რიცხვითი მეთოდები კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის

ჯემალ ფერაძე

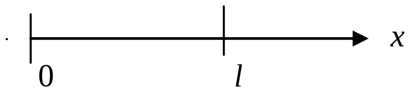
სალექციო კურსი

I თავი. სხვაობიანი სქემები მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებისათვის

1. სხვაობიანი სქემები სითბოგამტარობის განტოლებისათვის

1.1. დიფერენციალური ამოცანა

განვიხილოთ ღერო $0 \le x \le l$ (ნახ. 1.1). მასში სითბოს გავრცელების პროცესი აღიწერება სითბოგამტარებლო-ლობის განტოლებით



ნახ. 1.1

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_0(x,t), \quad 0 < x < l\,, \tag{1.1}$$

სადაც $u = u(x,t)$ ღეროს ტემპერატურა x წერტილში და დროის t მომენტში, c – მასის ერთეულის სითბოგამტარობა, ρ – სიმკვრივე, k – სითბოგამტარობის კოეფიციენტი, $f_0(x,t)$ -- კი სითბოს წყაროს სიმკვრივე. ზოგად შემთხვევაში, c, ρ, k, და f_0 შეიძლება დამოკიდებული იყოს არა მარტო x და t ცვლადებზე, არამედ $u = u(x,t)$ ტემპერატურაზე (სითბოგამტარობის კვაზიწრფივი განტოლება) და აგრეთვე $\frac{\partial u}{\partial x}$-ზე (არაწრფივი განტოლება). თუ c, ρ, და k კოეფიციენტები მუდმივია, $c\rho$-ზე გაყოფით (1.1) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,, \tag{1.2}$$

სადაც $f_1 = \frac{f_0}{c\rho}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}.$

თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადებს $x_1 = \frac{x}{l},\ t_1 = \frac{a^2 t}{l^2}$ და აღვნიშნავთ $f_1 = \frac{l^2}{a^2} f$, (1.2) - დან მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1, \quad 0 < x_1 < 1.$$

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი სითბოგამტარობის განტოლებისათვის: $\bar{D} = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ არეში ვიპოვოთ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.3}$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t \le T,$$

განტოლების უწყვეტი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1.4}$$

და სასაზღვრო

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.5}$$

პირობებს, სადაც $u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ და $f(x,t)$ მოცემული ფუნქციებია. ცნობილია, რომ ამ ფუნქციებს გარკვეული სიგლუვის პირობებში (1.3) – (1.5) ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია. ვგულისხმობთ, რომ შესრულებულია პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფს (1.3) – (1.5) ამოცანის ამოხსნადობას, ერთადერთობასა და ამონახსნის საჭირო სიგლუვეს.

1. 2. ცხადი სხვაობიანი სქემა

უპირველეს ყოვლისაშემოვიღოთ x, t ცვლადების ცვლილების ბადე D არეში. უნდა განვსაზღვროთ აგრეთვე შაბლონი, ე.ი. ბადის წერტილთა ის სიმრავლე, რომელიც მონაწილეობს დიფერენციალური განტოლების მიახლოებაში.

x ცვლადის მიმართ შემოვიღოთ ბადე h ბიჯით

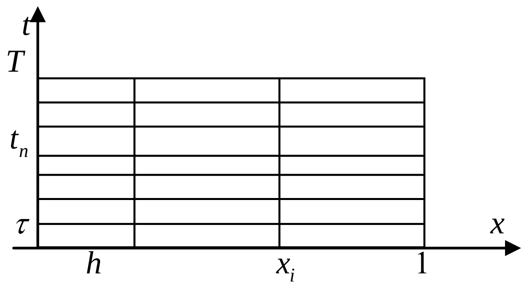
$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih:\ i = 0,1,\ldots,N, \quad h = \frac{1}{N} \right\},$$

t ცვლადის მიმართ შემოვიღოთ ბადე τ ბიჯით

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t_n = n\tau:\ n = 0,1,\ldots,K, \quad \tau = \frac{T}{K} \right\}.$$

განვიხილოთ ω_h და ω_τ სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \left\{ (x_i, t_n) : x_i = ih,\ t_n = n\tau,\ i = 0,1,\ldots,N,\ n = 0,1,\ldots,K,\ h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{T}{K} \right\}$$ (ნახ. 1.2)



ნახ.1.2

(x_i, t_n) კვანძები, რომლებიც ეკუთვნის მონაკვეთებს $I_0 = \{0 \le x \le 1,\ t = 0\}$, $I_1 = \{x = 0,\ 0 \le t \le T\}$, $I_2 = \{x = 1,\ 0 \le t \le T\}$, წარმოადგენს სასაზღვრო კვანძებს. დანარჩენ კვანძებს უწოდებენ შიგა კვანძებს.

შრე ეწოდება $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადის კვანძების იმ სიმრავლეს, რომლებსაც აქვს ერთიდაიგივე t კოორდინატი. n-ური შრე ეწოდება კვანძების შემდეგ სიმრავლეს

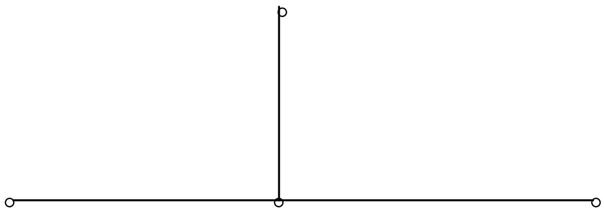
$$(x_0, t_n),\ (x_1, t_n), \cdots, (x_N, t_n).$$

$\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე განსაზღვრული ბადური u ფუნქციისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$u_i^n = u(x_i, t_n), \qquad u_{t,i}^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}, \qquad u_{\bar{x}x,i}^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

იმისათვის, რომ მოვახდინოთ (1.3) განტოლების მიახლოება, (x_i, t_n) წერტილში შემოვიღოთ შაბლონი, რომელიც შედგება ოთხი კვანძისაგან (x_{i-1}, t_n), (x_i, t_n), (x_{i+1}, t_n), (x_i, t_{n+1}) (ნახ. 1.3)

(x_i, t_{n+1})



(x_{i-1},t_n) (x_i,t_n) (x_{i+1},t_n)

ნახ.1.3

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ წარმოებული (x_i,t_n) წერტილში შევცვალოთ პირველი რიგის $u_{t,i}^n$, ხოლო $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ წარმოებული კი – მეორე რიგის $u_{\bar{x}x,i}^n$ სხვაობით. მარჯვენა მხარე შევცვალოთ ბადური ფუნქციით $f_i^n = f(x_i,t_n)$.

