივი აქსიომებია:

$\forall x_1(x_1 = x_2),\ \forall x_1\forall x_2(x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$

და

$\forall x_1\forall x_2(x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3))$.

K_1 თეორია არის პირველი რიგის ტოლობიანი თეორია (დაამტკიცეთ!).

K_1-ს ეწოდება ტოლობის ელემენტარული თეორია.

ვთქვათ K_2-არის თეორია, რომელიც მიიღება K_1-სგან შემდეგი (E2) აქსიომის დამატებით.

$$\exists x_1\exists x_2(x_1 \neq x_2 \ \&\ \forall x_3(x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2)).$$

K^2 თეორია არის 2-კატეგორიული. მეტიც, ამ თეორიის ყოველ ნორმალურ მოდელს აქვს ზუსტად ორი ელემენტი. საზოგადოდ. ვთქვათ (En) აღნიშნავს გამოსახულებას

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n\left(\underset{1\le i<j\le n}{\&} x_i \neq x_k \ \&\ \forall x_{n+1}(x_{n+1} = x_1 \vee \cdots \vee x_{n+1} = x_n)\right),$$

სადაც $\underset{1\le i<j\le n}{\&} x_i \neq x_j$ – არის შემოკლებული ჩაწერა $x_i \neq x_j$ სახის ყველა შესაძლო ისეთი ფორმულების კონიუნქციისა, რომ $1 \le i < j \le n$. მაშინ K^n თეორია, რომელიც მიიღო K_1-დან (En) აქსიომის მიერთებით n-კატეგორიულია და ყოველ ნორმალურ მოდელს აქვს ზუსტად n-ელემენტი.

2. ვთქვათ K_2-არის პირველი რიგის თეორია ორი პრედიკატული $=$ და $<$ სიმბოლოთი, ფუნქციონალური სიმბოლოებისა და საგნობრივი კონსტანტების გარეშე და რომელსაც აქვს შემდეგი საკუთრივი აქსიომები:

(a) $\forall x_1(x_1 = x_1)$;

(b) $\forall x_1\forall x_2(x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$;

(c) $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3))$;

(d) $\forall x_1\exists x_2\exists x_3(x_1 < x_2 \ \&\ x_3 < x_1)$;

(e) $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(x_1 < x_2 \ \&\ x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3)$;

(f) $\forall x_1\forall x_2(x_1 = x_2 \Rightarrow \neg x_1 < x_2)$;

(g) $\forall x_1\forall x_2(x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_2 < x_1)$;

(h) $\forall x_1\forall x_2(x_1 < x_2 \Rightarrow \exists x_3(x_1 < x_3 \ \&\ x_3 < x_2))$.

წინადადება 26-ზე დაყრდნობით მტკიცდება, რომ K_2 არის პირველი რიგის ტოლობიანი თეორია. K_2 არის მკვრივად დალა-

გებული სიმრავლეების ელემენტარული თეორია პირველი და ბოლო ელემენტების გარეშე. K_2 თეორია $\aleph_0$-კატეგორიულია: K_2-ის ყოველი თვლადი ნორმალური მოდელი იზომორფულია ბუნებრივად დალაგებული ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისგან შედგენილი მოდელისა. ამასთან, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ K_2 თეორია არაა m-კატეგორიული არცერთი m-სთვის, რომელიც გასხვავებულია $\aleph_0$-საგან.

ლოგიკის ალგებრის ფუნქციები ანუ ბულის ფუნქციები

§ 1. ლოგიკის ალგებრის ფუნქციები. ფუნქციათა ტოლობა. იგივეობები ელემენტარული ფუნქციებისათვის

1°. ლოგიკის ალგებრის ფუნქციები

განსაზღვრა 1. ვთქვათ $E_2 = \{0,1\}$ არის ძირითადი სიმრავლე (ცვლადების მნიშვნელობათა საწყისი ალფაბეტი), მაშინ $E_2^n = \{(a_1, \cdots, a_n) : \forall i (a_i \in E_2)\}$. ყველგან განსაზღვრული ბულის ფუნქცია ეწოდება გადასახვას $f(x_1, \cdots, x_n) : E_2^n \to E_2$. ასეთი ფუნქცია შეიძლება მოცემული იქნას ცხრილით, ასევე შეიძლება განხილული იქნას, როგორც სუპერპოზიცია სხვა, უფრო მარტივი, ფუნქციებიისა. მაგალითად, $n = 1$-თვის:

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

ფუნქცია 0-ს ეწოდება კონსტანტა 0, ფუნქციას 1-ს – კონსტანტა 1, ფუნქცია x – იგივური ფუნქცია, ხოლო $\bar{x}$ – x-ის უარყოფა. ამავე დროს ბოლო ფუნქციისათვის დასაშვებია სხვა აღნიშვნა: $\bar{x} \equiv -x$.

n =2-სთვის

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

f_1 – დიზიუნქცია, ფუნქცია „ან“, ლოგიკური შეკრება: $f_1 = x \vee y$.

f_1 – კონიუნქცია: $f_2 = x \cdot y = x \,\&\, y = xy$.

f_3 – შეკრება მოდულით 2: $f_3 = x \oplus y = x + y$.

f_4 – იმპლიკაცია: $f_y = x \to y$.

f_5 – ეკვივალენტობა: $f_5 = x \sim y = \overline{x \oplus y}$.

f_6 – შეფერის შტრიხი: $f_6 = x|y = \overline{xy}$.

f_7 – პირსის ისარი: $f_7 = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

ლემა (სიტყვათა რიცხვის შესახებ). r ასოსაგან შედგენილ ალფაბეტში $A = \{a_1, \cdots, a_r\}$ შეიძლება ავაგოთ r^m სხვადასხვა სიტყვა სიგრძით m.

დამტკიცება. ჩავატაროთ ინდუქცია m-ის მიმართ. m=1-თვის დებულება ცხადია. ვთქვათ ლემის დებულება სამართლიანია $m-1$-სთვის, ანუ არსებობს ზუსტად r^{m-1} სხვადასხვა სიტყვა სიგრძით $m-1$, $m-1$ სიგრძის ყოველი ასეთი სიტყვისათვის არსებობს ზუსტად r შესაძლებლობა ბოლოში ერთი ასოს დამატებისა. რადგან $m-1$ სიგრძის სიტყვათა რაოდენობა არის r^{m-1}, ამიტომ m სიგრძის სხვადასხვა სიტყვათა რაოდენობა $r \cdot r^{m-1} = r^m$. ლემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ლოგიკის ალგებრის n-ცვლადიანი ფუნქციის რაიმე ცხრილი

$$2^n \left\{ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & f \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{2^n-1} \end{array} \right\} 2^n$$

ამ ფუნქციის მოცემისათვის აუცილებელი და საკმარისია მისი მნიშვნელობების განსაზღვრა 2^n ერთობლიობაზე. ამრიგად, მივიღეთ, რომ x ცვლადის განსხვავებულ ფუნქციათა რიცხვი იმდენია, რამდენიც არსებობს 0 და 1-სგან შედგენილ განსხვავებულ ერთობლიობათა რიცხვი, რომელთა სიგრძეა 2^n, ანუ 2^{2^n}.

2°. ფუნქციათა ტოლობა. ჩვეულებრივ ალგებრაში სამართლიანია ტოლობა $x + y - y = x$, მიუხედავად იმისა, რომ მარცხენა მხარეს ჩაწერილია ორი ცვლადის ფუნქცია, ხოლო მარჯვენა მხარეს ერთი ცვლადის. ამრიგად, სხვადასხვა რიცხვის ცვლადების მქონე ფუნქციები შეიძლება იყოს ერთიდაიგივე, რაც საფუძველს იძლევა შემოვიტანოთ არსებითი და ფიქტიური ცვლადების ცნებები.

განსაზღვრა 2. x_i ცვლადს ეწოდება არსებითი ცვლადი ლოგიკის ალგებრის $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციის, თუ არსებობს ისეთი $a_1,\cdots,$ a_{i-n}, a_{i+1}, $a_n \in E_2$, რომ

$$f(a_1\cdots,a_{i-1},\ 0,a_{i+1},\cdots,a_n) \neq f(a_1\cdots,a_{i-1},1,a_{i+1},\cdots,a_n).$$

ასეთ ერთობლიობებს, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ ერთი x_i ცვლადით, ეწოდებათ მეზობელი x_i-ით. წინააღმდეგ შემთხვევაში x_i ცვლადს ეწოდება ფიქტიური.

თუ x_i არის ფიქტიური f ფუნქციისათვის, მაშინ f ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება გარკვეული $g(x_1\cdots,x_{i-1},\ x_{i+1},\cdots,x_n)$ ფუნქციით. ნებისმიერი ფუნქციის ცხრილი შეიძლება გავაფართოვოთ ფიქტიური ცვლადების ნებისმიერი რიცხვის შემოტანით.

განსაზღვრა 3. ლოგიკის ალგებრის ორ ფუნქციას ეწოდება ტოლი, თუ ერთი მათგანი შეიძლება მივიღოთ მეორესგან ფიქტიური ცვლადების ნებისმიერი რიცხვის დამატებით ან ამოღებით.

3°. ფორმულები

განსაზღვრა 4. ვთქვათ გვაქვს ფუნქციათა რაიმე სიმრავლე

$$A=\{f_1(\cdots),\ f_2(\cdots),\cdots,\ f_n(\cdots)\cdots\}.$$

შემოვიტანოთ ფორმულის განსაზღვრა A-ზე.

1) ნებისმიერ ფუნქციას A-დან ეწოდება ფორმულა A-ზე.

2) თუ $f(x_1,\cdots,x_n)\in A$ და ნებისმიერი i-თვის H_i არის ან ცვლადი, ან ფორმულა A-ზე, მაშინ გამოსახულება $f(H_1,H_2\cdots,H_n)$ აგრეთვე არის ფორმულა A-ზე.

3) მხოლოდ იმ ობიექტებს ეწოდებათ ფორმულები A-ზე, რომლებიც შეიძლება აგებული იქნას მოცემული განსაზღვრის 1 და 2 პუნქტებით.

შენიშვნა. $H_1,H_2\cdots,H_n$ შორის საკმაებით შესაძლებელია იყოს ერთიდაიგივე.

4°. ძირითადი ეკვივალენტობები.

1. კომუტატიურობა:

$x\vee y=y\vee x$;

$xy=yx$;

$x\oplus y=y\oplus x$;

$x\sim y=y\sim x$.

2. ასოციატიურობა:

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$;

$(xy)z = x(yz) = xyz$;

$(x \oplus y) \oplus z = z \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$.

3. დისტრიბუტიულობა:

$(x \oplus y)z = (xz) \oplus (yz)$;

$(x \vee y)z = (xz) \vee (yz)$;

$(xy) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z)$.

4. $\bar{\bar{x}} = x$

დე მორგანის წესები:

$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$;

$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

5. შთანთქმის კანონები:

$x \vee x = x$;

$x \cdot x = x$;

$x \vee \bar{x} = 1$;

$x \cdot \bar{x} = 0$;

$x \vee 1 = 1$;

$x \cdot 1 = x$;

$x \vee 0 = x$;

$x \cdot 0 = 0$.

6. $x|y = \overline{xy}$;

$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$;

$x \to y = \bar{x} \vee y$;

$x \oplus y = (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y)$;

$x \sim y = \overline{x \oplus y} = (xy) \vee (\bar{x} \cdot \bar{y})$.

კონიუნქციის პრიორიტეტი უფრო მაღალია, ვიდრე დიზიუნქციის და ორის მოდულით შეკრების პრიორიტეტი – ამის გამო, ხშირად ხერხდება არასაჭირო ფრჩხილების გამოტოვება. ადგილი აქვს შემდეგ ცხად დებულებებს:

$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1 \Leftrightarrow \forall i\,(x_i = 1)$,

$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n = 1 \Leftrightarrow \exists i\,(x_i = 1)$.

განსაზღვრა 5. x ხარისხად σ ეწოდება ფუნქციას

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \sigma = 0; \end{cases} \qquad x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma .$$

§ 2. თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა ცვლადებით გაშლის შესახებ. თეორემა სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის შესახებ

თეორემა 1 (ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა ცვლადებით გაშლის შესახებ). ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერ k $(1 \le k \le n)$-თვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა.

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\cdots,\sigma_k)\in E_2^k} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k,x_{k+1},\cdots,x_n) .$$

დამტკიცება. ნებისმიერი ერთობლიობისათვის $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)$ გამოვთვალოთ ამ ერთობლიობაზე მარჯვენა მხარის მნიშვნელობა. როგორც კი ერთი მამრავლი გახდება ნული, მთელი კონიუნქცია იქნება ნული, ამრიგად, არანულოვანი კონიუნქციებიდან დარჩება მხოლოდ ერთი – ის, რომელშიც $\alpha_i = \sigma_i$ და

$$\bigvee_{(\sigma_1,\cdots,\sigma_k)\in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdots \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n) =$$

$$= 0 \vee \cdots \vee 0 \vee \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_k^{\alpha_k} f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) ,$$

იმის გამო, რომ $x^x = 1$, მოცემული გამოსახულება ტოლია $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი ფუნქციის გაშლის ერთი ცვლადით აქვს სახე:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bar{x}_1 f(0,x_2,\cdots,x_n) \vee x_1 f(1,x_2,\cdots,x_n) .$$

შედეგი 2. (თეორემა სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის შესახებ). ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციისათვის, რომელიც არ არის იგივურად ნული, სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n):\, f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n)$ არ არის იგივურად ნული.

ჩავწეროთ ამ ფუნქციის გაშლა $k=n$ ცვლადისათვის:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in E_2^n} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),$$

რაც შეიძლება გავაძწეროთ ეკვივალენტური სახით:

$$\bigvee_{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n):f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\vee$$

$$\bigvee_{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\,f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=0} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n).$$

იმის გათვალისწინებით, რომ პირველ დიზიუნქციაში ფუნქციის ყველა, მნიშვნელობა ერთის ტოლია, ხოლო მეორე ნულად იქცევა იმის გამო, რომ მასში ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა არის ნული, მიიღება შედეგის დებულება.

თეორემა 2. (სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ფორმის შესახებ. ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი ფუნქციისათვის, რომელიც არ არის იგივურად ერთის ტოლი, ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}\vee\cdots\vee x_n^{\bar\sigma_n}).$$

§ 3. სრული სისტემები. სრული სისტემების მაგალითები

განსაზღვრა. ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა A სიმრავლეს ეწოდება სრული სისტემა (P_2-ში), თუ ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს ფორმულით A-ზე.

თეორემა 3. სისტემა $A=\{\vee,\&,\neg\}$ არის სრული.

დამტკიცება. თუ ლოგიკის ალგებრის ფუნქცია f არ არის იგივურად ნული, მაშინ f გამოისახება სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის სახით, რომელშიც შედიან მხოლოდ დიზიუნქცია, კონიუნქცია და უარყოფა. თუ $f\equiv 0$, მაშინ $f=x\cdot\bar{x}$. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. თუ სისტემა A სრულია და A სისტემის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს ფორმულით სხვა B სისტემაზე, მაშინ B არის სრული სისტემა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი ფუნქცია $f(x_1,\cdots,x_n)$ და ფუნქციათა ორი სისტემა $A=\{g_1,g_2,\cdots\}$ და $B=\{h_1,h_2,\cdots\}$. იმის გამო, რომ A სისტემა სრულია, $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს ფორმულის სახით $f(x_1,\cdots,x_n)=$ $=\mathcal{F}[g_1,g_2,\cdots]$, სადაც $g_i=\mathcal{R}_i[h_1,h_2,\cdots]$, ანუ f ფუნქცია წარმოიდგინება სახით $f(x_1,\cdots,x_n)=\mathcal{F}[\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\cdots]$, ანუ შეიძლება წარმოვიდგი-ნოთ ფორმულის სახით B-ზე – ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. შემდეგი სისტემები სრულია P_2-ში:

1) $\{x\vee y,\ \bar{x}\}$;
2) $\{x\cdot y,\ \bar{x}\}$;
3) $\{x|y\}$
4) $\{x\cdot y,\ x\oplus y,1\}$.

დამტკიცება. 1) ცნობილია (თეორემა 3), რომ სისტემა $A=\{x\vee y,\ x\cdot y,\bar{x}\}$ სრულია. ვაჩვენოთ, რომ სრულია სისტემა $B=\{x\vee y,\ \bar{x}\}$ მართლაც, დე მორგანის კანონებიდან $\overline{xy}=\bar{x}\vee\bar{y}$ მივიღებთ, რომ $x\cdot y=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}$, ანუ კონიუნქცია გამოისახება დიზიუნქ-ციით და უარყოფით და A სისტემის ყველა ფუნქცია გამოისახება ფორმულით B-ზე. ლემა 2-ის თანახმად B-სრულია.

2) პირველი პუნქტის ანალოგიურად: $\overline{x\vee y}=\bar{x}\cdot\bar{y}\Leftrightarrow x\vee y=\overline{\bar{x}\,\bar{y}}$ და ლემა 2-დან გამოდის რომ სამართლიანია მეორე პუნქტი.

3) $x|x=\bar{x}$, $x\cdot y=\overline{x|y}=(x|y)|(x|y)$ და ლემა 2-ის გამო სისტემა სრულია.

4) $\bar{x}=x\oplus 1$ და ლემა 2-ის გამო სისტემა სრულია. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. შეგალკინის თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციების პოლინომებით წარმოდგენის შესახებ

განსაზღვრა 1. $x_1,\cdots,x_n$ ცვლადების მონოტონური კონიუნქცია ეწოდება $x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot x_{i_3}\cdots x_{i_1}$, სადაც $s\geq 1$, $1\leq i_j\leq n$, $\forall j=1,2,\cdots,s$,

სახის გამოსახულებას, სადაც ყველა ცვლადი განსხვავებულია ($i_j \neq i_k$, თუ $j \neq k$); ან უბრალოდ 1.

განსაზღვრა 2. ჟეგალკინის პოლინომი $x_1,\cdots,x_n$-ზე ეწოდება

$$K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus \cdots \oplus K_\ell$$

სახის გამოსახულებას, სადაც $\ell \geq 1$ და ყველა K_i არის განსხვავებული მონოტონური კონიუნქცია $x_1,\cdots,x_n$-ზე; ან კონსტანტა 0.

თეორემა 5 (ჟეგალკინის თეორემა). ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი ფუნქცია $f(x_1,\cdots,x_n)$ შეიძლება ერთადერთი სახით გამოვსახოთ ჟეგალკინის პოლინომით $x_1,\cdots,x_n$-ზე.

დამტკიცება. 1) დავამტკიცოთ პოლინომის არსებობა. სისტემა $\{x\cdot y,\ x\oplus y, 1\}$ სრულია, მაშასადამე, ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქცია შეიძლება გამოვსახოთ ფორმულით $\{x\cdot y,\ x\oplus y, 1\}$-ზე.

a) დისტრიბუტიულობის გამოყენებით ამ წარმოდგენაში ყველა ფრჩხილის გახსნის შედეგად მივიღებთ, რომ $f(x_1,\cdots,x_n) = K_1' \oplus K_2' \oplus \cdots \oplus K_\ell'$, სადაც ნებისმიერი K_1' არის ცვლადების და ერთიანების კონიუნქცია.

b) ვისარგებლოთ კომუტატიურობით და მიმართებებით $x\cdot x = x$, $1\cdot 1 = 1$ და $A\cdot 1 = A$, გარდავქმნათ ყველა მიღებული კონიუნქცია ელემენტარულ კონიუნქციად. ცხადია, ყველა კონიუნქცია გახდება მონოტონური.

c) ვისარგებლოთ მიმართებით $A\oplus A = A$ და $A\oplus 0 = A$, გარდავქმნათ მიღებული ჯამი ჟეგალკინის პოლინომად. შედეგად მივიღებთ ან

$$K_{i_1} \oplus K_{i_2} \oplus K_{i_3} \oplus \cdots \oplus K_{i_m},$$

ან კონსტანტა 0-ს.
არსებობა დამტკიცებულია.

2) დავამტკიცოთ წარმოდგენის ერთადერთობა. დავთვალოთ რიცხვი ყველა შესაძლო განსხვავებული მონოტონური კონიუნქციებისა n-ცვლადიდან. ამისათვის შევადგინოთ შემდეგი სახის ცხრილი,

	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_1\ x_2\ x_4$	1	1	0	1

$x_2\,x_3$	0	1	1	0
1	0	0	0	0

სადაც ყოველ ცვლადს შეესაბამება ერთი, თუ ის გვხვდება მონონურ კონიუნციაში და ნული, წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამასთანავე კონსტანტა ერთიანს შევუსაბამოთ ნულების ერთობლიობა. ცხადია, რომ აგებული გადასახვა არის ბიექცია. მაშასადამე. n ცვლადის ყველა განსხვავებული მონოტონური კონიუნქცია არის 2^n. ავაგოთ ანალოგიური ბიექციური გადასახვა მონოტონური კონიუნქციების ყველა შესაძლო ჯამებსა და 2^n სიგრძის ვექტორებს შორის. ამისათვის შევადგინოთ შემდეგი სახის ცხრილი,

	xy	x	y	1
$xy+1$	1	0	0	1
0	0	0	0	0

სადაც შესაბამისი მონოტონური კონიუნქციის ქვეშ დგას ერთიანი, თუ ის შედის მოცემულ ჯამში, და ნული, თუ არ შედის. ამასთანავე კონსტანტა ნულს შეესაბამება ნულების ერთობლიობა. ცხადია, ასეთი გასასახვა ბიექციურია. ყველა ასეთი განსხვავებული ჯამების იქნება იმდენი, რამდენიც არსებობს განსხვავებული ბოლოს ვექტორები სიგრძით 2^n, ანუ 2^{2^n}. ჩვენ მივიღებთ, რომ ჟეგალკინის განსხვავებულ პოლინომთა რიცხვი ემთხვევა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა რიცხვს. რადგან გადასახვა პოლინომთა სიმრავლიდან ფუნქციათა სიმრავლეში არის სიურექციული, ამიტომ ის არის ბიექციური, რადგან n ცვლადიანი ჟეგალკინის პოლინომთა სიმრავლე და n ცვლადიანი ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა სიმრავლე ერთიდაიგივე სიმძლავრისაა. ერთადერთობა დამტკიცებულია.

§ 5. ჩაკეტიკი კლასის ცნება. T_0, T_2 და L კლასების ჩაკეტილობა

1°. ჩაკეტილი კლასის ცნება.

განსაზღვრა 1. ვთქვათ $A \subseteq P_2$. მაშინ A-ს ჩაკეტვა ეწოდება ლოგიკის ალგებრის ყველა ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც შეიძლება გამოვსახოთ ფორმულით A-ზე.

აღნიშვნა: $[A]$.

ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს:

1) $[A] \supseteq A$;

2) $A \supseteq B \Rightarrow [A] \supseteq [B]$, ამასთან, თუ იმპლიკაციის მარცხენა მხარეს მკაცრი ჩართვაა, მაშინ მისგან არ გამომდინარეობს მკაცრი ჩართვა მარჯვენა მხარეს. სამართლიანია მხოლოდ

$$A \supset B \Rightarrow [A] \supseteq [B];$$

3) $[[A]] = [A]$.

განსაზღვრა 2. ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა A სისტემას ეწოდება სრული, თუ $[A] = P_2$.

განსაზღვრა 3. ვთქვათ $A \subseteq P_2$. მაშინ A სისტემას ეწოდება ჩაკეტილი კლასი, თუ A-ს ჩაკეტვა ემთხვევა თვით A-ს: $[A] = A$.

დებულება. ვთქვათ A ჩაკეტილი კლასია, $A \neq P_2$ და $B \subseteq A$. მაშინ B არასრული სისტემაა (არასრული სისტემის ქვესიმრავლე იქნება არასრული სისტემა).

დამტკიცება. $B \subseteq A \Rightarrow [B] \subseteq [A] = A \neq P_2 \Rightarrow [B] \neq P_2$. მაშასადამე, B არ არის სრული სისტემა.

2°. ჩაკეტილი კლასების მაგალითები

კლასი $T_0 = \{f(x_1, \cdots, x_n) : f(0, \cdots, 0) = 0\}$.

T_0 კლასს ეკუთვნის, მაგალითად, ფუნქციები 0, x, xy, $x \vee y$, $x \oplus y$.

T_0 კლასს არ ეკუთვნის ფუნქციები 1, $\bar{x}$, $x \to y$, $x|y$, $x \downarrow y$, $x \sim y$.

გამოვთვალოთ T_0-კლასის ფუნქციათა რიცხვი. ამისათვის ავაგოთ შემდეგი ცხრილი

x_1	…	x_n	
0	…	0	0
…	…	…	} $2^n - 1$

ყველა ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის მოცემულ კლასს, ღებულობს ნულების ერთობლიობაზე მნიშვნელობას 0. ამრიგად, T_0-ში იმდენი ფუნქციაა, რამდენიც არსებობს ბულის ვექტორი $2^n - 1$ სიგრძის (2^n სიგრძის ვექტორის პირველი თანრიგი აუცილებლად უდრის 0), ანუ $|T_0| = 2^{2^n - 1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$.

თეორემა 6. T_0 **კლასი ჩაკეტილია.**

დამტკიცება. ვთქვათ $\{f(x_1,\cdots,x_n), g_1(y_{11},\cdots,y_{1m}),\cdots,g_n(y_{n1},\cdots,y_{nm})\} \subseteq T_0$. განვიხილოთ ფუნქცია $h(y_1,\cdots,y_r) = f(g_1(y_{11},\cdots,y_{1m}),\cdots, g_n(y_{n1},\cdots,y_{nm}))$. g_i ფუნქციის ცვლადებს შორის შეიძლება გვხვდებოდეს ერთიდაიგივე ცვლადებიც, ამიტომ h ფუნქციის ცვლადების როლში ავიღოთ მათ შორის ყველა განსხვავებული ცვლადი. მაშინ $h(0,\cdots,0) = f(g_1(0,\cdots,0),\cdots,g_n(0,\cdots,0)) = f(0,\cdots,0) = 0$, მაშასადამე, h ფუნქცია ინახავს 0-ს. ამასთანავე რადგან იგივური ფუნქცია ინახავს 0-ს, მარტივი ცვლადების ჩასმა ეკვივალენტურია იგივური ფუნქციის ჩასმის. თეორემა დამტკიცებულია.

კლასი $T_1 = \{f(x_1,\cdots,x_n) : f(1,\cdots,1) = 1\}$

T_1 კლასს ეკუთვნის ფუნქციები 1, x, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x \sim y$.

T_1 კლასს არ ეკუთვნის ფუნქციები 0, $\bar{x}$, $x \oplus y$, $x|y$, $x \downarrow y$.

თეორემა 7. T_1 კლასი ჩაკეტილია.
დამტკიცება წინა თეორემის დამტკიცების ანალოგიურია.

კლასი L წრფივი ფუნქციებისა.

განსაზღვრა 4. ლოგიკის ალგებრის $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციას ეწოდება წრფივი, თუ

$$f(x_1,\cdots,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus\cdots\oplus a_nx_n, \text{ სადაც } a_i \in \{0,1\}.$$

სხვა სიტყვებით, წრფივი ფუნქციის პოლინომში არ არის შესაკრები, რომელიც შეიცავს კონიუნქციას.

L კლასს ეკუთვნის ფუნქციები 0, 1, $\bar{x} = x \oplus 1$, $x \sim y$, $x \oplus y$.

L კლასს არ ეკუთვნის ფუნქციები xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x|y$, $x \downarrow y$.

თეორემა 8. L კლასი ჩაკეტილია.

