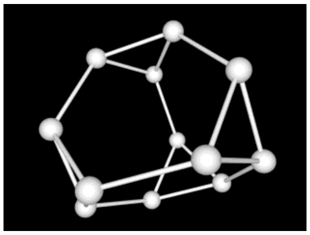


დისკრეტული სტრუქტურების ამოცანების კომპიუტერული რეალიზაცია

ასისტენტ პროფესორი ნანა ოდიშელიძე

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
ინტერდისციპლინური (მათემატიკა, კომპიუტერული მეცნიერებები)
ქვემიმართულება: მათემატიკური ლოგიკა და დისკრეტული სტრუქტურები
ბაკალავრიატი

თბილისი
2012

შესავალი

დისკრეტული სტრუქტურები თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი მიმართულებაა. ტრადიციული მათემატიკისგან განსხვავებით (მათემატიკური ანალიზი, წრფივი ალგებრა და სხვა) რომლის მეთოდებსა და კონსტრუქციებს ძირითადად აქვთ რიცხვითი ინტერპრეტაცია, დისკრეტულ სტრუქტურებს საქმე აქვს სხვა ბუნების ობიექტებთან: სიმრავლეები, ლოგიკური გამონათქვამები, ალგორითმები, გრაფები.

გრაფთა თეორიას ფართო გამოყენება აქვს ქსელებში, ოპერაციულ სისტემებში და კომპილატორებში, სიმრავლეთა თეორია გამოიყენება პროგრამულ ინჟინერიაში და მონაცემთა ბაზებში.

საგნის სწავლებაში მნიშვნელოვანია გამოვიყენოთ პროგრამული პაკეტები და სწავლების თანამედროვე საშუალებანი, რათა უფრო გასაგები და მისაწვდომი გავხადოთ იგი. ეს მიდგომა ფართოდ არის გავრცელებული მსოფლიოში და ბევრი სპეციალისტი მიმართავს მას.

სიმრავლე

სიმრავლე არის კარგად განსაზღვრული ერთობლიობა ობიექტებისა, რამელთაც უწოდებენ სიმრავლის ელემენტებს ან სიმრავლის წევრებს. მაგალითად, მთელი რიცხვთა სიმრავლე, ნამდვილ რიცხთა სიმრავლე, ხის სკამების სიმრავლე და ასე შემდეგ. კარგად განსაზღვრულის ქვეშ იგულისხმება ის რომ, უნდა იყოს შესაძლებელი განსაზღვრა იმისა, ეს ობიექტი მიეკუთვნება ამ ერთობლიობას თუ არა. სიმრავლეთა თეორია გარკვეული აზრით არის ფუნდამენტი, რაზედაც შენდება ფაქტიურად მთელი მათემატიკა.

თუ სიმრავლეს აქვს სასრული ელემენტთა რაოდენობა, მაშინ მისი წარმოდგენა შესაძლებელია მისი ელემენტების სიით, მოთავსებულს ფიგურულ ფრჩხილებში. მაგალითად, მთელი დადებითი რიცხვთა სიმრავლე, ნაკლები 4-ზე:{1,2,3}

სიმრავლეში ელემენტების ჩამონათვალის რიგს არა აქვს მნიშვნელობა. ყველა სიმრავლეები {1,3,2,}, {3,2,1},{3,1,2}, {2,1,3,}, {2,3,1} წარმოადგენენ იგივე {2,1,3,} სიმრავლეს. მაგრამ, ხშირად სიმრავლეების წარმოდგენა მისი ელემენტების სიით არის რთული. მაგალითად რაციონალური რიცხვთა სიმრავლისა, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისა. იმ შემთხვევავშიც, კი როდესაც იგი სასრულია, მაგალითად თუ ის 100000 ელემენტიანია. სიმრავლის ელემენტების სიით წარმოდგენის ნაცვლად ჩვენ შეგვიძლია აღვწეროთ თვისება რომელსაც აკმაყოფილებენ ამ სიმრავლის ელემენტები. თუ **P** არის თვისება, მაშინ **S** სიმრავლე, რომლის ელემენტები აკმაყოფილებენ P თვისებას აღინიშნება როგორც

$$S = \{x \mid x \text{ აქვს } P \text{ თვისება}\}$$

მაგალითი, ვთქვათ **S** ={x|x –არის დადებითი მთელი რიცხვები, ნაკლები 4 -ზე}, მაშინ **S** არის სიმრავლე {1,2,3}.

სიმრავლეს, რომელსაც ელემენტები არ გააჩნია ეწოდება ცარიელი სიმრავლე და აღინიშნება ∅ ან { }
ვიტყვით რომ სიმრავლე A და B ტოლია, თუ გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები.
მაგალითი. თუ A={BASIC, PASCAL, ADA} და B={ADA, BASIC, PASCAL}, მაშინ A=B.

ქვესიმრავლე.

თუ A და B სიმრავლეებია და ყველა ელემენტი A სიმრავლისა არის აგრეთვე B სიმრავლის ელემენტიც, ე. ი. თუ $x \epsilon A$ A, მაშინ $x \epsilon B$, მაშინ ვიტყვით რომ A არის ქვესიმრავლე B –სი, ან A შედის B –ში და ჩვენ ვწერთ A⊆B, თუ A არ არის ქვესიმრავლე B –სი, მაშინ A⊄B.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

A = B ⇔ A ⊆ B და B ⊆A

ორი ცარიელი სიმრავლე ტოლია. ∅ არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე. ნებისმიერი A სიმრავლისთვის ∅⊂ A, ვინაიდან არ არსებობს ელემენტები ∅ -სი, რომლებიც არ არის A -ში .

A არის B სიმრავლის **საკუთრივი ქვესიმრავლე,** თუ $A \neq \emptyset, A \neq B$, და $A \subset B$.
A და B ორ სიმრავლეს ეწოდება თანაუკვეთი, თუ A∩ B=∅.

შევნიშნოთ, რომ ქვესიმრავლის იდეა განსხვავდება წევრობის იდეისგან. მაგალითად, თუ A={a, b, c}, მაშინ {a}⊂A და a∈A. მაგრამ {a}∉A და a⊄A. სხვა მაგალითი, ვთქვათ A={a,{b}}, მაშინ a,{b}∈A,{a}⊂A და {{b}}⊂A მაგრამ b∉A და {b}⊄A .
თუ გვაქვს ნებისმიერი სიმრავლე U, P(U)-თი აღვნიშნავთ U სიმრავლის ყველა A ქვესიმრავლეების სიმრავლეს, რომელსაც ვუწოდებთ U სიმრავლის ბულეანს; ე. ი. , P(U) = {A | A ⊂ U}. მაგალითად, თუ U={1,2,3} სამ ელემენტიანია, მაშინ მას გააჩნია რვა სხვადასხვა ქვესიმრავლე P({1,2,3}) = {{1}, {2},{3},{1,2}, {1,3}, {2,3},{1,2,3}, ∅}.

ოპერაციები სიმრავლეებზე

განვიხილოთ ისეთი ოპერაციები სიმრავლეებზე როგორიცაა გაერთიანება, სხვაობა, სიმეტრიული სხვაობა და დამატება.

თანაკვეთის და გაერთიანების ოპერაციები სიმრავლეებზე.

თუ A და B მოცემული სიმრავლეებია, მათი თანაკვეთა A ∩ B არის A და B სიმრავლეების ყველა საერთო ელემენტთა სიმრავლე:
A ∩B= {x | xϵ A და x∈ B}.
მაგალითი. ვთქვათ A={1,2,4,6},B={0,3,4,6},D=A∩B={4,6}.

ხოლო მათი გაერთიანება A ∪ B არის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის ან A ან B (ან ორივეს) :

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ ან $x \in B\}$

მაგალითი. ვთქვათ A={1,2,4,6},B={0,3,4,6}, C=A∪B={0,1,2,3,4,6}.

ეს განსაზღვრებები შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს :

$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A$ და $x \in B$,

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$ ან $x \in B$.

დამატების ოპერაცია.

თუ A არის U -ს ქვესიმრავლე, მაშინ A A-ს დამატება −A U –ში არის ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს U დან, რომელიც არ ეკუთვნის A –ს.

$$-A = \{x \mid x \in U \text{ და } x \notin A\}.$$

მაგალითი. ვთქვათ

A={1,2,4,6},B={0,3,4,6},A-B={1,2},B-A={0,3}.

სხვაობის ოპერაცია.

თუ A და B სიმრავლეებია, მაშინ $A - B$ სხვაობა განისაზრვრება როგორც ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც მიეკუთვნებიან A -ს და არ მიეკუთვნებიან B-ს. ამრიგად

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

სიმეტრიული სხვაობა

თუ A დაB B ორი სიმრავლეა, მაშინ მათი სიმეტრიული სხვაობა განისაზრვრება როგორც ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც მიეკუთვნებიან A-ს ან B -ს და არა ორივეს ერთდროულად და აღინიშნება A⊕B, ამრიგად

$A \oplus B = \{x \mid x \in A$ ან $x \in B$, მაგრამ არა ორივეს ერთდროულად$\}$.

ადვილი საჩვენებელია

$A \oplus B = \{x \mid (x \in A$ და $x \notin B)$ ან $(x \in B$ და $x \notin A)\}$.

A⊕B=(A∪B)-(A∩B)

მაგალითი. ვთქვათ A={1,2,4,6},B={0,3,4,6}, მაშინ

A⊕B=(A∪B)-(A∩B)={0,1,2,3,4,6}-{4,6}={0,1,2,3}

M სიმრავლის და მასში მოცემული შ ოპერაციების ერთობლიობას ეწოდება ალგებრა A=<*M,S*>, *M* - მატარებელია, *S* -სიგნატურაა

სიმრავლეთა ალგებრის კანონები

უნივერსალური სიმრავლის ბულიანისა და მასში მოცემული ოპერაციების ერთობლიობას ეწოდება A სიმრავლეთა ალგებრა

გაერთიანების, თანაკვეთის და დამატების ოპერაციებებისათვის სრულდება შემდეგი კანონები

კომუტატიურობა

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

ასოციაციურობა

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

დისტრიბუციულობა

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

იდემპოტენტურობა

7. $A \cup A = A$
8. $A \cap A = A$

დამატება

9. $\overline{\overline{(A)}} = A$
10. $A \cup \overline{A} = U$
11. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
12. $\overline{\emptyset} = U$
13. $\overline{U} = \emptyset$
14. $\overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A}$
15. $\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$ დე მორგანის კანონი (14,15)

უნივერალური სიმრავლის თვისებები

16. $A \cup U = U$
17. $A \cap U = A$

ცარიელი სიმრავლის თვისებები

18. A∪ ∅=A
19. A∩ ∅=∅

მახასიათებელი ფუნქციები

სიმრავლეების წარმოსადგენად ძალიან სასარგებლო არის მახასიათებელი ფუნქცია. თუ A არის ქვესიმრავლე უნივერსალური სიმრავლისა U , მაშინ A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია f_A განისაზღვრება ყოველი $x \in U$, როგორც

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

თეორემა. ქვესიმრავლების Aმახასიათებელი ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ თვისებებს:

$f_{A\bigcap B} = f_A f_B$, ანუ $f_{A\bigcap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$ ყველა x სთვის

$f_{A\bigcup B} = f_A + f_B - f_A f_B$, ანუ $f_{A\bigcup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$, ყველა x სთვის

$f_{A\oplus B} = f_A + f_B - 2 f_A f_B$, ანუ $f_{A\oplus B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x)$ ყველა x სთვის

სიმრავლეების და ქვესიმრავლების კომპიუტერული წარმოდგენა

მახასიათებელი ფუნქციების ერთერთი გამოყენება არის სიმრავლეებისა და ქვესიმრავლების კომპიუტერში წარმოდგენა. იმისათვის რომ წარმოვადგინოთ სიმრავლე კომპიუტერში, ამისათვის სიმრავლის ელემენტები უნდა განვალაგოთ მიმდევრობით. არ აქვს მნიშვნელობა განსაკუთრებული მიმდევრობის შერჩევას. როდესაც ვადგენთ $A = \{a, b, c, \ldots, r\}$ სიმრავლის სიას, ჩვენ ჩვეულებრივ ვუშვებთ A -ში ელემენტების არაგანსაკუთრებულ განლაგებას. მოდით გავაიგიუროთ A სიმრავლე $a, b, c, \ldots, r$ მიმდევრობასთან.

როდესაც უნივერსალური სიმრავლე U სასრულია, ვთქვათ $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ და A არის U - ს ქვესიმრავლე, მაშინ მახასიათებელი ფუნქცია უდრის 1 -ანს იმ ელემენტებზე, რომლებიც მიეკუთვნება A -ს და 0-ს, იმ ელემენტებზე, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან A -ს. ამრიგად f_A-ს შეესაბამება 0-ებისა და 1-ების n სიგრძის მიმდევრობა.

მაგალითი1.

ვთქვათ, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{4, 5, 6\}$. მაშინ $f_A(x)$ აქვს 1-ის მნიშვნელობა, როდესაც x არის 1, ან 2, და სხვა შემთხვევაში არის 0. აქედან $f_A(x)$ შეესაბამება მიმდევრობას 1,1,0,0,0,0. ანალოგიურად სასრულ სიმრავლეს 0,1,0,1,0,1 f_B წარმოადგენს , და 0,0,0,1,1,1 წარმოადგენს f_C .

ნებისმიერი n ელემენტიანი სიმრავლე შეიძლება **წარმოდგენილი** იყოს როგორც n ელემენტიანი მიმდევრობა, ისე რომ ყოველ მის ქვესიმრავლეს შეესაბამება 0-ებითა და 1-ებით შედგენილი n სიგრძის მიმდევრობა, რომელიც წარმოადგენს ამ ქვესიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას. ეს ფაქტი გვაძლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ უნივერსალური სიმრავლე კომპიუტერში როგორც n ელემენტიანი A მასივი. ნულებისა და ერთების მინიჭება მასივის ყოველ $A[k]$ პოზიციისთვის განსაზღვრავს U -ს ერთად ერთ ქვესიმრავლეს.

მაგალითი2. ვთქვათ $U=\{a, b, e, g, h, r, s, w\}$. 8 სიგრძიანი მასივი წარმოადგენს U, რადგან $A[k]=1,\ for\ \ 1\le k\le 8$.

1	1	1	1	1	1	1	1

თუ $S=\{a, e, r, w\}$, მაშინ

$$f_s(x)=\begin{cases}1 & if\ \ x=a,e,r,w\\ 0 & if\ \ x=b,g,h,s\end{cases}$$

1	0	1	0	0	1	0	1

გამონათქვამები და ლოგიკური ოპერაციები

გამონათქვამი

გამონათქვამი არის მსჯელობა, რომელზედაც შეიძლება ითქვას: ის ჭეშმარიტია თუ მცდარია, ერთდროულად ორივე არ ითქმის.
მაგალითი. რომელია აქედან გამონათქვამი?

ა.) დედამიწა მრგვალია
ბ.) 2+3=5
ც.) თქვენ საუბრობთ ინგლისურად?
დ.) 3-x=5
ე.) აიღეთ წიგნები
ფ.) ტემპერატურა პლანეტა ვენერაზე არის 1800°F
გ.) ხვალ მზე ამოვა

ამოხსნა

ა) და ბ) არიან გამონათქვამები, ჭეშმარიტად სრულდება. ც) არ არის გამონათქვამი, ის არის კითხვა. დ) არ არის გამონათქვამი, რადგან ის ჭეშმარიტია ან მცდარი, x მნიშვნელობის და მიხედვით.ე) არ არის გამონათქვამი, რადგან ის ბრძანებაა. ფ) არის გამონათქვამი, რადგან ახლა ჩვენ არ ვიცით, მაგრამ შესაძლებელია დადგენა იმისა, ეს ჭეშმარიტია თუ მცდარი.გ) არის გამონათქვამი, რადგან ის ჭეშმარიტია ან მცდარი, უნდა დაველოდოთ ხვალინდელ დღეს, ორივე ერთდროულად არ არის.

ლოგიკური კავშირები და შედგენელი გამონათქვამები

მათემატიკაში ასოებით x,y,z,... აღინიშნება ცვლადები, რომლებიც შეიძლება შეცვლილი იყვნენ ნამდვილი რიცხვებით, და ეს ცვლადები შეიძლება შეკავშირებულნი იყვნენ ცნობილი ოპერაციებით +, x, -,/. ლოგიკაში ასოებით p, q, r, ... აღინიშნებიან **პროპოზიციული ცვლადები**, რომლებიც შეიძლება შეიცვალოს გამონათქვამებით. ამრიგად , ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ p: დღეს მზე ანათებს. q: თბილა. შეიძლება გამონათქვამები და პროპოზიციული ცვლადები შეკავშირებულნი იყვნენ ლოგიკური კავშირებით რომლის შედეგად მივიღებთ ახალ, უფრო რთულ (შედგენილ) გამონათქვამებს. მაგალითად, რთული გამონათქვამის მისაღებად ჩვენ შეგვიძლია შევაკავშიროთ ეს წინა ორი გამოთქვამი კავშირით და ` and'' , მივიღებთ: დღეს მზე ანათებს და თბილა.