(1.3) – (1.5) დიფერენციალური ამოცანა შეიცვლება სხვაობიან განტოლებათა სისტემით

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n,.$$
$$n = 0,1,\ldots,K-1, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \tag{1.6}$$
$$u_i^0 = u_0(x_i),\ i = 0,1,\ldots,N,$$
$$u_0^n = \mu_1(t_n),\ u_N^n = \mu_2(t_n), \quad n = 0,1,\ldots,K$$

(1.6) სხვაობიანი სქემა წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომელშიც განტოლებების რაოდენობა უცნობების რაოდენობის ტოლია. თუ ამ განტოლებატა სისტემის ამონახსნს განვსაზღვრავთ შრეების მიხედვით, მაშინ ამ ამონახსნის მოძებნა არავითარ სიძნელეებთან არ არის დაკავშირებული. მართლაც, სხვაობიანი განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau\left(\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + f_i^n\right),$$
$$n = 0,1,\ldots,K-1, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \tag{1.7}$$
$$u_i^0 = u_0(x_i),\ i = 0,1,\ldots,N,$$
$$u_0^n = \mu_1(t_n),\ u_N^n = \mu_2(t_n), \quad n = 0,1,\ldots,K.$$

ნულოვან შრეზე $(n=0)$ ამონახსნი მოცემულია საწყისი პირობების საშუალებით

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

(1.7) ფორმულის საშუალებით, თუ მასში შევიტანთ $n=0$ მნიშვნელობას, შეიძლება ვიპოვოთ სხვაობიანი განტოლების ამონახსნის მნიშვნელობები პირველ შრეზე

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\left(\frac{u_{i-1}^0 - 2u_i^0 + u_{i+1}^0}{h^2} + f_i^0\right),\ i = 1,2,\ldots,N-1.$$

ამ ფორმულის საშუალებით ვიპოვით $u_1^1,u_2^1,\ldots,u_{N-1}^1$ მნიშვნელობებს. რაც შეეხება u_0^1 და u_N^1-ს, ეს მნიშვნელობები მიიღება სასაზღვრო პირობიდან $u_0^1 = \mu_1(t_1)$, $u_n^1 = \mu_2(t_1)$.

შემდეგ, თუ (1.7) ფორმულაში შევიტანთ $n=1$ მნიშვნელობას, ანალოგიურად გამოვთვლით სხვაობიანი განტოლების ამონახსნის მნიშვნელობებს მეორე

შრეზე და ა.შ. ამ პროცესის გაგრძელება საშუალებას მოგვცემს გამოვთვალოთ ამონახსნის მნიშვნელობები ყველა შრეზე.

რადგან (1.7) ფორმულით ცხადად გამოითვლება ამონხხსნის მნიშვნელობები $\bar{\omega}_{ht}$ ბადის კვანძებში, (1.7) სხვაობიან სქემას უწოდებენ ცხად სქემას. ცოტა ქვემოთ ჩვენ გავეცნობით არაცხად სქემასაც, რომლის გამოყენების შემთხვევაში ყოველ შრეზე ამონახსნის მნიშვნელობების მისაღებად საჭირო იქნება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.

1.3. ცხადი სხვაობიანი სქემის ცდომილება

ცხადი სხვაობიანი სქმის ცდომილება განისაზღვრება როგორც ბადური ფუნქციების შემდეგი სხვაობა

$$z_i^n = u_i^n - u(x_i, t_n), \tag{1.8}$$

სადაც u_i^n წარმოადგენს (1.7) სხვაობიანი სქემის ამონახსნს, ხოლო $u(x_i, t_n)$ კი (1.3)- (1.5) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნის მნიშვნელობას $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადის (x_i, t_n) წერტილში.

თუ (1.8) ტოლობიდან განვსაზღვრავთ u_i^n-ს

$$u_i^n = z_i^n + u(x_i, t_n),$$

და შევიტანთ (1.7) ან რაც იგივეა (1.6) სხვაობიან სქემაში

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} + \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} = \frac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n}{h^2} +$$

$$+ \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_{n)}}{h^2} + f_i^n,$$

$$n = 0, 1, \ldots, K-1, \;\; i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$z_i^0 + u(x_i, t_0) = u_0(x_i), \; i = 0, 1, \ldots, N,$$

$$z_0^n + u(x_0, t_n) = \mu_1(t_n), \quad z_N^n + u(x_N, t_n) = \mu_2(t_n), \quad n = 0, 1, \ldots, K,$$

მივიღებთ სხვაობიან ამოცანას ცდომილებას z_i^n ფუნქციისათვის

$$\begin{gathered} \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \frac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n}{h^2} + \psi_i^n, \\ n = 0, 1, \ldots, K-1, \;\; i = 1, 2, \cdots, N-1, \\ z_i^0 = 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, N, \\ z_0^n = 0, \; z_N^n = 0, \; n = 0, 1, \ldots, K, \end{gathered} \tag{1.9}$$

სადაც

$$\psi_i^n = -\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} + \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2} + f_i^n \tag{1.10}$$

წარმოადგენს (1.6) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებას (შეუსაბამობას) (1.3) – (1.5) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნზე. თუ (1.3) – (1.5) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნი საკმაოდ გლუვი ფუნქციაა, მაშინ

$$|\psi_i^n| = O(\tau + h^2). \tag{1.11}$$

z_i^n ცდომილების ფუნქცია შეიძლება შევაფასოთ ψ_i^n ფუნქციის საშუალებით და ამით დავამტკიცოთ (1.6) სხვაობიანი სქემის კრებადობა $O(\tau + h^2)$ სიჩქარით

$$|z_i^n| = O(\tau + h^2).$$

1.4. აპროქსიმაციის ცდომილების შეფასება

დავამტკიცოთ (1.11) ტოლობა. თუ აპროქსიმაციის ცდომილების (1.10) გამოსახულებაში შემავალ ფუნქციების მნიშვნელობებს გავშლით ტეილორის მწკრივად, მივიღებთ

$$\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{\tau}=\frac{u(x_i,t_n)+\tau\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n)+O(\tau^2)-u(x_i,t_n)}{\tau}=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n)+O(\tau).$$

ანალოგიურად გვექნება

$$\frac{u(x_{i+1},t_n)-2u(x_i,t_n)+u(x_{i-1},t_n)}{h^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n)+O(h^2).$$

ამის გამო

$$\psi_i^n=-\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_n)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n)+f(x_i,t_n)+O(\tau)+O(h^2).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ (1.3) თანახმად $-\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f=0,$ მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას.

მაგალითი 1. მოცემულია ამოცანა

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x^2\cos\pi t+x+1,$$
$$0<x<1,\ 0<t\le\frac{1}{8},$$
$$u(x,0)=x(1-x),\quad 0\le x\le 1,$$
$$u(0,t)=t,\quad u(1,t)=\sin\pi t,\ 0\le t\le\frac{1}{8}.$$

გამოიყენეთ ცხადი სხვაობიანი სქემა ბიჯებით $h=\dfrac{1}{4},\ \tau=\dfrac{1}{96}$. იპოვეთ სხვაობიანი ამონახსნის მნიშვნელობები პირველ შრეზე.