დამტკიცება. რადგან იგივური ფუნქცია წრფივია, საკმარისია (ისე როგორც 6 და 7 თეორემებში) განვიხილოთ მხოლოდ ფორმულებში ფუნქციების ჩასმის შემთხვევა: ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n) \in L$ და $g_i \in L$. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $f(g_1,\cdots,g_n) \in L$. მართლაც, თუ არ გავითვალისწინებთ შესაკრებებს კოეფიციენტებით $a_i = 0$, მაშინ ყველა წრფივი ფუნქცია შეიძლება წარმო-

ვიდგინოთ სახით $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \cdots + \oplus x_{i_k} + a_0$. თუ ახლა ყოველი x_i-ს ნაცვლად ჩავსვამთ წრფივ გამოსახულებას, მაშინ მიიღება წრფივი გამოსახულება (ან კონსტანტა ერთი ან ნული).

§ 6. ორადულობა. თვითორადულფუნქციათა კლასი და მისი ჩაკეტილობა

1°. ორადულობა.

განსაზღვრა 1. ლოგიკის ალგებრის $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციის ორადული ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას $f^*(x_1,\cdots,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$.

თეორემა 9. (ორადულობის პრინციპი). ვთქვათ

$$\Phi(y_1,\cdots,y_m) = f(g_1(y_{11},\cdots,y_{1k_1}),\cdots,g_n(y_{n1},\cdots,y_{nk_n})).$$

მაშინ $\Phi^*(y_1,\cdots,y_m) = f^*(g_1^*(y_{11},\cdots,y_{1k_1}),\cdots,g_n^*(y_{n1},\cdots,y_{nk_n}))$

დამტკიცება. განვიხილოთ

$$\Phi^*(y_1,\cdots,y_n) = \bar{f}(g_1(\bar{y}_{11},\cdots,\bar{y}_{1k_1}),\cdots,g_n(\bar{y}_{n1},\cdots,\bar{y}_{nk_n})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{\bar{g}}_1(\bar{y}_{11},\cdots,\bar{y}_{1k_1}),\cdots,\bar{\bar{g}}_n(\bar{y}_{n1},\cdots,\bar{y}_{nk_n})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{g}_1^*(y_{11},\cdots,y_{1k_1}),\cdots,\bar{g}_n^*(y_{n1},\cdots,y_{nk_n})) =$$

$$= f^*(g_1^*(y_{11},\cdots,y_{1k_1}),\cdots,g_n^*(y_{n1},\cdots,y_{nk_n})).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ვთქვათ $\Phi(y_1,\cdots,y_m)$ ფუნქცია წარმოიდგინება ფორმულით $A = \{f_1, f_2,\cdots\}$-ზე. მაშინ თუ ამ ფორმულაში ყველგან f-ის შემოსვლას შევცვლით f^*-ით, მიიღება ფორმულა, რომელიც წარმოადგენს $\Phi^*(y_1,\cdots,y_n)$.

დებულება. ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$f(x_1,\cdots,x_n) = f^{**}(x_1,\cdots,x_n).$$

დამტკიცება. $f^{**} = [\bar{f}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)]^* = \bar{\bar{f}}(\bar{\bar{x}}_1,\cdots,\bar{\bar{x}}_n) = f(x_1,\cdots,x_n)$.

2°. თვითორადულ ფუნქციათა S კლასი.

განსაზღვრა. ლოგიკის ალგებრის $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციას ეწოდება თვითორადული, თუ $f(x_1,\cdots,x_n)=f^*(x_1,\cdots,x_n)$.

სხვა სიტყვებით, $S=\{f: f=f^*\}$.

S კლასს ეკუთვნის ფუნქციები

$x,\ \bar{x},\ x\oplus y\oplus z\oplus a,\ m(x,y,z)=xy\vee yz\vee zx=$

$$=\begin{cases}1, & x+y+z\geq 2,\\ 0, & x+y+z\leq 1.\end{cases}$$

S კლასს არ ეკუთვნის ფუნქციები

$0(f(x)\equiv 0\Rightarrow f^*(x)=\bar{f}(\bar{x})\equiv 1),\ 1,\ x\vee y$ (რადგან

$(x\vee y)^*=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}=xy\neq x\vee y),\ xy.$

თეორემა 10. S კლასი ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n)\in S$, $\forall i(g_i(y_{i1},\cdots,y_{ik_i})\in S)$, $i=1,2,\cdots n$ და

$$\Phi=f(g_1(y_{11},\cdots,y_{1k_i}),\cdots,g_n(y_{n1},\cdots,y_{nk_n})).$$

მაშინ ორადულობის პრინციპიდან გვაქვს, რომ

$$\Phi^*=f^*(g_1^*(y_{11},\cdots,y_{1k_i}),\cdots,g_n^*(y_{n1},\cdots,y_{nk_n}))=$$
$$=f(g_1(\cdots),\cdots,g_n(\cdots)).$$

ამრიგად, მივიღებთ, რომ $\Phi=\Phi^*$ და $\Phi\in S$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. მონოტონურ ფუნქციათა კლასი, მისი ჩაკეტილობა

განსაზღვრა 1. ვთქვათ $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ და $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. მაშინ $\tilde{\alpha}\leq\tilde{\beta}\Leftrightarrow\forall i(\alpha_i\leq\beta_i)$.

შენიშვნა. არსებობენ ერთობლიობები, რომელთათვისაც ზემოთ-საზღვრული დალაგების მიმართება არაა განსაზღვრული. მაგალითად, ერთობლიობები (0, 0, 1) და (0, 1, 0) არასადარია.

განსაზღვრა 2. ლოგიკის ალგებრის $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციას ეწოდება მონოტონური, თუ ნებისმიერი ორი სადარი ერთობლიობისათვის $\tilde{\alpha}$ და $\tilde{\beta}$ სრულდება იმპლიკაცია.

$$\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta}) .$$

M – კლასი ყველა მონოტონური ფუნქციების.

M კლასს ეკუთვნის ფუნქციები 0, 1, x, xy, $x \vee y$, $m(x,y,z) = xy \vee yz \vee zx$.

M კლასს არ ეკუთვნის ფუნქციები $\bar{x}$, $x|y$, $x \downarrow y$, $x \oplus y$, $x \sim y$, $x \to y$.

თეორემა 11. M კლასი ჩაკეტილია.

დამტკიცება. რადგან იგივური ფუნქცია მონოტონურია, საკმარისია შევამოწმოთ მხოლოდ ფუნქციათა სუპერპოზიციის შემთხვევა. ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n) \in M$, ნებისმიერი j-სთვის $g_j(y_1,\cdots,y_n) \in M$ და

$$\Phi(y_1,\cdots,y_m) = f(g_1(y_1,\cdots,y_m),\cdots,g_n(y_1,\cdots,y_m)) .$$

განვიხილოთ ნებისმიერი ერთობლიობები $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ და $\tilde{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ ისეთი, რომ $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$. აღვნიშნოთ

$$g_i(\tilde{\alpha}) = \gamma_i , \ g_i(\tilde{\beta}) = \delta_i .$$

მაშინ ნებისმიერი i-თვის გვაქვს $g_i \in M$ და $g_i(\tilde{\alpha}) \le g_i(\tilde{\beta})$, ანუ $\forall i(\gamma_i \le \delta_i)$. აღვნიშნოთ

$$\tilde{\gamma} = (\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n) , \ \tilde{\delta} = (\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n) .$$

მაშინ განვსაზღვროთ $\tilde{\gamma} \le \tilde{\delta}$ და, f ფუნქციის მონოტონურობის ძალით, $f(\tilde{\gamma}) \le f(\tilde{\delta})$. მაგრამ

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(\gamma_1,\cdots,\gamma_n) = f(\tilde{\gamma}) , \ \Phi(\tilde{\beta}) = (\delta_1,\cdots,\delta_n) = f(\tilde{\delta}) ,$$

და უტოლობა $f(\tilde{\gamma}) \le f(\tilde{\delta}) \Leftrightarrow \Phi(\tilde{\alpha}) \le \Phi(\tilde{\beta})$, მაშასადამე, $\Phi \in M$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. ლემა არათვითორადულ ფუნქციებზე

ლემა (არათვითორადულ ფუნქციებზე). ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი არათვითორადული $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციიდან, ყველა ცვლადის ნაცვლად x და $\bar{x}$ ფუნქციების ჩასმით, შეიძლება მივიღოთ $\varphi(x) \equiv const$.

დამტკიცება. ვთქვათ $f \in S$. მაშინ $\bar{f}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n) \ne f(x_1,\cdots,x_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} = (\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$:

$$\bar{f}(\bar{\sigma}_1,\cdots,\bar{\sigma}_n)\neq f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\Leftrightarrow f(\bar{\sigma}_1,\cdots,\bar{\sigma}_n)=f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n).$$

ავაგოთ φ ფუნქცია ასე: $\varphi(x)=(x\oplus\sigma_1,\cdots,x\oplus\sigma_n)$. მართლაც,

$$\varphi(0)=f(\sigma_1,\cdots,\sigma_n),\ \ \varphi(1)=f(\bar{\sigma}_1,\cdots,\bar{\sigma}_n)$$

და $\varphi(0)=\varphi(1)\Rightarrow\varphi(x)=const$. შევნიშნოთ, რომ ჩასმა აკმაყოფილებს ლემის პირობას, რადგან

$$x\oplus\sigma=\begin{cases}x,\sigma=0,\\ \bar{x},\sigma=1.\end{cases}$$

ლემა დამტკიცებულია.

§ 9. ლემა არამონოტონური ფუნქციების შესახებ

ლემა (არამონოტონური ფუნქციების შესახებ). ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი არამონოტონური $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციიდან, ყველა ცვლადის ნაცვლად x, 0, 1 ფუნქციების ჩასმით შეიძლება მივიღოთ ფუნქცია $\varphi(x)\equiv\bar{x}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $f\notin M$. მაშინ არსებობს ისეთი ერთობლიობები $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ და $\tilde{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, რომ $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$ (ანუ $\forall j(\alpha_j\le\beta_j)$ და $\tilde{\alpha}\neq\tilde{\beta}$) და $f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})$. გამოვყოთ $\tilde{\alpha}$ და $\tilde{\beta}$-ის $i_1,\cdots,i_k$ თანრიგები, რომლებზედაც ისინი განსხვავდებიან. ცხადია, $\tilde{\alpha}$ ერთობლიობაში ეს თანრიგები ტოლია 0-ის, ხოლო $\tilde{\beta}$ ერთობლიობაში 1-ის. განვიხილოთ ერთობლიობათა მიმდევრობა

$$\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_k,$$

ისეთი, რომ $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_0<\tilde{\alpha}_1<\tilde{\alpha}_2<,\cdots,<\tilde{\alpha}_k=\tilde{\beta}$, სადაც $\tilde{\alpha}_{i+1}$ მიიღება $\tilde{\alpha}_i$-დან ერთერთი ნულის შეცვლით, რომელიც განლაგებულია ერთერთ პოზიციაზე $i_1,\cdots,i_k$ ერთიანით (ამასთანავე ერთობლიობები $\tilde{\alpha}_i$ და $\tilde{\alpha}_{i+1}$ არიან მეზობლები). რადგან $f(\tilde{\alpha})=1$, ხოლო $f(\tilde{\beta})=0$, $\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_k$ ერთობლიობებს შორის მოიძებნება ორი მეზობელი ერთობლიობა $\tilde{\alpha}_i$ და $\tilde{\alpha}_{i+1}$ ისეთი, რომ $f(\tilde{\alpha}_i)=1$ და $f(\tilde{\alpha}_{i+1})=0$. ვთქვათ ისინი განსხვავდებიან r-თანრიგზე. $\tilde{\alpha}_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},0,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$, $\tilde{\alpha}_{i+1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},1,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$. მაშინ განვსაზღვროთ ფუნქცია $\varphi(x)$ ასე: $\varphi(x)=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},x,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$. მართლაც, $\varphi(0)=f(\tilde{\alpha})=1$, $\varphi(1)=f(\tilde{\alpha}_{i+1})=0$. ლემა დამტკიცებულია.

§ 10. ლემა არაწრფივი ფუნქციების შესახებ

ლემა (არაწრფივი ფუნქციების შესახებ). ლოგიკის ალგებრის ნებისმიერი არაწრფივი $f(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქციიდან, ყველა ცვლადის ნაცვლად x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$, 0, 1 ფუნქციების ჩასმით, შეიძლება მივიღოთ $\varphi(x,y)=x\cdot y$ ან $\varphi(x,y)=\overline{x\cdot y}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n)\notin L$. განვიხილოთ ამ ფუნქციის ჟეგალკინის პოლინომი. მისი არაწრფივობიდან გამომდინარეობს, რომ მასში მონაწილეობს $x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdots$ სახის შესაკრები. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მონაწილეობს ნამრავლი $x_1\cdot x_2\cdots$ ამრიგად, ამ ფუნქციის ჟეგალკინის პოლინომს აქვს სახე:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x_1\cdot x_2\cdot P_1(x_3,\cdots,x_n)\oplus x_1\cdot P_2(x_3,\cdots,x_n)\oplus$$
$$x_2\cdot P_3(x_3,\cdots,x_n)\oplus P_4(x_3,\cdots,x_n),$$

ამასთან $P_1(x_3,\cdots,x_n)\neq 0$.

სხვანაირად, $\exists a_3,a_4,\cdots,a_n\in E_2=\{0,1\}$ ისეთი, რომ $P_1(a_3,\cdots,a_n)=1$. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია $f(x_1,x_2,a_3,\cdots,a_n)=x_1\cdot x_2\cdot 1\oplus x_1\cdot b\oplus x_2\cdot c\oplus d$. მაშინ

$$f(x\oplus c,y\oplus b,a_3,a_4,\cdots,a_n)=(x\oplus c)(y\oplus b)\oplus(x\oplus c)b\oplus$$
$$(y\oplus b)c\oplus d=xy\oplus x\cdot b\oplus y\cdot c\oplus b\cdot c\oplus x\cdot b\oplus b\cdot c\oplus y\cdot c\oplus$$
$$b\cdot c\oplus d=xy\oplus(bc\oplus d)=$$
$$\begin{cases}xy, & bc\oplus d=0,\\ \overline{xy}, & bc\oplus d=0.\end{cases}$$

ლემა დამტკიცებულია.

§ 11. პოსტის თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა სისტემის სისრულის შესახებ

თეორემა 12 (პოსტის თეორემა). ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა სისტემა $A=\{f_1,f_2,\cdots)$ არის სრული P_2-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ შედის მთლიანად არცერთში შემდეგი კლასებიდან: T_0, T_1, S, L, M.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ A სრული სისტემაა. N არის ნებისმიერი T_0, T_1, S, L, M კლასებიდან და ვთქვათ $A \subseteq N$. მაშინ $[A] \subseteq [N] = N \neq P_2$. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

საკმარისობა. ვთქვათ $A \not\subset T_0$, $A \not\subset T_1$, $A \not\subset S$, $A \not\subset L$, $A \not\subset M$. მაშინ A-ში არსებობენ ფუნქციები $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_s \notin S$, $f_L \notin L$, $f_M \notin M$. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $[A] \supseteq [f_0, f_1, f_S, f_L, f_M] = P_2$. დამტკიცება დავყოთ სამ ნაწილად: უარყოფის. კონსტანტის და კონიუნქციის მიღებად.

a) $\bar{x}$-ის მიღება. განვიხილოთ ფუნქცია $f_0(x_1, \cdots, x_n) \notin T_0$ და შემოვიტანოთ ფუნქცია $\varphi_0(x) = f_0(x, \cdots, x)$, რადგან f_0 არ ინახავს ნულს, $\varphi_0(0) = f_0(0, \cdots, 0) = 1$, შესაძლოა ორი შემთხვევა: ან $\varphi_0(x) = \bar{x}$ ან $\varphi_0(x) = 1$. განვიხილოთ ფუნქცია $f_1(x_1, \cdots, x_n) \notin T_1$ და ანალოგიურად შემოვიტანოთ ფუნქცია $\varphi_1(x) = f_1(x, \cdots, x)$. რადგან f ფუნქცია არ ინახავს 1-ს, $\varphi_1(1) = f_1(1, \cdots, 1) = 0$. შესაძლოა ასევე ორი შემთხვევა: ან $\varphi_1(x) = \bar{x}$ ან $\varphi_1(x) \equiv 0$. თუ ერთ შემთხვევაში მაინც მივიღეთ საძებნი უარყოფა, პუნქტი დამთავრებულია. თუ ორივე შემთხვევაში მივიღეთ მუდმივები, მაშინ არამონოტონური ფუნქციის შესახებ ლემის თანახმად, $f_M \notin M$ ფუნქციაში, ყველა ცვლადის ნაცვლად კონსტანტებისა და იგივური ფუნქციის ჩასმით, შეიძლება მივიღოთ უარყოფა. უარყოფა მიღებულია.

b) 0 და 1 მუდმივების მიღება. გვაქვს $f_S \notin S$. არათვითორადული ფუნქციის შესახებ ლემის თანახმად, f_S ფუნქციის ყველა ცვლადის ნაცვლად უარყოფის ჩასმით (რომელიც მიღებულია a) პუნქტში) და იგივური ფუნქციის ჩასმით, შეიძლება მივიღოთ მუდმივები: $[f_S, \bar{x}] \ni [0, 1]$. კონსტანტები მიღებულია.

c) $x \cdot y$ კონიუნქციის მიღება. გვაქვს ფუნქცია $f_L \notin L$. არაწრფივი ფუნქციის შესახებ ლემის თანახმად, f_L ფუნქციაში ყველა ცვლადის ნაცვლად კონსტანტების და უარყოფის ჩასმით (რომლებიც მიღებულია დამტკიცების წინა ნაბიჯებზე), შეიძლება მივიღოთ ან კონიუნქცია, ან კონიუნქციის უარყოფა. ამასთანავე, პირველ ეტაპზე უარყოფა უკვე მიღებულია, მაშასადამე. ყოველთვის შეიძლება მივიღოთ კონიუნქცია: $[f_L, 0, 1, \bar{x}] \ni [xy, \overline{xy}]$. კონიუნქცია მიღებულია.

შედეგად მიღებულია, რომ $[f_0, f_1, f_S, f_L, f_M] \supseteq [\bar{x}, xy] = P_2$. უკანასკნელი ტოლობა გამომდინარეობს თეორემა 4-ის მე-2 პუნქტიდან. ლემა 2-ის ძალით საკმარისობა დამტკიცებულია.

§ 12. თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა ბაზისში მაქსიმალური რიცხვის შესახებ

განსაზღვრა. ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა $A \subseteq P_2$ სისტემას ეწოდება ბაზისი (P_2-ში), თუ

1) $[A] = P_2$;

2) $\forall f \in A([A \setminus \{f\}] \neq P_2)$.

თეორემა 13. ლოგიკის ალგებრის ბაზისში ფუნქციათა მაქსიმალური რიცხვი უდრის 4.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი სრული სისტემიდან შეიძლება გამოვყოთ სრული ქვესისტემა, რომელიც შეიცავს არაუმეტეს ოთხ ფუნქციას. მართლაც, თუ A სრული სისტემაა ($[A] = P_2$), მაშინ პოსტის თეორემის თანახმად, მასში არსებობს ხუთი ფუნქცია $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_S \notin S$, $f_L \notin L$, $f_M \notin M$. პოსტის თეორემის ძალით $\{f_0, f_1, f_S, f_L, f_M\}$ სისტემა სრულია. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x_1, \cdots, x_n) \notin T_0$ ($f_0(0, \cdots, 0) = 1$). შესაძლოა ორი შემთხვევა:

a) $f_0(1, \cdots, 1) = 1 \Rightarrow f_0 \notin S \Rightarrow [f_0, f_1, f_L, f_M] = P_2$ და სისტემა $\{f_0, f_1, f_L, f_M\}$ სრულია.

b) $f_0(1, \cdots, 1) = 0 \Rightarrow f_0 \notin M, T_1 \Rightarrow [f_0, f_L, f_S] = P_2$ და სისტემა f_0, f_L, f_S სრულია.

2) ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ლოგიკის ალგებრის ბაზისი ოთხი ფუნქციისაგან. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქციათა სისტემა $\{0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z, x \cdot y\}$. ფუნქციათა ეს სისტემა სრულია, რადგან $0 \notin T_1,\ S,\ 1 \notin T_0,\ x \cdot y \notin L,\ x \oplus y \oplus z \notin M$ ($0 \oplus 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$). ამასთანავე, ნებისმიერი მისი ქვესისტემა არ არის სრული.

$\{0,\ 1,\ x \cdot y\} \subseteq M$,

$\{0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z\} \subseteq L$,

$\{0,\ x \cdot y,\ x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_0$,

$\{1,\ x\cdot y,\ x\oplus y\oplus z\}\subseteq T_1$.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 13. თეორემა წინასრული კლასების შესახებ

წინასრული კლასები.

განსაზღვრა. ვთქვათ $A\subseteq P_2$. A-ს ეწოდება წინასრული კლასი, თუ

1) $[A]\neq P_2$;

2) $\forall f\in P_2(f\in A\Rightarrow[A\cup\{f\}]=P_2)$.

თეორემა 14. P_2-ში წინასრულია მხოლოდ შემდეგი 5 კლასი: T_0, T_1, S, L, M.

დამტკიცება. 1) ჯერ ვაჩვენოთ, რომ არცერთი ამ ხუთი კლასიდან არ შედის სხვაში. ამისათვის საკმარისია ზემოთჩამოთვლილი ხუთი კლასიდან ყოველი კლასისთვის მივუთითოთ ოთხი ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის მოცემულ კლასს, მაგრამ არ ეკუთვნის დანარჩენს ოთხს.

$\notin$ / $\in$	T_0	T_1	L	M	S
T_0		0	xy	$x\oplus y$	0
T_1	1		xy	$x\oplus y\oplus 1$	1
L	1	0		$x\oplus y$	0
M	1	0	xy		0
S	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$xy\oplus yz\oplus zx$	$\bar{x}$	

2) დავამტკიცოთ, რომ ყველა T_0, T_1, S, L, M კლასი არის წინასრული. მართლაც, ვთქვათ $N\in\{T_0,T_1,S,L,M\}$ და $f\notin N$. მაშინ სისტემა $N\cup\{f\}$ არ შედის არცერთში ამ ხუთი კლასიდან (რადგან N არ შედის მათგან ოთხში, ხოლო f არ შედის N-ში). მაშასადამე $N\cup\{f\}$ სისტემა სრულია და N არის წინასრული.

3) ვთქვათ A – წინასრული კლასია. მაშინ $[A]\neq P_2\Rightarrow\exists N\in\in\{T_0,T_1,S,L,M\}:A\subseteq N$. თუ $A\neq N$, მაშინ $\exists f(f\in N,\ f\notin A)\}:A\cup\{f\}\subseteq$

$N \Rightarrow [A \cup \{f\}] \neq P_2$. მიღებული წინააღმდეგობა ასრულებს დამტკიცებას.

2. პოსტის შედეგები

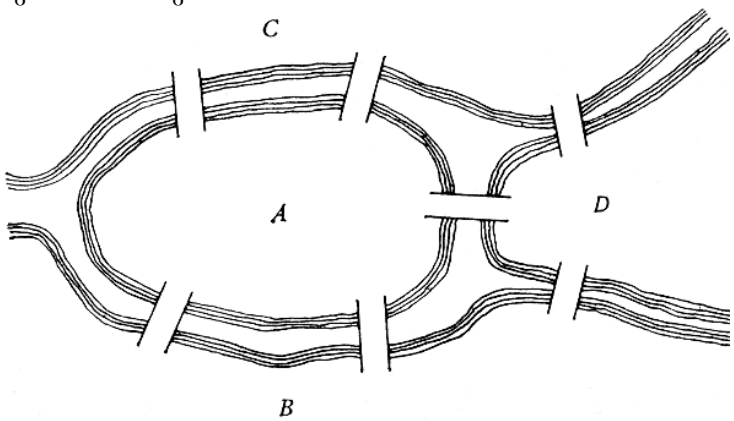
1) P_2-ში არსებობს ჩაკეტილი კლასების ზუსტად თვლადი რაოდენობა.

2) ნებისმიერ ჩაკეტილ კლასში არსებობს სასრული ბაზისი.

გრაფთა თეორიის საფუძვლები

ამოცანა კენიგსბერგის ხიდების შესახებ

გრაფთა თეორიის (ისევე როგორც ტოპოლოგიის) მამა არის ეილერი (1707-1782), რომელმაც 1736 წელს ამოხსნა იმ პერიოდში ძალიან ცნობილი ამოცანა, რომელსაც ეწოდებოდა პრობლემა კენიგსბერგის ხიდების შესახებ. ქალაქ კენიგსბერგში იყო ორი კუნძული, რომლებიც შეერთებული იყო შვიდი ხიდით მდინარე პრეჰოლის ნაპირებთან და ერთმანეთთან ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე.



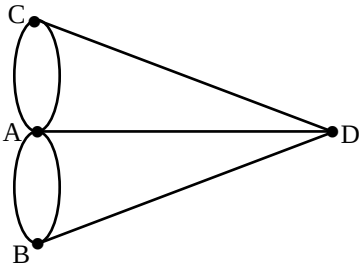
ამოცანა მდგომარეობდა შემდეგში: იპოვეთ ხმელეთის ოთხივე ნაწილზე გამავალი მარშრუტი, რომელიც დაიწყება ნებისმიერი ნაწილიდან, დამთავრდება იგივე ნაწილზე და ზუსტად ერთხელ გაივლის ყოველ ხიდს.

ეილერის განსაკუთრებული როლი ამ ამოცანის გადაწყვეტაში მდგომარეობს იმაში, რომ მან დაამტკიცა ასეთი მარშრუტის შეუძლებლობა.

იმის დასამტკიცებლად, რომ ამოცანას არ აქვს ამოხსნა, ეილერმა ხმელეთის ყოველი ნაწილი აღნიშნა წერტილით (წვეროთი), ხოლო ყოველი ხიდი წრფივ (წიბოთი), რომლებიც აერთებენ შესაბამის წერტილებს. შედეგად მიიღო „გრაფი“. ეს გრაფი მოცემულია ნახაზზე, სადაც წერტილები აღნიშნულია იგივე ასოებით, რითაც პირველ ნახაზზე აღნიშნულია ხმელეთის ოთხი ნაწილი.

დებულება ამ ამოცანის „დადებითი“ ამოხსნის არარსებობის შესახებ ეკვივალენტურია დებულებისა იმის შესახებ, რომ

შეუძლებელია სპეციალური სახით შემოვლა ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფის.



ამ კერძო შემთხვევიდან ეილერმა განაზოგადა ამოცანის დასმა და იპოვა შემოვლის (სპეციალური მარშრუტის) არსებობის კრიტერიუმი მოცემული გრაფისათვის, სახელდობრ, გრაფი უნდა იყოს ბმული და ყოველი მისი წვერო უნდა იყოს ინციდენტური წიბოების ლუწ რიცხვთან. ნახაზზე მოცემული გრაფი არის ბმული, მაგრამ ყოველი მისი წვერო არ არის ინციდენტური წყვილ რაოდენობა წიბოებთან.

§ 1. გრაფთა თეორიის ძირითადი ცნებები. გრაფთა იზომორფიზმი. ბმულობა

განსაზღვრა 1. გრაფი ეწოდება ელემენტთა ნებისმიერ V სიმრავლეს და V-ს ელემენტთა წყვილების ნებისმიერ E სიმრავლეს. აღნიშვნა: $G = (V, E)$.

შემდეგში განვიხილავთ სასრულ გრაფებს, ანუ გრაფებს ელემენტთა სასრული რაოდენობით და წყვილთა სასრული ოჯახით.