რთული (შედგენილი) გამონათქვამის ჭეშმარიტობა დამოკიდებულია შემადგენელი გამონათქვამების ჭეშმარიტებაზე და იმ კავშირების ტიპებზე, რომლებიც არიან გამოყენებულნი. განვიხილოთ ყველაზე მნიშვნელოვანი კავშირები:

უარყოფა, რომელიც აღინიშნება ¬ ნიშნით, არის გამონათქვამებზე ყველაზე უმარტივესი ოპერაცია. ეს ნიშანი დაიწერება გამონათქვამის წინ : თუ p გამონათქვამია, მაშინ $\neg p$ იკითხება "არა p". $\neg p$ ჭეშმარიტია, როდესაც p
მცდარია; $\neg p$ მცდარია, როდესაც p ჭეშმარიტია.

კონიუნქცია : "და". p და q გამონათქვამების კონიუნქცია აღინიშნება როგორც $p \wedge q$. გამონათქვამი $p \wedge q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი p და qჭეშმარიტია.

დიზიუნქცია : "ან". p და q გამონათქვამების დიზიუნქცია აღინიშნება
როგორც $p \vee q$. გამონათქვამი $p \vee q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა
ორივე გამონათქვამი p და q მცდარია.

იმპლიკაცია : "თუ p , მაშინ q ", აღნიშვნაში p → q. გამონათქვამი p → q მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია და q მცდარია.

ექვივალენტობა : "p მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა q" , აღვნიშვნაში $p \leftrightarrow q$. გამონათქვამი $p \leftrightarrow q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან ორივე p და qჭეშმარიტია, ან ორივე p და q მცდარია.

სიმბოლოებს $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ჩვენ ვუწოდებთ **პროპოზიციულ კავშირებს.** მარტივი გამონათქვამებისაგან (პროპოზიციებისაგან) პროპოზიციული კავშირების საშუალებით აიგება უფრო რთული გამონათქვამები, რომლებსაც ჩვენ ვუწოდებთ **პროპოზიციულ ფორმულებს.** უფრო ზუსტად :

(1) პროპოზიციული ასოები p1, p2, p3, …- პროპოზიციული ფორმულებია;

(2)თუ α და β პროპოზიციული ფორმულებია, $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ და $(\alpha \leftrightarrow \beta)$– პროპოზიციული ფორმულებია;

(3) სხვა პროპოზიციული ფორმულები არ არის.

ზოგადად შედგენილი გამონათქვამები შეიძლება შესდგებოდეს ბევრი კომპონენტისაგანაც, სადაც თვითოეული მათგანი არის გამონათქვამები, წარმოდგენილი პროპოზიციული ცვლადებით. გამონათქვამი s: $p \vee (q \wedge (p \vee r))$, შეიცავს სამ პროპოზიციულ ცვლადს p,q,r, რომლებიც დამოუკიდებლად შეიძლება იყვნენ ჭეშმარიტი ან მცდარი. აქ სულ 2^3 ანუ 8 შესაძლო კომბინაციაა p,q,r, ჭეშმარიტი მნიშვნელობებისა და ჭეშმარიტობის ცხრილმა s -სთვის უნდა მოგვცეს s გამონათქვამის ჭეშმარიტობა ან მცდარობა ყველა ამ შემთხვევისთვის. თუ s გამონათქვამი შეიცავს n კომპონენტს გამონათქვამებისა, მაშინ ჭეშმარიტობის ცხრილში s -სთვის საჭირო იქნება 2^n სტრიქონი.
რთულ გამოსახულებაში გამოიყენება ეგრეთწოდებული **უპირატესობითი წესები.** ზოგადად, ყოველ კავშირს გააჩნია რომელიღაც ხარისხის უპირატესობა, და კავშირებს უფრო მაღალი ხარისხის უპირატესობით ენიჭება უფრო ძლიერი შეკავშირება ვიდრე უფრო დაბალი ხარისხის მქონე კავშირებს.

¬ კავშირს გააჩნია უმაღლესი ხარისხის უპირატესობა. მაშასადამე, $\neg P \vee Q$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $(\neg P) \vee Q$, და არა როგორც $\neg(P \vee Q)$.

ბინარული კავშირების შემთხვევაში, უმაღლესი უპირატესობა ენიჭება ∧-ს, შემდეგ კი, რიგითობის მიხედვით ∨, →, ↔ -ს. მაგალითად, გამოსახულებაში $P \wedge Q \vee R$, ∧-ს აქვს უპირატესობა ვიდრე ∨ ქვეგამოსახულების ფორმირებისას; ე. ი., $P \wedge Q \vee R$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $(P \wedge Q) \vee R$. ანალოგიურად, $P \rightarrow Q \vee R$ უნდა იყოს გაგებული როგორც P

→ ($Q \vee R$), იმიტომ რომ ∨ აქვს უპირატესობა → -თან შედარებით. ↔ აქვს უმცირესი უპირატესობა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ P ↔ Q → R უნდა იყოს გაგებული როგორც P ↔ (Q → R).

პროპოზიციული ცვლადებისათვის მნიშვნელობების მინიჭების საფუძველზე,გამონათქვამის ჭეშმარიტობის ცხრილი გვაძლევს გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას. ყველა ლოგიკური კავშირები განისაზღვრება ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით.

ლოგიკური კავშირების ცხრილი

P	Q	¬P	¬Q	P ∧Q	P ∨Q	P →Q	P ↔Q
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T

სტრუქტურას (პროპოზიციული ცვლადები, ∧, ∨ ,¬) აქვს ბევრი იგივე თვისებები რაც სტრუქტურას (სიმრავლე, ∪,∩,‾)

ჭეშმარიტების ცხრილები გვაძლევენ საშუალებას კლასიფიცირებულ იქნას ლოგიკური გამოსახულებები შემდეგნაირად:

ლოგიკურ გამოსახულებას ეწოდება **ტავტოლოგია,** თუ ის ჭეშმარიტია მინიჭებულ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო განაწილებისათვის.

ლოგიკურ გამოსახულებას ეწოდება **წინაამღდეგობა,** თუ ის მცდარია მინიჭებულ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო განაწილებისათვის.

ლოგიკურ გამოსახულებას, რომელიც არც ტავტოლოგიაა ად არც წინაამღდეგობა, ეწოდება **კონტინგენტი.**

მაგალითები

ცხრილი 1

P → (P∨Q)-ს ჭეშმარიტების ცხრილი – ტავტოლოგია

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ცხრილი 2

(P ∧Q)→ P -ს ჭეშმარიტების ცხრილი - ტავტოლოგია

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

ცხრილი 3
წინაამღდეგობის ჭეშმარიტების ცხრილი

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	F
F	T	F

ცხრილი 4
კონტინგენტი ჭეშმარიტების ცხრილი

$P \quad Q$	$P \leftrightarrow Q$
T T	T
T F	F
F T	F
F F	T

კონიუნქციის, დიზიუნქციის და უარყოფის კანონები

თეორემა. ოპერაციებს პროპოზიციულ ცვლადებზე აქვს შემდეგი თვისებები

კომუტაციურობის თვისებები

1. $P \vee Q \equiv Q \vee P$
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

ასოციაციურობის თვისებები

3. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
4. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

დისტრიბუციულობის თვისებები

5. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv P \vee (Q \wedge R)$
6. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv P \wedge (Q \vee R)$

იდემპოტენტურობის თვისებები

7. $P \vee P \equiv P$
8. $P \wedge P \equiv P$

უარყოფისთვისებები

9. $\neg(\neg P) \equiv P$ (ორმაგი უარყოფის კანონი)
10. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg$ (დე მორგანის კანონი)
11. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ (დე მორგანის კანონი)

მესამის გამორიცხვის კანონი

$P \lor \neg P \equiv T$

წინაამღდეგობრიობის კანონი

$P \land \neg P \equiv F$

იგივეობის კანონი

$P \lor F \equiv P$

$P \land T \equiv P$

დომინირების კანონი

$P \lor T \equiv T$

$P \land F \equiv F$

ამოცანა კრიპტოგრაფიიდან

ინფორმატიკაში არჩეული იქნა **ინფორმაციის წარმოდგენის ორობითი ფორმა.** ეს ფორმა გულისხმობს, რომ ნებისმიერი სახის ინფორმაცია წარმოდგენილი უნდა იყოს მხოლოდ ორი სიმბოლოს გარკვეული მიმდევრობის სახით. ეს ორი სიმბოლო შეიძლება იყოს ნებისმიერი ორი ციფრი ან ნებისმიერი ორი სიმბოლო, მაგრამ სიმარტივისათვის არჩეული იქნა ორი ციფრი 0 და 1.

პრაქტიკაში ინფორმაციის კოდირება ხორციელდება მარტივი მეთოდით. ეს მეთოდი დაფუძნებულია იმაზე, რომ ორობითი რიცხვების მიმდევრობაში თითოეულ ციფრს შეიძლება გააჩნდეს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა: 0, 1. ორობითი რიცხვის ორთანრიგიან ჩანაწერში შეიძლება კოდირებული იქნას უკვე ორჯერ მეტი განსხვავებული მნიშვნელობა (00, 01, 10, 11) ერთთანრიგიან ჩანაწერთან შედარებით. ჩანაწერი თუ იქნება სამთანრიგიანი, მაშინ მასში კოდირებული განსხვავებული მდგომარეობების (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) რაოდენობა იქნება კიდევ ორჯერ მეტი ორთანრიგიან ჩანაწერთან შედარებით. ამ მიდგომით ჩანაწერისათვის ყოველი ახალი თანრიგის დამატებით მასში შესაძლებელი გახდება ორჯერ მეტი ინფორმაციის კოდირება.

თანრიგების რაოდენობა	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
განსხვავებული მნიშვნელობების რაოდენობა	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

თუ გამოვიყენებთ ცხრილის მონაცემებს, გაადვილდება მოვლენების ნებისმიერი სიმრავლის კოდირება. მაგალითად, თუ გვინდა ინგლისური ანბანის 26 ასოს კოდირება, ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ 5 თანრიგიანი კოდები, რადგანაც 5 თანრიგიანი კოდების საშუალებით შეიძლება კოდირებული იქნას 32 განსხვავებული მდგომარეობა. მაგრამ, თუ დაგვჭირდება ქართული ანბანის ასოების კოდერება, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ უკვე კოდების 6 თანრიგიანი ჩანაწერები, რადგანაც 33 ასოსათვის 5 თანრიგიანი კოდირების სისტემაში აღარ დარჩება ადგილი. 6 თანრიგიანი კოდირების დროს კი შესაძლებელი იქნება 64 განსხვავებული სიმბოლოს კოდირება.

თანამედროვე ინფორმაციულ დოკუმენტებში ხშირად ერთდროულად გამოიყენება ქართული და ინგლისური ანბანის ასოები, სასვენი ნიშნები, მათემატიკური ნიშნები, სპეციალური სიმბოლოები. საერთო ჯამში კოდირებისათვის სიმბოლოების რაოდენობა უკვე საკმაოდ დიდია, 250-მდე. ამიტომ, ყველა საჭირო სიმბოლოს კოდირებისათვის უკვე გამოიყენება კოდირების 8 თანრიგიანი სისტემა, ანუ ყოველი სიმბოლოს კოდი შეიცავს `0' და `1' ციფრების 8 თანრიგიან მიმდევრობას. ამ გზით შესაძლებელი იქნება 28=256 სიმბოლოს კოდირება.

აქ უნდა აღინიშნოს, რომ კოდირების ასეთი სისტემა გამოიყენება მაშინ, როდესაც მოითხოვება ინფორმაციის მხოლოდ კოდირება და არ ისმება ისეთი ამოცანები, როგორიცაა გადაცემული ინფორმაციის საიმედობის გაზრდა შეცდომების აღმოჩენის ხარჯზე, გადაცემული ინფორმაციის საიდუმლოობის უზრუნველყოფა. ასეთი მოთხოვნების შემთხვევაში კოდირების სისტემაში კოდების სიგრძე გამოდის უფრო გრძელი, საჭირო ხდება სპეციალური დამატებითი თანრიგების შემოტანა.

მაგალითი. რიცხვის 53 სახე ორობით სისტემაში არის $(110101)_2$.

$(110101)_2=32+16+4+1=53$.

იმისათვის რომ გამოვიყენოთ თვლის ოცდაექვსითი სისტემა ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ინგლისური ალფავიტის ასოებით A,B,….,ძ იმისათვის რომ წარმოვადგინოთ თანრიგები 0,1…,25. ამგვარად ნებისმიერი ტექსტი შეიძლება ჩაიწეროს მთელი რიცხვებით 26 –ს ფუძით. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია ´´TWO” -ის წარმოდგენა თვლის ოცდაექვსით სისტემაში $(T26^2)+(W26)+O=(19x676)+(22x26)+14=13430$.

კრიპტოგრაფიის ერთი მაგალითი

კრიპტოგრაფიის ერთ ერთ მაგალითად განვიხილოთ აღსანიშნავი კოდი სერ Fფრანსის Bბეიკონის, ინგლისელი მწერლის და ფილოსოფოსის. კოდირებით არის გაჯერებული მთელი საინფორმაციო ტექნოლოგიები და წარმოადგენს ერთ-ერთ ცენტრალურ საკითხს პროგრამირების ამოცანების გადაწყვეტაში. დავუშვათ, გვინდა გზავნილის FLEE NOW კოდირება. ამისათვის თავდაპირველად, გზავნილის ყოველი ასოს პოზიცია ინგლისურ ალფავიტში ჩავწეროთ 2-ის ფუძით.პირველი ასო A იყოს 0-ვან პოზიციაში და ბოლო ასო Z იქნება 25-ე პოზიციაში. გვექნება შემდეგი ცხრილი

5 11 4 4 13 14 22
F L E E N O W
00101 01011 00100 00100 01101 01110 10110

რადგანაც F არის მე-5 პოზიციაში, მისი ბინარული წარმოდგენა არის $(00101)_2$, და ასე შემდეგ . ეხლა შევარჩიოთ მასთან კავშირში არ მყოფი ფიქტიური გზავნილი, ისეთი რომ იყოს ზუსტად 5-ჯერ მეტი სიგრძისა ვიდრე ჩვენი გზავნილი FLEE NOW.

ფიქტიური გზავნილის ასოები შეუსაბამოთ ცხრილის მესამე სტრიქონში 0-ს და 1-ს. შევთანხმდეთ ფიქტიური გზავნილის ასოები დავწეროთ ერთ ფონტში (ვთქვათ Times Roman) თუ ის შეესაბამება ცხრილში 0-ს, და სხვა ფონტით (ვთქვათ Times Roman Italic) თუ ის შეესაბამება 1-ს (ბეიკონმა შეარჩია ეს ფონტები, რადგან უფრო მეტად მსგავსებია). თუ ფიქტიური გზავნილად განვიხილავთ ვთქვათ: ONCE UPON A TIME IN THE WEST THERE WAS A TOWN, მაშინ ჩვენ იგი უნდა ჩავწეროთ შენდეგ ნაირად:

F					L					E					E					N					O					W				
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
O	**N**	***C***	**E**	***U***	**P**	***O***	**N**	***A***	***T***	**I**	**M**	***E***	**I**	**N**	**T**	**H**	***E***	**W**	**E**	**S**	***T***	***T***	**H**	***E***	**R**	***E***	***W***	***A***	**S**	***A***	**T**	***O***	***W***	**N**

ანუ გზავნილი ასეთნაირად ჩაიწერება:

ON*C*E *U*PON *A* *T*IM*E* IN TH*E* WES*T* *T*HER*E* *WA*S *A* T*OW*N

შევნიშნოთ რომ, როდესაც მესიჯის ასოები განლაგებულია ცხრილის მე 3 სტრიქონში, ფორმა გზავნილის ასოებისა ჩაწერილს არაიტალიკურად 0-ის მიმართ და იტალიკურად 1-ზის მიმართ, გვაძლევს საშუალებას მესიჯის დეკოდირების (ფიქტიური ტექსტი→ ორობითი რიცხვები →მესიჯი)

მაგალითი. დავუშვათ გვინდა გავშიფროთ ფიქტიური გზავნილი, ბეიკონის კოდის გამოყენებით:
*N*OW *IS* *T*HE *TI*ME FOR *A*LL *GOO*D M*EN* T*O* AI*D* T*HE* *C*OUNTR*Y*

რადგან აქ 40 ასოა, ნამდვილი გზავნილი უნდა იყოს 8 ასოიანი. განვალაგოთ ფიქტიური გზავნილი , 5 -5-თი ასოთი შემდეგ ცხრილში, შემდეგ ჩამოვწეროთ ორობითი თანრიგები, 1 გამოვიყენოთ იტალიკურისთვის და 0 ჩვეულებრივი ტექსტისთვის.

N	O	W	*I*	S	*T*	H	E	*T*	*I*	M	E	F	O	R	*A*	L	L	*G*	*O*
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
18-S					19 -T					0-A					17-R				

O	D	M	*E*	*N*	T	*O*	A	I	*D*	T	*H*	*E*	*C*	O	U	N	T	R	*Y*
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
19-T					9-J					14-O					1-B				

ბინარული წარმოდგენები მე-2 სტრიქონში შეესაბამებაA შესაბამისად რიცხვებს 18,19,0,17,19,9,14 და 1, ამიტომ წარმოადგენს ასოებს STARTJOB. ესეიგი დეკოდირებული გზავნილი არის STARTJOB.