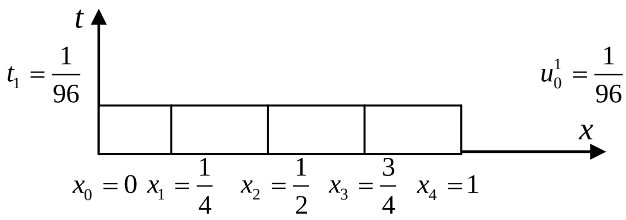
ამოხსნა. გვაქვს $N=4,\ K=12\ \left(Nh=1,\ K\ \tau=\dfrac{1}{8}\right)$. (1.7)-ის თანახმად

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\tau\left(\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}+f_i^n\right),\tag{1.12}$$
$$n=0,1,\ldots,11,\quad i=1,2,3,$$
$$u_i^0=x_i(1-x_i),\ i=0,1,\ldots,4,$$
$$u_0^n=t_n,\quad u_N^n=\sin\pi t_n,\ n=0,1,\ldots,12,$$
$$x_i=ih,\qquad t_n=n\tau.$$

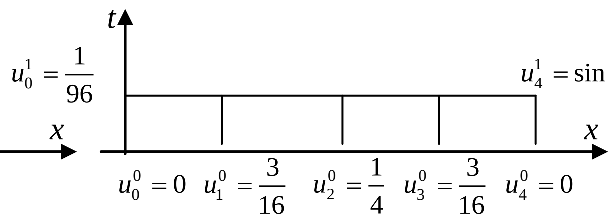
ვინაიდან $\dfrac{\tau}{h^2}=\dfrac{1/96}{1/16}=\dfrac{1}{6}$ და $f(x,t)=2x^2\cos\pi t+x+1,$ (1.12) მიიღებს სახეს

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{6}+\frac{1}{96}(2x_i^2\cos\pi t_n+x_i+1).$$

ნახ. 1.4 და ნახ 1.5 მოყვანილია x_i და u_i^0-ის მნივნელობები, რომლებიც დაგვჭირდება u_1^1, u_2^1 და u_3^1 მისაღებად. ნახ 1.5 აგრეთვე ამოწერილია u_0^1 და u_4^1 მნიშვნელობები



ნახ. 1.4



ნახ. 1.5

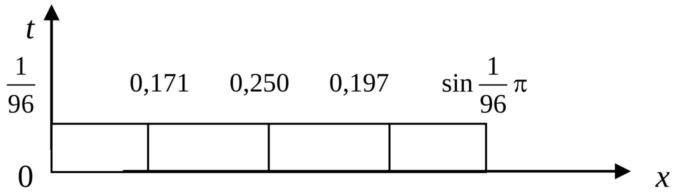
ვიპოვოთ u_i^1, $i = 1, 2, 3.$

$$u_1^1 = \frac{3}{16} + \frac{\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{3}{16} + 0}{6} + \frac{1}{96}\left(2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cos\pi\cdot 0 + \frac{1}{4} + 1\right) = 0{,}171,$$

$$u_2^1 = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{16} - 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{16}}{6} + \frac{1}{96}\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cos\pi\cdot 0 + \frac{1}{2} + 1\right) = 0{,}250,$$

$$u_3^1 = \frac{3}{16} + \frac{0 - 2\cdot\frac{3}{16} + \frac{1}{4}}{6} + \frac{1}{96}\left(2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cos\pi\cdot 0 + \frac{3}{4} + 1\right) = 0{,}197.$$

ეს შედეგები წარმოდგენილია აგრეთვე ნახ 1.6-ზე.



ნახ. 1.6

1.5. ჰარმონიკების მეთოდი

გავეცნოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი სხვაობიანი სქემის გამოკვლევის ერთ მეთოდს, რომელიც ჰარმონიკების მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი. თუმცა ეს მეთოდი არ ითვალისწინებს სასაზღვრო პირობებისა და მარჯვენა მხარის გავლენას, ის მაინც იძლევა საშუალებას დავადგინოთ სხვაობიანი სქემის მდგრადობის პირობები. ვაჩვენოთ, რომ (1.6) სხვაობიანი სქემა შეიძლება გამოყენებული იქნას მხოლოდ $\tau \le \frac{h^2}{2}$ შეზღუდვის პირობებში, რაც ნიშნავს, რომ ბიჯი დროის კოორდინატის მიხედვით უნდა ავიღოთ საკმარისად მცირე.

განვიხილოთ სხვაობიანი განტოლება

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \qquad (1.13)$$

(1.13) ერთგვაროვანი განტოლებაა, რომელიც შეესაბამება (1.6) სხვაობიან განტოლებას. (1.13) განტოლების კერძო ამონახსნს ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u_j^n = q^n e^{ijh\varphi}, \qquad (1.14)$$

სადაც i – წარმოსახვითი ერთიანი, q და φ - ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც უნდა განისაზღვროს ისე, რომ (1.14) ბადური ფუნქცია იყოს (1.13) სხვაობიანი

განტოლების ამონახსნი. შევიტანოთ u_j^n-ის გამოსახულება (1.13) განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{q^{n+1}e^{ijh\varphi}-q^n e^{ijh\varphi}}{\tau}=\frac{q^n e^{i(j+1)h\varphi}-2q^n e^{ijh\varphi}+q^n e^{i(j-1)h\varphi}}{h^2}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე შევკვეცოთ $q^n e^{ijh\varphi}$-ზე. მივიღებთ

$$\frac{q-1}{\tau}=\frac{e^{ih\varphi}-2+e^{-ih\varphi}}{h^2}.$$

ვინაიდან $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, გვექნება

$$\frac{q-1}{\tau}=\frac{2(\cos h\varphi-1)}{h^2},$$

$$\frac{q-1}{\tau}=-\frac{4\sin^2\dfrac{h\varphi}{2}}{h^2},$$

საიდანაც შეიძლება განისაზღვროს q-ს მნიშვნელობა

$$q=1-4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2},\qquad \gamma=\frac{\tau}{h^2}.$$

(1.14) სახის ამონახსნის საწყისი პირობები $u_j^0=e^{ijh\varphi}=\cos jh\varphi+i\sin jh\varphi$ (მათ ეწოდება ჰარმონიკები) შემოსაზღვრულია. თუ φ-ს რომელიმე მნიშვნელობისათვის q მამრავლი მოდულით გახდება 1-ზე მეტი, მაშინ (1.14) ამონახსნი უსასრულოდ გაიზრდება, როდესაც $n\to\infty$. ამ შემთხვევაში (1.13) სხვაობიან განტოლებას უწოდებენ არამდგრადს, რადგან ვერ მივიღებთ დიფერენციალური განტოლების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი თვისების ანალოგს – დაირღვევა ამონახსნის უწყვეტი დამოკიდებულება საწყის პირობებზე. თუ $|q|\le 1$, ყველა ნაამდვილი φ-თვის, მაშინ (1.14) სახის ამონახსნები შემოსაზღვრულია და სხვაობიან განტოლებას უწოდებენ მდგრადს.