განსაზღვრა 2. თუ E-ს ელემენტებს განვიხილავთ, როგორც დაულაგებელ წყვილებს, მაშინ გრაფს ეწოდება არაორიენტირებული, ხოლო წყვილებს ეწოდებათ წიბოები. თუ E-ს ელემენტებს განვიხილავთ როგორც დალაგებულ წყვილებს, მაშინ გრაფს ეწოდება ორიენტირებული, ხოლო წყვილებს – რკალები.

განსაზღვრა 3. (a, a) სახის წყვილს ეწოდება მარყუჟი. თუ (a, b) წყვილი E ოჯახში გვხვდება რამდენჯერმე, მაშინ მას ეწოდება ჯერადი წიბო (ჯერადი მარყუჟი).

განსაზღვრა 4. გრაფს მარყუჟების გარეშე ეწოდება **მულტიგრაფი**; თუ გრაფში არის მარყუჟები და ჯერადი წიბოები, მაშინ ასეთ გრაფს ეწოდება **ფსევდოგრაფი**.

განსაზღვრა 5. გრაფის ორ წვეროს ეწოდება მოსაზღვრე, თუ ისინი შეერთებულია წიბოთი.

განსაზღვრა 6. ამბობენ, რომ წვერო და წიბო ინციდენტურია, თუ წიბო შეიცავს ამ წვეროს.

განსაზღვრა 7. წვეროს ხარისხი (degv) ეწოდება ამ წვეროსთან ინციდენტურ წიბოთა რიცხვს. ფსევდოგრაფისათვის თვლიან, რომ მარყუჟი გათვალისწინებული იყოს ორჯერ.

დებულება 1. ნებისმიერ გრაფში (ფსევდოგრაფში) სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q ,$$

სადაც p არის წვეროთა რიცხვი, ხოლო q – წიბოთა რიცხვი.

დამტკიცება. როცა ჩვენ ვითვლით ერთი წვეროს ხარისხს, ჩვენ ვითვლით ყველა წიბოს, რომელიც ამ წვეროდან გამოდის. ყველა ხარისხთა ჯამის გამოთვლისას, ჩვენ მივიღებთ, რომ ყოველი წიბო ითვლება ორჯერ, რადგან ის ინცინდენტურია ორ წვეროსთან (მარყუჟებიც, ხარისხის განსაზღვრის თანახმად, ითვლება ორჯერ). ამიტომ საერთო ჯამი ტოლი იქნება წიბოთა გაორმაგებული რიცხვისა.

განსაზღვრა 8. ვთქვათ გრაფის წვეროთა სიმრავლე $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$. მაშინ ამ გრაფის მოსაზღვრეობის მატრიცა ეწოდება მატრიცას $A = \|a_{ij}\|$, სადაც $a_{ij} = 1$, თუ წვეროები v_i და v_j არიან მოსაზღვრე (2, 3..., მულტიგრაფისათვის და ფსევდოგრაფისათვის) და 0 წინააღმდეგ შემთხვევაში (a_{ij} ტოლია v_i წერტილში მარყუჟთა რიცხვის).

განსაზღვრა 9. ორ გრაფს (ან ფსევდოგრაფს) $G_1 = (V_1, E_1)$ და $G_2 = (V_2, E_2)$ ეწოდებათ იზომორფული, თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა ასახვები $\varphi_1 : V_1 \to V_2$ და $\varphi_2 : E_1 \to E_2$, რომ G_1

გრაფის ნებისმიერი ორი u და v წვეროსათვის სამართლიანია ტოლობა $\varphi_2(u,\upsilon)=(\varphi_1(u),\ \varphi_1(\upsilon))$.

განსაზღვრა 10 (გრაფთა იზომორფიზმი მარყუჟისა და ჯერადი წიბოების გარეშე). ორ გრაფს $G_1=(V_1,E_1)$ და $G_2=(V_2,E_2)$ ეწოდებათ იზომორფული, თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა $\varphi_1:V_1\to V_2$, რომ $(u,\upsilon)\in E\Leftrightarrow(\varphi_1(u),\varphi_1(\upsilon))\in E_2$.

განსაზღვრა 11. გრაფს $G_1=(V_1,E_1)$ ეწოდება $G=(V,E)$ გრაფის ქვეგრაფი, თუ

$$V_1\subseteq V\ ,\ \ E_1\subseteq E\ .$$

განსაზღვრა 12. $G=(V,E)$ გრაფში გზა ეწოდება შემდეგი სახის ნებისმიერ მიმდევრობას

$$v_0,\ (v_0,\upsilon_1),\ v_1,\ (v_1,v_2),\cdots,v_{n-1},\ (v_{n-1},v_n),v_n\ .$$

მოცემულ აღნიშვნებში n რიცხვს ეწოდება გზის სიგრძე.

განსაზღვრა 13. ჯაჭვი ეწოდება გზას, რომელშიც არ მეორდება წიბოები.

განსაზღვრა 14. მარტივი ჯაჭვი ეწოდება გზას, რომელშიც არ მეორდება წვეროები.

დებულება 2. ვთქვათ გრაფში $G=(V,E)$ $v_1\neq v_2$ და P არის გზა v_1-დან v_2-ში. მაშინ P-ში შეიძლება გამოვყოთ ქვეგზა v_1-დან v_2-ში, რომელიც იქნება მარტივი ჯაჭვი.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემული გზა არაა მარტივი ჯაჭვი. მაშინ მასში მეორდება რაღაც v წვერო, ანუ გზას აქვს სახე: $P_1=v_0c_1vc_2vc_3v_2$. მაშინ ის შეიცავს ქვეგზას $P_2=v_0c_1vc_3v_2$. თუ P_2 მეორდება რაიმე წვერო, მაშინ ანალოგიურად ჩამოვაშორებთ კიდევ ნაჭერს და ა.შ. პროცესი უნდა დამთავრდეს, რადგან P_1 არის სასრული გზა.

განსაზღვრა 15. გზას ეწოდება ჩაკეტილი, თუ $v_0=v_n$.

განსაზღვრა 16. გზას ეწოდება ციკლი, თუ ის ჩაკეტილია და მასში წიბოები არ მეორდებიან.

განსაზღვრა 17. გზას ეწოდება მარტივი ციკლი, თუ $v_0 = v_n$ და წვეროები არ მეორდებიან.

განსაზღვრა 18. $G = (V, E)$ გრაფს ეწოდება ბმული, თუ ნებისმიერი წვეროსათვის $v_i, v_j \in V \quad (v_i \neq v_j)$ არსებობს გზა v_i-დან v_j-ში.

განვიხილოთ მიმართება $v_i \to v_j$. v_i-დან v_j-ში გზის არსებობის ეს მიმართება.

1) სიმეტრიულია, რადგან $(v_i \to v_j) \Rightarrow (v_j \to v_i)$,

2) ტრანზიტულია, რადგან $(v_i \to v_j) \& (v_j \to v_k) \Rightarrow (v_i \to v_k)$,

3) რეფლექსურია, რადგან $\forall_i (v_i \to v_i)$.

ამრიგად, მივიღებთ, რომ $v_i \to v_j$ არის ეკვივალენტობის მიმართება და წვეროთა სიმრავლე იყოფა ეკვივალენტობის კლასების სასრულ რიცხვად: $V \to V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$. ამასთან, გრაფი იყოფა ბმულ ქვეგრაფებად, რომელსაც ეწოდებათ ბმულობის კომპონენტები.

§ 2. ხეები. ხეების თვისებები

განსაზღვრა 1. ხე ეწოდება ბმულ გრაფს, რომელსაც არ აქვს ციკლი.

განსაზღვრა 2. $G = (V, E)$ გრაფის $G_1 = (V_1, E_1)$ ქვეგრაფს ეწოდება სადგარი ხე $G = (V, E)$ გრაფში, თუ $G_1 = (V_1, E_1)$ არის ხე და $V_1 = V$.

ლემა 1. თუ $G = (V, E)$ გრაფი არის ბმული და წიბო (a, b) ეკუთვნის რაიმე ციკლს G გრაფში, მაშინ G გრაფიკიდან (a, b) წიბოს ამოგდებით კვლავ მიიღება ბმული გრაფი.

დამტკიცება. ეს დებულება გამომდინარეობს იქედან, რომ (a, b) წიბოს ამოგდებისას G-გრაფიდან a და b წვეროები მაინც დარჩებიან ერთ ბმულ კომპონენტში, რადგან a-დან b-ში შეიძლება მისვლა ციკლის დარჩენილი ნაწილით. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1. ნებისმიერი ბმული გრაფი შეიცავს ერთ მაინც სადგარ ხეს.

დამტკიცება. თუ G-ში არ არის ციკლები, მაშინ G არის საძებნი სადგარი ხე. თუ G-ში არის ციკლები, მაშინ G-დან

ამოვაგდოთ რაიმე წიბო, რომელიც შედის ციკლში. მიიღება რაღაც ქვეგრაფი G_1. ლემა 1-ით G_1 – ბმული გრაფია. თუ G_1-ში არ არის ციკლები, მაშინ G_1 არის საძებნი სადგარი ხე, წინააღმდეგ შემთხვევაში გავაგრძელებთ ამ პროცესს. პროცესი დასრულდება, რადგან E სასრული სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. თუ ბმულ გრაფს დავუმატებთ ახალ წიბოს იგივე წვეროებზე, მაშინ წარმოიშობა ციკლი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი ბმული გრაფი $G=(V,E)$. ვთქვათ $u\in V$, $v\in V$, $(u,v)\notin E$. რადგან G ბმული გრაფია, მასში არის გზა u-დან v-ში. მაშინ G-ში არის მარტივი ჯაჭვი C v-დან u-ში. ამიტომ მიღებულ გრაფში არის ციკლი C, (u, v), v. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 3. ვთქვათ $G=(V,E)$ გრაფში p წვეროა და q წიბო. მაშინ G-ში არანაკლებ $p-q$ ბმულობის კომპონენტია. თუ ამასთანავე G-ში არაა ციკლები, მაშინ G შედგება ზუსტად $p-q$ ბმულობის კომპონენტისგან.

დამტკიცება. ვთქვათ რაიმე H გრაფს, რომელიც შეიცავს წვეროებს u და v, ემატება წიბო (u, v). მაშინ თუ u და v ძევს H გრაფის სხვადასხვა ბმულ კომპონენტზე, ბმულობის კომპონენტის რიცხვი მცირდება 1-ით. თუ u და v ძევს H გრაფის ერთ ბმულობის კომპონენტზე, მაშინ ბმულობის კომპონენტის რიცხვი არ იცვლება. ნებისმიერ შემთხვევაში, ბმულობის რიცხვი მცირდება არა უმეტეს 1-ით. ესე იგი, q წიბოების დამატებით ბმულობის კომპონენტის რიცხვი მცირდება არა უმეტეს q-თი. რადგან G გრაფი მიიღება $G_1=(V,\ \varnothing)$ გრაფიდან q წიბოს დამატებით, ამიტომ G-ში არანაკლებ $p-q$ ბმულობის კომპონენტია, ახლა ვთქვათ G-ში არაა ციკლები და ვთქვათ G_1-დან G-ს მიღების პროცესში ემატება წიბო (u, v). თუ u, v არიან ერთ ბმულ კომპონენტში, მაშინ G-ში, ლემა 2-ით, წარმოიშობოდა ციკლი. მაშასადამე, u, v ძევს სხვადასხვა ბმულობის კომპონენტზე და (u, v) წიბოს დამატებით ბმულობის კომპონენტის რიცხვი მცირდება ზუსტად 1-ით. მაშინ G შედგება ზუსტად $p-q$ ბმულობის კომპონენტისგან. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2 (ხეების სხვადასხვა განსაზღვრის შესახებ). შემდეგი ხუთი განსაზღვრა ეკვივალენტურია (p – წვეროთა რიცხვია, q – წიბოთა რიცხვი):

1) G – ხეა;

2) G – არ შეიცავს ციკლს და $q = p-1$;

3) G – ბმული გრაფია და $q = p-1$;

4) G – ბმული გრაფია, მაგრამ ნებისმიერი წიბოს ამოგდებისას გახდება არაბმული;

5) G – არ შეიცავს ციკლს, მაგრამ იგივე წვეროებზე ნებისმიერი წიბოს დამატებით წარმოიშობა ციკლი.

დამტკიცება. დავამტკიცებთ შემდეგ გადასვლებს: 1) $\Rightarrow$2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$5) $\Rightarrow$1), საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა.

1) $\Rightarrow$ 2): რადგან G ბმული გრაფია და G არ შეიცავს ციკლებს, ამიტომ $p-q=1$ ლემა 3-ით. აქედან $q = p-1$.

2) $\Rightarrow$ 3): ლემა 3-ით G-ში ბმულობის კომპონენტთა რიცხვი უდრის $q = p-1$, ანუ G ბმულია გრაფია,

3) $\Rightarrow$ 4): ერთი წიბოს ამოგდებით $p-q=2$. მაშინ ლემა 3-ით ბმულობის კომპონენტთა რიცხვი არანაკლებია ვიდრე $p-q=2$.

4) $\Rightarrow$ 5): თუ G აქვს ციკლი, მაშინ ლემა 1-ის თანახმად შეიძლება ერთი წიბოს ამოგდება ისე, რომ გრაფი დარჩება ბმული. ლემა 2-ის თანახმად, თუ დავუმატებთ ნებისმიერ ახალ წიბოს ბმულ გრაფს იგივე წვეროებზე, მაშინ წარმოიშვება ციკლი.

5) $\Rightarrow$ 1): თუ G არ არის ბმული გრაფი და წვეროები u, v ძევს სხვადასხვა ბმულობის კომპონენტზე G-გრაფისა, მაშინ (u, v) წიბოს G – გრაფზე დამატებით, ცხადია, არ წარმოიქმნება ციკლი, რაც ეწინააღმდეგება 5). აქედან გამოდის, რომ G – ბმული გრაფია, თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. გრაფების გეომეტრიული რეალიზაცია. თეორემა გრაფთა რეალიზაციის შესახებ სამგანზომილებიან სივრცეში

განსაზღვრა. ვთქვათ მოცემულია რაიმე არაორიენტირებული გრაფი $G=(V,E)$. დავუშვათ, რომ G გრაფის ყოველ v_i წვეროს შეესაბამება რაიმე $a_i : v_i \to a_i$, $(a_i \neq a_j)$ $(i \neq j)$, ხოლო ნებისმიერ $e=(a,b)$ წიბოს შეესაბამება რაიმე უწყვეტი წირი L, რომელიც აერთებს წერტილებს a_i და a_j და არ გადის სხვა წერტილზე a_k

$(k \neq i, j)$. მაშინ თუ წიბოების შესაბამისი ყველა წირს არ აქვს საერთო წერტილები, გარდა ბოლოებისა, ამბობენ, რომ მოცემულია G გრაფის გეომერტიული რეალიზაცია.

თეორემა 3. ნებისმიერი (სასრული) გრაფისათვის არსებობს მისი რეალიზაცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

დამტკიცება. ავიღოთ სამგანზომილებიან სივრცეში ნებისმიერი წრფე ℓ და მასზე განვალაგოთ G გრაფის ყველა წვერო. ვთქვათ G აქვს q წიბო. ℓ-ზე გავატაროთ q განსხვავებულ ნახევარსიბრტეთა კონა. ამის შემდეგ G გრაფის ყოველი წიბო შეიძლება გამოვსახოთ წირით თავის ნახევარსიბრტყეზე და ისინი, ცხადია, არ გადაიკვეთებიან. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. პლანარული (ბრტყელი) გრაფები. ეილერის ფორმულა

განსაზღვრა 1. გრაფს ეწოდება პლანარული, თუ არსებობს მისი გეომეტრიული რეალიზაცია სიბრტყეზე.

განსაზღვრა 2. თუ არსებობს გრაფის პლანარული რეალიზაცია და ჩვენ „დავჭრით“ სიბრტყეს ამ პლანარული რეალიზაციის ყველა წირით, მაშინ სიბრტყე დაიშლება ნაწილებად, რომლებსაც ეწოდებათ წახნაგები ამ პლანარული რეალიზაციის (ამ წახნაგებიდან ერთი უსასრულოა, მას ეწოდება გარე წახნაგი).

თეორემა 4. (ეილერის ფორმულა). ნებისმიერი პლანარული რეალიზაციისათვის ბმული პლანარული $G = (V, E)$ გრაფისა p წვეროთი, q წიბოთი და r წახნაგით, სრულდება ტოლობა $p - q + r = 2$.

დამტკიცება. თეორემას დავამტკიცებთ ინდუქციით q-ს მიმართ ფიქსირებული p-სათვის. რადგან G ბმული გრაფია, ამიტომ $q \geq p - 1$.

a) ინდუქციის ბაზისი: $q = p - 1$. რადგან G ბმულია და $q = p - 1$. ამიტომ თეორემა 2-ის მე-3 პუნქტის თანახმად G არის ხე ანუ G-ში არაა ციკლები. მაშინ r =1. აქედან $p - q + r = p - -(p-1) + 1 = 2$.

b) ვთქვათ q-თვის: $p - 1 \leq q < q_0$ თეორემა სამართლიანია. დავამტკიცოთ, რომ $q = q_0$-თვის ის ასევე სამართლიანი იქნება.

ვთქვათ G არის ბმული გრაფი p წვეროთი, q_0 წიბოთი და ვთქვათ მის პლანარულ რეალიზაციაში არის r წახნაგი. რადგან $q_0 > p-1$, ამიტომ G არაა ხე. მაშასადამე, G-ში არის ციკლი. ვთქვათ e წიბო შედის ციკლში. მაშინ მასთან ორი მხრიდან შეერთებულია სხვადასხვა წახნაგი. ჩამოვაცილოთ e წიბო G გრაფიდან. მაშინ ორი წახნაგი გარდაიქმნება ერთად და მიღებული გრაფი G_1 დარჩება ბმულად. ამასთან მიიღება G_1 გრაფის პლანარული რეალიზაცია p წვეროთი და q_0-1 წიბოთი და $r-1$ წახნაგით. რადგან $q_0-1<q_0$, ამიტომ ინდუქციური დაშვებით, G_1 გრაფისათვის სამართლიანია ეილერის ფორმულა, ანუ $p-(q_0-1)+(r-1)=2$, საიდანაც $p-q_0+r=2$. რისი დამტკიცებაც მოითხოვება.

შედეგი 1. ეილერის ფორმულა სამართლიანია ბმული გრაფების სფეროზე გეომეტრიული რეალიზაციისთვისაც.

დამტკიცება. ვთქვათ ბმული G გრაფი p წვეროთი და q წიბოთი რეალიზებულია S სფეროზე ისე, რომ წახნაგთა რიცხვი უდრის r-ს. ვთქვათ სფეროზე A წერტილი არ ძევს ამ გეომეტრიული რეალიზაციის წირებზე. ვთქვათ P რაიმე სიბრტყეა. S სფერო მოვათავსოთ P სიბრტყეზე ისე, რომ A წერტილი იყოს ყველაზე დაშორებული წერტილი სიბრტყიდან. დავაპროექტოთ S P-ზე ცენტრალური პროექტირებით ცენტრით A წერტილში. მაშინ P სიბრტყეზე მივიღებთ ბმული გრაფის გეომეტრიულ რეალიზაციას p წვეროთი და q წიბოთი, ამასთან წახნაგთა რიცხვი იქნება ზუსტად r (A წერტილის შემცველი სფეროს წახნაგი გადაისახება სიბრტყეზე გარე წახნაგში) თეორემის თანახმად მივიღებთ $p-q+r=2$.

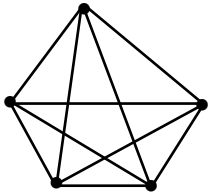
შედეგი 2. ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალწახნაგისათვის სამართლიანია ტოლობა $p-q+r=2$, სადაც p-არის წვეროთა რიცხვი, q-წიბოთა რიცხვი, r-წახნაგთა რიცხვი.

დამტკიცება. ვთქვათ ამოზნექილი მრავალწახნაგს M-ს აქვს p წვერო, q წიბო და r წახნაგი. ვთქვათ O არის მრავალწახნაგას შიდა წერტილი. მოვათავსოთ S სფერო ცენტრით O წერტილში იმდენად დიდი რადიუსით, რომ M მთლიანად მოთავს-დეს S-ში. განვიხილოთ ცენტრალური პროექტირება ცენტრით O წერტილში, და დავაპროექტოთ M-ის წვეროები და წიბოები S-ზე. მაშინ S-ზე ჩვენ მივიღებთ გეომეტრიულ რეალიზაციას გარკვეული ბმული

გრაფისა p წვეროთი, q წიბოთი და r წახნაგით. აქედან შედეგი 1-ის თანახმად $p-q+r=2$.

§ 5. K_5 და $K_{3,3}$ გრაფების არაპლანარობის დამტკიცება. პონტრიაგინ-კურატოვსკის თეორემა

განსაზღვრა 1. K_5 გრაფი ეწოდება გრაფს ხუთი წვეროთი, რომლის წვეროთა ყოველი წყვილი შეერთებულია წიბოთი.

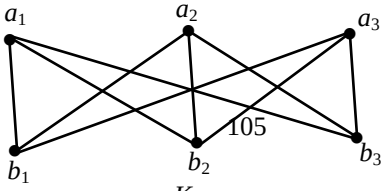


K_5

თეორემა 5. K_5 გრაფი არაა პლანარული.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ K_5 გრაფისათვის არსებობს პლანარული რეალიზაცია. რადგან K_5 გრაფი ბმულია, ამიტომ პლანარული რეალიზაციისათვის სამართლიანია ეილერის ფორმულა $p-q+r=2$. რადგან K_5 გრაფში $p=5$ და $q=10$, ამიტომ ყველა წახნაგთა რიცხვი ტოლი უნდა იყოს $r=2-p+1=7$. ვთქვათ წახნაგები დანომრილია $1,2,\cdots,r$ და ვთქვათ i –ური წახნაგის პერიმეტრზე შემოვლისას გავდივართ q_i წიბოებზე და ვთქვათ პერიმეტრზე შემოვლით i-ურ წახნაგზე გავლისას გავდივართ q_i წიბოებზე. რადგან ამ დროს ყოველ წიბოზე ხდება ორჯერ გავლა (ის არის ორი წახნაგის გვერდი), ამიტომ $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q = 20$. მაგრამ ყოველ წახნაგში არა-ნაკლებ სამი გვერდია. ამიტომ $q_i \geq 3$ ყოველი i-თვის. აქედან $\sum_{i=1}^{r} q_i \geq 3r = 21$. მივიღეთ $20 \geq 21$ – წინააღმდეგობა. მასასადამე, K_5-თვის არ არსებობს პლანარული რეალიზაცია.

განსაზღვრა 2. $K_{3,3}$ გრაფი ეწოდება გრაფს ექვსი წვეროთი a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, რომელშიც ყოველი a_i წვერო შეერთებულია წიბოთი ყოველ b_j წვეროსთან და სხვა წიბოები არაა.



$K_{3,3}$

თეორემა 6. $K_{3,3}$ გრაფი არაა პლანარული.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $K_{3,3}$ გრაფისათვის არსებობს პლანარული რეალიზაცია. რადგან $K_{3,3}$ გრაფი ბმულია, ამიტომ ამ პლანარული რეალიზაციისათვის სამართლიანია ეილერის ფორმულა $p-q+r=2$. რადგან $K_{3,3}$ გრაფში გვაქვს $p=6$ და $q=9$, ამიტომ ყველა წახნაგთა რიცხვი ტოლი უნდა იყოს $r=2-p+q=5$. ისე, როგორც წინა თეორემის დამტკიცებისას, მივიღებთ $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q = 18$, სადაც q_i – არის i-ური წახნაგის გვერდების რიცხვი. მაგრამ $K_{3,3}$ გრაფში არ არის ციკლი სიგრძით 3. ამიტომ ყოველ წახნაგში არანაკლებ 4 გვერდია. მაშასადამე, $q_i \geq 4$ ყოველი i-თვის. აქედან $\sum_{i=1}^{r} q_i \geq 4r = 20$. მივიღეთ, რომ $18 \geq 20$ – წინააღმდეგობა. ამრიგად, $K_{3,3}$ გრაფისთვის არ არსებობს პლანარული რეალიზაცია.

განსაზღვრა. (a, b) წიბოს დაყოფა ეწოდება ოპერაციას, რომელიც შედგება შემდეგი მოქმედებებისაგან:

1) (a, b)-ს ჩამოშორება;
2) ახალი c წვეროს დამატება.
3) (a, c) და (c, b) წიბოების დამატება.

განსაზღვრა 4. H გრაფს ეწოდება G გრაფის დანაყოფი, თუ H შეიძლება მივიღოთ G-დან მისი წიბოების სასრული რიცხვჯერ დაყოფით.

განსაზღვრა 5. ორ გრაფს ეწოდება ჰომეომორფული, თუ არსებობს მათი დანაყოფები, რომლებიც იზომორფულია.

თეორემა 7. (პონტრიაგინ-კურატოვსკი). გრაფი არის პლანარული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ შეიცავს არცერთ ქვეგრაფს, რომელიც ჰომეომორფულია K_5 ან $K_{3,3}$ გრაფის.

§ 6. რამსეის ამოცანა

ფართოდაა ცნობილი შემდეგი თავსატეხი.

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ექვს კაცს შორის მოიძებნება ან სამი წყვილწყვილად ნაცნობი, ან სამი წყვილწყვილად უცნობი.

მოცემული სიტუაცია შეიძლება აღიწეროს G გრაფით, რომელსაც აქვს ექვსი წვერო, რომლებიც წარმოადგენენ ადამიანებს: ორი წვეროს მეზობლობა შეესაბამება ნაცნობობას. საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ G გრაფში ან სამი წყვილწყვილად მოსაზღვრე წვეროა, ან სამი წყვილწყვილად არა მოსაზღვრე წვეროა. G გრაფის დამატებას $\overline{G}$ წვეროების სიმრავლედ აქვს G გრაფის წვეროების სიმრავლე V, ორი წვერო $\overline{G}$-ში მოსაზღვრეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არ არიან მოსაზღვრე G-ში.

ამ ტერმინებში თავსატეხი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ.

თეორემა 8. თუ G არის გრაფი ექვსი წვეროთი, მაშინ ან G ან $\overline{G}$ შეიცავს სამკუთხედს.

დამტკიცება. ვთქვათ v არის G გრაფის ნებისმიერი წვერო, რომელსაც აქვს ექვსი წვერო. რადგან v წვერო ნებისმიერ დანარჩენ ხუთ წვეროსთან მოსაზღვრეა G-ში ან $\overline{G}$-ში, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება დავუშვათ, რომ წვეროები u_1, u_2, u_3 მოსაზღვრეა v-ს G-ში. თუ რომელიმე ორი u_1, u_2, u_3-დან მოსაზღვრეა G-ში, მაშინ v-სთან ისინი ქმნიან სამკუთხედს. თუ არცერთი ორი მათგანი არაა მოსაზღვრე G-ში, მაშინ $\overline{G}$ გრაფში წვერობი u_1, u_2, u_3 ქმნიან სამკუთხედს.