ესეიგი, თუ გამოვიყენებთ საკმარისად მსგავს ფონტებს, არ გამოჩნდება რომ ის არის გზავნილის კოდი. მაშასადამე, ეს არის მაგალითი რომელიც აგრეთვე სტეგანოგრაფიის ილუსტრაციას ახდენს. თანამედროვე ვერსიები შეიცავენ დამალულ ინფორმაციას

ციფრული ფოტოგრაფიის ბიტების მასივებში.ერთ ერთი გამოყენება აქვს წყლის ნიშნის გაკეთებაში საავტორო უფლებების დასაცავად.

ფსევდოკოდის ვერსიები

განვიხილოთ ორი დადებითი მთელი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ფსევდოკოდის პროგამა. ეს პროცედურა განსხვავდება ევკლიდის ალგორითმისაგან.

FUNCTION GCD(X,Y)

1. **WHILE (X≠Y)**
   a. **IF (X>Y) THEN**
      1. $X \leftarrow X - Y$
   b. **ELSE**
      1. $Y \leftarrow Y - X$
2. **RETURN (X)**

END OF FUNCTION GCD

მაგალითი. გამოიყენეთ ფსევდოკოდი 190 და 34 უდიდესი საერთო გამყოფის მოსაძებნად. მოცემულია ცხრილი სიდიდეებისათვის X, Y, X-Y, Y-X.

X	Y	X-Y	Y-X
190	34	156	
156	34	122	
122	34	88	
88	34	54	
54	34	20	
20	34		14
20	14	6	
6	14		8
6	8		2
6	2	4	
4	2	2	
2	2		

რადგან ბოლო მნიშვნელობა X არის 2, უდიდესი საერთო გამყოფი 190 და 34 არის 2.

თვლის სისტემები

რადგან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ შეუძლებელია ყოველი მათგანის წარმოსადგენად შესაბამისი განსხვავებული სიმბოლოს შერჩევა.

ამ პრობლემის გადასაჭრელად შემოაქვთ ე. წ. პოზიციური სისტემე¬ბი, რაც გულისხმობს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის წარმოდგენას სასრული რაოდენობა სიმბოლოთა მეშვეობით.

რიცხვის ჩასაწერად გამოყენებულ სიმბოლოებს ციფრები ეწოდება, ხოლო ჩანაწერში ციფრის ყოველ ადგილს კი პოზიცია. რიცხვის პოზიციურ სისტემაში წარმოდგენისას ერთი და იგივე ციფრით აღნიშნული სიდიდე დამოკიდებულია, წარმოდგენაში მის მიერ დაკავებულ პოზიციაზე. პოზიციის გადანომვრა ხდება მარჯვნიდან მარცხნივ დაწყებული ნულიდან.

იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ძირითად სიმბოლოს (ციფრს) ავირჩევთ - ორს, რვას, ათს, თექვსმეტს და ა. შ. გვექნება რიცხვის ჩაწერის 'ორ¬ობითი', 'რვაობითი', 'ათობითი', 'თექვსმეტობითი' და ა. შ. სისტემები.

ყოველდღიურ ცხოვ¬რე¬ბაში გამოყენებულ თვლის სისტემას ათობითი ეწოდება, რადგან მას¬ში ათი ციფრია: 0-დან 9-მდე.

ციფრთა რაოდენობას სისტემის ფუძე ეწოდება. ან...ა0 ციფრებისაგან წარმოდგენილი x რიცხვი შესაძლებელია ჩაიწეროს სისტემის p ფუძის მეშვეობით შემდეგნაირად:

$x=a_n*p^n+a_{n-1}*p^{n-1}+ a_1*p^1+a_0*p^0$.

როგორც ვხედავთ მოცემული წარმოდგენა წარმოადგენს რიცხვის ციფრებისა და ფუძის ხარისხების ნამრავლთა ჯამს, სადაც ხარისხის მაჩ¬ვენებელი წარმოადგენს რიცხვში შესატყვისი ციფრის პოზიციის ნო¬მერს.

მაგალითად, $1035_{10}=1*10^3+0*10^2+3*10^1+5*10^0$.

ორობით სისტემაში ნებისმიერი რიცხვის ჩაწერისას ციფრებად გამოიყენება ორი სიმბოლო: 0 და 1.

ტრანსლირებული, ანუ მანქანის ენაზე ჩაწერილი, პროგრამა წარმოადგენს თვლის ორობითი სისტემის საბაზო 0 და 1 ციფრების მიმდევ¬რობას. განვიხილოთ თვლის სხვადასხვა სისტემაში წარმოდგენებს შორის კავშირი.

რიცხვის ათობითიდან ორობით სისტემაში გადასაყვანად ეს რიცხვი მიმდევრობით უნდა გაიყოს ახალ ფუძეზე (2-ზე). გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთების შებრუნებული რიგით აღებული მიმდევრობა, გვაძლევს ათობითი რიცხვის სახეს ორობით სისტემაში.

ე. ი. $4_{10}=100_2$

ამ წესის გათვალისწინებით, რიცხვები 2, . . ., 7 ორობით სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$2_{10}=10_2$, $3_{10}=11_2$, $4_{10}=100_2$, $5_{10}=101_2$, $6_{10}=110_2$, $7_{10}=111_2$.

რიცხვის ორობითი ჩანაწერი შეიცავს ციფრთა გაცილებით მეტ რაოდენობას, ვიდრე ათობითი, რაც რიცხვის ზრდასთან ერთად უფრო შესამჩნევი ხდება. გადაყვანის

ოპერაციების შემცირების მიზნით 10-ობითი სისტემიდან რიცხვი ჯერ გადაჰყავთ 8-ობით (23) სისტემაში, ხოლო შემ¬დეგ 8-ობითის თითოეულ ჩანაწერს ცვლიან შესაბამისი 2-ობითი ჩა-ნაწერით.

მაგალითად

$962_{10}=1702_8=1\ 111\ 000\ 010_2$

პირიქით, რიცხვის ორობითი წარმოდგენიდან ათობითში გადასაყვანად საჭიროა, იგი გაიშალოს ფუძის, ე. ი. 2-ის, ხარისხების ჯამის სახით:

გაცილებით შემცირდება გამოთვლები, თუ ზემოთ აღნიშნულ ხერხს მივმართავთ:

თვლის თექვსმეტობით სისტემაში გამოიყენება ათი ციფრი და ლათინური ანბანის პირველი ექვსი ასო: A, B, C, D, E, F. სადაც, A-თი კოდირებულია 10, B-თი 11 და ა. შ. იმისათვის, რომ თექვსმეტობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი გაირჩეს სხვა სისტემის რიცხვებისაგან, რიცხვის წინ იწერება 0x სიმბოლო. ამრიგად, 0x11 და11 სხვადასხვა რიცხვებია. თვლის თექვსმეტობითი სისტემა ფართოდ გამოიყენება გრაფიკული ინფორმაციის წარმოსად¬გენად.

მაგალითი: გადავიყვანოთ რიცხვი 4A3F ათობით სისტემაში.

განმარტების ძალით 4A3F= 4*163+A*162+3*16+F. A შევცვალოთ 10-ით, F კი 15 –ით. მივიღებთ 4*163+10*162+3*16+15= 19007.

კომპიუტერის ოპერატიული მეხსიერება წარმოადგენს ელემენტარული უჯრედების, ანუ ბაიტების ერთობლიობას. ბაიტები განკუთვნილია ინფორმაციის შესანახად. ინფორმაციის ერთეული ბაიტი შედგება რვა ბიტისაგან (თანრიგისაგან). თითოეული ბიტის შინაარსი შეიძლება იყოს ციფრი 0 ან 1-თი. ამ¬რიგად, ყველაზე დიდი რიცხვი, რომელიც შე¬იძ¬ლება შენახული იქნეს ერთ ბაიტში, წარმოდგება შემდეგი სახით:

$11111111_2=377_8=(3*64+7*8+7)_{10}=192+56+7=255;$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მეხსიერების ორ ბაიტიანი მონაკვეთით წარმოდგენილი ყველაზე დიდი რიცხვი იქნება 65535 და ა.შ.

ფუნქცია

ფუნქცია $f : A \rightarrow B$ განისაზღვრება თავისი **დომეინის სიმრავლით** A, **კო-დომეინის სიმრავლით** B, და წესით, რომელიც ყოველ ელემენტ a -ს A - დან, შეუსაბამებს ერთადერთ ელემენტ $f(a)$--ს B-დან. $f(a)$--ს უწოდებენ a -ს სახეს, მაშინ როდესაც a -ს ეწოდება $f(a)$--ს **წინარე სახეს.** f–ის მნიშვნელობათა არე

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

ზოგიერთი სასარგებლო ფუნქციები

განვიხილოთ ზოგიერთი ფუნქციები, რომლებიც განსაკუთრებით სასარგებლო არიან კომპიუტერულ მეცნიერებაში

Floor და **Ceiling** ფუნქციები

განვიხილავთ ორ მნიშვნელოვან ფუნქციას, რომლებიც ნამდვილ რიცხვებს ხდიან მთლიანად ან მეტობით ან ნაკლებობით. **Floor** ფუნქციას აქვს სახე $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ და განისაზღვრება როგორც floor(x) უახლოესი მთელი რიცხვი რომელიც ნაკლებია ან ტოლი x. მაგალითად, floor (8)=8,
floor 8.9)=8 და floor (3.5)=-4. მოკლე აღნიშვნა **Floor** ფუნქციის არის $\lfloor x \rfloor$.

Ceiling ფუნქციას აგრეთვე აქვს სახე $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ და განისაზღვრება როგორც ceiling (x) უახლოესი მთელი რიცხვი რომელიც მეტია ან ტოლი x. მაგალითად, ceiling (8)=8,ceiling (8.9)=9 და ceiling (-3.5)=-3. მოკლე აღნიშვნა **Ceiling** ფუნქციის არის $\lceil x \rceil$.
ისმის კითხვა, შეიძლება ვიპოვოთ მათ შორის კავშირი? მაგალითად $\lfloor x \rfloor = \lceil x - 1 \rceil$? ცხადია, რომ თუ x არის მთელი, მაშინ დებულება მცდარია. მაგრამ თუ x არ არის მთელი, მაშინ არსებობს რაღაც მთელი n, ისეთი რომ $n < x < n + 1$ და შესაბამისად, აგრეთვე $n - 1 < x - 1 < n$. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\lfloor x \rfloor = n = \lceil x - 1 \rceil$. ამრიგად , შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\lfloor x \rfloor = \lceil x - 1 \rceil$მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \notin Z$.

Floor და Ceiling ფუნქციების თვისებები

a. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
b. $\lceil x - 1 \rceil = \lceil x \rceil - 1$.
c. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \in Z$.
d. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \notin Z$.
e. $\lfloor x \rfloor = \lceil x - 1 \rceil$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \notin Z$.

Mod ფუნქცია

თუ a და b მთელებია სადაც b>0, მაშინ ნაშთი a ს გაყოფისა b ზე აღინიშნება
a mod b .
a=bq+r სადაც $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < b$,
q არის განაყოფი და r ნაშთი a ს გაყოფისა **b** ზე.
თუ დავაფიქსირებთ n დადებით მთელ რიცხვს, მაშინ
x mod n ღებულობს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან N_n_={0,1,…,n-1}, რომელიც არის შესაძლო ნაშთების სიმრავლე, რომელიც მიიღება გაყოფით რომელიმე მთელი x –სა n-ზე.

ამრიგად, ყოველი ფიქსირებული n -თვის f ფუნქციას, განსაზღვრულს f(x)=x mod n აქვს სახე $Z \to N_n$

ფორმულა mod -ისთვის

შეიძლება განისაზღვროს ფორმულა **a mod b** **a** და **b** მნიშვნელობებით? შესაძლებელია. გვაქვს შემდეგი ფორმულა

a mod b=r=a-bq, სადაც $0 \le r \le b$.

ჩვენ გვექნება ფორმულა **a mod b** თუ შევძლებთ მიღებას ფორმულისა **q** განაყოფისათვის **a** და **b** საფუძველზე. დავიწყოთ უტოლობით $\mathbf{0} \le \mathbf{r} < b$ და აქედან მივიღებთ უტოლობების მიმდევრობას.

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{r} < b.$$
$$-\boldsymbol{b} < r \le -0,$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} < a - r \le -a,$$
$$\frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{b}} \le -\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}},$$
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} - \mathbf{1} < \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{b}} \le -\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}},$$

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} - \mathbf{1} < q \le -\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}},$ რადგან $\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{b}}.$

რადგან **q** არის მთელი, ბოლო უტოლობა გულისხმობს რომ **q** შეიძლება ჩაწერილი იქნეს როგორც **Floor** გამოსახულება

$$\boldsymbol{q} = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \right\rfloor$$

რადგან

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{q},$ გვექნება შემდეგი წარმოდგენა **r** -თვის, როცა **b**>0.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \left\lfloor \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \right\rfloor$$

Mod ფუნქციის თვისებები

a. **x mod n =y mod n თუ n ყოფს x-y, iff (x-y)mod n =0.**
b. **(x+y) mod n=((x mod n)+(y mod n))mod n**
c. **(xy) mod n=((x mod n)(y mod n))mod n**

გარდაქმნა ათობითი სისტემიდან ორობით სისტემაში

როგორ შეგვიძლია გარდავქმნათ რიცხვები ათობითი სისტემიდან ორობით სისტემაში? მაგალითად, ათობითი 53 აქვს ორობითი წარმოდგენა 110101_2. ჩვენი მაგალითისთვის 53მოდ2=1. გამოვიყენოთ ორზე გაყოფის ალგორითმი

53=2x26+1
26=2x13+0
13=2x6+1
3=2x1+1
1=2x0+1
0. (done)

მნიშვნელოვანია, სევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი x წარმოიდგინება შემდეგი სახით
$x=2\lfloor x/2\rfloor+x \bmod 2$.
ალგორითმი გარდაქმნისა x ათობითი სისტემიდან ორობით სისტემაში შესაძლებელია განხორციელდეს **Floor** და **Mod** ფუნქციებით.
$53=110101_2$

დამტკიცების ტექნიკა

დისკრეტული სტრუქტურების კურსში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია დამტკიცების ტექნიკას. განვიხილოთ დამტკიცებების ზოგიერთი ტექნიკა.

ვიტყვით რომ **q ლოგიკურად გამომდინარეობს p**-დან თუ იმპლიკაცია $p \Rightarrow q$ არის ტავტოლოგია. p და q შეიძლება იყვნენ შედგენილი გამონათქვამები, რომლებიც შეიცავენ ნებისმიერი რაოდენობის პროპოზიციულ ცვლადებს. დავუშვათ, იმპლიკაცია $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ არის ტავტოლოგია. მაშინ იმპლიკაცია იქნება ჭეშმარიტი მიიუხედავად იმისა ჭეშმარიტია თუ არა შემავალი კომპონენტები. ამ შემთხვევაში , ვიტყვით რომ q **ლოგიკურად** გამომდინარეობს $p_1, p_2, \ldots, p_n$. როდესაც q ლოგიკურად გამომდინარეობს $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ჩვენ ვწერთ

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

სადაც სიმბოლო $\therefore$ აღნიშნავს ¨ **ამიტომ** ¨. ეს ნიშნავს, იმას რომ თუ ვიცით, რომ p_1 ჭეშმარიტია , p_2 არის ჭეშმარიტი და p_n ჭეშმარიტია, მაშინ გვეცოდინება რომ **q** არის ჭეშმარიტი.

ფაქტიურად, ყველა მათემატიკური თეორემები შედგება ასეთი ტიპის იმპლიკაციისაგან

$$\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\right) \Rightarrow q$$

p_i უწოდებენ **ჰიპოტეზებს** ან **წინამძღვრებს,** და **q** უწოდებენ **დასკვნას.** "თეორემის დამტკიცება" ნიშნავს ჩვენებას, რომ იმპლიკაცია არის ტავტოლოგია. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ არ ვცდილობთ გვეჩვენებინა რომ q (დასკვნა) არის ჭეშმარიტი, მაგრამ მხოლოდ იმას ვგულისხმობთ, რომ ისეთი q იქნება ჭეშმარიტი, თუ ყველა p_i იქნება ჭეშმარიტი. ამის გამო, მათემატიკური მტკიცებულებანი იწყება ხშირად გამონათქვამიდან "დავუშვათ, რომ $p_1, p_2, \ldots,$ და p_n არიან ჭეშმარიტნი " და ვასკვნით გამონათქვამით "ამიტომ q არის ჭეშმარიტი,". დამტკიცება არ აჩვენებს რომ q არის ჭეშმარიტი, ის მხოლოდ იმას აჩვენებს რომ თუ ყველა p_i არის ჭეშმარიტი, მაშინ q–ც უნდა იყოს ჭეშმარიტი.

მოვიყვანოთ ზოგიერთი ფუნდამენტალური დამტკიცების ტექნიკა და მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითები ყოველი ტექნიკისთვის.

ერთერთი მნიშვნელოვანი დასკვნის გამოტანის წესი არის

$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

მოდუს პონენს.