არამდგრადობის შემთხვევაში (1.6) სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნის პოვნა (1.7) ფორმულის საშუალებით პრაქტიკულად შეუძლებელია, რადგან ცდომილებები (მაგალითად, დამრგვალების ცდომილებები) რომლებიც შეიძლება შეტანილ იქნეს საწყის მნიშვნელობებში, უსარულოდ გაიზრდება n-ის ზრდასთან ერთად, რაც თავის მხრივ გამოიწვევს ამონახსნის ცდომილების უსასრულოდ გაზრდას.

$|q|\le 1$ უტოლობა შემდეგი უტოლობების ექვივალენტურია

$$-1\le 1-4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}\le 1,$$

$$4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}\le 2,$$

$$\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}\le\frac{1}{2}.$$

ნებისმიერი φ-სათვის ბოლო უტოლობა მართებულია, თუ $\gamma\le\dfrac{1}{2}$. ამრიგად, (1.6) სქემის გამოყენება შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $\dfrac{\tau}{h^2}\le\dfrac{1}{2}$, ანუ $\tau\le\dfrac{h^2}{2}$. სხვაობიან სქემებს, რომლებიც მდგრადი არიან სივრცულ და დროით ბიჯებს შორის გარკვეული თანაფარდობის შესრულების შემთხვევაში,

უწოდებენ პირობითად მდგრად სქემებს. როგორც დავადგინეთ, (1.6) სქემა პირობითად მდგრადია, ამასთან მდგრადობის პირობას აქვს სახე

$$\tau \le \frac{h^2}{2}.$$

შევნიშნოთ, რომ პირობითად მდგრადი სქემები პარაბოლური ტიპის განტოლებების ამოსახსნელად იშვიათად გამოიყენება, რადგან ამ შემთხვევაში საკმაოდ მძიმე შეზღუდვა დაედება τ ბიჯს. ასე მაგალითად, ვთქვათ $h=10^{-2}$, მაშინ τ ბიჯი არ უნდა აღემატებოდეს $\frac{1}{2}10^{-4}$-ს. მაშინ თუ გვინდა ამონახსნის მნიშვნელობის პოვნა $t=1$ მომენტში, მაშინ ბიჯების რაოდენობა უნდა განისაზღვროს შემდეგნაირად

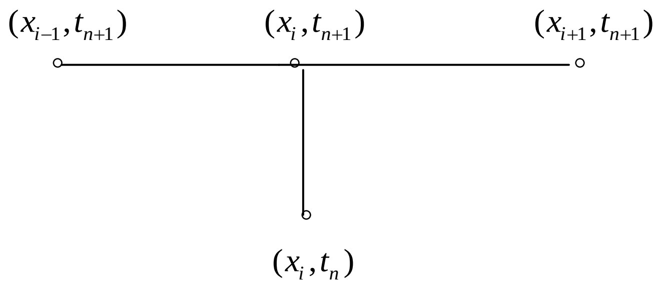
$$\tau n_0 = 1,$$

$$n_0 = \frac{1}{\tau} \ge 2\cdot 10^4,$$

ე.ი. უნდა ჩავატაროთ გამოთვლები არანაკლებ $2\cdot 10^4$ რაოდენობის შრეზე, ეს კი თავის მხრივ მოითხოვს გამოთვლების ჩატარებას (1.7) ფორმულის გამოყენებით $2\cdot 10^6$ (ორ მილიონ) კვანძში.

1.6. არაცხადი სხვაობიანი სქემა

წმინდა არაცხადი სხვაობიანი სქემა (1.3) სითბოგამტარობის განტოლებისათვის მიიღება იმ შემთხვევაში, თუ დიფერენციალური განტოლების მიახლოებას მოვახდენთ (x_i,t_n), (x_{i-1},t_{n+1}), (x_i,t_{n+1}), (x_{i+1},t_{n+1}) შაბლონზე (ნახ. 1.7).



ნახ.1.7

ამ შემთხვევაში სხვაობიან სქემას აქვს სახე

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+1}, \tag{1.15}$$
$$n=0,1,\dots,K-1, \quad i=1,2,\dots,N-1,$$
$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i=0,1,\dots,N,$$
$$u_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\ u_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\ n=0,1,\dots,K-1.$$

(1.15) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, ისევე როგორც ცხადი სხვაობიანი სქემის შემთხვევაში ხდება შრეების მიხედვით, დაწყებული პირველი შრიდან. მაგრამ ცხადი სქემისაგან განსხვავებით ყოველ შრეზე უნდა ამოიხსნას წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა სამდიაგონალური მატრიცით

$$\begin{aligned} &\gamma u_{i-1}^{n+1} - (1+2\gamma)u_i^{n+1} + \gamma u_{i+1}^{n+1} = -F_i^{n+1},\ i=1,2,\dots,N-1, \\ &u_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\ u_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}), \end{aligned} \tag{1.16}$$

სადაც $\gamma = \dfrac{\tau}{h^2}$, $F_i^{n+1} = u_i^n + \tau\, f_i^{n+1}$.

ეს სისტემა შეიძლება ამოიხსნას ფაქტორიზაციის მეთოდის საშუალებით.

1.7. ფაქტორიზაციის მეთოდი

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1.17}$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \tag{1.18}$$

(1.17), (1.18) წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას სამდიაგონალური მატრიცით. მისი მატრიცული სახე შემდეგია

$$Ay = \varphi,$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\chi_1 & & & & & & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & & & & \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} & & \\ & & & & & & -\chi_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$y = (y_0, y_1, \ldots, y_N)^T, \quad \varphi = (\mu_1, -\varphi_1, \ldots, -\varphi_{N-1}, \mu_2)^T.$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ე.წ. ფაქტორიზაციის მეთოდი, რომელიც წარმოადგენს გაუსის მეთოდის ვარიანტს სისტემებისათვის სამდიაგონალური მატრიცით. (1.17), (1.18) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.19}$$

სადაც α_{i+1} და β_{i+1} ჯერჯერობით უცნობი კოეფიციენტებია. ამ ფორმულის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i.$$

y_{i-1}-ის ეს გამოსახულება შევიტანოთ (1.17) განტოლებაში. მივიღებთ

$$a_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - c_i y_i + b_i y_{j+1} = -\varphi_i.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$(\alpha_i a_i - c_i) y_i + b_i y_{i+1} = -(a_i \beta_i + \varphi_i).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\alpha_i a_i - c_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$y_i = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i} y_{i+1} + \frac{a_i \beta_i + \varphi_i}{c_i - \alpha_i a_i}.$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ (1.19) ტოლობას, მივიღებთ

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + \varphi_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \; i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{1.20}$$

(1.20) ფორმულები წარმოადგენენ რეკურენტულ დამოკიდებულებებს. იმისათვის, რომ მათი საშუალებით ვიპოვოთ α_i და β_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, საჭიროა მოცემული

იყოს α_1 და β_1-ის მნიშვნელობები. ამისათვის განვიხილოთ (1.19) გამოსახულება, როდესაც $i=0$

$$y_0=\alpha_1 y_1+\beta_1,$$

და ეს ტოლობა შევადაროთ (1.18)-ის პირველ ტოლობას, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\alpha_1=\chi_1,\ \beta_1=\mu_1. \tag{1.21}$$