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

ცერმელო-ფრენკელის აქსიომები

1. გაფართოების აქსიომა (Axiom of Extensionality) თუ X და Y აქვთ ერთი და იგივე ელემენტები, მაშინ $X = Y$.
2. წყვილის აქსიომა (Axiom of Pairing). ყოველი a და b-სთვის არსებობს სიმრავლე $\{a, b\}$, რომელიც შეიცავს ზუსტად a და b-ს.
3. განცალებადობის აქსიომა სქემა (Axiom Schema of Separation). თუ P არის თვისება (პარამეტრით p), მაშინ ნებისმიერი X და p-სთვის არსებობს სიმრავლე $Y = \{u \in X : P(u, p)\}$, რომელიც შეიცავს ყველა იმ $u \in X$-ს, რომელსაც აქვს P თვისება.
4. გაერთიანების აქსიომა (Axiom of Union). ნებისმიერი X-სთვის არსებობს სიმრავლე $Y = \bigcup X$, X-ის ყველა ელემენტთა გაერთიანება.
5. ქვესიმრავლეთა სიმრავლის აქსიომა ან ხარისხის აქსიომა (Axiom of Power Set). ყოველი X-სთვის არსებობს $Y = P(X)$, X-ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე.
6. უსასრულობის აქსიომა. არსებობს უსასრულო სიმრავლე.
7. შეცვლის აქსიომა სქემა (Axiom Schema of Replacement). თუ F კლასი არის ფუნქცია, მაშინ ნებისმიერი X-სთვის არსებობს სიმრავლე $Y = F(X) = \{F(x) : x \in X\}$.
8. რეგულარობის აქსიომა (Axiom of Regularity). ყოველ არაცარიელ სიმრავლეს აქვს $\in$-მინიმალური ელემენტი.
9. ამორჩევის აქსიომა (Axiom of Choice). არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველ ოჯახს აქვს ამორჩევის ფუნქცია.

   1-8 აქსიომების მქონე თეორია არის ცერმელო-ფრენკელის აქსიომატური სიმრავლეთა თეორია *ZF*; *ZFC* აღნიშნავს *ZF* თეორიას ამორჩევის აქსიომასთან ერთად.

რატომ აქსიომატური სიმრავლეთა თეორია?

ინტუიციურად, სიმრავლე არის ყველა იმ ელემენტთა ერთობლიობა, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ თვისებას. სხვა სიტყვებით, ჩვენ შეგვიძლია მოვითხოვოთ შემდეგი წესების შესრულების სიმრავლეების ფორმირებისათვის.

10. ჩართვის აქსიომა სქემა. თუ P არის თვისება, მაშინ არსებობს სიმრავლე $Y = \{x : P(x)\}$.

ეს პრინციპი მცდარია.

11. რასელის პარადოქსი. განვიხილოთ S სიმრავლე, რომლის ელემენტია ყველა ის (და მხოლოდ ის) სიმრავლე, რომელიც არ არის თავის თავის ელემენტი: $S = \{X : X \notin X\}$. კითხვა: S ეკუთვნის S-ს? თუ S ეკუთვნის S-ს, მაშინ S არ არის თავის თავის ელემენტი, და მაშასადამე, $S \notin S$. მეორე მხრივ, თუ $S \notin S$, მაშინ S ეკუთვნის S. ორივე შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს წინააღმდეგობა.

ამრიგად ჩვენ უნდა დავასკვნათ, რომ

$$\{X : X \notin X\}$$

არ არის სიმრავლე, და ჩვენ უნდა შევამოწმოთ სიმრავლის ინტუიციური ცნება.

ასეთი ტიპის პარადოქსებისაგან თავის აცილების გზა არის უარი ვთქვათ ჩართვის აქსიომა სქემაზე და შევინახოთ მისი სუსტი ვერსია, განცალების სქემა.

თუ P არის თვისება, მაშინ ნებისმიერი X-თვის არსებობს სიმრავლე $Y = \{x \in X : P(x)\}$.

როცა ჩვენ უარს ვამბობთ სრულ ჩართვის სქემაზე, რასელის პარადოქსი არ არის საშიში, მეტიც, ის უზრუნველყოფს სასარგებლო ინფორმაციას: ყველა სიმრავლეთა სიმრავლე არ არსებობს.

სრული ჩართვის სქემის შეცვლა განცალების სქემით წარმოქმნის ჩვენთვის ახალ პრობლემას. განცალების აქსიომა არის მეტისმეტად სუსტი იმისათვის, რომ განვავითაროთ სიმრავლეთა თეორია თავისი ჩვეულებრივი ოპერაციებით და კონსტრუქციებით. ეს აქსიომები არაა საკმარისი, რომ დავამტკიცოთ, რომ ორი სიმრავლის გაერთიანება $X \cup Y$ არსებობს, ან განვსაზღვროთ ნამდვილი რიცხვის ცნება.

სიმრავლეთა თეორიის ენა, ფორმულები

ზემოთ მოცემული განცალების აქსიომა სქემა აყენებს თვისების არაცხად ცნებას. იმისათვის, რომ აქსიომებს მივცეთ ზუსტი ფორმა, ჩვენ განვავითარებთ სიმრავლეთა აქსიომატურ თეორიას პრედიკატთა პირველი რიგის აღრიცხვის ჩარჩოში. გარდა ტოლობის პრედიკატისა $=$, სიმრავლეთა თეორიის ენა შეიცავს ბინარულ პრედიკატს $\in$, კუთვნილების მიმართებას.

სიმრავლეთა თეორიის ფორმულები აიგებიან ატომური ფორმულებიდან

$$x \in y, \quad x = y$$

შემდეგი ოპერაციების საშუალებით

$$\varphi \wedge \psi\ ,\ \varphi \vee \psi\ ,\ \neg\varphi,\ \varphi \to \psi\ ,\ \varphi \leftrightarrow \psi$$

(კონიუნქცია, დიზიუნქცია, უარყოფა, იმპლიკაცია და ეკვივალენტობა), და კვანტორებით

$$\forall x\varphi\ ,\ \exists x\varphi\ .$$

პრაქტიკაში, ფორმულებში ჩვენ გამოვიყენებთ სხვა სიმბოლოებს, სახელდობრ, განსაზღვრულ პრედიკატებს, ოპერაციებს და კონსტანტებს, და გამოვიყენებთ ფორმულებს არაფორმალურადაც; მაგრამ აზრობრივად გასაგები იქნება რომ ყოველი ასეთი ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს იმ სახით, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ϵ და =, როგორც არალოგიკურ სიმბოლოებს.

თავისუფალი ცვლადების მქონე ფორმულებთან მიმართებაში, ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნების შესახებ შეთანხმებას, რომ

$$\varphi(u_1,\cdots,u_n)$$

ფორმულის ყველა თავისუფალი ცვლადი არის $u_1,\cdots,u_n$-ს შორის (შეიძლება ზოგიერთი u_i არაა თავისუფალი, ან არც გვხვდება φ-ში). ფორმულას თავისუფალი ცვლადის გარეშე ეწოდება წინადადება (sentence).

კლასები

თუმცა ჩვენ ვმუშაობ *ZGC*-ში, რომელშიც განსხვავებით ალტერნატიური აქსიომატური სიმრავლეთა თეორიისა, არის მხოლოდ ერთი ტიპის ობიექტები, სახელდობრ სიმრავლეები, ჩვენ შემოვიღებთ კლასების არაფორმალურ ცნებას. ამას ჩვენ გავაკეთებთ პრაქტიკული მიზნით: უფრო მარტივია მანიპულაცია კლასებით, ვიდრე ფორმულებით.

თუ $\varphi(x, p_1,\cdots, p_n)$ არის ფორმულა

$$C = \{x : \varphi(x, p_1,\cdots, p_n)\}$$

ჩვენ ვუწოდებთ კლასს. C კლასის ელემენტები არიან ყველა ის სიმრავლეები x, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\varphi(x, p_1,\cdots, p_n)$ ფორმულას;

$$x \in C \quad \text{მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა} \quad \varphi(x, p_1,\cdots, p_n)\ .$$

ჩვენ ვამბობთ, რომ C არის განსაზღვრებადი $p_1,\cdots, p_n$-დან. თუ $\varphi(x)$ არ აქვს პარამეტრები p_i მაშინ C კლასი არის განსაზღვრებადი.

ორი კლასი ტოლია, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე ელემენტები: თუ $C=\{x:\varphi(x,p_1,\cdots,p_n\}$, $D=\{x:\psi(x,q_1,\cdots,q_n\}$ $C=D$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი x-თვის

$$\varphi(x,p_1,\cdots,p_n)\Leftrightarrow\psi(x,q_1,\cdots,q_m).$$

უნივერსალური კლასი, ან უნივერსი, არის ყველა სიმრავლეთა კლასი:

$$V=\{x:x=x\}.$$

ჩვენ განვსაზღვრავთ კლასების ჩართვას (C არის D-ს ქვეკლასი).

$C\subset D$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი - x-თვის, $x\in C$ გამომდინარეობს $x\in D$;

და შემდეგ ოპერაციებს კლასებზე:

$C\bigcap D=\{x:x\in C$ და $x\in D\}$,

$C\bigcup D=\{x:x\in C$ ან $x\in D\}$,

$C-D=\{x:x\in C$ და $x\notin D\}$,

$\bigcup C=\{x:x\in S$ რაიმე $S\in C\}=\bigcup\{S:S\in C\}$

ყოველი სიმრავლე შეიძლება განხილული იქნას როგორც კლასი. თუ S არის სიმრავლე, განვიხილოთ ფორმულა $x\in S$ და კლასი

$$\{x:x\in S\},$$

ის რომ S სიმრავლე არის ერთადერთი განსაზღვრული თავისი ელემენტებით გამომდინარეობს გაფართოების აქსიომიდან. კლასი, რომელიც არ არის სიმრავლე, არის საკუთრივი კლასი.

გაფართოება

თუ X და Y აქვთ ერთი და იგივე ელემენტები, მაშინ $X=Y$:

$$\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\rightarrow X=Y.$$

პირიქით, სახელდობრ, თუ $X=Y$, მაშინ $u\in X\leftrightarrow u\in Y$, არის პრედიკატთა აღრიცხვის აქსიომა. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს

$X=Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)$.

აქსიომა გამოხატავს ფუნდამენტურ იდეას სიმრავლეებზე: სიმრავლე განსაზღვრულია მისი ელემენტებით.

დაწყვილება

ნებისმიერი a და b-თვის არსებობს სიმრავლე $\{a,b\}$, რომელიც შეიცავს ზუსტად a და b-ს

$$\forall a\forall b\exists c\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b)$$

გაფართოების ძალით, C სიმრავლე ერთადერთია, და ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ წყვილი.

$\{a,b\}=$ ერთადერთი c ისეთი, რომ $\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b)$ ერთელემენტიანი სიმრავლე $\{a\}$ არის სიმრავლე

$$\{a\}=\{a,a\}$$

რადგან $\{a,b\}=\{b,a\}$, ჩვენ შემდეგში განვსაზღვრავთ დალაგებულ წყვილს

$$(a,\ b)$$

ისე რომ შემდეგი პირობა შესრულდეს:

(1.1) $(a,\ b)=(c,\ d)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $a=c$ და $b=d$.

დალაგებული წყვილის ფორმალური განსაზღვრისათვის ჩვენ ავიღებთ

$$(a,\ b)=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

(1.1)-ის შემოწმებას ვუტოვებთ მკითხველს.

შემდეგ ჩვენ განვსაზღვრავთ დალაგებულ სამეულს, ოთხეულს და ა.შ., შემდეგნაირად:

$$(a,\ b,\ c)=((a,\ b),\ c),$$

$$(a,\ b,\ c,\ d)=((a,\ b,\ c),d),$$

$$\vdots$$

$$(a_1,\cdots,a_{n+1})=\big((a_1,\cdots,a_n),a_{n+1}\big).$$

აქედან გამოდის, რომ ორი დალაგებული n-ეული $(a_1,\cdots,a_n)$ და $(b_1,\cdots,b_n)$ ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1=b_1,\cdots,a_n=b_n$.

განცალებადობის სქემა

ვთქვათ $\varphi(u,p)$ ფორმულაა. ნებისმიერი X და p-თვის არსებობს სიმრავლე $Y=\{u\in X:\varphi(u,p)\}$;

(1.2) $$\forall X\forall p\exists Y\forall u(u\in Y\leftrightarrow u\in X\wedge\varphi(u,p)).$$

ყოველი $\varphi(u,p)$ ფორმულისათვის (1.2) ფორმულა არის აქსიომა (განცალებადობის). გაფართოების ძალით (1.2)-ში Y სიმრავლე არის ერთადერთი.

შევნიშნოთ, რომ განცალების აქსიომის უფრო ზოგადი ვერსია შეიძლება დამტკიცდეს დალაგებული n-ეულების გამოყენებით: ვთქვათ $\psi(u,p_1,\cdots,p_n)$ არის ფორმულა. მაშინ

(1.3) $$\forall X \forall p_1 \cdots \forall p_n (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \psi(u, p_1, \cdots, p_n)) .$$

მარტივად, ვთქვათ $\varphi(u, p)$ არის ფორმულა

$$\exists p_1 \cdots \exists p_n (p = (p_1, \cdots, p_n) \text{ და } \psi(u, p_1, \cdots, p_n))$$

და მაშინ, მოცემული X და $p_1, \cdots, p_n$-თვის, ვთქვათ

$$Y = \{u \in X : \varphi(u, p_1, \cdots, p_n))\} .$$

ჩვენ შეგვიძლია განცალებადობის აქსიომას მივცეთ შემდეგი ფორმა: განვიხილოთ კლასი $C = \{u : \varphi(u, p_1, \cdots, p_n)\}$; მაშინ (1.3)-ის ძალით

$$\forall X \exists Y (C \bigcap X = Y) .$$

ამრიგად, C კლასის თანაკვეთა ნებისმიერ X სიმრავლესთან არის სიმრავლე; და ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ოპერაციები

$$X \bigcap Y = \{u \in X : u \in Y\} \text{ და } X - Y = \{u \in X : u \notin Y\} .$$

ანალოგიურად, აქედან გამომდინარეობს, რომ ცარიელი კლასი

$$\varnothing = \{u : u \neq u\}$$

არის სიმრავლე – ცარიელი სიმრავლე; ცხადია, ეს იმ დაშვებით, რომ არსებობს ერთი მაინც სიმრავლე X (რადგან $\varnothing \subset X$):

(1.4) $$\exists X (X = X) .$$

(1.4) არ გვაქვს აქსიომათა შორის, რადგან ის გამომდინარეობს უსასრულობის აქსიომიდან.

ორ X, Y სიმრავლეს ეწოდება დიზიუნქციური, თუ $X \bigcap Y = \varnothing$.

თუ C არის სიმრავლეთა არაცარიელი კლასი, ჩვენ ვუშვებთ:

$$\bigcap C = \bigcap \{X : X \in C\} = \{u : u \in X \text{ for every } X \in C\} .$$

შევნიშნოთ, რომ $\bigcap C$ არის სიმრავლე (ის არის ქვესიმრავლე ნებისმიერ $X \in C$). აგრეთვე, $X \bigcap Y = \bigcap \{X, Y\}$.

განცალებადობის აქსიომის სხვა შედეგი არის, რომ უნივერსალური კლასი V არის საკუთრივი კლასი; სხვანაირად,

$$S = \{x \in V : x \in x\}$$

იქნებოდა სიმრავლე.

გაერთიანება

ნებისმიერი X სიმრავლისათვის არსებობს სიმრავლე $Y = \bigcup X$:

(1.5) $$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge u \in z)) .$$

შემოვიტანოთ შემოკლება

$$(\exists z \in X)\varphi \text{ იყოს } \exists z (z \in X \wedge \varphi) ,$$

და

$$(\forall z \in X)\varphi \quad \text{იყოს} \quad \forall z(z \in X \to \varphi).$$

(1.5)-ით, ნებისმიერი X-თვის არსებობს ერთადერთი სიმძლავრე

$$Y = \{u : (\exists z \in X)u \in z\} = \bigcup\{z : z \in X\} \bigcup X,$$

X-ის გაერთიანება.

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$X \bigcup Y = \bigcup\{X, Y\}, \quad X \bigcup Y \bigcup Z = (X \bigcup Y) \bigcup Z, \text{ და ა.შ.}$$

ასევე $\{a, b, c\} = \{a, b\} \bigcup \{c\}$,

და, საზოგადოდ,

$$\{a_1, \cdots, a_n) = \{a_1\} \bigcup \cdots \bigcup \{a_n\}.$$

ვთქვათ $X \Delta Y = (X - Y) \bigcup (Y - X)$, ეს არის X და Y-ის სიმეტრიული სხვაობა.

ნებისმიერი სიმრავლე (სიმრავლის ხარისხი)

ნებისმიერი X-თვის არსებობს სიმრავლე $Y = P(X)$:

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \subset X).$$

u სიმრავლე არის X-ის ქვესიმრავლე. $U \subset X$, თუ

$$\forall z(z \in U \leftrightarrow z \in X).$$

თუ $U \subset X$ და $U \neq X$, მაშინ U არის X-ის საკუთრივი ქვესიმრავლე.

X-ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს,

$$P(x) = \{u : u \in X\},$$

ეწოდება X სიმრავლის ხარისხი.

სიმრავლის ხარისხის აქსიომის გამოყენებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ სიმრავლეთა თეორიის სხვა ძირითადი ცნებები.

X და Y-ის ნამრავლი არის (x, y) წყვილთა სიმრავლე, სადაც $x \in X$ და $y \in Y$:

(1.6) $$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \quad \text{და} \quad y \in Y\}.$$

(1.6)-ში $\{(x, y) : \cdots\}$ აღნიშვნა გამართლებულია, რადგან

$$\{(x, y) : \varphi(x, y)\} = \{u : \exists x \exists y(u = (x, y) \quad \text{და} \quad \varphi(x, y))\}.$$

$X \times Y$ ნამრავლი სიმრავლეა, რადგან

$$X \times Y \subset PP(X \bigcup Y).$$

შემდეგ, ჩვენ განვსაზღვრავთ

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z.$$

და საზოგადოდ,

$$X_1 \times \cdots \times X_{n+1} = (X_1 \times \cdots \times X_n) \times X_{n+1}.$$

ამრიგად,

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\}.$$

ვთქვათ

$$X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n-\text{ჯერ}}.$$

n-არული მიმართება R არის n-ეულთა სიმრავლე. R არის მიმართება X-ზე. თუ $R \subset X^n$. მოსახერხებელია ვწეროთ $R(x_1, \cdots, x_n)$ ნაცვლად

$$(x_1, \cdots, x_n) \in R,$$

და იმ შემთხვევაში, როცა R არის ბინარული, ჩვენ აგრეთვე გამოვიყენებთ

$$x\, R\, y$$

$(x, y) \in R$ -თვის.

თუ R არის ბინარული მიმართება, მაშინ R-ის განსაზღვრის არე, არის სიმრავლე

$$dom(R) = \{u : \exists v (u, v) \in R\},$$

და R-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეა

$$ran(R) = \{v : \exists u (u, v) \in R\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $dom(R)$ და $ran(R)$ არიან სიმრავლეები, რადგან

$$dom(R) \subset \bigcup\bigcup R, \quad ran(R) \subset \bigcup\bigcup R.$$

R მიმართების ველი არის სიმრავლე $field(R) = dom(R) \bigcup ran(R)$. საზოგადოდ, R კლასს ვუწოდებთ n-არულ მიმართებას, თუ მისი ყოველი ელემენტი არის n-ეული; სხვა სიტყვებით, თუ

$$R \subset V^n = n - \text{ეულთა კლასი},$$

სადაც C^n (და $C \times D$) განსაზღვრულია ჩვეულებრივად.

ბინარული მიმართება f არის ფუნქცია, თუ $(x, y) \in f$ და $(x, z) \in f$ გამომდინარეობს $y = z$. ერთადერთი y ისეთი, რომ $(x, y) \in f$ არის f-ის მნიშვნელობა x-ზე; ჩვენ გამოვიყენებთ სტანდარტულ აღნიშვნას

$$y = f(x)$$

ან მის ვარიანტებს $f : x \to y$, $y = f_x$, და $(x, y) \in f$ -თვის f არის ფუნქცია x-ზე, თუ $X = dom(f)$. თუ $dom(f) = X^n$, მაშინ f არის n-არული ფუნქცია X-ზე.

f არის ფუნქცია X-დან Y-ში,

$$f : X \to Y.$$

თუ $dom(f) = X$ და $ran(f) \subset Y$. X-დან Y-ში ყველა ფუნქციათა სიმრავლე აღინიშნება Y^X-ით. შევნიშნოთ, რომ Y^X არის სიმრავლე:

$$Y^X \subset P(X \times Y).$$

თუ $Y = ran(f)$, მაშინ f არის ფუნქცია Y-ზე. f ფუნქცია არის ურთიერთცალსახა, თუ

$$f(x) = f(y) \to x = y.$$

n-არული ოპერაცია X-ზე არის ფუნქცია $f : X^n \to X$.

f ფუნქციის შეზღუდვა (შევიწროება) X სიმრავლეზე (ჩვეულებრივ $dom(f)$-ის ქვესიმრავლეზე) არის ფუნქცია

$$f \restriction X = \{(x, y) \in f : x \in X\}.$$

g ფუნქცია არის f ფუნქციის გაფართოება, თუ $g \supset f$, ანუ, $dom(f) \subset dom(g)$ და $g(x) = f(x)$ ყოველი $x \in dom(f)$.

თუ f და g არიან ისეთი ფუნქციები, რომ $ran(g) \subset dom(f)$, მაშინ f და g კომპოზიცია არის ფუნქცია fog განსაზღვრის არით $dom(fog) = dom(g)$ და ისეთი, რომ $fog)(x) = f(g(x))$ ყოველი $x \in dom(g)$.

X-ის გადასახვას f-ით აღვნიშნავთ $f''X$ ან $f(X)$:

$$f''X = f(X) = \{y : (\exists x \in X) y = f(x)\},$$

და შებრუნებულ გადასახვას

$$f^{-1}(X) = \{x : f(x) \in X\}.$$

თუ f არის ურთიერთცალსახა, მაშინ f^{-1} აღნიშნავს f-ის შებრუნებულს:

$$f^{-1}(x) = y \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ } x = f(y).$$

წინა განსაზღვრა შეიძლება გამოვიყენოთ კლასებისთვის ნაცვლად სიმრავლეებისა. F კლასი არის ფუნქცია თუ ის არის ასეთი მიმართება, რომ $(x, y) \in F$ და $(x, z) \in F$ გამომდინარეობს $y = z$. მაგალითად, $F''C$ ან $F(C)$ აღნიშნავს გადასახვას C კლასისა F ფუნქციით.

შევნიშნოთ, რომ ხშირად ფუნქციებს ეძახიან გადასახვებს ან შესაბამისობებს (და მსგავსად, სიმრავლეს ეძახიან ოჯახს ან ერთობლიობას).

X სიმრავლეზე ეკვივალენტობის მიმართება არის ბინარული მიმართება $\equiv$, რომელიც არის რეფლესური, სიმეტრიული და ტრანზიტული: ყოველი $x, y, z \in X$,

$$x \equiv x$$
$$x \equiv y \to y \equiv x$$
$$\text{თუ } x \equiv y \text{ და } y \equiv z, \text{ მაშინ } x \equiv z.$$

სიმრავლეთა ოჯახი არის არათანამკვეთი, თუ ნებისმიერი ორი წევრი არის არათანამკვეთი. X სიმრავლის დაყოფა არის არაცარიელ სიმრავლეთა არათანამკვეთი P ოჯახი ისეთი, რომ

$$X = \bigcup\{Y : Y \in P\}.$$

ვთქვათ $\equiv$ არის ეკვივალენტობის მიმართება X-ზე. ყოველ $x \in X$ -თვის, ვთქვათ

$$[x] = \{y \in X : y \equiv x\}$$

(x-ის ეკვივალენტობის კლასი). სიმრავლე

$$X/_{\equiv} = \{[x] : x \in X\}$$

არის X სიმრავლის დაყოფა (ფაქტორიზაცია X-ის $\equiv$-ით). პირიქით, ყოველი P დაყოფა X სიმრავლისა განსაზღვრავს X-ზე ეკვივალენტობის მიმართებას

$$x \equiv y \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ } (\exists Y \in P)(x \in Y \text{ და } y \in Y).$$

უსასრულობა

არსებობს უსასრულო სიმრავლე.

უსასრულობის აქსიომის ზუსტი ფორმულირებისათვის, ჩვენ გვაქვს პირველად სასრულობის ცნება. სასრულობის განსაზღვრა იყენებს ნატურალური რიცხვის ცნებას, რომელიც ჯერ არ გვაქვს განსაზღვრული. ნატურალურ რიცხვს (როგორც სასრულ ორდინალს) განვსაზღვრავთ 2 თავში.

პრინციპში, შეიძლება განისაზღვროს სასრულობა რიცხვის ცნების გარეშე. მაგრამ ასეთი განსაზღვრა გამოიყურება ხელოვნურად.

უსასრულობის აქსიომას ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ განსხვავებულად

$$\exists S(\varnothing \in S \wedge (\forall x \in S) x \cup \{x\} \in S).$$

ზემოთ მოცემული თვისების მქონე სიმრავლეს ვუწოდებთ ინდუქტიურს. ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

უსასრულობის აქსიომა: არსებობს ინდუქტიური სიმრავლე.

ეს აქსიომა უზრუნველყოფს უსასრულო სიმრავლის არსებობას.

შეცვლის სქემა

თუ კლასი F კლასი არის ფუნქცია, მაშინ ყოველი X სიმრავლისათვის $F(X)$ არის სიმრავლე.

ყოველი $\varphi(x, y, p)$ ფორმულისათვის (1.7) ფორმულა არის აქსიომა (შეცვლის):

(1.7) $$\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p) \to y = z) \to$$
$$\to \forall X \exists Y \forall y(y \in Y \leftrightarrow (\exists x \in X)\varphi(x, y, p)).$$

ორდინალური რიცხვები

წრფივი და ნაწილობრივი დალაგება

განსაზღვრა 2.1. ბინარული მიმართება $<$ P სიმრავლეზე არის P-ს ნაწილობრივი დალაგება, თუ

(i) $p \not< p$ ნებისმიერი $p \in P$-სთვის;

(ii) თუ $p < q$ და $q < r$, მაშინ $p < r$.

$(P, <)$ ეწოდება ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე. P-ზე ნაწილობრივი დალაგება $<$ არის წრფივი დალაგება, თუ დამატებით (III) $p < q$ ან $p = q$ ან $q < p$ ყოველთ $p, q \in P$.

თუ $<$ არის ნაწილობრივი (წრფივი) დალაგება, მაშინ მიმართება $\leq$ (სადაც $p \leq q$ თუ $p < q$ ან $p = q$) ეწოდება აგრეთვე ნაწილობრივი (წრფივი) დალაგება (და $<$ არის მკაცრი დალაგება).

განსაზღვრა 2.2. თუ $(P, <)$ არის ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე, X არის P-ს არაცარიელი ქვესიმრავლე, და $a \in P$, მაშინ:

a არის X-ის მაქსიმალური ელემენტი, თუ $a \in X$ და $(\forall x \in X)\ a \not< x$.

a არის X-ის მინიმალური ელემენტი, თუ $a \in X$ და $(\forall x \in X)\ x \not< a$.

a არის X-ის უდიდესი ელემენტი, თუ $a \in X$ და $(\forall x \in X)\ x \leq a$;

a არის X-ის უმცირესი ელემენტი, თუ $a \in X$ და $(\forall x \in X)\ a \leq x$;

a არის X-ის ზედა საზღვარი, თუ $(\forall x \in X)\ x \leq a$;

a არის X-ის ქვედა საზღვარი, თუ $(\forall x \in X)\ a \leq x$;

a არის X-ის ზუსტი ზედა საზღვარი, თუ a არის X-ის ზედა საზღვრებს შორის უმცირესი;

a არის X-ის ზუსტი ქვედა საზღვარი, თუ a არის X-ის ქვედა საზღვრებს შორის უდიდესი.

X-ის ზუსტი ზედა საზღვარი (ზუსტი ქვედა საზღვარი) (თუ არსებობს) აღინიშნება sup$X$ (inf$X$). შევნიშნოთ, რომ თუ X არის წრფივად დალაგებული $<$ მიმართებით, მაშინ X-ის მაქსიმალური ელემენტი არის მისი უდიდესი ელემენტი (ანალოგიურად მინიმალური ელემენტისათვის).