ესეიგი, თუ p ჭეშმარიტია და $p \Rightarrow q$ ჭეშმარიტია, მაშინ q–ც ჭეშმარიტია.

მაგალითი.
სამართლიანია შემდეგი არგუმენტი?

მოწევა სასარგებლოა
თუ მოწევა სასარგებლოა, მაშინ სიგარეტი გამოწერილია ექიმის მიერ

სიგარეტი გამოწერილია ექიმის მიერ

ამოხსნა
ეს არგუმენტი დასაშვებია რადგან არის **მოდუს პონენს** -ის ფორმის. მაგრამ დასკვნა არის მცდარი. შევნიშნოთ, რომ პირველი წინამძღვარი **p**: მოწევა სასარგებლოა არის მცდარი. მეორე წინამძღვარი $p \Rightarrow q$ არის ჭეშმარიტი და კონიუნქცია $\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right)$ ამ ორი წინამძღვრისა არის მცდარი.

სხვა არაპირდაპირი დამტკიცების ტექნიკა არის დამტკიცება საწინააღმდეგოდან. ეს მეთოდი ემყარება ტავტოლოგიას .

ერთი მნიშვნელოვანი მტკიცებულობის ტექნიკა , რომელიც არის მაგალითი **არაპირდაპირი (ირიბი) მეთოდის** დამტკიცებისა, გამომდინარეობს

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow (\neg p)$$

ტავტოლოგიიდან.

მაშასადამე დასკვნის წესი

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

არის სამართლიანი. არაფორმალურად, ეს გამოსახავს იმას, რომ თუ p გამონათქვამიდან გამომდინარეობს მცდარი გამონათქვამი q , მაშინ p უნდა იყოს მცდარი. ეს ხშირად გამოიყენება იმ შემთხვევებისათვის სადაც q არის აბსურდი, ან წინააღმდეგობა, ე.ი გამონათქვამი არის ყოველთვის მცდარი.

იმისათვის რომ დავამტკიცოთ საწინააღმდეგოდან, ვგულისხმობთ რომ ჩვენ გვინდა ვაჩვენოთ, რომ გამონათქვამი q ლოგიკურად გამომდინარეობს გამონათქვამებიდან. დაუშვათ, რომ $\neg q$ არის ჭეშმარიტი (რაც იმას ნიშნავს,რომ q არის მცდარი) როგორც დამატებითი ჰიპოტეზა, და აგრეთვე $p_1, p_2, \ldots, p_n$ არიან ჭეშმარიტი. თუ $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge (\neg q)$ ამ გაფართოებული ჰიპოტეზიდან გამომდინარეობს წინააღმდეგობა, მაშინ ერთ ერთი $p_1, p_2, \ldots, p_n, \neg q$ გამონათქვამი , მაინც უნდა იყოს მცდარი. ეს ნიშნავს,რომ თუ $p_1, p_2, \ldots, p_n$,არის ჭეშმარიტი, მაშინ $\neg q$ უნდა იყოს მცდარი, ე.ი q უნდა იყოს ჭეშმარიტი. მაშასადამე გამომდინარეობს $p_1, p_2, \ldots, p_n$. ეს არის დამტკიცება საწინააღმდეგოდან.

პირობითი მტკიცება (Conditional Proof)

პირობიდან გამომდინარე დამტკიცება (Conditional Proof , if A then B)

ბევრი დებულება რომელიც გვინდა დავამტკიცოთ არის პირობითი ფორმის ან შეიძლება ჩამოყალიბდეს პირობით ფორმით "თუ A მაშინ B" (if A then B). დამტკიცება იწყება დაშვებით, რომ ჰიპოტეზა A არის ჭეშმარიტი. შემდეგი ნაბიჯი არის ისეთი დებულების მოძებნა რომელიც არის შედეგი დაშვებისა ან ცნობილი ფაქტებისა. ყოველი ნაბიჯი ხორციელდება ისეთნაირად, რომ ყოველი მოძებნილი დებულება იქნება შედეგი წინა დებულებებისა ან ცნობილი ფაქტებისა. **პირობიდან გამომდინარე დამტკიცება** დასრულდება როდესაც მიიღწევა B დასკვნა.

მაგალითი. დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება მთელ რიცხვებზე.

ჯამი ნებისმიერი ორი კენტი მთელი რიცხვისა არის ლუწი მთელი რიცხვი.

ჩვენ შეგვიძლია ამ გამონათქვამის პერიფრაზირება პირობითი ფორმით:

თუ და არიან კენტი მთელი რიცხვები, მაშინ $x+y$ არის ლუწი მთელი რიცხვი.

დამტკიცება: დავუშვად, რომ და არიან კენტი მთელი რიცხვები. აქედან და შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით $x=2k+1$ და $y=2m+1$, სადაც k, m არიან ნებისმიერი მთელი რიცხვები. ეხლა ჩავსვათ x და y გამოსახულებაში $x+y$- ში, მივიღებთ

$$x+y=(2k+1)+(2m+1)=2k+2m+2=2(k+m+1)$$

რადგან გამოსახულება მარჯვენა მხარეში შეიცავს მამრავლად 2, ის წარმოადგენს ლუწ მთელ რიცხვს.

კონტრპოზიციული დამკიცება (არაპირდაპირი მეთოდი)

დავუბრუნდეთ პირობით დებულებას "თუ A მაშინ B" (if A then B"), მისი კონტრაპოზიციაა "თუ არა B მაშინ არა A" (" if not B then not A") მათ აქვთ ერთი და იგივე ჭეშმარიტების ცხრილი. ამიტომ ერთის დამტკიცება იგივეა რაც მეორის. არაპირდაპირი მეთოდი"if A then B" დამტკიცებისა არის კონტრპოზიტივის მტკიცება. ვიწყებთ დაშვებით, რომ B მცდარია. შემდეგი ნაბიჯი იქნება ისეთი დებულების მოძებნა რომელიც არის შედეგი დაშვებებისა ან ცნობილი ფაქტებისა. ყოველი ნაბიჯი ხორციელდება ისეთნაირად, რომ მოიძებნოს დებულება, რომელიც იქნება შედეგი წინა დებულებისა ან ცნობილი ფაქტისა. მტკიცება დასრულდება მაშინ, როდესაც დამტკიცდება რომ A მცდარია.

$$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow((\neg q)\Rightarrow(\neg p))$$

მაგალითი. კენტობის დამტკიცება.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

თუ x^2 არის კენტი, მაშინ x-ც არის კენტი.

იმისათვის რომ დავამტკიცოთ დებულება, ჩვენ დავამტკიცებთ მის კონტრაპოზიტივს:

თუ x არის ლუწი, მაშინ x^2-ც ლუწია.

დამტკიცება: დავუშვათ ჰიპოტეზა (კონტრაპოზიტივის), რომ x არის ლუწი. აქედან $x=2k$ რომელიღაც მთელი k . ეხლა x ავიყვანოთ კვადრატში და შევიტანოთ მისი მნიშვნელობა , მივიღებთ

$$x^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$$

გამოსახულება განტოლების მარჯვენა მხარისა წარმოადგენს ლუწ რიცხვს. ამიტომ, x^2 არის ლუწი.

დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით

$((p\Rightarrow q)\wedge(\neg q))\Rightarrow(\neg p)$. მაშასადამე დასკვნის წესი

$$p \Rightarrow q$$
$$\neg q$$
$$\therefore \neg p$$

წინააღმდეგობა ეს არის მცდარი დებულება. მტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით არის არაპირდაპირი მტკიცება. ჩვენ ვიწყებთ დაშვებით რომ დებულება რომლის დამტკიცებას ვაპირებთ არის მცდარი. მერე ვმსჯელობთ მანამ სანამ არ მივახწევთ წინააღმდეგობას. ასეთ არგუმენტს ხშირად უწოდებენ უარყოფა.

მაგალითი. არაგამყოფის მტკიცება

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

თუ n არის მთელი რიცხვი, მაშინ არ n^2+2 იყოფა 4 – ზე.

დამტკიცება: დავუშვათ დებულება მცდარია. მაშინ n^2+2 იყოფა 4 ზე რომელიღაც მთელი n . ეს ნიშნავს, რომ $n^2+2=4k$ რომელიღაც მთელი k -თვის.განვიხილოთ ორი შემთხვევა, სადაც და n არის ლუწი და კენტი.

თუ n არის ლუწი, მაშინ n=2m რომელიღაც მთელი m –თვის. მაშინ თუ შევიტანთ n –ის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$4k= n2 +2=(2m)^2 +2=4m^2+2.$

შეგვიძლია გავყოთ ორივე მხარე 2 მივიღებთ:

$2k=2 m^2+1.$

ეს ნიშნავს რომ ლუწი რიცხვი (2k)უდრის კენტ რიცხვს ($2 m^2+1$), რაც წინააღმდეგობაა. ამიტომ, n ვერ იქნება ლუწი.

ეხლა დაუშვათ, რომ n -არის კენტი. მაშინ n=2m +1 რომელიღაც მთელი m –თვის. შევიტანოთ n –ის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$4k= n^2+2 =(2m+1)^2 +2=4m^2+4m +3.$

აქედან:$4k-4m^2-4m=3.$

ეს არის წინააღმდეგობა, რადგან მარცხენა მხარე ლუწია, მარჯვენა კი კენტია. ამიტომ ნ ვერ იქნება კენტი.

მაშინ და მხოლოდ მაშინ დამტკიცება. (If and Only if Proofs)

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)),$$

$$\frac{p \Leftrightarrow q}{\therefore (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

$$p \Rightarrow q$$
$$q \Rightarrow p$$
$$\therefore p \Leftrightarrow q$$

დებულება “A მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ B” (“A If and Only if B”) არის პირობითი აღნიშვნა ორი დებულებისა “ თუ A მაშინ B” (“ if A then B”) და “თუ B მაშინ A” (“ if B then A”). ხშირად გამოიყენება “ A iff B” აბრივიატურა“A If and Only if B” –თვის. ზოგიერთი “

A iff B" ნაცვლად წერენ "A არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა B-თვის" ან "B არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა A-თვის".
ორი მტკიცებულება მოითხოვება iff დებულებისათვის.
მაგალითი .An Iff Proof
დავამტკიცოთ დებულება:
x არის კენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $(x^2-1)/8$
იმისათვის რომ დავამტკიცოთ ეს დებულება, ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ ორი დებულება:
ა. თუ არის კენტი, მაშინ $(x^2-1)/8$ (If x is odd, then $(x^2-1)/8$)
ბ. თუ $(x^2-1)/8$, მაშინ x არის კენტი (If $(x^2-1)/8$, then x is odd)
დამტკიცება (ა.): დავუშვათ x არის კენტი. მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ $x=2k+1$ რომელიღაც მთელი k რიცხვისთვის. შევიტანოთ x x^2-1 -ში, მივიღებთ:

$$x^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$$

რადგან $k, k+1$ მიყოლებული მთელი რიცხვებია, ერთი მათგანი არის კენტი, მეორე კი ლუწი, ამიტომ მათი ნამრავლი $k, k+1$ არის ლუწი. ამიტომ $k(k+1)=2m$ რომელიღაც მთელი m - თვის. შევიტანოთ $k, k+1$, მივიღებთ

$$x^2-1=4k(k+1)=4(2m)=8m.$$

ამიტომ $(x^2-1)/8$, და ნაწილი (ა) დამტკიცებულია.
დამტკიცება (ბ): დავუშვათ $(x^2-1)/8$. მაშინ $x^2-1=8k$ რომელიღაც მთელი k -თვის. აქედან გვექნება $x^2=8k+1=2(4k)+1$, რაც არის კენტი. ამიტომ არის კენტი, ზემოთ განხილული მაგალითიდან კი ვღებულობთ რომ არის კენტი მთელი რიცხვი. ამრიგად, ნაწილი (ბ) –ც დამტკიცებულია. ე.ი დებულება იფფ დამტკიცდა

მიმართებები

მიმართების განმარტება.

თუ A და B სიმრავლეებია, მაშინ **დეკარტული ნამრავლი** A ×B არის ყველა დალაგებულ წყვილთა (a,b) სიმრავლე, ისეთი რომ $a\in A$ და $b\in B$.. მაშასადამე $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ და } b\in B\}$.

დალაგებული წყვილი (a,b) არის a და b ობიექტების ჩამონათვალი მოცემული წესით, პირველად არის a და მეორედ არის b.

განმარტება. თუ **R** არის ქვესიმრავლე $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ მაშინ **R** - ს ეწოდება **n** –არული მიმართება $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$–ზე. თუ **R** არის ქვესიმრავლე A^n მაშინ **R** - ს ეწოდება **n** –არული მიმართება A –ზე. ვამბობთ, რომ მიმართება არის უნარული, ბინარული, და ტერნარული როდესაც **n** =1,2,3 შესაბამისად.

მაგალითი. ნებისმიერი სამეული დადებითი ნამდვილი რიცხვებს (x, y, z) რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას (x, y, z) ეწოდება პითაგორას სამეული. მიმართება პითაგორას სამეულისა შეიძლება აღიწეროს როგორც შემდეგი სიმრავლე დალაგებული სამეულისა:

$$PT = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 = z^2\}$$

თუ დაუშვებთ, რომ **R⁺** არის დადებითი ნამდვილი რიცხვები, მაშინ

$$PT \subset \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+$$

რადგან ამ სიმრავლის ბევრი ქვესიმრავლე არსებობს, ამიტომ შეიძლება იყოს ბევრი მიმართებები. ყველაზე უმცირესი მიმართება არის ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$. უდიდესი მიმართება არის თვითონ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ რომელსაც ეწოდება უნივერსალური მიმართება.

თუ **R** არის მიმართება და $(x_1, x_{2,}, \ldots x_n) \epsilon R$, ამ ფაქტს ხშირად აღნიშნავენ ასე:

$$R(x_1, x_{2,}, \ldots x_n)$$

მაგალითად $PT(1, \sqrt{3}, 2)$ ნიშნავს, რომ $(1, \sqrt{3}, 2) \in PT$.

თუ **R** არის ბინარული მიმართება X-დან Y-ში, მაშინ გამონათქვამი $(x, y) \in \boldsymbol{R}$ შეიძლება აღინიშნოს როგორც $\boldsymbol{R}(x, y)$ ან როგორც xRy და იკითხება : “x იმყოფება R მიმართებაში y -თან”.

მაგალითად, თუ X ={1,3,5} და Y ={0,2,4}, მაშინ სიმრავლე R = {(1,2), (1,4), (3,4)} შედგება ყველა იმ (x,y) წყვილებისგან, სადაც $x < y$, $x \in X$ და $y \in Y$, ამიტომ ის არის $<$ მიმართება X-სა და Y შორის. ტოლობის მიმართება A სიმრავლეზე არის სიმრავლე

$$\{(x, x)/x \in A\}$$

მაგალითად , თუ $A = \{a, b, c\}$ მაშინ ტოლობის მიმართება A სიმრავლეზე არის სიმრავლე $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. ჩვეულებრივ ტოლობის მიმართებას აღნიშნავენ = და ვწერთ $a = a$ და არა $(a, a) \in =$ ან $= (a, a)$.

მიმართებების გამოყენება რელაციური მონაცემთა ბაზების მაგალითზე.

ბევრი გამოყენება აქვს **n** ჯერადიან დალაგებულ მონაცემებს. ერთერთი გამოყენებაა ჩანაწერების წარმოდგენა მონაცემთა ბაზაში. მონაცემთა ერთობლიობა ინახება კომპიუტერში.

რელაციური მონაცემთა ბაზა არის **D** ქვესიმრავლე $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, სადაც ყოველი A_i აღნიშნავს მონაცემის მახასიათებელს ან ატრიბუტს. ყოველი n ჯერადიან მონაცემი **D** –ში, არის ცალსახა ჩანაწერი შესაბამისი ინფორმაციისა. რელაციურ მონაცემთა ბაზაში არის

ერთი ატრიბუტი (ან სიმრავლე ატრიბუტებისა), რომლის მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვავს ჩანაწერს. ასეთ ატრიბუტს **გასაღებს** უწოდებენ.

ცხრილის სახით მოცემულია მონაცემთა ბაზა, დამსაქმებლის კომპანია, რომელიც წარმოდგენილია დასასაქმებლების ინფორმაციით. ატრიბუტებია: დასასაქმებლების ID, გვარი, დეპარტამენტი, და კომპანიასთან ურთიერთობის წლები.

ჩანაწერის დამატება ან ამოშლა მონაცემთა ბაზიდან ხდება უშუალოდ, ვინაიდან გასაღების გამოყენებისას არ არის საჭირო რომ გვქონდეს ამ ჩანაწერების ფიქსირებული განრიგი და შესაძლოა მოიძებნოს ნებისმიერი ჩანაწერი. მონაცემთა ბაზის მენეჯმენტი ითხოვს იმას რომ შეგვეძლოს პასუხის გაცემა მოთხოვნაზე. არსებობს ამისათვის ორი ძირითადი ოპერაცია მონაცემთა ბაზაში **D** რომელიც გასცემს პასუხს უამრავ მოთხოვნაზე.