(1.20), (1.21) ფორმულების საშუალებით ვიპოვით α_{i+1}, β_{i+1} კოეფიციენტებს, $i=1,2,\ldots,N-1$. მას შემდეგ, რაც ნაპოვნია კოეფიციენტების მნიშვნელობები, (1.17), (1.18) სისტემის ამონახსნს ვიპოვით (1.19) ფორმულის გამოყენებით, თუ $i=N-1,\ \ N-2,\ldots,1$. ამ ფორმულით გამოთვლების დაწყებისათვის საჭიროა y_N მნიშვნელობის ცოდნა. ამ მიზნით (1.19) რეკურენტული დამოკიდებულება ჩავწეროთ $i=N-1$-სათვის და ვისარგებლოთ (1.18)-ის მეორე ტოლობით

$$y_{N-1}=\alpha_N y_N+\beta_N,$$

$$y_N=\chi_2 y_{N-1}+\mu_2,$$

საიდანაც მივიღებთ $(1-\alpha_N\chi_2)y_N=\mu_2+\chi_2\beta_N$. თუ $1-\alpha_N\chi_2\neq 0,$ მაშინ

$$y_N=\frac{\mu_2+\chi_2\beta_N}{1-\alpha_N\chi_2}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ ფაქტორიზაციის მეთოდის ფორმულებს აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{gathered}\alpha_1=\chi_1,\quad \beta_1=\mu_1,\\ \alpha_{i+1}=\frac{b_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad \beta_{i+1}=\frac{a_i\beta_i+\varphi_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad i=1,2,\ldots,N-1,\\ y_N=\frac{\mu_2+\chi_2\beta_N}{1-\alpha_N\chi_2},\\ y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\qquad i=N-1,N-2,\ldots,0.\end{gathered} \tag{1.22}$$

მაგალითი 2. მოცემულია ამოცანა

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+30xt+11t,$$

$$0<x<1,\ \ 0<t\le 0,3,$$

$$u(x,0)=x+1,\quad 0\le x\le 1,$$

$$u(0,t)=t+1,\quad u(1,t)=t^2+2,\qquad 0\le t\le 0,3.$$

გამოიყენეთ არაცხადი სხვაობიანი სქემა ბიჯებით $h=0,25,\ \tau=0,1.$ იპოვეთ სხვაობიანი ამონახსნის მნიშვნელობები პირველ შრეზე. გამოიყენეთ ფაქტორიზაციის მეთოდი.

ამოხსნა. შევადგინოთ (1.16) სახის სისტემა. გავითვალისწინოთ, რომ $N=4$,

$\gamma=\dfrac{0,1}{0,25^2}=1,6,\quad u_i^0=x_i+1,\qquad \mu_1(t_{n+1})=t_{n+1}+1,\qquad \mu_2(t_{n+1})=t_{n+1}^2+2,$

$f_i^{n+1}=30x_i t_{n+1}+11t_{n+1},\qquad x_i=0,25\cdot i,\ \ t_n=0,1\cdot n.$ ამის გამო

$F_1^1=u_1^0+\tau f_1^1=1,25+0,1\cdot 1,85=1,435,\qquad F_2^1=u_2^0+\tau f_2^1=1,50+0,1\cdot 2,60=1,760,$

$F_3^1=u_3^0+\tau f_3^1=1,75+0,1\cdot 3,35=2,085,\qquad u_0^1=\mu_1(t_1)=1,100,\ \ u_4^1=\mu_2(t_1)=2,010.$

მივიღეთ სისტემა

$$
\begin{aligned}
u_0^1 &= 1{,}100,\\
1{,}6u_0^1 - 4{,}2u_1^1 + 1{,}6u_2^1 &= -1{,}435,\\
1{,}6u_1^1 - 4{,}2u_2^1 + 1{,}6u_3^1 &= -1{,}760,\\
1{,}6u_2^1 - 4{,}2u_3^1 + 1{,}6u_4^1 &= -2{,}085,\\
u_4^1 &= 2{,}010.
\end{aligned}
$$

გამოვიყენოთ ფაქტორიზაციის მეთოდი. ჯერ ვპოულობთ α_i, β_i კოეფიციენტებს, ხოლო შემდეგ u_i^1 უცნობებს. (1.22) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = 1{,}100,$$

$$\alpha_2 = \frac{1{,}6}{4{,}2 - 0\cdot 1{,}6} = \frac{1{,}6}{4{,}2} = 0{,}381, \qquad \beta_2 = \frac{1{,}6\cdot 1{,}100 + 1{,}435}{4{,}2 - 0\cdot 1{,}6} = \frac{3{,}195}{4{,}2} = 0{,}767,$$

$$\alpha_3 = \frac{1{,}6}{4{,}2 - 0{,}381\cdot 1{,}6} = \frac{1{,}6}{3{,}590} = 0{,}446, \qquad \beta_3 = \frac{1{,}6\cdot 0{,}767 + 1{,}760}{4{,}2 - 0{,}381\cdot 1{,}6} = \frac{2{,}987}{3{,}590} = 0{,}832,$$

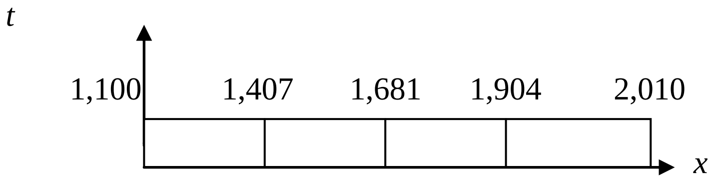
$$\alpha_4 = \frac{1{,}6}{4{,}2 - 0{,}446\cdot 1{,}6} = \frac{1{,}6}{3{,}486} = 0{,}459, \qquad \beta_4 = \frac{1{,}6\cdot 0{,}832 + 2{,}085}{4{,}2 - 0{,}446\cdot 1{,}6} = \frac{3{,}420}{3{,}486} = 0{,}981,$$

რის შედეგად ვპოულობთ

$u_4^1 = 2{,}010,\ u_3^1 = 0{,}459\cdot 2{,}010 + 0{,}981 = 1{,}904,\ \ u_2^1 = 0{,}446\cdot 1{,}904 + 0{,}832 = 1{,}681,$

$u_1^1 = 0{,}381\cdot 1{,}681 + 0{,}767 = 1{,}407,\ \ u_0^1 = 1{,}100.$

ეს შედეგები წარმოდგენილია აგრეთვე ნახ.1.8-ზე.