თუ $(P, <)$ და $(Q, <)$ არის ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეები და $f : P \to Q$, მაშინ f არის დალაგების შემნახველი, თუ $x < y$ გამომდინარეობს $f(x) < f(y)$. თუ P და Q არიან წრფივად დალაგებულები, მაშინ დალაგების შემნახველ ფუნქციას ეწოდება აგრეთვე ზრდადი.

ურთიერთცალსახა ფუნქცია P-დან Q-ზე არის P და Q-ს იზომორფიზმი, თუ f და f^{-1} არიან რიგის შემნახველი; მაშინ $(P, <)$ არის $(Q, <)$ იზომორფული. P-ს თავის თავზე იზომორფიზმს ეწოდება $(P, <)$-ს ავტომორფიზმი.

სავსებით დალაგება

განსაზღვრა 2.3. P-სიმრავლის წრფივი დალაგება $<$ არის სავსებით დალაგება, თუ P-ს ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეს აქვს უმცირესი ელემენტი.

ლემა 2.4. თუ $(W, <)$ არის სავსებით დალაგებული სიმრავლე და $f : W \to W$ არის ზრდადი ფუნქცია, მაშინ $f(x) \geq x$ ყოველი $x \in W$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $X = \{x \in W : f(x) < x\}$ არის არაცარიელი სიმრავლე და ვთქვათ z არის X-ის უმცირესი ელემენტი. თუ $w = f(z)$, მაშინ $f(w) < w$, წინააღმდეგობა.

შედეგი 2.5. სავსებით დალაგებული სიმრავლის ნებისმიერი ავტომორფიზმი არის იგივური.

დამტკიცება. ლემა 2.4-ის ძალით $f(x) \geq x$ ყოველი x-თვის, და $f^{-1}(x) \geq x$ ყოველი x-თვის.

შედეგი 2.6. თუ ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლე W_1 და W_2 არის იზომორფული, მაშინ W_1-ის W_2-ზე იზომორფიზმი არის ერთადერთი.

თუ W არის სავსებით დალაგებული სიმრავლე და $u \in W_1$, მაშინ $\{x \in W : x < u\}$ არის W-ს საწყისი სეგმენტი (u-ით მოცემული).

ლემა 2.7. არცერთი სავსებით დალაგებული სიმრავლე არ არის თავისი საწყისი სეგმენტის იზომორფული.

დამტკიცება. თუ $ran(f) = \{x : x < u\}$, მაშინ $f(u) < u$, რაც ეწინააღმდეგება ლემა 2.4-ს.

თეორემა 2.8. თუ W_1 და W_2 არიან სავსებით დალაგებული სიმრავლეები, მაშინ შემდეგი სამი შემთხვევიდან სრულდება მხოლოდ ერთი:

(i) W_1 არის W_2-ის იზომორფული;

(ii) W_1 არის W_2-ის საწყისი სეგმენტის იზომორფული;

(iii) W_2_არის W_1-ის საწყისი სეგმენტის იზომორფული.

დამტკიცება. $u \in W_i$-თვის (i =1, 2), ვთქვათ $W_i(u)$ აღნიშნავს W_i-ს საწყის სეგმენტს განსაზღვრულს u-ით. ვთქვათ

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 : W_1(x) \text{ იზომორფულია } W_2(y)\text{-ის}\}.$$

ლემა 2.7-ით მარტივი დასანახია, რომ f არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია. თუ h არის რაიმე იზომორფიზმი $W_1(x)$ და $W_2(y)$-ს შორის, და $x' < x$, მაშინ $W_1(x')$ და $W_2(h(x'))$ არიან იზომორფული. აქედან გამომდინარეობს, რომ f არის დალაგების შემნახველი.

თუ $dom(f) = W_1$ და $ran(f) = W_2$, მაშინ (i) შემთხვევა სრულდება.

თუ $y_1 < y_2$ და $y_2 \in ran(f)$, მაშინ $y_1 \in ran(f)$. ამრიგად, თუ $ran(f) \neq W_2$ და y_0 არის უმცირესი ელემენტი $W_2 - ran(f)$-ის, გვაქვს $ran(f) = W_2(y_0)$. აუცილებლად, $dom(f) = W_1$ წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება $(x_0, y_0) \in f$, სადაც $x_0 =$ უმცირესი ელემენტი $W_1 - dom(f)$. ამრიგად (ii) სრულდება.

ანალოგიურად, თუ $dom(f) \neq W_1$, მაშინ (iii) სრულდება. ლემა 2.7-ის სამივე შემთხვევა არის ურთიერთგამომრიცხავი.

თუ W_1 და W_2 არიან იზომორფული, მაშინ ვიტყვით, რომ მათ აქვთ ერთი და იგივე რიგობრივი ტიპი. არაფორმალურად, ორდინალური რიცხვი არის სავსებით დალაგებული სიმრავლის რიგობრივი ტიპი.

ორდინალური რიცხვები

ორდინალური რიცხვების განსაზღვრის იდეა ისეთია, რომ $\alpha < \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\alpha \in \beta$ და $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

განსაზღვრა 2.9. T სიმრავლე არის ტრანზიტული, თუ T-ს ყოველი ელემენტი არის T-ს ქვესიმრავლე (ეკვივალენტურია, $\bigcup T \subset T$, ან $T \subset P(T)$).

განსაზღვრა 2.10. სიმრავლე არის ორდინალური რიცხვი (ორდინალი), თუ ის არის ტრანზიტული და სავსებით დალაგებული $\in$-ით. ორდინალებს აღვნიშნავთ პატარა ბერძნული ასოებით α, β, γ,.... ყველა ორდინალთა კლასი აღინიშნება Ord-ით.

ჩვენ განვსაზღვრავთ

$\alpha < \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\alpha \in \beta$.

ლემა 2. 11.

(i) $0 = \varnothing$ არის ორდინალი.

(ii) თუ α არის ორდინალი და $\beta \in \alpha$, მაშინ β არის ორდინალი.

(iii) თუ $\alpha \neq \beta$ არიან ორდინალები და $\alpha \subset \beta$, მაშინ $\alpha \in \beta$.

(iv) თუ α, β ორდინალები, მაშინ ან $\alpha \subset \beta$ ან $\beta \subset \alpha$.

დამტკიცება. (i) და (ii) გამოდის განსაზღვრიდან.

(iii) თუ $\alpha \subset \beta$, ვთქვათ γ არის $\beta - \alpha$ სიმრავლის უმცირესი ელემენტი. რადგან α არის ტრანზიტული, აქედან გამომდინარეობს, რომ γ-ით განსაზღვრული β-ს საწყისი სეგმენტი არის α. ამრიგად, $\alpha = \{\xi \in \beta : \xi < \gamma\} = \gamma$, და ამრიგად $\alpha \in \beta$.

(iv) ცხადია, $\alpha \cap \beta$ არის ორდინალი, $\alpha \cap \beta = \gamma$. ჩვენ გვაქვს $\gamma = \alpha$ ან $\gamma = \beta$, სხვაგვარად $\gamma \in \alpha$, და $\gamma \in \beta$ (iii)-ის გამო. მაშინ $\gamma \in \gamma$, რაც ეწინააღმდეგება ორდინალის განსაზღვრას (სახელდობრ, რომ $\in$ არის α-ს მკაცრი დალაგება).

ლემა 2.11-ის გამოყენებით მივიღებთ ორდინალური რიცხვების შესახებ შემდეგ ფაქტებს (დამტკიცება რუტინულია):

(2.1) $<$ არის წრფივი დალაგება Ord კლასის.

(2.2) ყოველი α-სთვის, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

(2.3) თუ C არის ორდინალთა არაცარიელი კლასი, მაშინ $\bigcap C$ არის ორდინალი, $\bigcap C \in C$ და $\bigcap C = \inf C$.

(2.4) თუ X არის ორდინალთა არაცარიელი სიმრავლე, მაშინ $\bigcup X$ არის ორდინალი და $\bigcup X = \sup X$.

(2.5) ყოველი α-თვის, $\alpha \cup \{\alpha\}$ არის ორდინალი და $\alpha \cup \{\alpha\} = \inf\{\beta : \beta > \alpha\}$.

ჩვენ განვსაზღვრავთ $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ (α-ს მემკვიდრე).

თეორემა 2.12. ყოველი სავსებით დალაგებული სიმრავლე არის იზომორფული ერთადერთი ორდინალური რიცხვის.

დამტკიცება. ერთადერთობა გამომდინარეობს ლემა 2.7-დან. მოცემული სავსებით დალაგებული W სიმრავლისათვის ჩვენ ვიპოვით იზომორფულ ორდინალს შემდეგნაირად: განვსაზღროთ $F(x) = \alpha$, თუ α არის x-ით განსაზღვრული W-ს საწყისი სეგმენტის იზომორფული. თუ ასეთი α არსებობს, ის არის ერთადერთი. შეცვლის აქსიომით, $F(W)$ არის სიმრავლე. ყოველი $x \in W$, ასეთი α არსებობს (წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილოთ უმცირესი x, რომლისთვისაც ასეთი α არ არსებობს). თუ γ არის უმცირესი $\gamma \notin F(W)$, მაშინ $F(W) = \gamma$ და ჩვენ გვაქვს იზომორფიზმი W-ს γ-ზე.

თუ $\alpha = \beta + 1$, მაშინ α არის მემკვიდრე ორდინალი. თუ α არ არის მემკვიდრე ორდინალი, მაშინ $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$; α-ს ეწოდება ზღვარითი ორდინალი. ჩვენ აგრეთვე განვიხილავთ 0 ზღვარით ორდინალად და განვსაზღვრავთ $\sup\varnothing = 0$.

0-გან განსხვავებული ზღვარითი ორდინალის არსებობა გამომდინარეობს უსასრულობის აქსიომიდან.

განსაზღვრა 2.13 (ნატურალური რიცხვები). ჩვენ აღვნიშნავთ უმცირეს არანულოვან ზღვარით ორდინალს ω-ით (ან N-ით). ω-ზე ნაკლებ ორდინალებს (N-ის ელემენტებს) ეწოდებათ სასრული ორდინალები, ან ნატურალური რიცხვები. სპეციალურად

$$0 = \varnothing,\ 1 = 0+1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 2+1, \text{ და ა.შ.}$$

X სიმრავლე არის სასრული, თუ არსებობს ურთიერთცალსახა გადასახვა X-სა რაიმე $n \in N$-ზე. X არის უსასრულო, თუ ის არ არის სასრული.

ჩვენ გამოვიყენებთ ასოებს m, ℓ, k, j, i ნატურალური რიცხვების აღსანიშნავად.

ინდუქცია და რეკურსია

თეორემა 2.14. (ტრანსფინიტური ინდუქცია). ვთქვათ C არის ორდინალურ რიცხვთა კლასი და დავუშვათ, რომ:

(i) $0 \in C$;

(ii) თუ $\alpha \in C$, მაშინ $\alpha + 1 \in C$;

(iii) თუ α არის არანულოვანი ზღვარითი ორდინალი და $\beta \in C$ ყოველი $\beta < \alpha$-თვის, მაშინ $\alpha \in C$.

მაშინ C არის ყველა ორდინალთა კლასი.

დამტკიცება. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვთქვათ α არის უმცირესი ორდინალი $\alpha \notin C$ და გამოვიყენოთ (i), (ii) ან (iii).

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა N სიმრავლე ეწოდება (უსასრული) მიმდევრობა (მიმდევრობა X-ში არის ფუნქცია $f : N \to X$). მიმდევრობისათვის სტანდარტული აღნიშვნა არის

$$< a_n : n < \omega > .$$

სასრული მიმდევრობა არის ისეთი s ფუნქცია, რომ $dom(s) = \{i : i < n\}$ რაიმე $n \in N$-თვის; მაშინ s არის n სიგრძის მიმდევრობა. ჩვენ აგრეთვე ვიტყვით, რომ მიმდევრობა $< a_\xi : \xi < \alpha >$ არის მისი მნიშვნელობის $< a_\xi : \xi < \alpha >$ გადანომვრა (გადართვა). თუ s არის α სიგრძის მიმდევრობა, მაშინ $s \hat{} x$ ან მარტივად sx აღნიშნავს $\alpha + 1$ სიგრძის მიმდევრობას, რომელიც აფართოებს α-ს და რომლის α ტერმი არის x.

$$s \hat{} x = sx = s \cup \{(\alpha, x)\} .$$

„ტრანსფინიტური რეკურსიით განსაზღვრა“ ჩვეულებრივ იღებს შემდეგ ფორმას: მოცემულია G ფუნქცია (ტრანსფინიტურ მიმდევრობათა კლასზე), მაშინ ყოველი θ-თვის არსებობს ერთადერთი θ-მიმდევრობა

$$< a_\alpha : \alpha < \theta >$$

ისეთი, რომ

$$a_\alpha = G(< a_\xi : \xi < \alpha >)$$

ყოველი $\alpha < \beta$.

ჩვენ მოვიყვანთ ამ თეორემის ზოგად ვერსიას ისე, რომ ჩვენ აგრეთვე შეგვიძლია ავაგოთ მიმდევრობა $< a_n : \alpha \in Ord >$.

თეორემა 2.15 (ტრანსფინიტური რეკურსია). ვთქვათ G არის ფუნქცია (V-ზე), მაშინ ქვემოთ (2.6) განსაზღვრავს ერთადერთ F ფუნქციას Ord-ზე, რომ

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha).$$

ყოველი α-თვის.

სხვა სიტყვებით, თუ $a_\alpha = F(\alpha)$, მაშინ ყოველი α-სთვის

$$a_\alpha = G(< a_\xi : \xi < \alpha >).$$

განსაზღვრა 2.17. ვთქვათ $\alpha > 0$ არის ზღვარითი ორდინალი და ვთქვათ $< a_\xi : \xi < \alpha >$ არის ორდინალთა არაკლებადი მიმდევრობა (ანუ $\xi < \eta$ გამომდინარეობს $\gamma_\xi \le \gamma_\eta$). ჩვენ განვსაზღვრავთ მიმდევრობის ზღვარს ტოლობით

$$\lim_{\xi \to \alpha} \gamma_\xi = \sup\{\gamma_\xi : \xi < \alpha\}.$$

ორდინალთა $< \gamma_\alpha : \alpha \in Ord >$ მიმდევრობა არის ნორმალური, თუ ის არის ზრდადი და უწყვეტი, ანუ, ყოველი $\lim$ it α, $\gamma_\alpha = \lim_{\xi \to \alpha} \gamma_\xi$.

არითმეტიკა ორდინალებზე

ტრანსფინიტური რეკურსიის გამოყენებით განვსაზღვრავთ შეკრებას. გამრავლებას და ახარისხებას ორდინალენზე.

განსაზღვრა 2.18. (შეკრება). ყოველი ორდინალური α რიცხვისთვის

(i) $\alpha + 0 = \alpha$,

(ii) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ ყოველი β-თვის,

(iii) $\alpha + \beta = \lim_{\xi \to \beta} (\alpha + \xi)$ ყოველი $\lim$ it $\beta > 0$.

განსაზღვრა 2.19 (გამრავლება). ყოველი ორდინალური α რიცხვისთვის

(i) $\alpha \cdot 0 = \alpha$,

(ii) $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ ყოველი β-თვის,

(iii) $\alpha \cdot \beta = \lim_{\xi \to \beta} \alpha \cdot \xi$ ყოველი $\lim$ it $\beta > 0$.

განსაზღვრა 2.20 (ახარისხება). ყოველი ორდინალური α რიცხვისთვის

(i) $\alpha^0 == 1$,

(ii) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ ყოველი β-თვის,

(iii) $\alpha^\beta = \lim_{\xi\to\beta} \alpha^\xi$ ყოველი $\lim$ it $\beta > 0$.

ოპერაციები $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ და α^β არიან ნორმალური ფუნქციები მეორე ცვლადის β. მათი თვისებები შეიძლება დამტკიცდეს ტრანსფინიტური ინდუქციით. მაგალითად, + და · არიან ასოციატიურები.

ლემა 2.21. ყოველი α, β და γ ორდინალებისათვის,

(I) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

(II) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

დამტკიცება. γ-ზე ინდუქციით.

არც + და არც · არ არიან კომუტაციური.

$$1+\omega = \omega \neq \omega+1, \quad 2\cdot\omega = \omega \neq \omega\cdot 2 = \omega+\omega.$$

კარდინალური რიცხვები

კარდინალურობა

ორ X და Y სიმრავლეს აქვს ერთიდაიგივე კარდინალურობა (კარდინალური რიცხვი, კარდინალი),

(3.1) $$|X| = |Y|,$$

თუ არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა X-ის Y-ზე.

(3.1) მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება. ჩვენ ვუშვებთ, რომ შეგვიძლია ყოველ X სიმრავლეს შევუსაბამოთ მისი კარდინალური რიცხვი $|X|$ ისე, რომ ორ სიმრავლეს შეესაბამება ერთიდაიგივე კარდინალური რიცხვი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ისინი აკმაყოფილებენ (3.1) პირობას. კარდინალური რიცხვები შეიძლება განისაზღვროს ან რეგულარულობის აქსიომის გამოყენებით ((3.1)-ით მოცემული ეკვივალენტობის კლასებით), ან ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით. ამ თავში ჩვენ განვსაზღვრავთ სავსებით დალაგებული სიმრავლეების კარდინალურ რიცხვებს; როგორც ამორჩევის აქსიომიდან გამომდინარეობს, ყოველი სიმრავლე შეიძლება სავსებით დალაგდეს, ეს განსაზღვრავს კარდინალს *ZFC*-ში.

შეგახსენებთ, რომ X სიმრავლე არის სასრული, თუ $|X| = |n|$ რაიმე $n \in N$-თვის; მაშინ ამბობენ, რომ X-ს აქვს n-ელემენტი. ცხადია, $|n| = |m|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $n = m$, და ჩვენ განვსაზღვრავთ სასრულ კარდინალს როგორც ნატურალურ რიცხვებს, ე.ი, $|n| = n$ ყოველი $n \in N$.

კარდინალური რიცხვების დალაგება განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

(3.2) $$|X| \le |Y|.$$

თუ არსებობს ურთიერთცალსახა გადასახვა X-ის Y-ში. ჩვენ აგრეთვე განვსაზღვრავთ მკაცრ დალაგებას $|X| < |Y|$, რაც ნიშნავს, რომ $|X| \le |Y|$ იმ დროს როცა $|X| \neq |Y|$. მიმართება $\le$ (3.2)-დან არის ტრანზიტული. ქვემოთ მოცემული თეორემა 3.2 აჩვენებს, რომ $\le$ არის ნაწილობრივ დალაგება და ამორჩევის აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ $\le$ დალაგება არის წრფივი – ყოველი ორი სიმრავლე სადარია ამ დალაგებაში.

უსასრულო სიმრავლეების შესასწავლად კარდინალურობის ცნება არის ცენტრალური. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ეს ცნება არ არის ტრივიალური.

თეორემა 3.1 (Cantor). ნებისმიერი X სიმრავლისათვის,

$$|X| < |P(X)|.$$

დამტკიცება. ვთქვათ f არის ფუნქციის X-დან $P(x)$-ში. სიმრავლე

$$Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

არ ეკუთვნის f-ის მნიშვნელობათა არეს: თუ $z \in X$ არის ისეთი, რომ $f(z) = Y$, მაშინ $z \in Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $z \notin Y$, წინააღმდეგობა. მაშასადამე, f არ არის ფუნქცია X-დან $P(X)$-ზე. ამრიგად $|P(X)| \neq |X|$.

ვთქვათ $f(x) = \{x\}$ არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია X-დან $P(X)$-ში და ამრიგად, $|X| \le |P(X)|$. აქედან გამოდის, რომ $|X| < P(X)$.

□

შემდეგი თეორემის თვალსაზრისით $<$ მიმართება არის კარდინალური რიცხვების ნაწილობრივი დალაგება.

თეორემა 3.2 (Gantor-Bernstein). თუ $|A| \leq |B|$ და $|B| \leq |A|$, მაშინ $|A| = |B|$.

დამტკიცება. თუ $f_1 : A \to B$ და $f_2 : B \to A$ არის ურთიერთცალსახა, მაშინ ვთქვათ $B' = f_2(B)$ და $A_1 = f_2(f_1(A))$, ჩვენ გვაქვს $A_1 \subset B' \subset A$ და $|A_1| = |A|$. ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $A_1 \subset B \subset A$ და f არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია A-დან A_1-ზე. გვინდა ვაჩვენოთ, რომ $|A| = |B|$.

(ინდუქციით) ყოველი $n \in N$ -თვის განვსაზღვრავთ:

$$A_0 = A, \quad A_{n+1} = f(A_n),$$
$$B_0 = B, \quad B_{n+1} = f(B_n).$$

ვთქვათ g არის ფუნქცია A-ზე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } x \in A_n - B_n \text{ რაიმე } n - \text{თვის}, \\ x, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში}. \end{cases}$$

მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ g არის ურთიერთცალსახა გადასახვა A სიმრავლისა B სიმრავლეზე. ამრიგად, $|A| = |B|$.

□

არითმეტიკული ოპერაციები კარდინალებზე განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

(3.3) $k + \lambda = |A \cup B|$, სადაც $|A| = k$, $|B| = \lambda$ და $A \cap B = \varnothing$,

$k \cdot \lambda = |A \times B|$, სადაც $|A| = k$, $|B| = \lambda$,

$k^{\lambda} = |A^B|$, სადაც $|A| = k$, $|B| = \lambda$.

ლემა 3.3. $|A| = k$, მაშინ $|P(A)| = 2^k$.

დამტკიცება. ყოველი $X \subset A$ -თვის, ვთქვათ χ_X არის ფუნქცია

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \in X, \\ 0, & \text{თუ } x \notin X. \end{cases} \qquad (x \in A - X).$$

გადასახვა $f : X \to \chi_X$ არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $P(A)$ და $\{0,1\}^A$ შორის.

□

ამრიგად, კანტორის თეორემა 3.1 შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

$$k < 2^k \quad \text{ყოველი } k \text{ კარდინალისათვის.}$$

მოვიყვანოთ ზოგიერთი მარტივი ფაქტი კარდინალთა არითმეტიკიდან.

(3.4) + და · არიან ასოციატიური, კომუტატიური და დისტრიბუტიული.

(3.5) $(k \cdot \lambda)^{\mu} = k^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$.

(3.6) $k^{\lambda+\mu} = k^{\lambda} \cdot k^{\mu}$.

(3.7) $(k^{\lambda})^{\mu} = k^{\lambda \cdot \mu}$.

(3.8) თუ $k \leq \lambda$, მაშინ $k^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$.

(3.9) თუ $0 < \lambda \leq \mu$, მაშინ $k^{\lambda} \leq k^{\mu}$.

(3.10) $k^0 = 1$; $1^k = 1$; $0^k = 0$, თუ $k > 0$.

(3.4)-(3.10)-ის დასამტკიცებლად საჭიროა შესაბამისი ურთიერთცალსახა ფუნქციების პოვნა.

ალეფები

α ორდინალს ეწოდება კარდინალური რიცხვი (კარდინალი), თუ $|\alpha| \neq |\beta|$ ყოველი $\beta < \alpha$-თვის. ჩვენ გამოვიყენებთ k, λ, μ, ... კარდინალური რიცხვების აღსანიშნავად.

თუ W არის სავსებით დალაგებული სიმრავლე, მაშინ არსებობს ორდინალი α ისეთი, რომ $|W| = |\alpha|$. ამრიგად, ვთქვათ

$|W| =$ უმცირესი ორდინალი ისეთი, რომ $|W| = |\alpha|$.

ცხადია, $|W|$ არის კარდინალური რიცხვი.

ყოველი ნატურალური რიცხვი არის კარდინალი (სასრული კარდინალი); თუ S არის სასრული სიმრავლე, მაშინ $|S| = n$ რაიმე n-თვის.

ორდინალი ω არის უმცირესი უსასრულო კარდინალი. შევნიშნოთ, რომ ყოველი უსასრულო კარდინალი არის ზღვარითი ორდინალი. უსასრულო ორდინალურ რიცხვებს, რომლებიც არიან კარდინალები, ეწოდებათ ალეფები.

ლემა 3.4.

(i) ყოველი α-თვის არსებობს კარდინალური რიცხვი, რომელიც მეტია α-ზე.

(ii) თუ X არის კარდინალთა სიმრავლე, მაშინ $\sup X$ არის კარდინალი.

ყოველი α-თვის, ვთქვათ α^+ არის უმცირესი კარდინალური რიცხვი, რომელიც მეტია α-ზე, α-ს მემკვიდრე კარდინალი.

დამტკიცება. (i) ნებისმიერი X სიმრავლისათვის, ვთქვათ

(3.11) $h(X) =$ უმცირესი α ისეთი, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა ფუნქცია α-დან X-ში.

არსებობს X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლის შესაძლო სავსებით დალაგებათა ერთადერთი სიმრავლე. მაშასადამე, არსებობს ორდინალთა ერთადერთი სიმრავლე, რომლსთვისაც არსებობს ურთიერთცალსახა ფუნქცია α-დან X-ში. ამრიგად $h(X)$.

თუ α არის ორდინალი, მაშინ $|\alpha| \prec |h(\alpha)|$ (3.11)-ის გამო. ეს კი ამტკიცებს (i)-ს.

(ii) ვთქვათ $\alpha = \sup X$. თუ f არის ურთიერთცალსახა გადასახვა α-დან რაიმე β-ზე, $\beta < \alpha$, ვთქვათ $k \in X$ არის ისეთი, რომ $\beta < k \leq \alpha$. მაშინ $|k| = |\{f(\xi) : \xi < k\}| \leq \beta$, წინააღმდეგობა. მაშასადამე, α არის კარდინალი.

ლემა 3.4-ის გამოყენებით ჩვენ განვსაზღვრავთ ალეფების ზრდად გადანომვრას. ჩვეულებრივ გამოვიყენებთ $\aleph_\alpha$ კარდინალური რიცხვების აღსანიშნავად, და ω_α-დალაგების ტიპების აღსანიშნავად:

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+,$$

$\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$, თუ α არის ზღვარითი ორდინალი.

სიმრავლეებს, რომელთა კარდინალურობა არის $\aleph_0$ ეწოდებათ თვლადი; სიმრავლე არის არაუმეტეს თვლადი, თუ ის არის სასრული ან თვლადი. უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც არ არის თვლადი, ეწოდება არათვლადი.

კარდინალი $\aleph_{\alpha+1}$ არის მემკვიდრე კარდინალი. კარდინალი $\aleph_\alpha$, რომლის ინდექსი α არის ზღვარითი ორდინალი, ეწოდება ზღვარითი კარდინალი.

თეორემა 3.5. $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

კოფინალურობა

ვთქვათ $\alpha > 0$ არის ზღვარითი ორდინალი. ვიტყვით, რომ ზრდადი β-მიმდევრობა $<\alpha_\xi : \xi < \beta>$, β ზღვარითი ორდინალია, არის კოფინალური α-ში, თუ $\lim_{\xi\to\beta} \alpha_\xi = \alpha$. ანალოგიურად, $A \subset \alpha$ არის კოდინალური α-ში, თუ $\sup A = \alpha$. თუ α არის უსასრულო ზღვარითი ორდინალი, α-ს კოფინალურობა არის

$cf\alpha$ = უმცირესი ზღვარითი ორდინალი β ისეთი, რომ არსებობს ზრდადი β-მიმდევრობა $<\alpha_\xi : \xi < \beta>$, რომლისთვისაც $\lim_{\xi\to\beta} \alpha_\xi = \alpha$.

ცხადია, $cf\alpha$ არის ზღვარითი ორდინალი, და $cf\alpha \le \alpha$. მაგალითად: $cf(\omega+\omega) = cf\aleph_\omega = \omega$.

ლემა 3.6. $cf(cf\alpha) = cf\alpha$.