ცხრილი **Employees**

Employee ID	**Last name**	**Department**	**Years with Company**
8341	Croft	Front office	2
7984	Cottongim	Sales	2
2086	KIng	Human Resources	4
0340	Boswell	Research	3
7182	Chin	Human Resources	3
1784	Harris	Sales	1
4039	Gonzalez	Public Relations	6
4596	Greene	Human Resources	1
2914	Salamat	Sales	5
5703	Sahni	Research	7
3465	Harris	Sales	4

ოპერაცია **select** ეძებს ჩანაწერებს სიმრავლე **D** –ში, რომელიც აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს. ამრიგად,

$$select\ D\ [\ a_{i1}=required_1,\ a_{i2}=required_2,\ \ldots,\ a_{ik}=required_k\ ]$$

არის ჩანაწერების სიმრავლე **D** –ში, რომელთაც აქვთ მნიშვნელობები $\mathrm{required}_1$, $\mathrm{required}_2$, …, $\mathrm{required}_k$ $i_1, i_2, \cdots i_k$ პოზიციებში შესაბამისად. ცხრილის დაყრდნობით გვექნება

select Employees [Department=Human Resources]

$$=\{\ (2086, King, \text{Human Resources}, 4),\ (7182, Chin, \text{Human Resources}, 3),\ (4596, Green, \text{Human Resources}, 1)\ \}$$

ეს მაგალითი აჩვენებს რომ ხელახლა პოვნა ყველა ჩანაწერების შეიძლება იყოს მოცულობითი, წარმოადგენს უფრო მეტ ინფორმაციას, ვიდრე მოითხოვება პასუხის გასაცემად მოთხოვნაზე.

ოპერაცია **project** იძლევა საშუალებას წარმოადგინოს ნაწილი ჩანაწერების მხოლოდ გარკვეული ატრიბუტებისათვის.
სიმრავლე $project\ D\ [A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}]$ არის k – ჯერადიანი სიმრავლე ატრიბუტების $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ ისეთი რომ $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}) \in project\ D[A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}]$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს n - ჯერადიანი $(a_1,\ a_2, \cdots, a_n) \in D$ სადაც $b_{i_j} = a_{i_j},\ j = 1, \cdots, k$.

ამრიგად $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k})$ არის მხოლოდ გარკვეული არჩეული ატრიბუტების მნიშვნელობები **D** მონაცემთა ბაზიდან სხვა ჩანაწერების გამოტოვებით.

Select შეიძლება განხილული იყოს როგორც ცხრილში სტრიქონების ამონარიდი, ხოლო project არჩევს ცხრილიდან სვეტებს. ცხრილიდან ვღებულობთ
project Employees [Employee ID, Years with Company]

$$=\{(8341,2), (7984,2), (2086,4), (0340,3), (7182,3), (1784,1), (4039,6), (4596,1), (2914,5), (5703,7), (3465,4)\}$$

ოპერაციები სელექტ და პროჯექტ ერთად იძლევა პასუხს მოთხოვნაზე.
მაგალითად

project (select Employees[Years with Company≥ 5]) [Employee ID, Last name]

$$=\{(4039, Gonzalez), (2914, Salamat), (5703, Sasni)\}$$

იძლევა პასუხს კითხვაზე: ვინ მუშაობდა კომპანიაზე ბოლო 5 წელი?

მიმართების მატრიცა

ორი სასრული სიმრავლის მიმართება შეიძლება წარმოვადგინოთ მატრიცის საშუალებით. თუ $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ } და $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ არიან სასრული სიმრავლეები, რომლებიც შეიცავენ m და n ელემენტებს, და R არის მიმართება A დან B –ში, მაშინ R-ს წარმოვადგენთ $M_R = [m_{ij}]$ მატრიცით $m \times n$ –ზე, რომლის ელემენტები განისაზღვრებიან:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ (a_i, b_j) \in R \\ 0 & if\ (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

მატრიცა M_Rეწოდება R მიმართების მატრიცა.
მაგალითი. ვთქვათ A={1,2,3} და $B = \{r, s\}$მაშინ

$$A \times B = \{(1,r),(1,s),(2,r),(2,s),(3,r),(3,s)\}$$

რადგან R არის მიმართება A დან B –ში, მაშინ R არის ქვესიმრავლე R⊆A×B, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ R მიმართება A - დან B –ში როგორც:

$$R = \{(1,r),(2,s),(3,r)\}$$

R-ს მატრიცა იქნება:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

პირიქითაც, თუ მოცემულია A და B სიმრავლეები , სადაც |A|=m და |B|=n, მაშინ m×n მატრიცა, რომლის შემავალი ელემენტები ნულები და ერთებია, განსაზღვრავს მიმართებას.

მაგალითი. განვიხილოთ მატრიცა

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

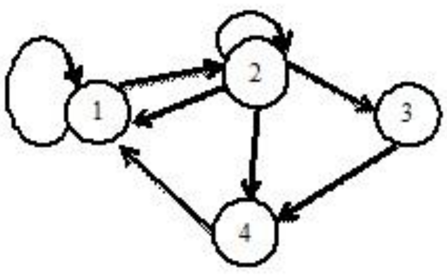
რადგან $\boldsymbol{M_R}$ არის 3X4, და ვთქვათ

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$და $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ მაშინ $(a_i, b_j) \in R$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $m_{ij} = 1$. ამრიგად

$$R = \{(a_1,b_1),(a_1,b_4),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_3,b_1),(a_3,b_3)\}$$

მიმართების ორიენტირებული გრაფი

თუ A სასრული სიმრავლეა და R არის მიმართება A -ზე, ჩვენ შეგვიძლია R მიმართება წარმოვადგინოთ გრაფიკულად, როგორც შემდეგი:



სურათი 1.

დავხატოთ პატარა წრეები A -ს ყოველი ელემენტებისათვის და მოვნიშნოთ ეს წრეები შესაბამისი A -ს ელემენტებით. ამ წრეებს უწოდებენ **წვეროებს.** დავხატოთ ისრები, რომელთაც უწოდებენ წიბოებს (წახნაგებს) a_i წევროდან a_j წვეროსკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $a_i\ R\ a_j$. **R** მიმართების ასეთ გრაფიკულ წარმოდგენას ეწოდება **R -ს ორიენტირებული გრაფი.**

ამრიგად, თუ ღ არის მიმართება A –ზე, მაშინ წიბოებს R -ს ორიენტირებული გრაფში შეესაბამება ზუსტად წყვილები R –ში, ხოლო წვეროებს შეესაბამება ზუსტად ელემენტები A -სიმრავლის.

მაგალითი. ვთქვათ
A={1,2,3,4}
R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1) }

R -ს ორიენტირებული გრაფი ნაჩვენებია სურათი 1 -ზე.

თუ R არის მიმართება A –ზე და $a \in A$, მაშინ a -ს **შიდა ხარისხი** (R მიმართების მიმართ) არის რიცხვი b∈A –სი, ისეთი რომ $(b, a) \in A$. a -ს **გარე ხარისხი** არის რიცხვი b∈A –სი, ისეთი რომ $(a, b) \in A$.

R -ს ორიენტირებული გრაფის ტერმინოლოგიის თვალსაზრისით წვეროს **შიდა ხარისხი** არის იმ წიბოების რაოდენობა, რომლებიც ბოლოვდებიან წვეროებზე, ხოლო წვეროს გარე ხარისხი არის იმ წიბოების რაოდენობა, რომლებიც გამოდიან, სტოვებენ წვეროებს. შევნიშნოთ, რომ a -ს **გარე ხარისხი** არის $|R(a)|$.

მაგალითი. განვიხილოთ ორიენტირებული გრაფი სურათი 1 –ზე. წვერო 1 აქვს **შიდა ხარისხი 3** და **გარე ხარისხი 2.**

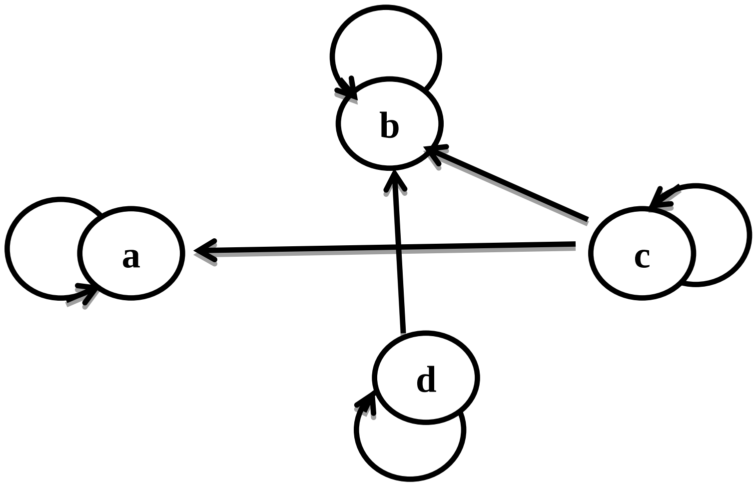
მაგალითი. ვთქვათ A={ა,ბ,ც,დ} და ღ არის მიმართება A-ზე, რომელსაც აქვს მატრიცა

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ააგეთ R -ს ორიენტირებული გრაფი და ჩამოთვალეთ ყველა წვეროს შიდა და გარე ხარისხები.

ამოხსნა.

R -ს ორიენტირებული გრაფი ნაჩვენებია სურათზე 2.

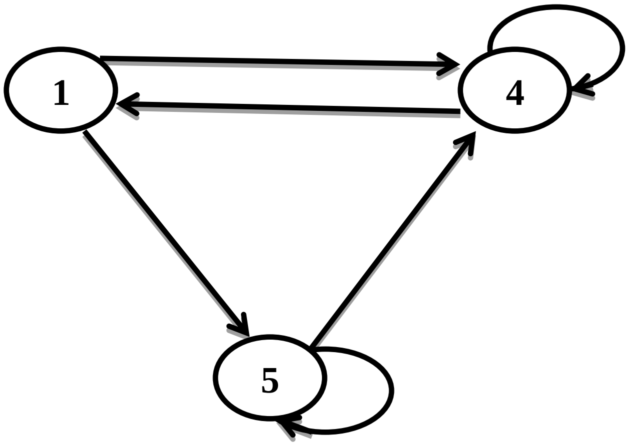


სურათი 2.

შემდეგი ცხრილი გვაძლევს ყველა წვეროს შიდა და გარე ხარისხებს. შევნიშნოთ, რომ ჯამი წვეროს ყველა შიდა ხარისხების უდრის წვეროს გარე ხარისხების ჯამს..

	a	b	c	d
შიდა ხარისხი	2	3	1	1
გარე ხარისხი	1	1	3	2

მაგალითი. ვთქვათ A={1,4,5} და R მოცემულია გრაფით. იპოვეთ M_R და R



ამოხსნა.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R = \{(1,4), (1,5), (4,1), (4,4), (5,4), (5,5)\}$$

თუ R არის მიმართება A-ზე და B არის ქვესიმრავლე A-სი, მაშინ **R –ის შეზღუდვა B-ზე** არის $R \bigcap (B \times B)$

მაგალითი. ვთქვათ

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

და

$$R = \{(a, a), (a, c), (b, c), (a, e), (b, e), (c, e)\}$$

ვთქვათ $B = \{a, b, c\}$.მაშინ

$$B \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

და **R –ის შეზღუდვა B-ზე** იქნება $\{(a,a),(a,c),(b,c)\}$

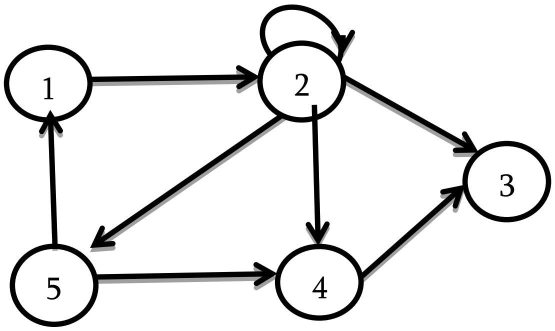
ტრაექტორიები მიმართებებში და ორიენტირებულ გრაფებში.

დავუშვათ, რომ R არის მიმართება A სიმრავლეზე. n სიგრძის ტრაექტორია R მიმართებაში a -დან b სკენ არის სასრული მიმდევრობა π: $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$, დაწყებული a -დან და დაბოლოვებული b -თი, ისეთი რომ

$$aRx_1, x_1Rx_2, \dots, x_{n-1}Rb.$$

შევნიშნოთ, რომ n სიგრძის ტრაექტორია შეიცავს A სიმრავლის n+1 ელემენტებს, რომლებიც არაა სავალდებულო რომ იყვნენ განსხვავებულები. ტრაექტორიის დემონსტრაცია ყველაზე ადვილია მიმართების გრაფის საშუალებით. ტრაექტორიის სიგრძე არის წიბოებების რაოდენობა ტრაექტორიაში, სადაც წვეროები არ არის აუცილებელი იყვნენ განსხვავებულები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ გრაფი.სადაც π_1: 1, 2, 5, 4, 3 არის 4 სიგრძის ტრაექტორია 1 წვეროდან 3 წვეროსკენ, π_2: 1, 2, 5,1 არის 3 სიგრძის ტრაექტორია 1 წვეროდან თავისთავში და π_3: 2, 2 არის ტრაექტორია 1 სიგრძისა 2 წვეროდან თავისთავში.

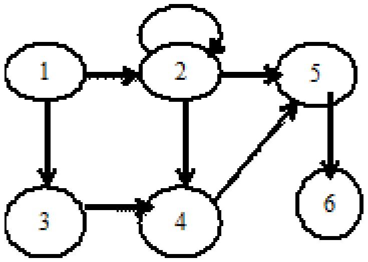


ტრაექტორია რომელიც იწყება და ბოლვდება იმავე წვეროში ეწოდება **ციკლი.** მაგალითი 1- ში: π_2 და π_3 არიან 3 და 1 ის სიგრძეების, შესაბამისად. ცხადია, რომ 1 სიგრძის ტრაექტორიები შეიძლება გაიგივებური იყოს დალაგებულ წყვილებთანთან (x,y) რომლებიც მიეკუთვნებიან R ს. ტრაექტორიები R მიმართებაში შეიძლება გამოყენებულნი იყვნენ იმისათვის რომ განისაზღვროს ახალი მიმართებები. თუ n არის ფიქსირებული დადებითი მთელი, მაშინ R^n მიმართება A სიმრავლეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად: xR^ny ნიშნავს, რომ არსებობს n სიგრძის ტრაექტორია x -დან y -კენ R -ში. აგრეთვე შეიძლება განვსაზღვროთ მიმართება R^∞ A სიმრავლეზე, აღნიშვნა $xR^\infty y$ ნიშნავს, რომ არსებობს რაღაც ტრაექტორია R -ში x -დან y -კენ. ასეთი ტრაექტორიის სიგრძე დამოკიდებულია x -და y-ზე. R^∞ მიმართებას ხანდახან უწოდებენ ბმულობის მიმართებას R -სთვის.

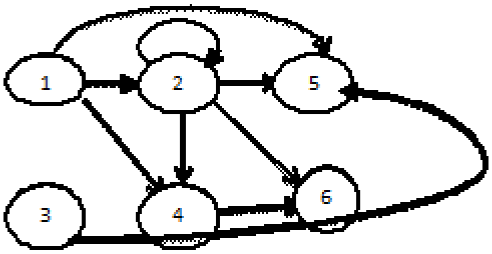
შევნიშნოთ, რომ R^n შეიცავს ყველა იმ წვეროებს, რომლებსაც შეიძლება მივწვდეთ x -დან n-სიგრძის ტრაექტორიის საშუალებით R მიმართებაში. R^∞ სიმრავლე შეიცავს ყველა წვეროებს რომელთაც შეიძლება მივწვდეთ x -დან გარკვეული ტრაექტორიით R მიმართებაში.

მაგალითი. ვთქვათ A არის აშშ -ს ქალაქების სიმრავლე და ვთქვათ xRy არის პირდაპირი ფრენა x -დან y -სკენ სულ მცირე ერთი თვითფრინავით. მაშინ x -და y არიან R^n მიმართებაში, თუ შესაძლებელია ისეთი ფრენის დაკვეთა x -დან y -სკენ, რომელსაც ექნება ზუსტათ n-1 შუალედური გაჩერებები და $xR^\infty y$ თუ ვისმეს შეუძლია მოხვდეს თვითფრინავით x -დან y -ში.