ნახ. 1.8

1.8. არაცხადი სქემის მდგრადობა

(1.15) სხვაობიანი სქემის მდგრადობის გამოსაკვლევად კვლავ გამოვიყენოთ ჰარმონიკების მეთოდი და ვიპოვოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \tag{1.23}$$

განტოლების კერძო ამონახსნები. ისევე, როგორც ცხადი სქემის შემთხვევაში, კერძო ამონახსნები ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u_j^n = q^n e^{ijh\varphi}, \tag{1.24}$$

სადაც i – წარმოსახვითი ერთიანი, q და φ - ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ (1.24) ბადური ფუნქცია იყოს (1.23) სხვაობიანი განტოლების ამონახსნი. შევიტანოთ u_j^n-ის გამოსახულება (1.23) განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{q^{n+1}e^{ijh\varphi} - q^n e^{ijh\varphi}}{\tau} = \frac{q^{n+1}e^{i(j+1)h\varphi} - 2q^{n+1}e^{ijh\varphi} + q^{n+1}e^{i(j-1)h\varphi}}{h^2}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის $q^n e^{ijh\varphi}$-ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{q-1}{\tau}=q\frac{e^{ih\varphi}-2+e^{-ih\varphi}}{h^2}.$$

ვინაიდან $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, გვექნება

$$\frac{q-1}{\tau}=q\frac{2(\cos h\varphi-1)}{h^2},$$

$$\frac{q-1}{\tau}=-q\frac{4\sin^2\dfrac{h\varphi}{2}}{h^2},$$

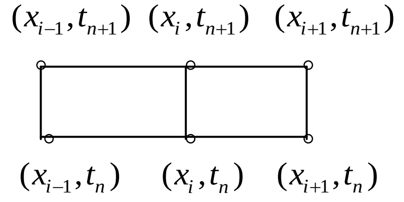
საიდანაც

$$q=\left(1+4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}\right)^{-1},\ \gamma=\frac{\tau}{h^2}.$$

ცხადია, რომ $|q|\le 1$ ნებისმიერი ნამდვილი φ, τ და h-სათვის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (1.15) სხვაობიანი სქემა მდგრადია τ და h-ის ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. ასეთ სქემებს აბსოლუტურად მდგრად სქემებს უწოდებენ. აბსოლუტური მდგრადობა წარმოადგენს არაცხადი სქემის ძირითად უპირატესობას. ამ შემთხვევაში არ მოითხოვება, რომ τ ბიჯი იყოს ძალიან მცირე. τ და h ბიჯები უნდა იქნან შერჩეული სქემის სიზუსტის გათვალისწინებით და არა გამომდინარე მდგრადობის მოსაზრებიდან. მაგალითად, შეგვიძლია ავიღოთ $\tau=h=10^{-2}$. მდგრადობა უზრუნველყოფილია τ და h-ის ნებისმიერ მნიშვნელობისათვის.

1.9. σ-პარამეტრიანი სქემების ოჯახი

ჩვენს მიერ განხილული ორი სხვაობიანი სქემის განზოგადებას წარმოადგენს სხვაობიაანი სქემის ერთპარამეტრიანი ოჯახი, რომელიც ახდენს საწყისი (1.3) – (1.5) დიფერენციალური ამოცანის მიახლოებას ექვსწერტილოვან (x_{i-1},t_n), (x_i,t_n), (x_{i+1},t_n), (x_{i-1},t_{n+1}), (x_i,t_{n+1}), (x_{i+1},t_{n+1}) შაბლონზე (ნახ. 1.9)



ნახ.1.9

სხვაობიან სქემას აქვს სახე

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=\sigma\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}+\varphi_i^n, \tag{1.25}$$

$$n=0,1,\ldots,K-1,\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

$$u_i^0=u_0(x_i),\quad i=0,1,\ldots,N,$$

$$u_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\ u_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\ n=0,1,\ldots,K-1.$$

თუ $\sigma = 0$ და $\varphi_i^n = f_i^n$, მაშინ (1.25)-დან მიიღება ცხადი (1.6) სქემა თუ $\sigma = 1$ და $\varphi_i^n = f_i^{n+1}$ -- წმინდა არაცხადი სქემა (1.15). $\sigma = 0,5$-სათვის მიიღება ე.წ. სიმეტ-რიული ექვსწერტილოვანი სქემა.

1.10. σ-პარამეტრიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება

გამოვიკვლიოთ (1.25) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება (1.3)-(1.5) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნზე.

შემოვიღოთ ცდომილების ფუნქცია

$$z_i^n = u_i^n - u(x_i, t_n),$$

სადაც u_i^n წარმოადგენს (1.25) სხვაობიანი სქემის ამონახსნს, ხოლო $u(x_i,t_n)$ კი -- (1.3)-(1.5) ამოცანის ამონახსნის მნიშვნელობას (x_i,t_n) წერტილში. ამ უკანასკნელი ტოლობიდან განვსაზღვროთ u_i^n

$$u_i^n = z_i^n + u(x_i, t_n)$$

და შევიტანთ (1.25) სხვაობიან სქემაში. მაშინ ცდომილების z_i^n ფუნქციისათვის მივიღებთ სხვაობიან სქემას

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \sigma \frac{z_{i+1}^{n+1} - 2z_i^{n+1} + z_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n}{h^2} + \psi_i^n,$$

$$n = 0,1,\dots,K-1, \qquad i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$z_i^0 = 0, \quad i = 0,1,\dots,N,$$

$$z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0, \quad n = 0,1,\dots,K-1,$$

სადაც

$$\psi_i^n = \sigma \frac{u(x_{i+1},t_{n+1}) - 2u(x_i,t_{n+1}) + u(x_{i-1},t_{n+1})}{h^2} + (1-\sigma)\frac{u(x_{i+1},t_n) - 2u(x_i,t_n) + u(x_{i-1},t_n)}{h^2} - \frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n)}{\tau} + \varphi_i^n \tag{1.26}$$

წარმოადგენს (1.25) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებას (შეუსა-ბამობას) (1.3)–(1.5) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნზე.

ვიგულისხმოთ, რომ (1.3)-(1.5) დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნი საკმაოდ გლუვი ფუნქციაა. მაშინ თუ აპროქსიმაციის ცდომილების (1.26) გამოსახუ-ლებაში შემავალ ფუნქციებს გავშლით ტეილორის მწკრივად, მივიღებთ

$$\frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_n)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_i, t_{n+1/2}\right) + O(\tau^2),$$

$$\frac{u(x_{i+1},t_{n+p}) - 2u(x_i,t_{n+p}) + u(x_{i-1},t_{n+p})}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{n+p}) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{n+p}) + O(h^4), \qquad p = 0,1.$$

ჩავსვათ ეს ფორმულები (1.26)-ში. გვექნება

$$\psi_i^n = \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{n+1}) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{n+1})\right) + (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_n) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_n)\right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_{n+1/2}) + \varphi_i^n + O(\tau^2 + h^4).$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში შემავალი ფუნქციები გავშალოთ $(x_i, t_{n+1/2})$ წერტილის მიმართ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$u = u(x_i, t_{n+1/2}),$$

მივიღებთ

$$\psi_i^n = \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi_i^n + O(\tau^2 + h^4) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (\sigma - 0,5)\tau\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \varphi_i^n + O(\tau^2 + h^4).$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\ .$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს ორჯერ გავაწარმოებთ x-ით

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

მაშინ აპროქსიმაციის ცდომილების გამოსახულება შემდეგნაირად ჩაიწერება

x_1 $$\psi_i^n = \left[(\sigma - 0,5)\tau + \frac{h^2}{12}\right]\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_{n+1/2}) - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1/2}) + \varphi_i^n - f(x_i, t_{n+1/2}) +$$

$$+ O(\tau^2 + h^4).$$

ამრიგად

1. თუ $\sigma = 0,5 - \frac{h^2}{12\tau}$, $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+1/2}) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1/2}) + O(\tau^2 + h^4)$, მაშინ (1.25) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება

$$\psi_i^n = O(\tau^2 + h^4).$$

ასეთ სხვაობიან სქემას სიზუსტის მაღალი რიგის სხვაობიან სქემას უწოდებენ.