დამტკიცება. თუ $<\alpha_\xi : \xi < \beta>$ არის კოფინალური α-ში და $<\xi(\nu) : \nu < \gamma>$ არის კოფინალური β-ში, მაშინ $<\alpha_{\xi(\nu)} : \nu < \gamma>$ არის კოფინალური α-ში.

□

უსასრულო კარდინალი $\aleph_\alpha$ არის რეგულარული, თუ $cf\omega_\alpha = \omega_\alpha$. ის არის სინგულარული, თუ $cf\omega_\alpha < \omega_\alpha$.

ლემა 3.8. ყოველი ზღვარითი ორდინალისათვის α, $cf\alpha$ არის რეგულარული კარდინალი.

დამტკიცება. მარტივი დასანახია, რომ თუ α არ არის კარდინალი, მაშინ $|\alpha|$-ს α-ზე გადასახვის გამოყენებით, შეიძლება ავაგოთ კოფინალური მიმდევრობა α-ში სიგრძით $\trianglelefteq |\alpha|$, და ამიტომ $cf\alpha < \alpha$. რადგან $cf(cf\alpha) = cf\alpha$, აქედან გამომდინარეობს, რომ $cf\alpha$ არის კარდინალი და არის რეგულარული.

□

თეორემა. თუ k არის უსასრულო კარდინალი, მაშინ $k < k^{cfk}$.

გამოთვლადი ფუნქციები

§ 1. პრიმიტიულად რეკურსიული, ნაწილობრივად რეკურსიული, ზოგადრეკურსიული ფუნქციები ჩერჩის თეზისი

ამ თავში მოცემული იქნება რეკურსიული ფუნქციის ფორმალური (ანუ მათემატიკურად ზუსტი) განსაზღვრა. ეს არის ერთერთი გზა „ალგორითმის დახმარებით“ ან „ეფექტური პროცედურის დახმარებით“ გამოთვლადი ფუნქციის არაფორმალური მათემატიკური ცნების დაზუსტების.

უხეშად რომ ვთქვათ, ფუნქციის რეკურსიული განსაზღვრა ეს არის განსაზღვრა, რომელშიც მოცემული არგუმენტებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობები უშუალოდ განისაზღვრებიან იგივე ფუნქციის „უფრო მარტივი“ არგუმენტების მნიშვნელობებით ან „უფრო მარტივი“ ფუნქციების მნიშვნელობებით. ცნება „უფრო მარტივი“ უნდა დაზუსტდეს ფორმალიზაციის არჩევით. როგორც წესი უმარტივესია ყველა კონსტანტა-ფუნქცია.

რეკურსიული განსაზღვრებები კარგადაა ცნობილი მათემატიკისათვის. მაგალითად, f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$f(0)=1,$$
$$f(1)=1,$$
$$f(x+2)=f(x)+f(x+1),$$

იძლევა ფიბონაჩის მწკრივს: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

პრიმიტიულადრეკურსიული ფუნქციები – ეს არის ყველგან განსაზღვრულ ფართე და საინტერესო კლასის მაგალითი, რომელიც შეიძლება მსგავსი ფორმალიზაციით მივიღოთ.

ვთქვათ $[\text{—}\ x\ \text{—}]$ – ისეთი გამოსახულებაა, რომ „x“-ის ნაცვლად ნებისმიერი რიცხვის ჩახმისას ის იღებს არაუმეტეს ერთი მნიშვნელობისა. მაშინ $\lambda x[\text{—}\ x\ \text{—}]$ აღნიშნავს ფუნქციას $\{<x,y>:[\text{—}\ x\ \text{—}]$ აქვს მნიშვნელობა y, როცა „x“ ინტერპრეტირებულია როგორც რიცხვი $x\}$. ეს არის ფუნქციის განსაზღვრისათვის ჩერჩის (A-Church) ლამბდა-აღნიშვნა. მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია φ_1 და φ_2, მაშინ $\lambda x[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$ არის ისეთი ψ ფუნქცია, რომ $Arg\psi = Arg\varphi_1 \cap Arg\varphi_2$ და $\psi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ ნებისმიერი $x \in Arg\psi$ -სთვის. ჩვენ ასევე გამოვიყენებთ ლამბდა-

აღნიშვნას k არგუმენტიანი ფუნქციებისათვის, რომლის დროსაც ნაცვლად λx ჩავწერთ $\lambda x_1 x_2 \cdots x_k$.

განსაზღვრა. პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი არის ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციათა უმცირესი $\mathcal{C}$ კლასი, ისეთი რომ

(I) ყველა კონსტანტა-ფუნქცია $\lambda x_1 x_2 \cdots x_k[m]$, $1 \le k$, $0 \le m$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს.

(II) წანაცვლების ფუნქცია $\lambda x[x+1]$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს.

(III) ამორჩევის ყველა ფუნქცია $\lambda x_1 \cdots x_k[x_i]$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, $1 \le i \le k$.

(IV) თუ k ცვლადის f ფუნქცია ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს და m-ცვლადის ფუნქციები $g_1, g_2, \cdots, g_k$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, მაშინ ფუნქცია $\lambda x_1 \cdots x_m \left[f(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_k(x_1, \cdots, x_m)) \right]$ $1 \le k$, m, ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს.

(V) თუ $k+1$ ცვლადის h ფუნქცია ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს და $k-1$ ცვლადის g ფუნქცია ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, მაშინ k ცვლადის ერთადერთი ფუნქცია f, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$f(0, x_2, \cdots, x_k) = g(x_2, \cdots, x_k),$$

$$f(y+1, x_2, \cdots, x_k) = h(y, f(y, x_2, \cdots, x_k), x_2, \cdots, x_k),$$

$1 \le k$, ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, ((V) პუნქტში „ნული ცვლადის ფუნქცია $\mathcal{C}$ დან“ აღნიშნავს ფიქსირებულ ნატურალურ რიცხვს).

განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ყველგან განსაზღვრული ფუნქცია f პრიმიტიულად რეკურსიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ფუნქციათა ისეთი სასრული მიმდევრობა $f_1, f_2, \cdots, f_n$, რომ $f_n = f$ და ნებისმიერი $j \le n$-სთვის $f_j \in \mathcal{C}$ (I), (II) ან (III) თვისებების ძალით, ან f_j მიიღება რაიმე f_c, $i < j$,-სგან (IV) ან (V) პუნქტების თანახმად. (ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ყველა იმ f ფუნქციათა $\mathcal{D}$ კლასი, რომელთათვისაც არსებობენ ასეთი მიმდევრობები $f_1, f_2, \cdots, f_n$. ცხადია, $\mathcal{D}$ შედის ნებისმიერ $\mathcal{C}$ კლასში, რომელსაც აქვს (I)-(V) თვისება; გარდა ამისა $\mathcal{D}$ თვითონ აქვს (I)-(V) თვისება. მაშასადამე, $\mathcal{D}$ ემთხვევა ყველა ასეთი $\mathcal{C}$ კლასის თანაკვეთას). თუ მოცემულია ასეთი მიმდევრობა f-სთვის იმის ზუსტ აღწერასთან ერთად თუ როგორ მოიცემა ყოველი $f_j, j \le n$, ფუნქცია, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია პრიმიტიულად რეკურსიული f ფუნქციის სქემა.

მაგალითად, განვიხილოთ f ფუნქცია, რომელიც მოცემულია სქემით

$f_1 = \lambda x[x]$ (III)-ით (1 – ცვლადის ფუნქცია)

$f_2 = \lambda x[x+1]$ (III)-ით (1 – ცვლადი)

$f_3 = \lambda x_1 x_2, x_3[x_2]$ (III)-ით (3 – ცვლადიანი)

$f_4 = f_2 f_3$ (IV)-ით (3 – ცვლადიანი)

f_5 აკმაყოფილებს პირობებს

$f_5(0, x_2) = f_1(x_2)$

$f_5 = (y+1, x_2) = f_4(y, f_5(y, x_2), x_2)$ (V)-ით (2 – ცვლადიანი)

$f = f_6 = f_5(f_1, f_1)$ (III)-ით (1 – ცვლადიანი).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფუნქცია f_6 არის $\lambda x[2x]$ (f_5 – არის $\lambda xy[x+y]$). ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\lambda x[2x]$ არის პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქცია.

სქემა შეიძლება ჩაიწეროს რაიმე სტანდარტული სიმბოლური ფორმით. სქემის ჩანაწერი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც განსაზღვრული f ფუნქციის ეფექტური გამოთვლისათვის ინსტრუქციათა ერთობლიობა. მაგალითად, წინა მაგალითში $f(2)$-ის გამოსათვლელად სქემა იძლევა შემდეგ გამოთვლას

$$
\begin{aligned}
f(2) &= f_6(2) = \\
&= f_5(f_1(2), f_1(2)) = \\
&= f_5(2, f_1(2)) = \\
&= f_5(2, 2) = \\
&= f_4(1, f_5(1,2), 2) = \\
&= f_4(1, f_1(0, f_5(0,2), 2), 2) = \\
&= f_4(1, f_4(0, f_1(2), 2), 2) = \\
&= f_4(1, f_4(0,2,2), 2) = \\
&= f_4(1, f_2(f_3(0,2,2)), 2) = \\
&= f_4(1, f_2(2), 2) = \\
&= f_4(1,3,2) = \\
&= f_2(f_3(1,3,2)) = \\
&= f_2(3) = \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

ამიტომ პრიმიტიულ რეკურსიული ფუნქციის ზუსტ განსაზღვრას ჩვენ განვიხილავთ, როგორც ალგორითმით გამოთვლადი ყველგან

განსაზღვრული ფუნქციის არაფორმალური ცნების კერძო შემთხვევას.

აუცილებელია ალგორითმისა და ალგორითმული ფუნქციის ცნებებს შორის განსხვავების გაკეთება. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი იმისათვის, რომ ხაზი გავუსვათ ასეთ განსხვავებებს. კერძოდ, განვსაზღვრავთ g ფუნქციას, რომლისთვისაც შეგვიძლია დავამტკიცოთ გარკვეული ალგორითმის არსებობა, მაგრამ არ ვიცით როგორ ავაგოთ კონკრეტული ალგორითმი. განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები f და g:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \pi \text{ რიცხვის ათობით გაშლაში არის ერთმანეთის}\\ \quad \text{მიმდევრობით ციფრი 5 ზუსტად } x;\\ 0 \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში;}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \pi \text{ რიცხვის ათობით გაშლაში არის ერთმანეთის}\\ \quad \text{მიმდევრობით ციფრი 5 } x-\text{ჯერ მაინც;}\\ 0 \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.}\end{cases}$$

ამჟამად არაა ცნობილი f ფუნქციის გამოთვლის ალგორითმი. მეტიც, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ასეთი ალგორითმი არ არსებობს. f ფუნქციისაგან განსხვავებით ვიცით, რომ g პრიმიტიულად რეკურსიულია. მართლაც g უნდა იყოს მუდმივი 1 ან მოიძებნება ისეთი k, რომ

$$g(x)=1, \qquad x\le k\text{-თვის;}$$

$$g(x)=0, \qquad k<x\text{-თვის.}$$

ორივე შემთხვევაში არსებობს პრიმიტიულად რეკურსიული სქემა, მაგრამ ამჟამად არავინ არ იცის, როგორ გამოვავლინოთ სწორი სქემა.

უფრო მარტივი მაგალითის ასაგებად განვიხილოთ პრობლემა, რომელიც არ არის მათემატიკოსების მიერ გადაწყვეტილი, მაგალითად გოლდბახის პრობლემა იმის შესახებ. რომ ორზე მეტი ყოველი ლუწი რიცხვი არის ორი მარტივი რიცხვის ჯამი და განვსაზღვროთ ფუნქცია h ასე:

$$h(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ პრობლემა წყდება დადებითად,}\\ 0, \text{ თუ პრობლემა წყდება უარყოფითად.}\end{cases}$$

ცხადია, რომ h-ი მუდმივია. მასასადამე, ის პრიმიტიულად რეკურსიულია, თუმცა არ ვიცით, როგორ ავაგოთ სწორი სქერა.

განვიხილოთ **სასრული მექანიკური მოწყობილობა**, რომელიც დაკავშირებულია (ორსავე მხარეს) ქაღალდის უსასრულო ლენ-

ტასთან. ლენტა მთელ სიგრძეზე დაყოფილია ტოლი ზომის უჯრებად. ამ უჯრებს ვუწოდებთ ყუთებს.

მოწყობილობა ისეთია, რომ ლენტას შეუძლია მასში მოძრაობა, ამასთან ზუსტად ერთი ყუთი იმყოფება შიგნით. მოწყობილობის შიგნით მყოფ ყუთის შესახებ ვიტყვით, რომ ის არის განსახილველი ყუთი. ლენტის გასწვრივ მიმართულებებს ვუწოდებთ შესაბამისად მარცხენას და მარჯვენას. მოწყობილობას შეუძლია შეასრულოს შემდეგი ოთხი ოპერაციიდან ერთი: (1) მას შეუძლია ჩაწეროს „1“ განსახილველ ყუთში, თუ მასში უკვე არაა ჩაწერილი „1“; (2) მას შეუძლია წაშალოს განსახილველ ყუთში ჩაწერილი და ეს ყუთი აქციოს ცარიელ ყუთად, თუ ის უკვე არ იყო ცარიელი; (3) მას შეუძლია თავისი ყურადღება გადაიტანოს ერთი ყუთით მარჯვნივ (ლენტა გასწიოს ერთი ყუთით მარცხნივ); (4) მას შეუძლია თავისი ყურადღება გადაიტანოს ერთი ყუთით მარცხნივ (ლენტა გასწიოს ერთი ყუთით მარჯვნივ). მოწყობილობა აქტიურ მდგომარეობაში აწარმოებს ძირითად ოპერაციებს სიჩქარით ერთი ოპერაციისა დროის ერთეულში. ზოგჯერ იმ შემთხვევაში, როცა მოწყობილობამ შეასრულა ერთი ოპერაცია, ჩვენ ვიტყვით, რომ შესრულებულია მოწყობილობის მუშაობის ნაბიჯი. ყოველი ნაბიჯის დასრულებისას მოწყობილობას აქვს შესაძლო შინაგანი (მექანიკური) სტრუქტურების ფიქსირებული სასრული სიმრავლიდან ერთ-ერთი. ასეთ სტრუქტურებს ჩვენ ვუწოდებთ შინაგან მდგომარეობებს. სხვადასხვა შინაგანი მდგომარეობის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ სიმბოლოებს q_i, $i = 0,1,2,\cdots$. ბოლოს, მოწყობილობა აგებულია ისე, რომ მისი ქცევა აღიწერება დეტერმინირებული წესების სასრული სიით. ეს წესები განსაზღვრავენ მიმდინარე შინაგანი მდგომარეობათა და განსახილველი ყუთის ჩანაწერით, შემდეგში როგორი ოპერაცია წარმოებს და როგორი უნდა იყოს შემდეგი შინაგანი მდგომარეობა (ამ შემდგომი ოპერაციის ბოლოს).

ვთქვათ 1 და *B* აღნიშნავენ შესაძლო ჩანაწერებს ნებისმიერი ყუთში (*B* შეესაბამება ცარიელ ყუთს). ვთქვათ, 1, *B*, *R* და *L* აღნიშნავენ შესაბამისად ძირითად ოპერაციებს (1), (2), (3) და (4). მაშინ წესების ერთობლიობა, რომლებიც განსაზღვრავენ მოწყობილობის ქცევას, შეიძლება ჩაიწეროს ოთხეულთა ერთობლიობის სახით. ყოველი ოთხეული (რიგის მიხედვით) შედგება შემდეგი სახის სიმბოლოებისაგან: (I) შინაგანი მდგომარეობის, (II) ყუთში შესაძლო ჩანაწერის, (III) ოპერაციის, (IV) შინაგანი მდგომარეობის. ოთხეული (I, II, III, IV) გამოხატავს ასეთ წესს: (I) და (II)-ს არსებობისას მოწყობილობა აწარმოებს (III) ოპერაციას და

გადადის (IV)-ში. ვიგულისხმებთ, რომ ასეთი ოთხეულის ნებისმიერი ერთობლიობა არის წესების ერთობლიობა რაღაც მოწყობილობისათვის; ვითხოვთ მხოლოდ ერთადერთ შეზღუდვას, რომ ნებისმიერი ორი განსხვავებული ერთობლიობა უნდა განსხვავდებოდეს (I)-ში ან (II)-ში. ამ შეზღუდვას ვუწოდოთ თავსებადობის პირობა; ამ პირობებში წესების ერთობლიობას არ შეუძლია ორი ან მეტი სხვადასხვა მოქმედების მოთხოვნა ერთსა და იმავე დროს. ამასთანავე ჩვენ არ ვიგულისხმებთ, რომ წესების ერთობლიობაში გათვალისწინებულია (I) და (II)-ის ნებისმიერი კომბინაცია; ამნაირად, ჩვენ ვუშვებთ, რომ გარკვეული გარემოების დროს მოწყობილობას არ შეუძლია შეასრულოს არავითარი ოპერაცია. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მოწყობილობა გაჩერდა.

მაგალითისათვის განვიხილოთ მოწყობილობა q_0 და q_2 შინაგანი მდგომარეობით და რომლის ქცევა განისაზღვრება ორი ოთხეულით $q_0 1 B q_2$ და $q_2 B R q_0$. თუ ასეთი მოწყობილობა მიიღებს ლენტას ერთმანეთის მიმდევრობით მდგომი ერთიანების სასრული მიმდევრობით და დაიწყებს მუშაობას q_0 მდგომარეობაში ამ მიმდევრობის ყველაზე მარცხენა ყუთზე, ის წაშლის ყველა ერთიანს და გაჩერდება. თუ ასეთი მოწყობილობა დაიწყებს მუშაობას ლენტაზე, რომელიც სულ ერთიანებითაა შევსებული, მაშინ ის არასდროს არ გაჩერდება.

ზემოთ აღწერილი ზოგადი სახის მოწყობილობას ეწოდება ტიურინგის მანქანა.

ტიურინგის მანქანა ადვილად განისაზღვრება საყოველთაოდ მიღებულ მათემატიკურ ენაზე. ვთქვათ $T = \{0,1\}$ და $S = \{0,1,2,3\}$. მაშინ ტიურინგის მანქანა შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც გადასახვა $N \times T$ სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლისა $S \times N$-ში. (N-ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა $N = \{0,1,2,\cdots\}$. აქ T წარმოადგენს ყუთში ჩანაწერს, S – ოპერაციებს, რომლებიც უნდა შესრულდეს, ხოლო N იძლევა შინაგანი მდგომარეობების შესაძლო ნომრებს.

ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n,y)$ – ფუნქციაა (არაა აუცილებელი, რომ ის იყოს ყველგან განსაზღვრული) და გვინდა განვსაზღვროთ $g(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქცია.

$g(x_1,\cdots,x_n) =$ უმცირესი y ისეთი, რომ $f(x_1,\cdots,x_n,y) = 0$, ისე, რომ f ფუნქციის გამოთვლადობიდან გამომდინარეობს g-ს გამოთვლადობა. აქ უნდა გადავწყვიტოთ ორი საკითხი. პირველი, ზოგიერთი $x_1,\cdots,x_n$-სთვის შეიძლება არ არსებობდეს y, რომლის-

თვისაც $f(x_1,\cdots,x_n,y)=0$. მეორე, დავუშვათ, რომ f გამოთვლადია და განვიხილოთ $g(x_1,\cdots,x_n)$-ის გამოთვლის შემდეგი ბუნებრივი ალგორითმი. „გამოვთვალოთ $f(x_1,\cdots,x_n,0)$, $f(x_1,\cdots,x_n,1),\cdots$ მანამ, სანამ არ ვიპოვით ისეთ y-ს, რომ $f(x_1,\cdots,x_n,y)=0$“. ეს პროცედურა შეიძლება არ დასრულდეს, თუ f არაა ყველგან განსაზღვრული, მაშინაც კი, როცა ასეთი y არსებობს; მაგალითად $f(x_1,\cdots,x_n,0)$ არაა განსაზღვრული და $f(x_1,\cdots,x_n,1)=0$.

ამგვარად, ჩვენ მივდივართ მინიმიზაციის μ-ოპერატორის შემდეგ განსაზღვრამდე, რომელიც გამოთვლადი ფუნქციიდან იძლევა გამოთვლად ფუნქციას.

განსაზღვრა. ყოველი $f(x_1,\cdots,x_n,y)$ ფუნქციისათვის

$$\mu y(f(x_1,\cdots,x_n,y)=0)=\begin{cases}\text{უმცირესი } y \text{ ისეთი, რომ}\\ \text{(I) } f(x_1,\cdots,x_n,z) \text{ განსაზღვრულია ყველა}\\ \quad z\le y \quad \text{და}\\ \text{(II) } f(x_1,\cdots,x_n,y)=0, \text{ თუ ასეთი}\\ \quad \text{არსებობს.}\\ \text{არაა განსაზღვრული წინააღმდეგ}\\ \text{შემთხვევაში.}\end{cases}$$

$\mu y(\cdots)$ იკითხება როგორც „უმცირესი y ისეთი, რომ...“ ამ ოპერატორს ზოგჯერ უწოდებენ μ ოპერატორს.

განსაზღვრა. ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი ეწოდება უმცირეს კლასს, რომელიც შეიცავს ფუნქციებს $\lambda x[m]$, $\lambda x[x+1]$, $\lambda x_1,\cdots,x_k[x_i]$, $1\le i\le k$ და ჩაკეტილია ჩასმის ოპერაციის მიმართ (იხ. პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასის განსაზღვრის (IV) პუნქტი), პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციის მიმართ (იხ. პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასის განსაზღვრის (V) პუნქტი) და მინიმიზაციის ოპერაციის მიმართ.

განსაზღვრა. ყველგან განსაზღვრულ ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციას ეწოდება ზოგადრეკურსიული ფუნქციას.

ჩერჩის თეზისი. ალგორითმულად გამოთვლად ნაწილობრივ რიცხვით ფუნქციათა კლასი ემთხვევა ყველა ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს.

გედელის ნომრები, უნივერსალურობა, $s-m-n$ თეორემა

წინა პარაგრაფიდან ჩანს, რომ ინსტრუქციათა ერთობლიობა ეს არის ოთხეულთა ერთობლიობა, რომელიც აკმაყოფილებს თავსებადობის პირობას. ყველა პრიმიტიულად რეკურსიული სქემის გადათვლის ანალოგიურად შეიძლება მოვახდინოთ ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობის გადათვლის პროცესი. ეს პროცესი ალგორითმულია (ამ სიტყვის არაფორმალური აზრით). არსებობენ პროცედურები, რომლებიც ყოველ x-ს უსაბამებენ ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობის გადათვლაში $(x+1)$ ადგილზე მყოფ ინსტრუქციათა ერთობლიობას. დავუშვათ, რომ ჩვენ ამოვირჩიეთ ერთი ასეთი გადამთვლელი პროცედურა.

განსაზღვრა. P_x – ეს არის ინსტრუქციათა ერთობლიობა, რომელიც შეესაბამება x – რიცხვს ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობის ფიქსირებულ გადათვლაში. x-ს ეწოდება P_x ერთობლიობის ინდექსი ან გედელის ნომერი.

ვთქვათ $\varphi_x^{(k)}$ – არის k ცვლადის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია P_x ერთობლიობით. x-ს ეწოდება $\varphi_x^{(k)}$ ნაწილობრივი ფუნქციის ინდექსი ან გედელის ნომერი.

ცხადია, რომ გადათვლის პროცესი იძლევა როგორც (a) ნების-მიერი x-დან შესაბამის P_x-ზე გადასვლის ალგორითმს, ასევე (b) ნებისმიერი თავსებადი ოთხეულთა ერთობლიობიდან P ისეთ x-რიცხვზე გადასვლის ალგორითმს, რომ P არის შესაბამისი P_x.

თეორემა 1. არსებობს ზუსტად $\aleph_0$ (თვლადი რაოდენობა) ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციებისა და ზუსტად $\aleph_0$ რაოდენობა ზოგადრეკურსიული ფუნქციებისა.

დამტკიცება. ჩერჩის თეზისის თანახმად ყველა კონსტანტა-ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია. მაშასადამე, არსებობს $\aleph_0$ რაოდენობა მაინც ზოგადრეკურსიული ფუნქციებისა. გედელის ნუმერაცია გვიჩვენებს, რომ არსებობს არაუმეტეს $\aleph_0$ რაოდენობა ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციებისა.

თეორემა 2. არსებობენ არარეკურსიული ფუნქციები.

დამტკიცება. კანტორის ცნობილი თეორემის თანახმად არსებობს $2^{\aleph_0}$ ფუნქცია.

თეორემა 3. ყოველ ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციას აქვს $\aleph_0$ განსხვავებული ნომერი.

დამტკიცება. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\aleph_0$ ნომერი მაინც. ვთქვათ მოცემულია ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია φ_{x_0}. ვთქვათ m ისეთი რიცხვია, რომელიც მეტია ვიდრე P_{x_0}-ში შემავალი შინაგანი მდგომარეობის რიცხვითი ინდექსები. P_{x_0}-სთვის ამ ჩანაწერში 1-იანი ჩანს, როგორც ზედა ინდექსი. სინამდვილეში კი უნდა იყოს q-ს გვერდით. მაგალითად, $q_m^{11}q_m$ $q_m^{11}q_m, q_{m+1}^{11}q_{m+1}, \cdots$ $\cdots, q_{m+k}^{11}q_{m+k}$ ოთხეულების დამატებით შესაბამისი ნაწილობრივი ფუნქცია არ იცვლება, რადგან გამოთვლის პროცესში არ შეიძლება გამოჩნდეს არც $q_m, \cdots$, არც q_{m+k}. k-ს ცვლილებით მივიღებთ φ_{x_0} ფუნქციის ინსტრუქციათა ერთობლიობისათვის $\aleph_0$ განსხვავებულ ნომერს.

აღვნიშნოთ, რომ შემდეგი ტექსტი, საზოგადოდ, განსაზღვრავს არაფორმალურად ალგორითმს გარკვეულ ψ ფუნქციისათვის: მივიღებთ შესასვლელს $<x, y>$, იპოვეთ P_x (აწარმოეთ სტანდარტული ეფექტური გადათვლა ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობების, სანამ არ მივიღებთ P_x), შემდეგ გამოიყენეთ $P_x(y)$ შესასვლელზე იმისათვის, რომ გამოთვალით $\varphi_x(y)$; როცა $\varphi_x(y)$ მოგცემთ გამოსასვლელს (თუ ეს მოხდება), აიღეთ ის როგორც გამოსასვლელი $\psi(x,y)$-სთვის.

გვაქვს:

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\varphi_x(y), \text{ თუ } \varphi_x(y) \text{ განსაზღვრულია;}\\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(y) \text{ განუსაზღვრელია.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად მივიღებთ, რომ ψ არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია და რომ გარკვეული x_1-სთვის $\psi=\varphi_{x_1}^{(2)}$. მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 4. არსებობს ისეთი z, რომ ნებისმიერი x და y-სთვის $\varphi_z(x,y)=\varphi_x(y)$, თუ $\varphi_x(y)$ განსაზღვრულია, და $\varphi_z(x,y)$ არაა განსაზღვრული, თუ $\varphi_x(y)$ არაა განსაზღვრული.

$\varphi_z^{(2)}$ ფუნქციას თეორემა 4-დან ეწოდება **უნივერსალური ფუნქცია** ერთცვლადიანი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციე-

ბისათვის. P_z-ეს არის ტიურინგის მანქანა, რომელიც შეიძლება გამოვიყენოთ იმისათვის, რომ მოვახდინოთ ნებისმიერი ერთცვლადიანი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის დუბლირება. P_z-ს ვუწოდოთ უნივერსალური მანქანა.