მაგალითი. ვთქვათ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. ვთქვათ, R მიმართება მოცემულია გრაფით (იხ. სურათი1). 2 სურათზე მოცემულია ორიენტირებული გრაფი R^2 მიმართებისა. წირი, აერთებს ორ წვეროს (სურათი 2 -ში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს R^2 მიმართებაში არიან, რაც ნიშნავს რომ არსებობს 1 სურათზე ტრაექტორია ორი სიგრძისა, რომელიც აერთებს ამ წვეროებს. ამრიგად



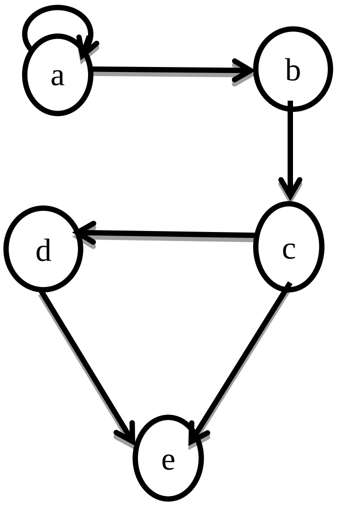
სურათი1



სურათი 2

$1R^2 2$ რადგან 1R2 და 2R2
$1R^2 4$ რადგან 1R2 და 2R4
$1R^2 5$ რადგან 1R2 და 2R5
$2R^2 2$ რადგან 2R2 და 2R2
$2R^2 4$ რადგან 2R2 და 2R4
$2R^2 5$ რადგან 2R2 და 2R5
$2R^2 6$ რადგან 2R5 და 5R6
$3R^2 5$ რადგან 3R4 და 4R5
$4R^2 6$ რადგან 4R5 და 5R6

მაგალითი. ვთქვათ $A = \{a, b, c, d, e\}$ და $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, e), (c, d), (d, e)\}$.
გამოთვალეთ ა) R^2 ; ბ) R^∞



ამოხსნა

R მიმართების გრაფი ნაჩვენებია სურათზე 3
aR^2a რადგან aRa და aRa
aR^2b რადგან aRa და aRb
aR^2c რადგან aRb და bRc
bR^2e რადგან bRc და cRe
bR^2d რადგან bRc და cRd
cR^2e რადგან cRd და dRe.
აქედან

$$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,e),(b,d),(c,e)\}$$

სურათი 3

ბ) იმისათვის რომ გამოვთვალოთ R^∞ ჩვენ გვჭირდება ყველა წვეროების დალაგებული წყვილები, რომელთათვისაც არსებობს გზა ნებისმიერი სიგრძის, პირველი წვეროდან მეორესკენ. სურათიდან ჩანს, რომ

$$R^\infty = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,e),(b,d),(c,d),(c,e),(d,e)\}$$

მაგალითად, $(a,d) \in R^\infty$, რადგან არსებობს ტრაექტორია 3 სიგრძის a დან d -სკენ: a,b,c,d. ანალოგიურად, $(a,e) \in R^\infty$, რადგან არსებობს ტრაექტორია 3 სიგრძის a დან e -სკენ: a,b,c,e და ასევე არსებობს ტრაექტორია 4 სიგრძის a დან e -სკენ: a,b,c,d,e.

თუ $|R|$ არის დიდი რიცხვი, და შესაძლოა დასჭირდეს დიდი გამოთვლები R^∞ და R^2 -აც, R მიმართების სიმრავლიდან. მაგრამ შესაძლებელია გამოყენებული იქნას M_R მატრიცა ამ ამოცანის უფრო ეფექტურად ამოხსნისათვის.

შემოვიტანოთ განსაზღვრა, **A** და **B ბულიანის ნამრავლი** აღინიშნება როგორც $A \odot B$ და არის mxn ბულიანის მატრიცა C=$[c_{ij}]$, განსაზღვრული შემდეგ ნაირად

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{თუ } a_{ik} = 1 \textit{ და } b_{kj} = 1, \textit{რომელიღაც } k\ s - \textit{თვის}, 1 \le k \le p \\ 0 & \textit{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

თეორემა. ვთქვათ R არის მიმართება $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -ზე, მაშინ $M_{R^2} = M_R \odot M_R$.
შემოკლებისათვის, ხშირად $M_R \odot M_R$ აღნიშნავენ როგორც $(M_R)^2_\odot$.
მაგალითი. განვიხილოდ A და R წინა მაგალითიდან. მაშინ

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1\,1\,0\,0\,0} \\ \mathbf{0\,0\,1\,0\,0} \\ \mathbf{0\,0\,0\,1\,1} \\ \mathbf{0\,0\,0\,0\,1} \\ \mathbf{0\,0\,0\,0\,0} \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

თუ გამოვთვლით M_{R^2} **პირდაპირ** R^2 **, მივიღებთ იგივე შედეგს.**

თეორემა. თუ $n \geq 2$ **და** R არის მიმართება A სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ გვექნება $M_{R^n} = M_R \odot M_R \odot \dots M_R$ (n ნამრავლი)

მიმართებების თვისებები

რეფლექსური და არარეფლექსური მიმართებები

R მიმართება **A** სიმრავლეზე არის **რეფლექსური,** თუ $(a, a) \in R$, *ყოველი* $a \in A$. ესე იგი, aRa *ყოველი* $a \in A$ და **R** მიმართება **A** სიმრავლეზე არის **არარეფლექსური,** თუ $(a, a) \notin R$ *ყოველი* $a \in A$.

მაგალითი1.

(a) ვთქვათ $\Delta = \{(a, a) | \, a \in A\}$, ისე რომ Δ არის ტოლობის მიმართება **A** სიმრავლეზე. მაშინ Δ არის რეფლექსური, რადგან $(a, a) \in \Delta$ *ყოველი* $a \in A$.

(b) ვთქვათ $R = \{(a, b) \in A \times A | \, a \neq b\}$, ისე რომ R არის უტოლობის მიმართება **A** სიმრავლეზე. მაშინ ***R*** არის არარეფლექსური, რადგან $(a, a) \notin R$ *ყოველი* $a \in A$.

(c) ვთქვათ $A = \{1,2,3\}, R = \{(1,1), (1,2)\}$. მაშინ R არ არის რეფლექსური, რადგან $(2,2) \notin R$ *და* $(3,3) \notin R$. აგრეთვე ***R*** არ არის არარეფლექსური, რადგან $(1,1) \in A$.

(d) ვთქვათ A არის არაცარიელი სიმრავლეა. ვთქვათ $R = \emptyset \subseteq A \times A$, ცარიელი სიმრავლეა. მაშინ R არ არის რეფლექსური, რადგან $(a, a) \notin R$ *ყოველი* $a \in A$ (ცარიელი სიმრავლე არ შეიცავს ელემენტებს) მაგრამ ***R*** არის არარეფლექსური.

რეფლექსური მიმართების მატრიცას აქვს 1 მთავარ დიაგონალზე, ხოლო არარეფლექსური მიმართების მატრიცას აქვს 0 მთავარ დიაგონალზე.

სიმეტრიული, ასიმეტრიული და ანტისიმეტრიული მიმართებები

R მიმართება **A** სიმრავლეზე არის **სიმეტრიული,** თუ როდესაც aRb, მაშინ bRa.

R მიმართება **A** სიმრავლეზე **არ არის სიმეტრიული,** თუ **რომელიღაც** a *და* $b \in A$ *გვაქვს მიმართება* aRb, მაგრამ $b\bar{R}a$.

R მიმართება A სიმრავლეზე არის **ასიმეტრიული,** თუ **ყოველთვის როცა** *გვავს მიმართება* aRb, მაშინ. $b\bar{R}a$.

R მიმართება A სიმრავლეზე **არ არის ასიმეტრიული,** თუ **რომელიღაც** a *და* $b \in A$ *გვაქვს ორივე მიმართება* aRb და bRa.

R მიმართება A სიმრავლეზე **არის ანტისიმეტრიული,** თუ **ყოველთვის როცა** *გვავს მიმართება* aRb და bRa, მაშინ $a = b$.

ამ განსაზღვრების კონტრპოზიციას წარმოადგენს ის რომ, R მიმართება **არის ანტისიმეტრიული, როდესაც კი $a \neq b$, მაშინ** $a\bar{R}b$ *ან* $b\bar{R}a$.

R მიმართება **არ არის ანტისიმეტრიული, თუ გვაქვს** a *და* $b \in A$, $a \neq b$ და გვაქვს ორივე *მიმართება* aRb და bRa **.**

მაგალითი. ვთქვათ A=Z, მთელი რიცხვებ ის სიმრავლე, და ვთქვათ

$R = \{(a, b) \in A \times A | \; a < b\}$

ისე რომ R მიმართება არის **ნაკლებია ვიდრე. არის თუ არა** R მიმართება **სიმეტრიული, ასიმეტრიული, ან ანტისიმეტრიული?**

ამოხსნა

სიმეტრიულობა: **თუ** $a < b$, მაშინ არ არის ჭეშმარიტი $b < a$, ამიტომ **R** მიმართება **არ არის სიმეტრიული.**

ასიმეტრიულობა: **თუ** $a < b$, მაშინ $b \nless a$ (b არ არის ნაკლები a -ზე, ამიტომ **R** მიმართება **არის ასიმეტრიული.**

ანტისიმეტრიულობა: **თუ** $a \neq b$, მაშინ ან $a \nless b$ ან $b \nless a$, ამიტომ **R** მიმართება **არის ანტისიმეტრიული.**

მაგალითი. ვთქვათ A={1,2,3,4} და ვთქვათ

$$R = \{(1,2), (2,2), (3,4), (4,1)\}$$

R მიმართება არ არის **სიმეტრიული. რადგან** $(1,2) \epsilon R$, *მაგრამ* $(2,1) \notin R$. აგრეთვე **R** მიმართება არ არის **ანტისიმეტრიული, რადგან თუ** $a \neq b$, მაშინ ან $(a, b) \notin R$ *ან* $(b, a) \notin R$.

ეხლა ვნახოთ კავშირი **სიმეტრიულობის, ასიმეტრიულობისა და ანტისიმეტრიულობის თვისებებისა შესაბამისი მიმართების მატრიცის თვისებებთან მიმართებაში.**

სიმეტრიული მიმართების R მატრიცა M_R აკმაყოფილებს თვისებას:

თუ $m_{ij} = 1$, **მაშინ** $m_{ji} = 1$.

მეტიც თუ $m_{ij} = 0$, **მაშინ** $m_{ji} = 0$. **ამრიგად** M_R **არის ისეთი მატრიცა, ყოველი მასში შემავალი წყვილი სომეტრიულად არის განლაგებული დიაგონალის მიმართ, ისინი ან ორივე 0 ან 1. ვასკვნით რომ** $M_R = {M_R}^T$, **როცა** M_R **არის სიმეტრიული მატრიცაა.**

ასიმეტრიული მიმართების R მატრიცა $M_R = [m_{ij}]$ აკმაყოფილებს თვისებას

თუ $m_{ij} = 1$, **მაშინ** $m_{ji} = 0$.

თუ R ასიმეტრიული მიმართებაა, გამომდინარეობს რომ $m_{ii} = 0$ **ყველა i თვის, რაც ნიშნავს რომ მთავარი დიაგონალის ელემენტები შეიცავს მთლიანად 0 ებს. ჭეშმარიტია, ისიც რომ ასიმეტრიულობის თვისება გულისხმობს , რომ თუ** $m_{ij} = 1$, **მაშინ** $m_{ji} = 0$ **რაც არის წინააღმდეგობა.**

საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ ანტისიმეტრიული მიმართების R მატრიცა $M_R = [m_{ij}]$ აკმაყოფილებს თვისებას, რომ თუ $i \neq j$ მაშინ $m_{ij} = 0$, ან $m_{ji} = 0$.

მაგალითი . განვიხილოთ მომართების მიმართები

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{R_1}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{R_2},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R_3}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R_4},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_{R_5}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R_6}.$$

მიმართებები R_1, R_2 არიან სიმეტრიულები, რადგანაც M_{R_1}, M_{R_2} მატრიცები არიან სიმეტრიულები. მიმართება R_3 ანტისიმეტრიულია რადგან M_{R_3} მატრიცა არაა სიმეტრიული, მისი დიაგონალის მარჯვნივ შეიცავენ ორივე 1, მაგ პოზიციაზე შეიძლება ყოფილიყო ორივე 0, მაგრამ დიაგონალების ალემენტები არიან სემოუსაზღვრელი. R_3 მიმართება არ არის ასიმეტრიული, რადგანაც, M_{R_3} მატრიცის მთავარ დიაგონალზე არის 1 .

მიმართება R_4 ამ სამი თვისებიდან არცერთი არა აქვს. M_{R_4} არ არის სიმეტრიული. 1 წარმოდგენა 4,1 პოზიციაში და 1,4 პოზიციაში არღვევს ასიმეტრიულობასაც და სიმეტრიულობასაც.

და ბოლოს , R_5მიმართება არის ანტისიმეტრიული და არა ასიმეტრიული, და R_6მიმართება არის ორივე ანტისიმეტრიული და ასიმეტრიული.

ტრანზიტული მიმართებები

ვიტყვით, რომ R მიმართება A სიმრავლეზე არის **ტრანზიტული**, თუ როდესაც aRb და bRc მაშინ aRc. ვიტყვით, რომ R მიმართება A სიმრავლეზე არ არის ტრანზიტული, თუ როდესაც aRb და bRc მაშინ $a\bar{R}c$.

მაგალითი. ვთქვათ, $A = Z$ მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, და ვთქვათ R მიმართება განისაზღვრება aRb -ით, როგორც $a < b$. იმისათვის რომ შევამოწმოთ R მიმართების ტრანზიტულობა , ვუშვებთ aRb და bRc. ამრიგად $a < b$ და $b < c$. მაშინ გამომდინარეობს რომ $a < c$. აქედან R არის ტრანზიტული.

R მიმართება არის ტრანზიტული მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მის მატრიცას $M_R = [m_{ij}]$ აქვს თვისება

თუ $m_{ij} = 1$ და $m_{jk} = 1$, მაშინ $m_{ik} = 1$.

მარცხენა მხარე ამ გამონათქვამისა მარტივად მიშნავს, რომ $(M_R)^2_{\odot}$ აქვს 1 პოზიციაში i,k. ამრიგად, $\boldsymbol{R}$ მიმართების ტრანზიტულობა ნიშნავს, რომ თუ $(M_R)^2_{\odot}$ აქვს 1 რაიმე პოზიციაში, მაშინ M_R უნდა ჰქონდეს 1 იმავე პოზიციაში. ამრიგად , კერძოდ თუ $(M_R)^2_{\odot} = M_R$, მაშინ $\boldsymbol{R}$ ტრანზიტულია. საწინააღმდეგო მსჯელობა მცდარია.

მაგალითი. ვთქვათ $A = \{1,2,3\}$ და $\boldsymbol{R}$ არის მიმართება A სიმრავლეზე, რომლის მატრიცა არის

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

აჩვენეთ, რომ $\boldsymbol{R}$ არის ტრანზიტული.

ამოხსნა

პირდაპირი გამოთვლით $(M_R)^2_{\odot} = M_R$, აქედან $\boldsymbol{R}$ არის ტრანზიტული.

ექვივალენტობის მიმართება.

$\boldsymbol{R}$ მიმართებას ეწოდება **ექვივალენტობის მიმართება**, თუ იგი რეფლექსურია, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

მაგალითი. ვთქვათ $A = \{1,2,3,4\}$ და ვთქვათ

$$\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{2},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{4}),(\mathbf{4},\mathbf{3}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{4})\}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\boldsymbol{R}$ ***ექვივალენტობის*** მიმართებაა.

მაგალითი. ვთქვათ $A = Z$, მთელი რიცხვთა სიმრავლეა და ვთქვათ $\boldsymbol{R}$ მიმართება განისაზღვრება $a\boldsymbol{R}b$ -ით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $a \le b$. არის ექვივალენტური $\boldsymbol{R}$ მიმართება ?

ამოხსნა.

რადგან $a \le a$, $\boldsymbol{R}$ რეფლექსურია. თუ $a \le b$, აქედან არაა აუცილებელი გამომდინარეობდეს რომ $b \le a$, ამიტომ $\boldsymbol{R}$ არ არის სიმეტრიული. ამასთან ერთად, $\boldsymbol{R}$ ტრანზიტულია, რადგან $a \le b$ და $b \le c$ გამომდინარეობს $a \le c$.

ექვივალენტობის მიმართებები

თუ P არის A სიმრავლის დანაყოფი, მაშინ შეიძლება P ს გამოყენება ექვივალენტობის მიმართების ასაგებად A სიმრავლეზე.

თეორემა. ვთქვათ P არის A სიმრავლის დანაყოფი. სიმრავლეებს P ში ეწოდება ბლოკები P ში. განვსაზღვროთ $\boldsymbol{R}$ მიმართება A სიმრავლეზე შემდეგნაირად:

$a\boldsymbol{R}b$ არის მიმართება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც a და b ერთი და იმავე ბლოკის წევრებია, მაშინ $\boldsymbol{R}$ ***იქნება*** ექვივალენტობის მიმართება A სიმრავლეზე.

დამტკიცება

(a) თუ $a\epsilon A$, ცხადია მაშინ რომ a არის იმავე ბლოკში, როგორც თავის თავადი, ამიტომ $a\boldsymbol{R}a$.

(b) თუ $a\boldsymbol{R}b$, მაშინ a და b ერთი და იმავე ბლოკში არიან, ამიტომ $b\boldsymbol{R}a$.

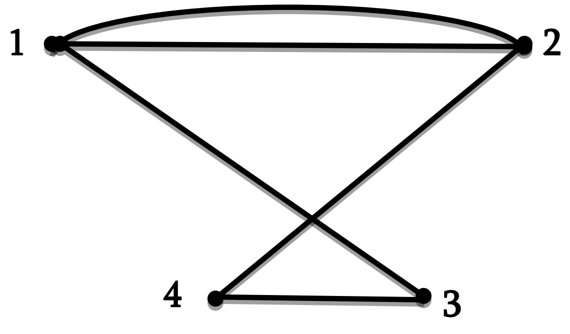
(c) თუ $a\boldsymbol{R}b$ და $b\boldsymbol{R}c$ მაშინ a , b და c უნდა მდებარეობდნენ ერთი და იმავე ბლოკში. ამიტომ $a\boldsymbol{R}c$

რადგან $\boldsymbol{R}$ არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია, $\boldsymbol{R}$ ექვივალენტური მიმართებაა. $\boldsymbol{R}$ უწოდებთ ექვივალენტურ მიმართებას განსაზღვრულს P თი.