2. თუ $\sigma = 0,5$, $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+1/2}) + O(\tau^2 + h^2)$, მაშინ

$$\psi_i^n = O(\tau^2 + h^2).$$

3. σ-ს ყველა სხვა მნიშვნელობისათვის თუ $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+1/2}) + O(\tau + h^2)$,

$$\psi_i^n = O(\tau + h^2).$$

2. სხვაობიანი სქემა პუასონის განტოლებისათვის

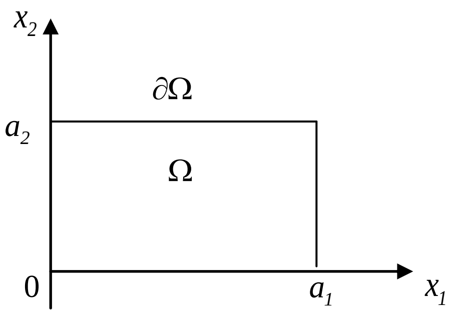
2.1. დიფერენციალური ამოცანა

განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის მართკუთხედში.

ვთქვათ, Ω არე წარმოადგენს მართკუთხედს

$$\Omega = \{(x_1, x_2),\quad 0 < x_1 < a_1,\ 0 < x_2 < a_2\},$$

ხოლო $\partial\Omega$ – Ω არის საზღვარს (ნახ. 2.1). უნდა ვიპოვოთ



ნახ. 2.1

ისეთი $u(x_1,x_2)$ ფუნქცია, რომელიც ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია Ω-ში, უწყვეტია $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ ჩაკეტილ არეში და აკმაყოფილებს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=f(x_1,x_2),\ \ (x_1,x_2)\in\Omega, \qquad (2.1)$$

განტოლებას და სასაზღვრო პირობას

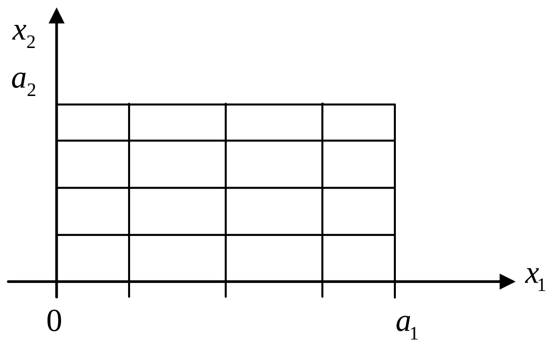
$$u(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2),\ \ (x_1,x_2)\in\partial\Omega. \qquad (2.2)$$

აქ $f(x_1,x_2)$ და $\varphi(x_1,x_2)$ მოცემული ფუნქციებია. $f(x_1,x_2)=0$ შემთხვევაში (2.1) განტოლებას ეწოდება ლაპლასის განტოლება.

(2.1), (2.2) ამოცანას აქვს სხვადასხვა ფიზიკური შინაარსი. მისი საშუალებით აღიწერება დატვირთული მემბრანის ჩაღუნვა, გაზის წნევა არაერთგვაროვან ველში, ფირფიტაში სითბოს გავრცელების პროცესი და ა.შ.

2.2. სხვაობიანი სქემა

$\bar{\Omega}$ არე დავფაროთ მართკუთხა ბადით ბიჯებით h_1 და h_2, სადაც $h_k=\dfrac{a_k}{N_k}$, $k=1,2$ (ნახ. 2.2).



ნახ. 2.2

მივიღებთ (x_{1i},x_{2j}) კვანძებს, $i=0,1,\dots,N_1$, $j=0,1,\dots,N_2$, სადაც $x_{1i}=ih_1$, $x_{2j}=jh_2$, $i=0,1,\dots,N_1$, $j=0,1,\dots,N_2$.

ყოველ შიგა (x_{1i},x_{2j}) კვანძში, $i=1,2,\dots,N_1-1$, $j=1,2,\dots,N_2-1$, მეორე რიგის წარმოებულები შევცვალოთ მიახლოებითი მნიშვნელობებით, სახელდობრ

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{1i},x_{2j})$ და $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{1i},x_{2j})$ შევცვალოთ შესაბამისად $\frac{u(x_{1,i+1},x_{2j})-2u(x_{1i},x_{2j})+u(x_{1,i-1},x_{2j})}{h_1^2}$ და $\frac{u(x_{1i},x_{2,j+1})-2u(x_{1i},x_{2j})+u(x_{1i},x_{2,j-1})}{h_2^2}$ -ით. ამის შედეგად (2.1) განტოლება შეიცვლება სხვაობიან განტოლებათა სისტემით

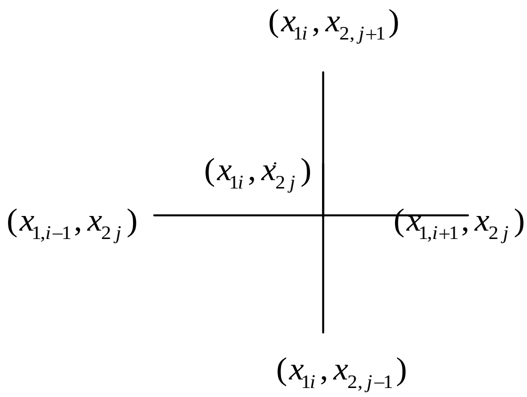
$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_2^2}=f_{ij}, \qquad (2.3)$$

სადაც $i=1,2,\dots,N_1-1$, $j=1,2,\dots,N_2-1$, $f_{ij}=f(x_{1i},x_{2j})$.