თეორემა 5. ნებისმიერი $m,\ n\geq 1$ არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია s_n^m $m+1$ ცვლადის ისეთი, რომ ყოველი $x, y_1, \cdots, y_m$

$$\lambda z_1 \cdots z_n \left[\varphi_x^{(m+n)}(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n)\right] = \varphi^{(n)}_{S_n^m(x, y_1, \cdots, y_m)}.$$

თეორემა 5 ცნობილია $s-m-n$ თეორემა და ეკუთვნის კლინის.

ბაჩერების პრობლემა

არსებობს თუ არა ეფექტური პროცედურა იმის დასადგენად განსაზღვრულია თუ არა $\varphi_x(y)$ მოცემული x და y-სთვის ანუ იძლევა თუ არა გამოსავალს P_x ერთობლიობა y შესავალზე გამოყენებისას? ჩერჩის თეზისის თანახმად ამ კითხვას მივცეთ მისი ექვივალენტური და ზუსტი ფორმა. არსებობს თუ არა ისეთი რეკურსიული ფუნქცია g, რომ $g(x,y)=1$, თუ $\varphi_x(y)$ განსაზღვრულია $g(x,y)=0$, თუ $\varphi_x(y)$ არაა განსაზღვრული? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6. არ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია g, რომ ნებისმიერი x, y

$$g(x,y)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(y) \text{ განსაზღვრულია;}\\ 0, \text{ თუ } \varphi_x(y) \text{ არაა განსაზღვრული.}\end{cases}$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ψ შემდეგნაირად:

$$\psi(z,x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_z^{(2)}(x,x)=0;\\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_z^{(2)}(x,x)\neq 0 \text{ ან}\\ \qquad\qquad \varphi_z^{(2)}(x,x) \text{ განუსაზღვრელია.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია. თეორემა 5-ის თანახმად z-ით ეფექტურად ვიპოვოთ $\lambda x[\psi(x,z)]$ ფუნქციის გედელის ნომერს, ანუ არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია h ისეთი, რომ ნებისმიერი z-სთვის $\varphi_{h(z)}=\lambda x[\psi(z,x)]$. ($h$-ის

როლში შეიძლება ავიღოთ $\lambda z[s_1^1(w_1, z)]$, სადაც w_1-არის ψ-ს გედელის ნომერი).

დავუშვათ, რომ $g = \varphi_{z_0}$ რაიმე z_0-სთვის. h-ის განსაზღვრის თანახმად, $\varphi_{h(z_0)}(x)$ განსაზღვრულია $\Leftrightarrow \varphi_{z_0}(x, x) = 0$. x-ის ნაცვლად $h(z_0)$-ის ჩასმით გვაქვს

$$\varphi_{h(z_0)}(h(z_0)) \text{ განსაზღვრულია} \Leftrightarrow \varphi_{z_0}(h(z_0), h(z_0) = 0.$$

მაგრამ მაშინ φ_{z_0} არ შეიძლება ემთხვეოდეს g-ს, რადგან $< h(z_0), h(z_0) >$ შესასვლელისათვის φ_{z_0} ფუნქცია ან არაა განსაზღვრული ან იძლევა მცდარ ინფორმაციას.

შედეგი. არ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ 0, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.} \end{cases}$$

დამტკიცება გამომდინარეობს თეორემის დამტკიცებიდან.

ჩვენს საწყის პრობლემას (რომელიც ჩამოყალიბებულია ამ პარაგრაფის პირველ აბზაცში) ეწოდება გაჩერების პრობლემა, სადაც სიტყვა „გაჩერება“ აღნიშნავს „გამოსასვლელის არსებობას“. თეორემა 6-ში დადგენილი ფაქტი ცნობილია, გაჩერების პრობლემის რეკურსულად ამოუხსნადობის სახელით.

თეორემა 7. არ არსებობს ეფექტური პროცედურა ნებისმიერი x-სთვის φ_x ფუნქცია ყველგან არის თუ არა განსაზღვრული. სხვა სიტყვებით, არ არსებობს ზოგადრეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \varphi_x \text{ ყველგან განსაზღვრულია;} \\ 0, \text{ თუ } \varphi_x \text{ არაა ყველგან განსაზღვრული.} \end{cases}$$

დამტკიცება. მოვიყვანთ არაფორმალურ დამტკიცებას. დავუშვათ, რომ ასეთი f ფუნქცია არსებობს. მაშინ განვსაზღვრით g ფუნქცია ასე:

$$g(0) = \mu y[f(y) = 1],$$
$$g(x+1) = \mu y[y > g(x) \,\&\, f(y) = 1].$$

რადგან $f(y) = 1$ უსასრულოდ ბევრი y-სთვის (იხ. თეორემა 1), ამიტომ g ყველგან განსაზღვრულია. ჩერჩის თეზისის თანახმად g ზოგადრეკურსიულია. განვსაზღვროთ h შემდეგნაირად:

$$h = \lambda x[\varphi_{g(x)}(x)+1].$$

f ფუნქციაზე დაშვების გამო h ფუნქცია ყველგან განსაზღვრულია. ჩერჩის თეზისის ძალით h ზოგადრეკურსიულია. ვთქვათ $h=\varphi_{z_0}$. g-ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, $g^{-1}(z_0)$ განისაზღვრება ცალსახად, აღვნიშნოთ ის y_0-ით. მაშინ $h(y_0)=\varphi_{g(y_0)}(y_0)+1$, h ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, მაგრამ $h(y_0)=\varphi_{g(y_0)}(y_0)$ y_0-ის განსაზღვრის გამო. რადგან h ყველგან განსაზღვრულია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

რეკურსიულობა

თეორემა 8. ვთქვათ f არის $k+1$ ცვლადი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია, მაშინ $\lambda x_1\cdots x_k[\mu y[f(x_1,\cdots,x_k,y)=1]]$ არის k ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია.

დამტკიცება. ის გამომდინარეობს ჩერჩის თეზისიდან. დავუშვათ

$$\psi = \lambda x_1\cdots x_k[\mu y[f(x_1,\cdots,x_k,y)=1]].$$

მაშინ იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x_1,\cdots,x_k)$ საჭიროა მიმდევრობით გამოვთვალოთ

$$f(x_1,\cdots,x_k,0),\ f(x_1,\cdots,x_k,1),\ f(x_1,\cdots,x_k,2),\cdots$$

როგორც კი მოიძებნება ისეთი y, რომ $f(x_1,\cdots,x_k,y)=1$ (თუ ეს მოხდება), მას ავიღებთ ψ-ს მნიშვნელობად. f-ის გამოთვლები ყოველთვის განსაზღვრულია რადგან f-ი ზოგადრეკურსიულია.

თეორემა 8-ს უწოდებენ μ-თეორემას. შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა არაა სამართლიანი თუ f-ს შევცვლით $k+1$ ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციით.

თეორემა 9. არსებობს კონკრეტული ზოგადრეკურსიული ფუნქციები ერთი ცვლადის ფუნქცია p და სამი ცვლადის ფუნქცია t ისეთი, რომ ნებისმიერი z-სთვის.

$$\varphi_z = \lambda x[p(\mu y[t(z,x,y)=1])].$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ s-ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$s(z,x,y,w)=\begin{cases}1, \text{ თუ } P_z \text{ } x \text{ შესასვლელზე იძლევა } y \text{ გამოსასვლელს}\\ \qquad \text{არა უმეტეს } w \text{ ნაბიჯის შემდეგ;}\\ 0, \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად *s*-ზოგადრეკურსიულია. განვსაზღვროთ p და q ასე:

$p = \lambda x[x+1$-ის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 3-ის მაჩვენებელი$]$,

$q = \lambda x[x+1$-ის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-ის მაჩვენებელი$]$.

დავუშვათ

$$t = \lambda zxy\big[s(z, x, p(y), q(y))\big].$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად, p, q და, მაშასადამე, t- ზოგადრეკურსული ფუნქციებია. თეორემა გამომდინარეობს s, p, q და t ფუნქციების განსაზღვრიდან.

თეორემა 9-ს ეწოდება **კლინის თეორემა ნორმალური ფორმის** შესახებ.

შედეგი. არსებობენ ისეთი ზოგადრეკურსიული p და t_k ფუნქციები, რომ ნებისმიერი z-სთვის

$$\varphi_z^{(k)} = \lambda x_1 \cdots x_k\big[p(\mu[t_k(z, x_1, \cdots, x_k y) = 1])\big].$$

დამტკიცება. თეორემა 9 დამტკიცების ანალოგიურია.

ამოუხსნადი პრობლემების მაგალითები

თეორემა 6, მისი შედეგი და თეორემა 7 იძლევიან რეკურსიულად ამოუხსნადობის მაგალითებს. ყოველი მათგანი დაკავშირებულია „პრობლემასთან“, რომელიც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ, როგორც რაიმე სიმრავლის ელემენტთა ეფექტური გამოცნობის პრობლემა. მაგალითად თეორემა 6-ის შედეგისათვის ასეთი სიმრავლე იქნება $\{x : \varphi_x(x) -$ განსაზღვრულია$\}$. ყოველი ამ სამი შედეგიდან გვიჩვენებს, რომ შესაბამის სიმრავლეს არ აქვს რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია. ჩვენ ამ შედეგებს გავაერთიანებთ და ვიტყვით, რომ მოცემული პრობლემები რეკურსიულად ამოუხსნადია.

განვიხილოთ შემდეგი პრობლემები:

(a) ნებისმიერი x-სთვის განისაზღვროს არის თუ არა φ_x ფუნქცია მუდმივი ფუნქცია.

(b) ნებისმიერი x და y-სთვის განისაზღვროს ეკუთვნის თუ არა y φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

(c) ნებისმიერი x, y და z-სთვის განისაზღვროს სრულდება თუ არა $\varphi_x(y) = z$.

(d) ნებისმიერი x და y-სთვის განისაზღვროს სრულდება თუ არა $\varphi_x = \varphi_y$.

(e) ნებისმიერი x-სთვის განისაზღვროს უსასრულოა თუ არა φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

(f) ფიქსირებული y_0-სთვის ნებისმიერი x-სთვის განისაზღვროს ეკუთვნის თუ არა y_0 φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა არე.

(g) ფიქსირებული x_0-სთვის ნებისმიერი y-სთვის განისაზღვროს ეკუთვნის თუ არა y φ_{x_0} ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს.

თეორემა I. პრობლემები (a), (b), (c), (d) და (e) რეკურსიულად ამოუხსნადია. y_0-ის ნებისმიერი არჩევის დროს (f) პრობლემა ამოუხსნადია. პრობლემა (g) შეიძლება იყოს ამოხსნადიც და ამოუხსნადიც, ეს დამოკიდებულია x_0-ის შერჩევაზე.

დამტკიცება. (a) ვთქვათ g – არის $\{x : \varphi_x$ არის მუდმივი ფუნქცია$\}$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია. ($C_A(x)$ ფუნქციას ეწოდება A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია, თუ $C_A(x) = 1$, როცა $x \in A$, და $C_A(x) = 0$ როცა $x \notin A$). ვაჩვენოთ, რომ g არაა რეკურსიული.

განვსაზღვროთ ორი ცვლადის ψ ფუნქცია შემდეგნაირად: <x, y> შესასვლელის მიღებისას ვიპოვოთ P_x და გამოვიყენოთ P_x P_x-ის შესასვლელისთვის; როცა პროცესი დამთავრდება (თუ ეს მოხდა) გამოსასვლელად მივიღოთ 0. ჩერჩის თეზისის თანახმად ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია. ცხადია, რომ ψ აკმაყოფილებს ასეთ პირობას:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{არაა განსაზღვრული, თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.} \end{cases}$$

s-m-n თეორემის თანახმად არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია h_1 ისეთი, რომ $\lambda y[\psi(x, y)] = \varphi_{h_1(x)}$ (h_1 არის ფუნქცია $\lambda x[s_1^1(z_0 x)]$, სადაც z_0 არის ψ-ს ნომერი). მაშ, ასე,

$$\varphi_{h_1(x)}(y) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{არაა განსაზღვრული, თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.} \end{cases}$$

მაშასადამე $\varphi_{h_1(x)}$ – მუდმივი ფუნქციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია.

თუ g ფუნქცია რეკურსიულია, მაშინ $gh_1 (= \lambda x[g(h_1(x))])$ ზოგადრეკურსიულია და

$$gh_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ 0, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.} \end{cases}$$

მაგრამ gh_1 იქნება $\{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია, რაც ეწინააღმდეგება თეორემა 6-ის შედეგს. ამიტომ g არ შეიძლება იყოს რეკურსიული.

(b) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია მიმართების $\{< x, y >: y$ ეკუთვნის φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს$\}$. ვთქვათ h_1-ზოგადრეკურსიული ფუნქციაა (a) პუნქტის დამტკიცებიდან. თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_1(x),0)]$ იქნება რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია $\{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლისათვის, რაც არ შეიძლება.

(c) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია მიმართების $\{< x, y, z >: \varphi_z(y) = z\}$. თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_1(x),0,0)]$ იქნება რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია $\{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლისათვის, რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას (აქ h_1 კვლავ (a) პუნქტიდანაა აღებული).

(d) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია მიმართების $\{< x, y >: \varphi_x = \varphi_y\}$, ავიღოთ $\lambda x[0]$ ფუნქციის რაიმე y_0 ნომერი, მაშინ $\lambda x[f(h_1(x), y_0)]$ იქნება რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია $\{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ – სიმრავლისათვის, სადაც h_1-კვლავ (a) პუნქტის დამტკიცებიდანაა.

(e) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია, სიმრავლის $\{x : \varphi_x$-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე უსასრულოა$\}$. (a) პუნქტის დამტკიცების მეთოდის ანალოგიურად განვსაზღვროთ ზოგადრეკურსიული h_2 ფუნქცია ისე, რომ

$$\varphi_{h_2(x)}(y) = \begin{cases} y, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.} \end{cases}$$

თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_2(x))]$ იქნება $\{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლის რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია.

(f) ვთქვათ მოცემულია y_0 და ვთქვათ f არის $\{x : y_0$ ეკუთვნის φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე$\}$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციაა. მაშინ თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_2(x))]$ იქნება $\{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლის ზოგადრეკურსიული

მახასიათებელი ფუნქცია, სადაც h_2 არის (e)-ს დამტკიცებაში განსაზღვრული ზოგადრეკურსიული ფუნქცია.

(g) შევარჩიოთ x_0 ისე, რომ φ_{x_0} იყოს იგივური ფუნქცია ანუ $\varphi_{x_0}(y) = y$ ნებისმიერი y-სთვის. მაშინ $\{y : y$ ეკუთვნის φ_{x_0} ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს$\}$ სიმრავლისათვის რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქციის როლში შეიძლება ავიღოთ ფუნქცია $\lambda x[1]$.

ამოუხსნადი პრობლემები მათემატიკის სხვადასხვა დარგში

მთელი რიგი კლასიკური მათემატიკური ამოცანებისა ეხება გარკვეული „პრობლემების“ ამოხსნადობის ალგორითმის არსებობის საკითხს. კოდირების დახმარებით ეს საკითხები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ, როგორც საკითხები რეკურსიული ფუნქციების არსებობის შესახებ. ამ უკანასკნელში უფრო ზუსტი ფორმით მთელმა რიგმა ასეთი საკითხებისა მიიღო უარყოფითი ამოხსნა.

ასეთი სახის პირველი შედეგები მათემატიკურ ლოგიკაში აღმოჩენილი იყო გედელის, ჩერჩის და ტიურინგის შრომებში. გედელისა და ჩერჩის შედეგები ეხებოდნენ კონკრეტულ ფორმალურ ლოგიკურ სისტემებში დამტკიცებადი ფორმულების განსაზღვრის ალგორითმის არსებობას.

ამოუხსნადობის შესახებ შედეგები მიღებული იყო რიცხვთა თეორიაში და ალგებრაში. განვიხილოთ პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით და ნებისმიერი რაოდენობა ცვლადებით. განვიხილოთ პრობლემა იმის განსაზღვრისა, რომ ნებისმიერ ასეთ პოლინომს აქვს თუ არა ნამდვილი ამონახსენი ($< r_1, \cdots, r_k >$ არის $p(x_1, \cdots, x_k)$ პოლინომის ამონახსენი, თუ $p(r_1, \cdots, r_k) = 0$). ეს პრობლემა ამოხსნადია. ანალიზის ცნობილი მეთოდები იძლევიან ამ პრობლემის ამოხსნის ალგორითმს. არსებობს თუ არა ალგორითმი, რომელიც გაარკვევს ნებისმიერი ასეთი პოლინომისათვის, აქვს თუ არა მას ამონახსენი რაციონალურ რიცხვებში („დიოფანტეს ფესვები“)? ამ საკითხთან დაკავშირებული „პრობლემა“ ცნობილია ჰილბეტრის მეათე პრობლემის სახელით. მატიასევიჩმა აჩვენა, რომ ჰილბერტის ეს პრობლემა არის რეკურსიულად ამოუხსნადი.

ჯგუფთა თეორია იძლევა ამოუხსნადობის მაგალითს ალგებრაში. ჯგუფის ჩანაწერი ეს არის ჯგუფის განმსაზღვრელი წარმომქმნელების და დამოკიდებულებების სასრული სია (ჩვენ აქ არ განვსაზღვრავთ ამ ტერმინებს). პრობლემა იმის განსაზღვრისა, რომ ნებისმიერი ჯგუფის ჩანაწერით და ნებისმიერი სიტყვისათვის

წარმომქმნელებიდან შეიძლება თუ არა გარდავქმნათ ეს სიტყვა ერთეულში ჯგუფის დამოკიდებულებების თანახმად, ცნობილია როგორც იგივეობის (ტოლობის) პრობლემა ჯგუფთა თეორიაში. ნივიკოვმა და ბუნმა აჩვენეს, რომ ეს პრობლემა რეკურსიულად ამოუხსნადია.

ამოუხსნადობის შესახებ პრობლემები მიღებული იქნა ასევე ტოპოლოგიაში. პრობლემა იმის განსაზღვრისა, როცა ცხადად მოცემულია ორი ტრიანგულაცია ოთხგანზომილებიანი მრავალსახეობებისა, ჰომომორფულია თუ არა ეს მრავალსახეობები, არის რეკურსიულად ამოუხსნადი.

პრობლემათა რეკურსიულად ამოუხსნადობის დასამტკიცებლად, რომლებიც რეკურსიულ ფუნქციათა თეორიას არ ეკუთვნიან, თითქმის ყოველთვის გამოიყენება დაყვანადობის მეთოდი. გამოსაკვლევი პრობლემა უკავშირდება რეკურსიულ ფუნქციათა თეორიის ამოუხსნად პრობლემას – ჩვეულებრივ გაჩერების პრობლემის რაიმე ფორმას.

ზოგიერთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის არსებობა

თეორემა II. არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ არცერთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f არ არის ψ ფუნქციის გაგრძელება, ანუ არაა სამართლიანი, რომ

$$(\forall x)[\psi(x) \text{ განსაზღვრულია } \Rightarrow \psi(x) = f(x)].$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ψ შემდეგნაირად: იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x)$, საჭიროა ვიპოვოთ P_x და გამოვიყენოთ P_x x-ზე; როგორც კი გამოჩნდება გამოსასვლელი (თუ ეს მოხდება), უნდა ავიღოთ $\varphi_x(x)+1$ $\psi(x)$-ის მნიშვნელობად. ჩერჩის თეზისის თანახმად ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია (ψ არის $\lambda x[\varphi_{z_0}(x,x)+1]$, სადაც φ_{z_0}-უნივერსალური ფუნქციაა). გვაქვს

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.} \end{cases}$$

ვთქვათ f-ნებისმიერი ზოგადრეკურსიული ფუნქციაა, და y არის f-ის ნომერი, ანუ $f = \varphi_y$. რადგან f ყველგან განსაზღვრულია, ამიტომ $f(y) = \varphi_y(y)$ – განსაზღვრულია. მაშასადამე, $\psi(y)$ განსაზღვრულია და

$$\psi(y) = f(y) + 1.$$

ამიტომ f არ შეიძლება იყოს ψ ფუნქციის გაგრძელება.

თეორემა III. არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ ნებისმიერი ზოგადრეკურსიული f ფუნქციისათვის არაა სამართლიანი

$$\psi = \lambda x[\mu y[f(x,y) = 1]].$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ შემდეგნაირად. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x)$, ვიპოვოთ P_x, გამოვიყენოთ P_x-ი x-ზე, როგორც კი გამოჩნდება გამოსავალი (თუ ეს მოხდება), დავუშვათ $\psi(x) = x$. ცხადია, რომ ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია. გარდა ამისა,

$$\psi(x) = \begin{cases} x, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{არაა განსაზღვრული, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.} \end{cases}$$

დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ნებისმიერი x-სთვის $\psi(x) = \mu u[f(x,y) = 1]$. მაშინ

$$\varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია } \Rightarrow f(x,x) = 1 \text{ და}$$

$$\varphi_x(x) \text{ არ არის განსაზღვრული } \Rightarrow (\forall y)[f(x,y) \neq 1] \Rightarrow f(x,x) = 1.$$

განვსაზღვროთ g ფუნქცია ასე:

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } f(x,x) = 1; \\ 0, \text{ თუ } f(x,x) \neq 1. \end{cases}$$

$g(x)$ ფუნქცია რეკურსიული, რადგან $f(x,x)$ განსაზღვრულია ნებისმიერი x-სთვის. მაგრამ მაშინ g მახასიათებელი ფუნქციაა $\{x : \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია}\}$ სიმრავლისათვის. რაც არ შეიძლება.

რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების განსაზღვრებები

განსაზღვრა. სიმრავლე რეკურსიულია, თუ მას აქვს ზოგადრეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია (ანუ A რეკურსიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ ნებისმიერი x-სთვის $x \in A \Rightarrow f(x) = 1$ და $x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) = 0$).

ინტუიციურად, A რეკურსიულია, თუ არსებობს ეფექტური პროცედურა, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი მოცემული x-სთვის გავარკვიოთ, ეკუთვნის თუ არა x-ი A სიმრავლეს.

მაგალითები. შემდეგი სიმრავლეები რეკურსიულებია:
(I) სიმრავლე {0, 2, 4,…} ყველა ლუწი რიცხვებისა;
(II) N და $\varnothing$;
(III) ნებისმიერი სასრული სიმრავლე;
(IV) ნებისმიერი სიმრავლე სასრული დამატებით.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია, თუ $A=\varnothing$ ან არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ A არის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ინტუიციურად, სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია, თუ არსებობს მისი ელემენტების გადათვლის (შესაძლოა განმეორებით) ეფექტური პროცედურა.

თეორემა I. A რეკურსიულია $\Rightarrow$ A რეკურსიულად გადათვლადია.

დამტკიცება. (I) შემთხვევა. $A=\varnothing$. მაშინ განვსაზღვროთ A რეკურსიულად გადათვლადია.

(II) შემთხვევა. A სასრულია და $\neq\varnothing$. ვთქვათ $A=\{n_1,\cdots,n_k\}$. განვსაზღვროთ f შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases} n_x, \text{ თუ } x\le k;\\ n_k, \text{ თუ } k<x. \end{cases}$$

(III) შემთხვევა. A უსასრულოა. ვთქვათ g მახასიათებელი ფუნქცია A-სთვის. განვსაზღვროთ f ასე:

$$f(0)=\mu y[g(y)=1];$$
$$f(x+1)=\mu y[g(y)=1 \text{ და } f(x)<y].$$

(II) და (III) შემთხვევებში f ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია ჩერჩის თეზისის თანახმად და A არის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

თეორემა II. A რეკურსიულია $\Rightarrow$ როგორც A ასევე $\overline{A}$ რეკურსიულად გადათვლადია.

დამტკიცება. $\Rightarrow$ უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა I-დან.

$\Leftarrow$. თუ A ან $\overline{A}$ ცარიელია, მაშინ A რეკურსიულობა ცხადია. თუ A და $\overline{A}$ არ არიან ცარიელი, მაშინ რაიმე ზოგადრეკურ-

სიული ფუნქციებისათვის f, g გვაქვს $A = Valf$, $\overline{A} = Val\, g$ ($Valf$ - არის f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე). f და g ფუნქციებით შეიძლება აღვწეროთ რეკურსიული პროცედურა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოვიცნოთ ეკუთვნის თუ არა რიცხვი A სიმრავლეს: სახელდობრ, ვთქვათ გვინდა გავარკვიოთ x ეკუთვნის თუ არა A-ს. მიმდევრობით განვიხილავთ $f(0)$, $g(0)$, $f(1)$, $g(1)$, $f(2), \cdots$. თუ x აღმოჩნდება f-ის მნიშვნელობა, მაშინ x ეკუთვნის A-ს. თუ x აღმოჩნდება g-ს მნიშვნელობა, მაშინ x ეკუთვნის $\overline{A}$-ს. რადგან $A \cup \overline{A} = N$, x-ი აუცილებლად იქნება f-ის ან g-ს მნიშვნელობა.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია არაკლებადობით, თუ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ $A = Valf$ და f არაკლებადი ფუნქციაა, ანუ $(\forall x)(\forall y)[x < y \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \le f(y)]$.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია ზრდადობით, თუ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ $A = Valf$ და f ზრდადი ფუნქციაა, ანუ $(\forall x)(\forall y)[x < y \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < f(y)]$.

თეორემა III. (a) [A რეკურსიულია $\& A \neq \varnothing$] $\Leftrightarrow$ A რეკურსიულად გადათვლადია არაკლებადობით.

(b) [A რეკურსიულია და A უსასრულოა] $\Leftrightarrow$ A რეკურსიულად გადათვლადია ზრდადობით.

დამტკიცება. $\Rightarrow$ (a) და (b)-სთვის. მარტივად მტკიცდება თეორემა I-ის დამტკიცების II და III შემთხვევებში აგებული ფუნქციების გამოყენებით.

$\Leftarrow$ (a) – შემთხვევა. განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

(I) – შემთხვევა. A სასრულია. მაშინ A რეკურსიულია, რადგან ყოველი სასრული სიმრავლე რეკურსიულია.

(II) – შემთხვევა. A უსასრულოა. ვთქვათ f ფუნქცია გადათვლის A სიმრავლეს არაკლებადობით. იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ეკუთვნის თუ არა x-ი A სიმრავლეს, გამოვითვლით f ფუნქციის მნიშვნელობებს მანამ, სანამ არ გამოითვლება რიცხვი, რომელიც მეტია x-ზე. მაშინ $x \in A \Leftrightarrow x$ უკვე აღმოჩნდა გამოთვლილ მნიშვნელობებში. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს ეფექტური მეთოდი იმისა,

რომ გავარკვიოთ x რიცხვი ეკუთვნის თუ არა A სიმრავლეს. მაშასადამე, A რეკურსიულია.

⇐ (b) - შემთხვევა. ეს მტკიცება მიმდინარეობს (a) შემთხვევის (II) ქვეშემთხვევის მსგავსად (ამ შემთხვევაში საჭიროა მხოლოდ $f(0), f(1), \cdots, f(x)$ მნიშვნელობების გამოთვლა).

თეორემა IV. ყოველ უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს აქვს უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ A უსასრულო და რეკურსიულად გადათვლადია. დავუშვათ, რომ f ზოგადრეკურსიული ფუნქციაა და $Valf = A$. განვსაზღვროთ ზოგადრეკურსიული ფუნქცია g შემდეგნაირად:

$$g(0) = f(0),$$
$$g(x+1) = f(\mu y[f(y) > g(x)]).$$

ვთქვათ $B = Val\, g$. მაშინ g გადათვლის B სიმრავლეს ზრდადობით და, წინა თეორემის თანახმად, B სიმრავლე რეკურსიულია. რადგან $B \subset A$, თეორემა დამტკიცებულია.