გრაფები

გრაფი G შეიცავს სასრულ სიმრავლეს V ობიექტებისა, რომელთაც **წვეროებს** უწოდებენ, სასრულ სიმრავლეს E ობიექტებისა, რომელთაც **წიბოებს** უწოდებენ და γ ფუნქციას, რომელიც ანიჭებს ყოველ წიბოს ქვესიმრავლეს $\{v,w\}$, სადაც v *და* w წვეროებია (შეიძლება იყვნენ ერთი და იგივე). ჩვენ ჩავწერთ $G=\{V,E,\gamma\}$. თუ e არის წიბო, და $\gamma(e)=\{v,w\}$, e არის v *და* w შორის და e განისაზღვრება v *და* w -ებით. v *და* w წვეროებს უწოდებენ e -ს ბოლო წერტილებს. თუ მხოლოდ ერთი წიბოა v *და* w შორის, ჩვენ ხშირად გავაიგივურებთ e -ს სიმრავლესთან $\{v,w\}$

მაგალითი. ვთქვათ $V=\{1,2,3,4\}$ და $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$. ვთქვათ $\gamma(e_1)=\gamma(e_5)=\{1,2\}$, $\gamma(e_2)=\{4,3\}$, $\gamma(e_3)=\{1,3\}$,
$\gamma(e_4)=\{2,4\}$. მაშინ $G=\{V,E,\gamma\}$ არის გრაფი.



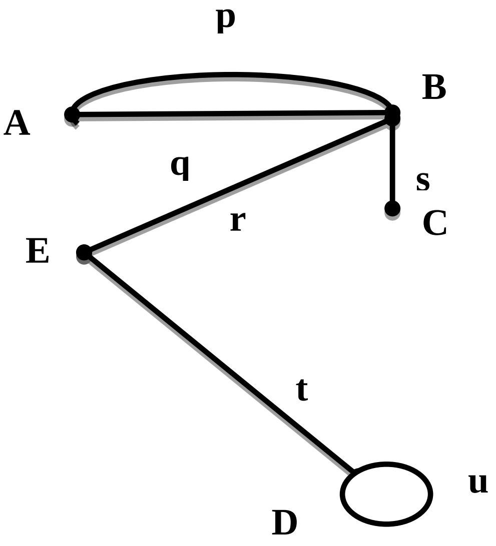
სურათი 0.

წვეროს ხარისხი არის რაოდენობა იმ წიბოებისა რომელთათვისაც ეს წვერო არის ამ წიბოების დაბოლოვების წერტილი. გრაფი შეიძლება შეიცავდეს წიბოს, რომელიც

წვეროდან იმავე წვეროში შედის, ასეთ წიბოებს უწოდებენ **მარყუჟს.** მარყუჟი უზრუნველყოფს წვეროს 2 ტოლ ხარისხს, რადგან წვერო ემსახურება მარყუჟის ორივე ბოლო წერტილებს.

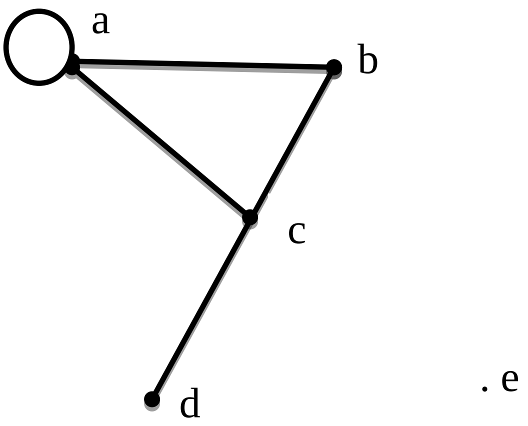
მაგალითი

(a) A წვეროს აქვს ხარისხი 2, B წვეროს აქვს ხარისხი 4 და D წვეროს აქვს ხარისხი 3.



სურათი 1.

(b) a წვეროს აქვს ხარისხი 4, e წვეროს აქვს ხარისხი 0 და b წვეროს აქვს ხარისხი 2.



სურათი 2.

ნულოვანი ხარისხის მქონე წვეროს უწოდებენ **იზოლირებულ** წვეროს. e არის **იზოლირებული** წვერო. წვეროების წყვილს რომლითაც ბოლოვდება წიბო ეწოდება

მოსაზღვრე წვეროები. a და b არიან **მოსაზღვრე** წვეროები, a და d არ არიან **მოსაზღვრე** წვეროები.

მარშრუტი

მარშრუტი მოცემულ G G გრაფში **არის** შემდეგი სახის **წიბოების სასრული მიმდევრობა {v_0, v_1}, {v_1, v_2}, … , {v_{k-1}, v_k}.** ცხადია მარშრუტის შემდეგი თვისება: ნებისმიერი ორი მიმდევარი წიბო არის ან მოსაზღვრე, ან ერთიდაიგივე. ყოველ მარშრუტს შეესაბამება წვეროების მიმდევრობა v_0, v_1 , v_2, … , v_k; v_0 –ს ეწოდება საწყისი წვერო, ხოლო v_k -ს მარშრუტის ბოლო წვერო. მაშასადამე, ჩვენ ვსაუბრობთ მარშრუტზე v_0-დან v_k -მდე. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი v_0 წვეროსთვის **ტრივიალური მარშრუტი,** რომელიც საერთოდ **არ შეიცავს წიბოებს, არის მარშრუტი v_0 -დან v_0 -მდე. მარშრუტის სიგრძე** ეწოდება მასში შემავალ წიბოების რიცხვს; ანუ **π მარშრუტი G გრაფში** შეიცავს წყვილთა (V_π, E_π) მიმდევრობებს: წვეროების მიმდევრობას V_π: $v_1, v_2, \dots, v_k$ და წიბოების მიმდევრობას E_π: $e_1, \mathrm{e}, \dots, e_{k-1}$, რომელთათვისაც

ყოველი წვეროების წყვილთა (v_i, v_{i+1}) მიმდევრობა არის **მოსაზღვრე** G გრაფში და წიბოს e_i აქვს v_i და v_{i+1} ბოლო წერტილები ყველა $i = 1, \dots, k-1$.

წიბო არ გვხვდება ერთზე მეტად წიბოთა მიმდევრობაში.

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია დავიწყოთ v_1 დან ვიმოგზაუროთ წიბოების $e_1, \mathrm{e}, \dots, e_{k-1}$ გავლით v_k -სკენ, ისე რომ ორჯერ არ გავდივართ ერთ და იგივე წიბოს .

ჯაჭვი

მარშრუტს ეწოდება **ჯაჭვი,** თუ ყველა მისი წიბო განსხვავებულია, და მარტივი ჯაჭვი, თუ ყველა მისი წვერო **v_0 , v_1 , v_2, … , v_k** განსხვავებულია (გარდა, შესაძლებელია, **$v_0 = v_k$**). ანუ **მარშრუტს** ეწოდება **მარტივი** თუ წვეროთა მიმდევრობაში ერთჯერ მეტად არ მეორდებიან წვეროები, გარდა შესაძლო $v_1 = v_k$ასეთ შემთხვევაში მარშრუტს ეწოდება **მარტივი ჯაჭვი.**

ჯაჭვი ან მარტივი ჯაჭვი **ჩაკეტილია,** თუ $v_0 = v_k$.ჩაკეტილი მარტივი ჯაჭვი, რომელიც შეიცავს ერთ წიბოს მაინც, ეწოდება ციკლი; კერძოდ, ნებისმიერი მარყუჟი ან ნებისმიერი წყვილი ჯერადი წიბო ჰქმნის ციკლს.

მაგალითი.

(a) განვიხილოთ მარშრუტები $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$ G გრაფში (სურათი 1), მარშრუტი $\boldsymbol{\pi_1}$: $\boldsymbol{V_{\pi_1}: A, B, E, D, D}$ და $\boldsymbol{E_{\pi_1}: p, r, t, u,}$ და

მარშრუტი $\boldsymbol{\pi_2}$: $\boldsymbol{V_{\pi_2}: A, B, A}$ და $\boldsymbol{E_{\pi_2}: p, q}$.

მარშრუტი π_1 არ არის მარტივი, რადგან D წვერო წარმოჩინდება ორჯერ, ხოლო მარშრუტი π_2 არის მარტივი ჯაჭვი, რადგან წვეროები მხოლოდ დასაწყისში და ბოლოში წარმოჩინდებიან ორჯერ.

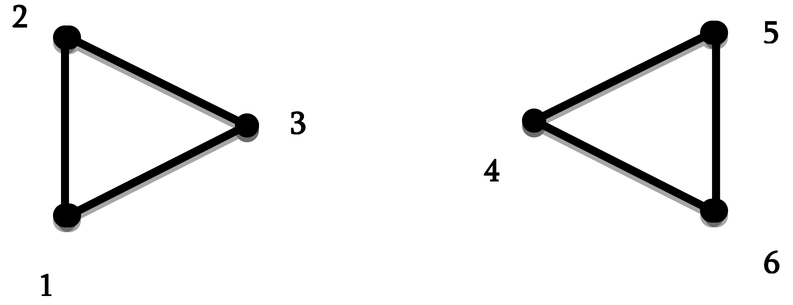
(b) მარშრუტი $\pi_3 : D, E, B, C$ გრაფში (სურათი 1) არის მარტივი. აქ არ არის აუცილებელი წიბოების დასახელება

(c) მარშრუტები $\pi_4 : a, b, c, a$ და $\pi_5 : d, c, a, a$ გრაფში (სურათი 2), π_4 არის **მარტივი ჯაჭვი,** ხოლო π_5 **არ არის მარტივი**

(d) მარშრუტები $\pi_6 : c, a, b, c, d$ გრაფში (სურათი 2), არ არის **მარტივი.**

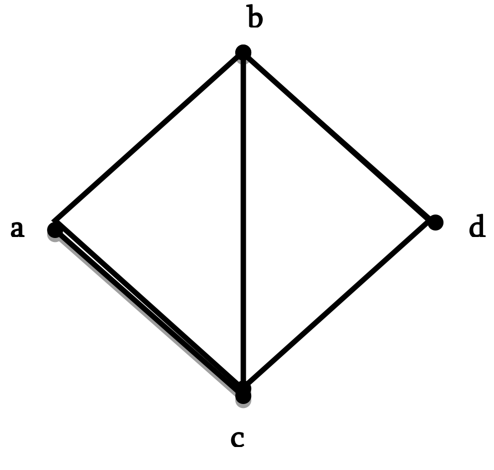
გრაფს ეწოდება **ბმული,** თუ არსებობს მარშრუტი გრაფში ნებისმიერი წვეროდან ნებისმიერ წვეროსკენ სხვა შემთხვევაში გრაფს ეწოდება **არაბმული.** თუ გრაფი არის არაბმული, მაშინ სხვადასხვა შეკავშირებულ ნაწილებს ეწოდება **ამ გრაფის კომპონენტები.**

მაგალითი. გრაფები სურათებზე 0, 1 არიან **ბმული, ხოლო** სურათებზე 2, 3 გრაფები არის **არაბმული.**



სურათი 3

მაგალითი



სურათი 4.

განვიხილოთ გრაფში მარშრუტები მოცემული სურათზე.

1. მარშრუტი b,c,d,b,a გადის b -ს ორჯერ. მარშრუტის სიგრძე არის 4-ს ტოლი.
2. მარშრუტი a, b, c, b, d გადის b -ს ორჯერ და იყენებს წიბოს b და c- ს შორის ორჯერ. მარშრუტის სიგრძე არის 4-ს ტოლი.
3. მარშრუტი a, b, c, a არის ციკლი 3 სიგრძის ტოლი.
4. მარშრუტი a, b, a არ არის ციკლი, იმიტომ რომ წიბო a დან b- მდე გვხვდება 2 ჯერ. ტრაექტორიის სიგრძე არის 2-ს ტოლი.

თეორემა. დავუშვათ, რომ G არის მარტივი გრაფი n წვეროთი და k კომპონენტით. მაშინ მისი წიბოების რიცხვი მ აკმაყოფილებს უტოლობას n – k≤m≤ (n– k)(n – k + 1)/2.

ბმულ გრაფ G-ს უწოდებენ **ეილერის გრაფს,** თუ არსებობს ჩაკეტილი ჯაჭვი, რომელიც **გადის ყველა მის წიბოზე;** ასეთ ჯაჭვს უწოდებენ **ეილერის ჯაჭვს.** ამ განსაზღვრებაში მოითხოვება, რომ **ყოველი წიბო გვხდებოდეს მხოლოდ ერთხელ**. თუ ჩვენ მოვხსნით მოთხოვნას ჩაკეტილობაზე, მაშინ გრაფს ეწოდება ნახევრად ეილერის;

ბმული გრაფი G არის **ეილერის გრაფი** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G-ს ყოველ წვეროს გააჩნია **ლუწი ხარისხი**

შესაძლებელია განხილულ იქნას პრობლემა ჩაკეტილი ჯაჭვის არსებობისა, რომელიც **გადის მხოლოდ ერთხელ მოცემული G ბმული გრაფის ყოველ წვეროს.** გასაგებია, რომ ასეთი ჯაჭვი უნდა იყოს ციკლი; თუ ასეთი ციკლი არსებობს, მაშინ მას უწოდებენ **ჰამილტონის ციკლს,** ხოლო G-ს **ჰამილტონის** გრაფს, რომელიც შეიცავს მარტივ ჯაჭვს, რომელიც გადის ყოველ წვეროს, ეწოდება ნახევრად ჰამილტონის გრაფი; შევნიშნოთ, რომ ყოველი ჰამილტონის გრაფი ნახევრად ჰამილტონისაა.

ხეები.

ვთქვათ **A** არის სიმრავლე, და **T** არის მიმართება **A**- ზე. ვიტყვით, რომ **T** არის **ხე,** თუ არსებობს v_0 წვერო **A** -ში თვისებით რომ არსებობს ერთადერთი გზა **T** ში v_0 - დან ყოველი სხვა წვეროსკენ **A** -ში, მაგრამ არ არსებობს გზა v_0 - დან v_0 -სკენ.

v_0 წვერო, რომელიც აღწერილია ხის განსაზღვრისას არის ერთადერთი. მას ხშირად უწოდებენ **T** ხის **ფესვს,** და **უწოდებენ T ფესვიან ხეს.** v_0 წვეროთი **T** ფესვიან ხეს ავღნიშნავთ როგორც (**T**, v_0).

თუ (**T**, v_0) არის ფესვიანი ხე **A** სიმრავლეზე, v ელემენტს **A** დან ეწოდება წვერო **T** ში.

თეორემა. ვთქვათ (**T**, v_0) არის ფესვიანი ხე. მაშინ

(a) არ არსებობს ციკლი **T** ში.

(b) v_0 არის ერთადერთი ფესვი **T** სი.

(c) ყოველ წვეროს **T** ში, განსხვავებულს v_0 - გან აქვს ერთის ხარისხი, ხოლო v_0 -ს აქვს ნულოვანი ხარისხი

დამტკიცება

(a) დაუშვათ, რომ **T** ში არის **q** ციკლი, რომელიც იწყება და მთავრდება v წვეროში. ხის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ვიცით რომ $v \neq v_0$ და უნდა არსებობდეს **p** გზა v_0 დან v -სკენ. მაშინ $q \circ p$ არის გზა v_0 დან v -სკენ, რომელიც განსხვავდება **p** გან, და ეს ეწინააღმდეგება ხის განმარტებას.

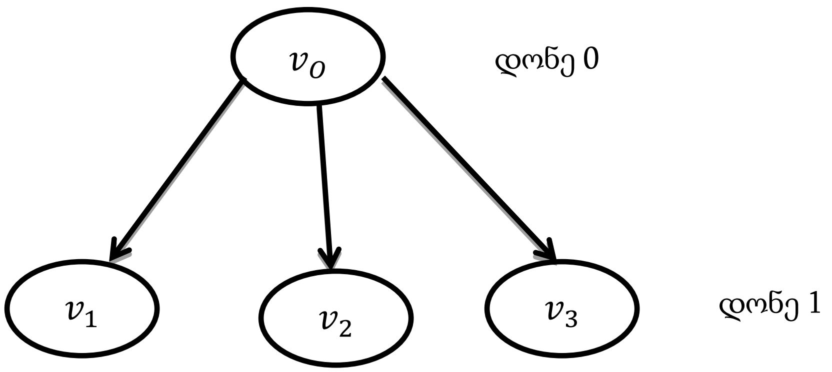
(b) თუ v_0' არის სხვა ფესვი **T** სი, მაშინ არსებობს **p** გზა v_0 დან v_0' -სკენ და **q** გზა v_0' დან v_0 -სკენ (რადგან v_0' ც არის ფესვი). მაშინ $q \circ p$ არის ციკლი v_0 დან v_0 -სკენ რაც შეუძლებელია ხის განმარტების თანახმად. აქედან v_0 წვერო **არის ერთადერთი.**

(c) ვთქვათ w_1 არის წვერო **T** ში, რომელიც განსხვავდება v_0 გან. მაშინ არსებობს ერთადერთი გზა $v_0,\ldots,v_k,w_1$ დაწყებული v_0 დან w_1 კენ **T** ში. რაც ნიშნავს, რომ $(v_k, w_1) \in T$, ამიტომ w_1 -ს ხარისხი არის სულ მცირე ერთის ტოლი მაინც. თუ მისი ხარისხი ერთზე მეტია მაშინ, უნდა არსებობდეს ორი განსხვავებული წვეროები w_2 და w_3 ისეთი რომ (w_2, w_1) და (w_3, w_1) არიან ორივე **T** ში. თუ $w_2 \neq v_0$ და $w_3 \neq v_0$, მაშინ არსებობს p_2 გზები v_0 დან w_2 სკენ და p_3 გზები v_0 დან w_3 კენ, განმარტების თანახმად. მაშინ $(w_2, w_1) \circ p_2$ და $(w_3, w_1) \circ p_3$ არის სხვადასხვა გზა v_0 დან w_1 კენ, ეს ეწინაეღმდეგება ხის განმარტებას v_0 ფესვით.აქედან გამომდინარე w_1 ხარისხი არის ერთი.