ძირითადი თეორემა

თეორემა (ძირითადი თეორემა რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების შესახებ). A რეკურსიულად გადათვლადია ⇔ A არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის განსაზღვრის არე (ანუ $(\exists x)[A = Arg\varphi_x]$, სადაც $Arg\varphi_x$-ით აღინიშნება φ_x-ის განსაზღვრის არე).

დამტკიცება. ⇒ (I) შემთხვევა. $A = \varnothing$. ვთქვათ ψ არის არსად განსაზღვრული ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია. მაშინ $A = Arg\psi$.

(II) შემთხვევა. $A \neq \varnothing$. მაშინ A არის გარკვეული ზოგადრეკურსიული ფუნქციის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე. განვსაზღვროთ ψ შემდეგი ინსტრუქციით: იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x)$, დავიწყოთ f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის გადათვლა. თუ x აღმოჩნდა f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეში, მაშინვე x-ი გამოვაცხადოთ გამოსასვლელის მნიშვნელობად. ცხადია, რომ ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია და $A = Arg\psi$.

$\Leftarrow$ ვთქვათ $A = Arg\psi$, სადაც ψ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა. განვსაზღვროთ ეფექტური პროცედურა, რომელიც წარმოქმნის A-ს, თუ $A \neq \varnothing$. პროცედურის განხორციელება მოხდება ეტაპობრივად.

1 ეტაპი. შევასრულოთ 1 ნაბიჯი $\psi(0)$-ის გამოთვლაში. თუ $\psi(0)$ გამოთვლის პროცესი დამთავრდება პირველ ნაბიჯზე, მაშინ 0 გადავცეთ A-სთვის განკუთვნილ სიაში.

***n*+1 ეტაპი**. შევასრულოთ n+1 ნაბიჯი $\psi(0), \cdots, \psi(n)$ გამოთვლაში. ის k, $0 \le k \le n$, რომელთათვისაც $\psi(k)$ გამოთვლის პროცესი დასრულდება $(n+1)$ ნაბიჯზე ან უფრო ადრე, დავუმატოთ A-სთვის განკუთვნილ სიას.

.....

განვსაზღვროთ η შემდეგნაირად:

$\eta(0) =$ გადათვლის პირველი ელემენტი;

$$\eta(x+1) = \begin{cases} \mu y[y \text{ დაემატა სიას } x+1 \text{ ეტაპზე და} \\ \quad y \notin \{\eta(0), \eta(1), \cdots, \eta(x)\}], \text{ თუ ასეთი} \\ \quad y \text{ არსებობს;} \\ \eta(0) \qquad \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად, η არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია. თუ $A = \varnothing$, მაშინ განვსაზღვრით A რეკურსიულად გადათვლადია. თუ $A \neq \varnothing$, მაშინ აგების თანახმად η ყველგან განსაზღვრულია და $Val\eta = Arg\psi = A$; ამრიგად A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

განსაზღვრა. $W_x = Arg\varphi_x$. ასეთ x-ს ვუწოდოთ რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსი ან გედელის ნომერი რეკურსიულად გადათვლადი W_x სიმრავლის.

დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი.

შედეგი. A რეკურსიულად გადათვლადია $\Leftrightarrow$ A არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე (ანუ $(\exists x)[A = Val\varphi_x]$).

განსაზღვრა. $K = \{x : \varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\} = \{x : x \in W_x\}$.

თეორემა. არსებობს რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, რომელიც არ არის რეკურსიული, და K სიმრავლე არის ასეთი სიმრავლე.

დამტკიცება. დავუშვათ

$$\psi(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;}\\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.}\end{cases}$$

ცხადია, რომ ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია და $K=Arg\psi$. მაშასადამე, წინა თეორემის თანახმად, K რეკურსიულად გადათვლადია.

დავუშვათ, რომ K რეკურსიულია. მაშინ $\overline{K}=W_m$ რაღაც m-სთვის. K-ს განსაზღვრის გამო გვაქვს

$$m\in K \Leftrightarrow m\in W_m,$$

ამასთანავე

$$m\in \overline{K} \Leftrightarrow m\in W_m,$$

m-ის შერჩევის გამო.

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ K არ შეიძლება იყოს რეკურსიული სიმრავლე.

რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი მიმართებები. n-ეულთა კოდირება

განსაზღვრა. $\tau(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+3x+y)$.

ლემა. τ არის რეკურსიული ურთიერთცალსახა გადასახვა $N\times N$ სიმრავლისა N-ზე.

დამტკიცება. τ-ს რეკურსიულობა ცხადია. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... რიცხვებს შევუსაბამოთ $<0,0>$, $<0,1>$, $<1,0>$, $<0,2>$ $<1,1>$, $<2,0>$, $<0,3>$, $<1,2>$,... ცნობილი ტოლობით $0+1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ეს შესაბამისობა მოიცემა τ-ს საშუალებით.

τ-ფუნქციას ეწოდება წყვილთა გადათვლის ფუნქცია.

განსაზღვრა. π_1 და π_2 არის ერთი ცვლადის ფუნქციები, რომლებიც ახორციელებენ τ გადასახვის შებრუნებულ გადა-

სახვას. სხვანაირად, ყოველი z-სთვის $\tau(\pi_1(z),\pi_2(z))=z$. ცხადია π_1 და π_2 ფუნქციები ზოგადრეკურსიულია.

განსაზღვრა. $\tau(x,y)$-ს ნაცვლად გამოვიყენებთ აღნიშვნას $<x,y>$. $A\times B$-ს განვსაზღვრავთ, როგორც სიმრავლეს $\{<x,y>: x\in A \ \&y\in B\}$, ანუ $A\times B=\tau(A\times B)$.

ნებისმიერი $n>0$ τ^n კოდირება, N^n-ის გადასახვა N-ზე, განისაზღვრება τ-ს საშუალებით შემდეგი ინდუქციური განსაზღვრით.

განსაზღვრა.

$$\tau^1=\lambda x[x],$$
$$\tau^{n+1}=\lambda x_1,\cdots,x_{n+1}[\tau(\tau^n(x_1,\cdots,x_n),x_{n+1})].$$

(კერძოდ $\tau^2=\tau\cdot$)

$\pi_1^n,\cdots,\pi_n^n$ არიან τ^n-ის ინვერსიული ფუნქციები, ანუ ყოველი z-ისთვის $\tau^n=(\pi_1^n(z),\cdots,\pi_n^n(z))=z$, (კერძოდ, $\pi_1^2=\pi_1$ და $\pi_2^2=\pi_2\cdot$).

ცხადია, რომ ყველა მოყვანილი ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია. $\tau^n(x_1,\cdots,x_n)$-ს აღვნიშნავთ $<x_1,\cdots,x_n>$-ით.

შეთანხმება. ვთქვათ P არის სიმრავლეთა თვისება. ვიტყვით, რომ n-არული მიმართებას R-ს აქვს P თვისება, თუ $r^n(R)$ აქვს P თვისება.

ამით რეკურსიულობისა და რეკურსიულად გადათვლადობის ცნებები გადატანილია მიმართებებზე.

თეორემა. (a) ვთქვათ φ არის ერთი ცვლადის ნაწილობრივად-რეკურსიული ფუნქცია, მაშინ

$$\psi^{(n)}=\lambda x_1,\cdots,x_n[\varphi(<x_1,\cdots,x_n>)]$$

არის n-ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია.

(b) ვთქვათ $\psi^{(n)}$ არის n-ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია, მაშინ

$$\varphi=\lambda z[\psi^{(n)}(\pi_1^n(z),\cdots,\pi_n^n(z))]$$

არის ერთი ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია.

დამტკიცება. გამომდინარეობს ჩერჩის თეზისიდან. შევნიშნოთ. რომ ყველგან განსაზღვრული ფუნქციები შეესაბამებიან ყველგან

განსაზღვრულ ფუნქციებს და (a)-ში დამყარებული შესაბამისობა არის (b)-ში დამყარებული შესაბამისობის შებრუნებული.

თეორემები პროექციის შესახებ

შევთანხმდეთ, რომ ნაცვლად ჩანაწერისა $< x_1,\cdots,x_n > \in R$ ვისარგებლებთ ჩანაწერით $R(x_1,\cdots,x_n)$.

განსაზღვრა. სიმრავლეს

$$\{< x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n >: (\exists x_j)R(x_1,\cdots,x_n)\}$$

ეწოდება R მიმართების პროექცია j-ური კოორდინატის გასწვრივ.

თეორემა 1. თუ R მიმართება რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ არსებობს რეკურსიული მიმართება S ისეთი, რომ R არის S-ის პროექცია. მეტიც თუ R არის n-არული რეკურსიულად გადაღვლადი მიმართება, მაშინ არსებობს $(n+1)$-არული რეკურსიული მიმართება S ისეთი, რომ

$$R = \{< x_1,\cdots,x_n >: (\exists x_{n+1})S(x_1,\cdots,x_{n+1})\}.$$

თეორემა 2. თუ R მიმართება რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ ყოველი მისი პროექცია რეკურსიულად გადათვლადია. კერძოდ, თუ R n-არული რეკურსიულად გადაღვლადი მიმართებაა, მაშინ მიმართება

$$\{< x_1,\cdots,x_{n-1} >: (\exists x_n)R(x_1,\cdots,x_n)\}$$

რეკურსიულად გადათვლადია.

ამ თეორემებს ეწოდებათ თეორემები პროექციის შესახებ.

დამტკიცება (თეორემა 1). ვთქვათ $\hat{R} = \tau^n(R)$. მაშინ $\hat{R}$ არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე. ამიტომ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ $\hat{R} = Arg\psi$. ვთქვათ m არის ψ ფუნქციის ფიქსირებული ინდექსი და P_m ინსტრუქციათა შესაბამისი სიმრავლე. მაშინ $R(x_1,\cdots,x_n) \Leftrightarrow < x_1,\cdots,x_n > \in \hat{R} \Leftrightarrow$ $\psi(< x_1,\cdots,x_n >)$ განსაზღვრულია $\Leftrightarrow (\exists x_{n+1})[P_m$-ის შესაბამისი გამოთვლის პროცესი $< x_1,\cdots,x_n >$ შესასვლელისათვის მთავრდება x_{n+1} ნაბიჯამდე]. ჩერჩის თეზისის თანახმად, კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი წინადადება განსაზღვრავს N^{n+1}-ზე რეკურსიულ მიმართებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცება (თეორემა 2). საკმარისია ვაჩვენოთ თეორემის დებულების სამართლიანობა R მიმართების პროექციისათვის n-ური კოორდინატის გასწვრივ. ვთქვათ მოცემულია რეკურსიულად გადათვლადი მიმართება R. წინა თეორემით შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი რეკურსიული მიმართება S, რომ $R(x_1,\cdots,x_n)\Leftrightarrow(\exists x_{n+1})$ $S(x_1,\cdots,x_{n+1})$. ვთქვათ Q - არის R მიმართების მოცემული პროექცია. მაშინ $Q(x_1,\cdots,x_{n-1})\Leftrightarrow(\exists x_n)\ R(x_1,\cdots,x_n)\Leftrightarrow(\exists x_n)(\exists x_{n+1})\ S(x_1,\cdots,x_{n+1})$. განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ შემდეგნაირად. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(<x_1,\cdots,x_{n-1}>)$, მიმდევრობით შევამოწმოთ, შესრულებულია თუ არ $S(x_1,\cdots,x_{n-1},\pi_1(z),$ $\pi_2(z))$ როცა $z=0,1,2,\cdots$ სანამ არ მივიღებთ დადებით პასუხს. როგორც კი ეს მოხდება (თუ საერთოდ მოხდება) გამოსასვლელზე გადავცეთ 1. მაშინ $Q(x_1,\cdots,x_{n-1})\Leftrightarrow\psi(<x_1,\cdots,x_{n-1}>)$ განსაზღვრულია $\Leftrightarrow<x_1,\cdots,x_{n-1}>\in Arg\psi$. მაშასადამე, Q-რეკურსიულად გადათვლადია.

ეფექტურობა

წინა პარაგრაფებში ჩვენს მიერ მოყვანილი არსებობის შესახებ ზოგიერთი დამტკიცება იყო არაკონსტრუქციული იმ აზრით, რომ არ იყო მოცემული არავითარი ეფექტური პროცედურა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა დაგვედგინა რამდენიმე შესაძლებლობიდან რომელ შემთხვევას ჰქონდა ადგილი. განვიხილოთ არსებობის შესახებ ისეთი დამტკიცებები, რომელთათვისაც შეიძლება ეფექტური პროცედურის პოვნა. ვიტყვით, რომ თეორემას აქვს ადგილი თანაბრად ან თანაბრად ეფექტურად, თუ ასეთი პროცედურა შეიძლევა იქნეს მოცემული. ტერმინის „თანაბრად ეფექტურად“ ზუსტი აზრი ჩვეულებრივ ნათელი იქნება კონტექსტიდან.

თეორემა. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა კლასი ჩაკეტილია $\cup$, $\cap$ და $\times$ ოპერაციების მიმართ თანაბრად ეფექტურად.

დამტკიცება. აქ ტერმინი „თანაბრად“ გულისხმობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქციების f, g და h არსებობას, რომ $W_{f(x,y)}=W_x\cup W_y$, $W_{g(x,y)}=W_x\cap W_y$ და $W_{h(x,y)}=W_x\times W_y$. (დაამტკიცეთ თეორემა დამოუკიდებლად).

თეორემა. რეკურსიულ სიმრავლეთა კლასი ჩაკეტილია $\cup$, $\cap$, $\times$ და დამატების ოპერაციის მიმართ. რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსების დონეზე ჩაკეტილობა $\cup$, $\cap$ და $\times$ ოპერაციების მიმართ თანაბარია, მაგრამ ჩაკეტილობა დამატების ოპერაციის მიმართ არ შეიძლება იყოს თანაბარი.

დამტკიცება. ჩაკეტილობისა და თანაბრობის დამტკიცებებს დავტოვებთ სავარჯიშოს სახით. ვაჩვენოთ, რომ ჩაკეტილობა დამატების ოპერაციის მიმართ არ შეიძლება იყოს თანაბარი ანუ არ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ ყოველი x-სთვის სიმრავლე W_x რეკურსიულია $\Leftrightarrow [\psi(x)$ განსაზღვრულია და $W_{\psi(x)} = \overline{W_s}]$. დავუშვათ, რომ ასეთი ფუნქცია ψ არსებობს. გამოვიყენოთ სიმრავლე K რომ მივიღოთ წინააღმდეგობა. რადგან K რეკურსიულად გადათვლადია და, მაშასადამე, შეიძლება ეფექტურად გადაითვალოს, ამიტომ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია g, რომ ყოველი x-სთვის $\varphi_{g(x)}$ ყველგან განსაზღვრულია, თუ $x \in K$ და არსად არაა განსაზღვრული, თუ $x \notin K$.

ამრიგად,

$$W_{g(x)} = \begin{cases} N, & \text{თუ } x \in K, \\ \varnothing, & \text{თუ } x \notin K. \end{cases}$$

ყოველთვის x-სთვის $W_{g(x)}$ არის რეკურსიული სიმრავლე. დაშვების გამო $\psi g(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყოველი x-სთვის. ვთქვათ f არის ყველგან განსაზღვრული ფუნქცია ψg. გვაქვს

$$W_{f(x)} = \begin{cases} \varnothing, & \text{თუ } x \in K, \\ N, & \text{თუ } x \notin K. \end{cases}$$

ამრიგად $\overline{K} = \{x : W_{f(x)} \neq \varnothing\}$, მაგრამ $\{x : W_{f(x)} \neq \varnothing\} = \{x : (\exists y)[y = f(x) \,\&\, W_y \neq \varnothing]\} = \{x : (\exists y)(\exists z)(\exists w)[y = f(x)$ და P_y-ის შესაბამისი გამოთვლის პროცესი z შესასვლელის დროს მთავრდება w ნაბიჯამდე$]\}$. მაშასადამე, პროექციის შესახებ მეორე თეორემის თანახმად, $\overline{K}$ სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია $\Rightarrow K$ რეკურსიულია. წინააღმდეგობა.

სასრული სიმრავლეები

განსაზღვრა. ვთქვათ A არის არაცარიელი სასრული სიმრავლე $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, სადაც $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. მაშინ $2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_n}$ რიცხვს ეწოდება A სიმრავლის კანონიკური ინდექსი. თუ $A = \varnothing$, A-ს კანონიკური ინდექსი არის 0.

განსაზღვრა. D_x-ით აღვნიშნოთ სასრული სიმრავლე, რომლის კანონიკური ინდექსი არის x.

ცხადია, რომ შესაძლებელია თანაბარი გადასვლა კანონიკური ინდექსიდან მახასიათებელ ინდექსზე და, მაშასადამე, რეკურსიულად გადათვლად ინდექსზე. (რეკურსიული სიმრავლე შეიძლება მოცემული იქნას მისი მახასიათებელი ფუნქციით. ასეთ ინდექსს ეწოდება რეკურსიული სიმრავლის მახასიათებელი ინდექსი). შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ თანაბარი გადასვლა მახასიათებელი ინდექსიდან კანონიკურ ინდექსზე შეუძლებელია.

თეორემა. (a) არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველ x-სთვის $f(x)$ არის D_x-ის სიმძლავრე.

(b) არ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ ყოველი x-სთვის, თუ φ_x არის მახასიათებელი ფუნქცია სასრული A- სიმრავლისათვის, მაშინ $\psi(x)$ განსაზღვრულია $\psi(x)$ არის A-ს სიმძლავრე.

დამტკიცება. (a) უშუალოდ გამომდინარეობს ჩერჩის თეზისიდან.

(b) დავუშვათ, რომ ასეთი ψ ფუნქცია არსებობს. ყოველი x-სთვის განვსაზღვროთ η ფუნქცია:

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } P_x \text{-ის შესაბამისი გამოთვლის პროცესი } x - \\ \quad \text{შესასვლელის დროს მთავრდება ზუსტად } z \text{ ნაბიჯზე,} \\ 0 \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ცხადია, რომ η ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია. მისი გედელის ნომერი შეიძლება ვიპოვოთ თანაბრად x-ით; ვთქვათ ესაა $g(x)$. მაშინ $\varphi_{g(x)}$ არის მახასიათებელი ფუნქცია სიმრავლისა, რომელსაც აქვს 1-ის ტოლი სიმძლავრე, თუ $x \in K$, და 0-ის ტოლი სიმძლავრე, თუ $x \notin K$. მაშასადამე, ψg არის ისეთი ზოგად რეკურსიული ფუნქცია, რომ

$$\psi g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

ეს ეწინააღმდეგება K სიმრავლის არარეკურსიულობას.

შედეგი. შეუძლებელია თანაბარი გადასვლა მახასიათებელი ინდექსიდან კანონიკურ ინდექსზე.

დამტკიცება. ასეთი გადასვლა რომ შესაძლებელი იყოს, მაშინ (a)-დან გამოვიდოდა (b)-სთვის ψ ფუნქციის არსებობა დამტკიცებული თეორემაში.

თეორემა ცალსახობის შესახებ. რედუქციის პრინციპი

განსაზღვრა. A სიმრავლე ცალსახაა, თუ $\{< x,y >:< x,y >\in A\}$ არის ცალსახა მიმართება.

(ვთქვათ R k-ადგილიანი მიმართებაა. ვიტყვით, რომ R ცალსახაა, თუ ნებისმიერი კორტეჟისათვის $< x_1,\cdots,x_{k-1} >$ არსებობს არაუმეტეს ერთი z ელემენტისა ისეთი, რომ $< x_1,\cdots x_{k-1},z >\in R\cdot\}$.

განსაზღვრა. $ArgA=\{x:(\exists y)[< x,y <\in A]\}$.

თეორემა (თეორემა ცალსახობის შესახებ). არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი z-სთვის

(I) $W_{f(z)}$ ცალსახაა;

(II) $W_{f(z)}\subset W_z$;

(III) $ArgW_{f(z)}=ArgW_z$;

(IV) W_z ცალსახაა $\Rightarrow$ $W_{f(z)}=W_z$.

დამტკიცება. (IV) უშუალოდ გამომდინარეობს (II) და (III)-დან. W_z-სთვის z-ით შეიძლება ეფექტურად მოიძებნოს პროცედურა მისი განმეორებების გარეშე გათვლისა (ეს გამომდინარეობს ძირითადი თეორემიდან). განვსაზღვროთ

$$A_z=\{< x,y >:< x,y >\in W_z \text{ და } (\forall y')[[y'\neq y\&< x,y' >\in W_z]\Rightarrow$$
$$< x,y > \text{ უსწრებს } < x,y' >\text{-ს } W_z\text{-ის გადათვლაში}]\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ A_z რეკურსიულად გადათვლადია და მისი რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსი შეიძლება მოიძებნოს თანაბრად ეფექტურად z-ით. მაშასადამე, არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი z-სთვის $W_{f(z)}=A_z$. A_z-ის განსაზღვრიდან გამოდის, რომ f-ს აქვს (I), (II) და (III)-ში მოთხოვნილი თვისებები.

თეორემა (რედუქციის პრინციპი). როგორიც არ უნდა იყოს ორი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე A და B, არსებობენ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები A' და B' ისეთი, რომ $A' \subset A$, $B' \subset B$, $A \cup B = A' \cup B'$ და $A' \cap B' = \varnothing$.

დამტკიცება. განვსაზღვროთ $C = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ C სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია. ვთქვათ $C = W_n$ და $C' = W_{f(n)}$, სადაც f ისეთივე ფუნქციაა, როგორც წინა თეორიაში. მაშინ $\tau^{-1}(C')$ არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ. დავუშვათ $A' = \psi^{-1}(0)$ და $B' = \psi^{-1}(1)$.

ძირითადი ლიტერატურა

1. E. Mendelson. Introduqcion to mathematical Logic. D. Van Nistrad Company. INC Princton. 1964.
   Е. Мендельсон. Введение в математическую логику. М. Наука. 1984.
2. С.Я. Яблонский. Введение в дискретную математику. М. Наука. 1984.
3. H. Rogers. Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Company. New York. 1967.
   Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М. Мир. 1972.
4. T. Jech. Set Theory. Springer. 2002.
5. Ф. Харари. Теория графов. М. Мир. 1973.
6. И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М. Наука. 1984.
7. Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. М. Наука. 1977.

დამატებითი ლიტერატურა

8. R.I. Soare. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Springer. 1987.

შინაარსი

წინადადებათა აღრიცხვა 2
პროპოზიციული ოპერაციები. ჭეშმარიტობის
ცხრილები. ტავტოლოგიები 2
ოპერაციათა სრული სისტემები 7
აქსიომათა სისტემა წინადადებათა აღრიცხვისათვის 11
დამოუკიდებლობა. მრავალმნიშვნელობიანი
ლოგიკები 19
აქსიომათა სხვა სისტემები 22

პირველი რიგის თეორიები 22
§ 1. კვანტორები 22
§ 2. ინტერპრეტაციები. შესრულებადობა და ჭეშმარიტობა.
მოდელები 27
§ 3. პირველი რიგის თეორიები 33
§ 4. პირველი რიგის თეორიის თვისებები 36
§ 5. თეორემები სისრულის შესახებ 41
§ 6. ზოგიერთი დამატებითი მეტათეორემა 51
§ 7. *C* წესი 53
§ 8. პირველი რიგის თეორიები ტოლობით 56
§ 9. ახალი ფუნქციონალური ასოებისა და
საგნობრივი კონსტანტების შემოტანა 63
§ 10. წინასწარული ნორმალური ფორმები 66
§ 11. ინტერპრეტაციათა იზომორფიზმი.
თეორიების კატეგორიულობა 71

ლოგიკის ალგებრის ფუნქციები ანუ
ბულის ფუნქციები 74
§ 1. ლოგიკის ალგებრის ფუნქციები. ფუნქციათა
ტოლობა. იგივეობები ელემენტარული
ფუნქციებისათვის 74
§ 2. თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა ცვლა-
დებით გაშლის შესახებ. თეორემა სრულყოფილი
დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის შესახებ 78
§ 3. სრული სისტემები. სრული სისტემების მაგალითები ... 79
§ 4. ჟეგალკინის თეორემა ლოგიკის ალგებრის
ფუნქციების პოლინომებით წარმოდგენის
შესახებ 80
§ 5. ჩაკეტიკი კლასის ცნება. T_0, T_2 და L კლასების
ჩაკეტილობა 82

§ 6. ორადულობა. თვითორადულფუნქციათა კლასი და მისი ჩაკეტილობა 85
§ 7. მონოტონურ ფუნქციათა კლასი, მისი ჩაკეტილობა 86
§ 8. ლემა არათვითორადულ ფუნქციებზე 87
§ 9. ლემა არამონოტონური ფუნქციების შესახებ 88
§ 10. ლემა არაწრფივი ფუნქციების შესახებ 89
§ 11. პოსტის თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა სისტემის სისრულის შესახებ 89
§ 12. თეორემა ლოგიკის ალგებრის ფუნქციათა ბაზისში მაქსიმალური რიცხვის შესახებ 91
§ 13. თეორემა წინასრული კლასების შესახებ 92

ბრაფთა თეორიის საფუძვლები 94
ამოცანა კენიგსბერგის ხიდების შესახებ 94
§ 1. გრაფთა თეორიის ძირითადი ცნებები. გრაფთა იზომორფიზმი. ბმულობა 95
§ 2. ხეები. ხეების თვისებები 98
§ 3. გრაფების გეომეტრიული რეალიზაცია. თეორემა გრაფთა რეალიზაციის შესახებ სამგანზომილებიან სივრცეში 100
§ 4. პლანარული (ბრტყელი) გრაფები. ეილერის ფორმულა 101
§ 5. K_5 და $K_{3,3}$ გრაფების არაპლანარობის დამტკიცება. პონტრიაგინ-კურატოვსკის თეორემა 103
§ 6. რამსეის ამოცანა 104
ცერმელო-ფრენკელის აქსიომები 105
რატომ აქსიომატური სიმრავლეთა თეორია? 106
სიმრავლეთა თეორიის ენა, ფორმულები 107
კლასები 108
გაფართოება 109
დაწყვილება 109
განცალებადობის სქემა 110
გაერთიანება 111
ნებისმიერი სიმრავლე (სიმრავლის ხარისხი) 111
უსასრულობა 114
შეცვლის სქემა 115
ორდინალური რიცხვები 116
წრფივი და ნაწილობრივი დალაგება 116
სავსებით დალაგება 117
ორდინალური რიცხვები 118
ინდუქცია და რეკურსია 120

არითმეტიკა ორდინალებზე 122
კარდინალური რიცხვები 123
ალეფები 126

ბამოთვლადი ფუნქციები 129
§ 1. პრიმიტიულად რეკურსიული, ნაწილობრივად რეკურსიული, ზოგადრეკურსიული ფუნქციები ჩერჩის თეზისი 129
გედელის ნომრები, უნივერსალურობა, s–m–n თეორემა 136
გაჩერების პრობლემა 138
რეკურსიულობა 140
ამოუხსნადი პრობლემების მაგალითები 141
ამოუხსნადი პრობლემები მათემატიკის სხვადასხვა დარგში 144
ზოგიერთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის არსებობა 145
რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების განსაზღვრებები 146
ძირითადი თეორემა 149
რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი მიმართებები. n-ეულთა კოდირება 151
თეორემები პროექციის შესახებ 153
ეფექტურობა 154
სასრული სიმრავლეები 156
თეორემა ცალსახობის შესახებ. რედუქციის პრინციპი 157
ძირითადი ლიტერატურა 159