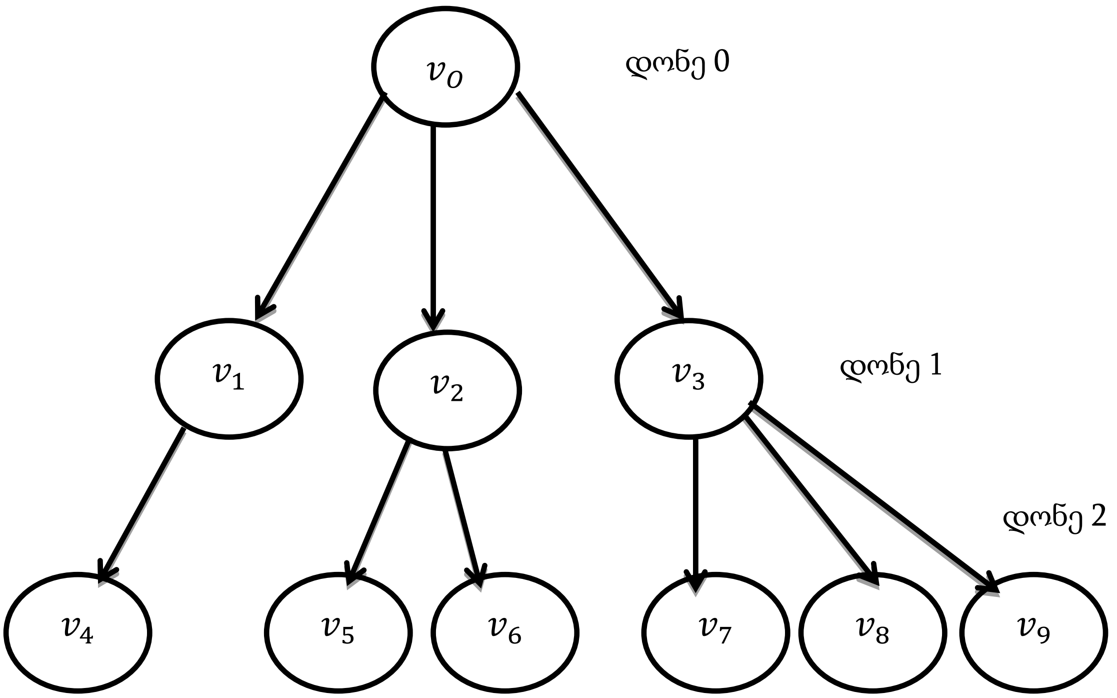
მოდით ვნახოთ როგორ გამოიყურება ტიპიური ხის ორიენტირებული გრაფი.

პირველად დავხატოთ ფესვი v_0. არცერთი წიბო არ შედის v_0 ში, მაგრამ რამოდენიმე შეიძლება მას ტოვებდნენ, და დავხატოთ ისინი ქვევით დაშვებულები. მაშინ v_0 დან გამოსული წიბოებების დაბოლოვების წვეროებს ეწოდება 1 **დონის** წვეროები, როდესაც v_0 უწოდებენ **0 დონეს.** აგრეთვე v_0 უწოდებენ ხანდახან ამ 1 **დონის** წვეროების **მშობელს** და თვითონ ამ 1 **დონის** წვეროებს უწოდებენ v_0 **შთამომავლობას.** ეს ნაჩვენებია სურათზე . აგრეთვე მეორე სურათზე ნაჩვენებია აგრეთვე მეორე დონე. მშობელ-შთამომავლობის მიმართება არის ამ დონეებისათვის. მაგალითად, v_3 უწოდებენ მშობელს ამ სამი შთამომავლობისათვის v_7, v_8, v_9.

ეს პროცესი გაგრძელდება იმდენ დონებამდე, სანამ საჭიროება იქნება ორიენტირებული გრაფის შესავსებად.



სურათი1.



სურათი2

ხის სიმაღლე, ხის ფოთლები.

როგორც ვხედავთ, ამოტრიალებულია ორიენტირებული გრაფი და ამიტომ აქვს ამ მიმართებებს ხის წოდება. დონის ყველაზე დიდ რიცხვს ეწოდება **ხის სიმაღლე.**

შევნიშნოთ, რომ ხეს შეიძლება ჰქონდეს უსასრულო დონეები და ყოველი დონე, 0-ვანის გარდა შეიცავდეს უამრავ წვეროებს. ფაქტიურად ნებისმიერ ამ წვეროთაგანს შეიძლება ჰქონდეს უამრავი შთამომავლობა. მაგრამ ჩვენ დაუშვათ რომ, ხეს აქვს სასრული წვეროები. ამრიგად ხეს ექნება ძირი (უდუდესი რიცხვი)-ბოლო დონე, რომელიც შეიცავს წვეროებს შთამომავლობის გარეშე. ხის წვეროებს, რომელთაც არ გააჩნიათ შთამომავალი ეწოდება **ხის ფოთლები.**

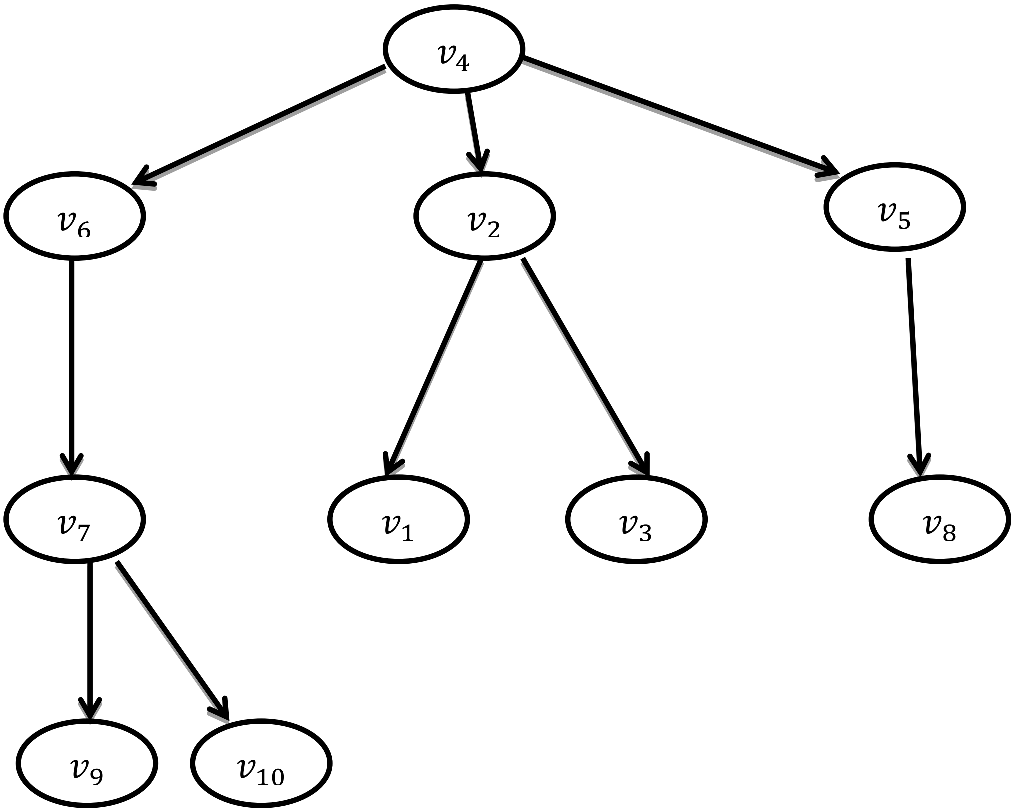
თეორემა. ვთქვათ (**T**, v_0) არის ფესვიანი ხე. მაშინ

(a) **T** არის ირეფლექსური.

(b) **T** არის ასიმეტრიული

(c) თუ $(a,b)\epsilon T$ და $(b,c)\epsilon T$, მაშინ $(a,c)\notin T$ მაშინ ყველა a,b,c არიან A -ში.

მაგალითი. ვთქვათ $A=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ და $T=\{(v_2,v_3),(v_2,v_1),(v_4,v_5),(v_4,v_6),(v_5,v_8),(v_6,v_7),(v_4,v_2),(v_7,v_9),(v_7,v_{10})\}$ აჩვენეთ, რომ **T** არის ფესვიანი ხე და გამოავლინეთ ფესვი.



ამოხსნა

რადგანაც არცერთი გზა არ იწყება წვეროებიდან $v_1, v_3, , v_8, v_9$ და v_{10} დან, ამიტომ ეს წვეროები ვერ იქნებიან ხის ფუძეები. არ არის გზები წვეროებიდან v_6, v_7, v_2 და v_5 წვეროსკენ v_4, ამიტომ ჩვენ უნდა გამოვრიცხოთ ეს წვეროები შეასაძლო ალბათობისაგან რომ ისინი შეიძლება იყვნენ წვეროები. ამიტომ თუ **T არის ფესვიანი ხე, მაშინ ფესვი უნდა იყოს** v_4.ადვილი საჩვენებია, რომ არსებობს გზა v_4 წვეროდან ყველა სხვა წვეროებისკენ. მაგალითად, გზა v_4, v_6, v_7, v_9 გამოდის v_4 დან v_9 -კენ, რადგან $(v_4, v_6), (v_6, v_7)$ და (v_7, v_9) არიან ყველა T -ში. ჩვენ ვხატავთ **T ს ორიენტირებულ გრაფს დაწყებულ** v_4 წვეროდან და წიბოებებით დაშვებულს ქვევით.რეზულტატი ნაჩვენებია სურათზე.

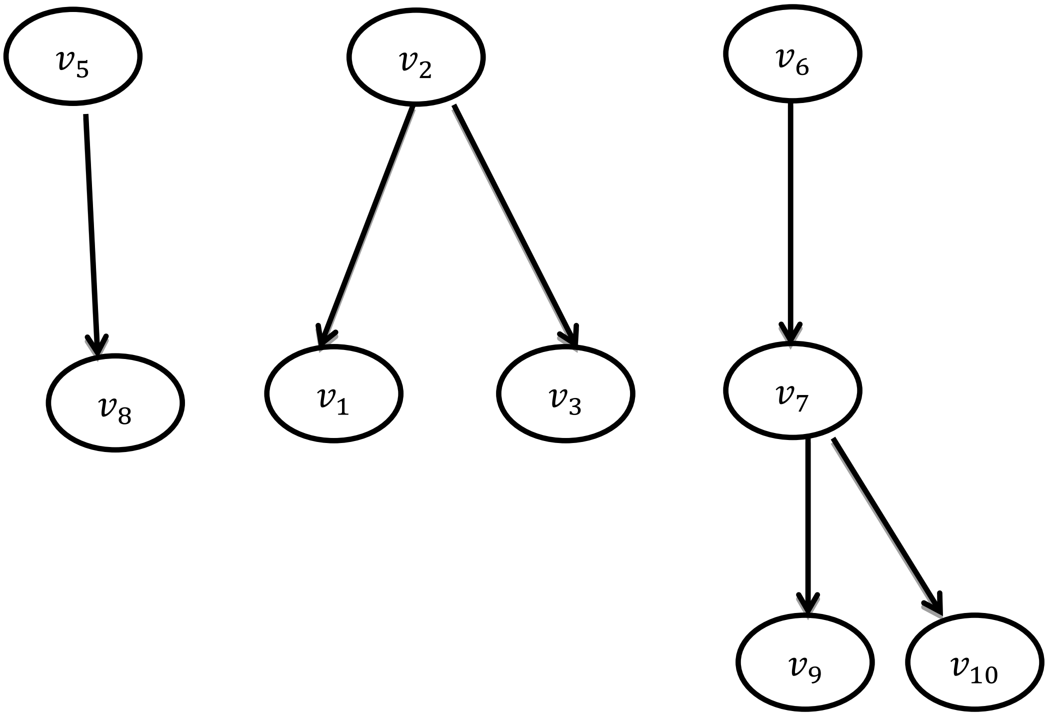
თუ n არის დადებითი მთელი რიცხვი, ჩვენ ვიტყვით რომ T ხე არის **n -ური ხე,** თუ ყოველ წვეროს აქვს არაუმეტესი n შთამომავლობა. თუ T -ს ყველა წვეროებს **ფოთლების გარდა, აქვს ზუსტად** n შთამომავლობა , ჩვენ ვიტყვით, რომ **T არის სრული n -ური ხე.** კერძოთ, 2-ხეს ეწოდება ბინარული ხე და სრულ 2-ხეს ეწოდება სრული ბინარული ხე.

ბინარული ხეები მნიშვნელოვანია, რადგანაც არსებობენ ეფექტური მეთოდები მათი გამოყენებისა და კომპიუტერზე მოძებნის მათი საშუალებით.

ვთქვათ (T, v_0) არის ფესვიანი ხე A სიმრავლეზე, და ვთქვათ v არის T -ს წვერო. ვთქვათ B არის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს v და ყველა მის **შთამომავლობას,** რაც ნიშნავს, რომ ყველა T -ს წვეროები შეიძლება მიღწევადი იყვნენ გზით დაწყებულს v -დან. შევნიშნოთ, რომ $B \subseteq A$. ვთქვათ, $T(v)$ არის შეზღუდვა T მიმართებისა B -ზე, ე.ი $T \cap (B \times B)$. სხვა სიტყვებით, $T(v)$ არის მიმართება, რაც მიიღება T დან შემდეგი ხერხით. წავშალოდ ყველა წვერო, რომელიც არ არის შთამომავლობა v -სი, და ყველა ის წიბოც, რომელიც იწყება ან მთავრდება ნებისმიერ ამ წვეროზე. მაშინ მივიღებთ შემდეგ შედეგს

თეორემა. თუ (T, v_0) არის ფესვიანი ხე და $v \in T$, მაშინ $\boldsymbol{T(v)}$ **არის აგრეთვე** ფესვიანი ხე v წვეროთ და ვიტყვით, რომ $\boldsymbol{T(v)}$ **არის ქვეხე T -სი დაწყებულს** v დან.

მაგალითი. თუ განვიხილავთ T ხეს ზემო მაგალითიდან, რომელსაც აქვს ფესვი v_4, დავხაზოთ T -ს ქვეხეები $\boldsymbol{T(v_5)}, \boldsymbol{T(v_2)}$ და $\boldsymbol{T(v_6)}$.


v_5
v_2
v_6
v_8
v_1
v_3
v_7
v_9
v_{10}

ლიტერატურა

1. Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Culter Ross ,
   Discrete Mathematical Structures, USA,Pearson Prentice Hall, Pearson Education, Inc., - 5nd,2004
2. James L. Hein, Discrete Structures, Logic, and Computability,USA,Jones and Barlett Publishers International Barb House, 2002
3. James A. Anderson, Discrete Mathematics with Combinatorics, USA, Prenice Hall, UpperSaddle River, New Jersey, 2004

შინაარსი

შესავალი............ 2
სიმრავლე............ 2
ოპერაციები სიმრავლეებზე............ 3
სიმრავლეთა ალგებრის კანონები............ 5
მახასიათებელი ფუნქციები............ 6
სიმრავლეების და ქვესიმრავლების კომპიუტერული წარმოდგენა............ 6
გამონათქვამები და ლოგიკური ოპერაციები............ 8
კონიუნქციის, დიზიუნქციის და უარყოფის კანონები............ 12
ამოცანა კრიპტოგრაფიიდან............ 13
ფსევდოკოდის ვერსიები............ 16
თვლის სისტემები............ 17
ფუნქცია............ 18
გარდაქმნა ათობითი სისტემიდან ორობით სისტემაში............ 21
დამტკიცების ტექნიკა............ 21
მიმართებები............ 26
მიმართებების გამოყენება რელაციური მონაცემთა ბაზების მაგალითზე............ 27
მიმართების მატრიცა............ 29
მიმართების ორიენტირებული გრაფი............ 30
ტრაექტორიები მიმართებებში და ორიენტირებულ გრაფებში............ 33
მიმართებების თვისებები............ 37
გრაფები............ 41
ხეები............ 45
ლიტერატურა............ 51