(2.2) სასაზღვრო პირობის საფუძველზე სასაზღვრო კვანძებისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} &u_{i,0}=\varphi(x_{1i},0), && u_{0,j}=\varphi(0,x_{2j}),\\ &u_{i,N_2}=\varphi(x_{1i},a_2), && u_{N_1,j}=\varphi(a_1,x_{2j}), \qquad (2.4)\\ &i=0,1,\dots,N_1, && j=0,1,\dots,N_2. \end{aligned}$$

აქ $u_{i,j}$-ით აღნიშნულია ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა (x_{1i},x_{2j}) კვანძში. (2.3), (2.4) განტოლებათა სისტემას ეწოდება (2.1), (2.2) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი ამოცანა. (2.3)-ში გამოყენებული (x_{1i},x_{2j}), $(x_{1,i-1},x_{2j})$, $(x_{1,i+1},x_{2j})$, $(x_{1i},x_{2,j-1})$, $(x_{1i},x_{2,j+1})$ წერტილები ქმნიან სქემის ხუთწერტილოვან შაბლონს (ნახ. 2.3)



ნახ. 2.3

(2.3), (2.4) სხვაობიანი სქემა მდგრადია, ხოლო $z_{ij}=u_{ij}-u(x_{1i},x_{2j})$ ცდომილებისათვის ადგილი აქვს ტოლობად $|z_{ij}|=O(h_1^2+h_2^2)$, $i=1,2,\dots,N_1-1$, $j=1,2,\dots,N_2-1$. (2.3), (2.4) სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება მატრიცული ფაქტორიზაცია ან იტერაციული მეთოდები (მაგ., ლიბმანის იტერაცია).

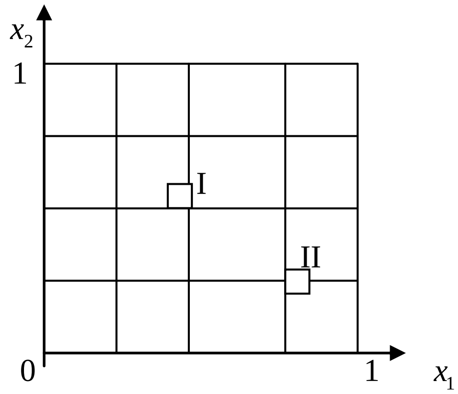
მაგალითი 3. მოცემულია ამოცანა

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=3x_1+2x_2+1, \qquad (x_1,x_2)\in\Omega,$$

$$u(x_1,x_2)=0, \quad (x_1,x_2)\in\partial\Omega,$$

სადაც $\Omega=\{(x_1,x_2),\ 0<x_1<1,\quad 0<x_2<1\}$, ხოლო $\partial\Omega$ Ω-ს საზღვარია. გამოიყენეთ სხვაობიანი მეთოდი ბიჯებით $h_1=h_2=\frac{1}{4}$ და დაწერეთ სხვაობიანი განტოლებები, რომლებიც შეესაბამება ნახ. 2.4-ზე მონიშნულ კვანძებს.

ამოხსნა. ვინაიდან $f(x_1,x_2)=3x_1+2x_2+1$, ამიტომ $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=3\frac{3}{4}$. გარდა ამისა, გავითვალისწინოთ, რომ u ფუნქცია საზღვარზე უდრის ნულს.



ნახ. 2.4

გვექნება

I კვ. $$\frac{u_{3,2}-2u_{2,2}+u_{1,2}}{1/16}+\frac{u_{2,3}-2u_{2,2}+u_{2,1}}{1/16}=3\frac{1}{2},$$

II კვ. $$\frac{-2u_{3,1}+u_{2,1}}{1/16}+\frac{u_{3,2}-2u_{3,1}}{1/16}=3\frac{3}{4}.$$

II თავი. პროექციული მეთოდები

1. მეთოდების ზოგადი სქემა

1.1 მეთოდის სქემა ბანახის სივრცეში

ვთქვათ, E და F ბანახის სივრცეებია (ნამდვილი ან კომპლექსური). განვიხილოთ განტოლება

$$Lu=f, \tag{1.1}$$

სადაც L წრფივი ოპერატორია, რომლის განსაზღვრის არეა $D(L)\subset E$, ხოლო მნიშვნელობათა არე $R(L)\subset F$. ამ განტოლების ამოხსნა პროექციული მეთოდით ნიშნავს შემდეგს.

ვასახელებთ ქვესიმრავლეების ორ მიმდევრობას $\{E_n\}$ და $\{F_n\}$, $E_n\subset D(L)\subset E$, $F_n\subset F$, $n=1,2,\ldots$, და აგრეთვე წრფივ პროექციულ P_n ოპერატორებს (ანუ პროექტორებს), რომლებიც F-ს აპროექტებენ F_n-ზე. თითოეული P_n აკმაყოფილებს მოთხოვნებს

$$P_n^2=P_n,\quad P_nF=F_n.$$

შემდეგ, (1.1) განტოლების ნაცვლად განიხილება მიახლოებითი განტოლება

$$P_n(Lu_n-f)=0,\qquad u_n\in E_n. \tag{1.2}$$

ბოლო ჩართვა ნიშნავს, რომ ამონახსნს ვეძებთ E_n-ში. u_n წარმოადგენს (1.1) განტოლების ამონახსნის მიახლოებას.

1. 2. ჰილბერტის სივრცის შემთხვევა

განვიხილოთ ჰილბერტის სივრცის შემთხვევა. ვთქვათ ჰილბერტის სივრცეში მოცემულია განტოლება

$$Lu \equiv Au + Bu = f, \quad f \in H, \tag{1.3}$$

სადაც A და B წრფივი ოპერატორებია H-ში. A-ს განსაზღვრის არე აღვნიშნით $D(A)$-თი, ხოლო B-სი $D(B)$-თი. დავუშვათ, რომ $D(A) \subseteq D(B)$ და $D(A)$ სრულია H-ში. შემოვიღოთ K ოპერატორი, რომლის განსაზღვრის არე $D(K) \supseteq D(A)$.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.4}$$

$D(A)$-დან. $\varphi_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots,$ ფუნქციებზე მოჭიმული წრფივი გარსი (ე.ი. $c_1\varphi_1^{(n)} + c_2\varphi_2^{(n)} + \ + \dots + c_n\varphi_n^{(n)}$ ელემენტების სიმრავლე, სადაც თითოეული $c_1, c_2, \dots, c_n$ ნებისმიერი რიცხვია) აღვნიშნოთ H_n-ით. ვიგულისხმოთ შემდეგი პირობების შესრულება: 1) ყოველი n-სათვის (1.4) ფუნქციები ქმნის წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას 2) $\{H_n\}$ ქვესიმრავლეების მიმდევრობა ზღვრულად სრულია H-ში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $u \in H$ ფუნქციისათვის არსებობს ისეთი $\tilde{u}_n \in H_n$, $n = 1, 2, \dots,$ რომ

$$\| u - \tilde{u}_n \| = \inf_w \| u - w \| \le \varepsilon(u, n), \quad w \in H_n,$$

სადაც $\varepsilon(u, n)$ – მიახლოების ცდომილების შეფასება მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \to \infty$.

(1.4) ფუნქციათა მიმდევრობას, რომელიც აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობებს, ეწოდება H_n-ის ბაზისი და აღინიშნება $\{\varphi_i^{(n)}\}$-ით. $\varphi_i^{(n)}$ ფუნქციებს, $i = 1, 2, \dots, n,$ ეწოდება ბაზისური ფუნქციები.

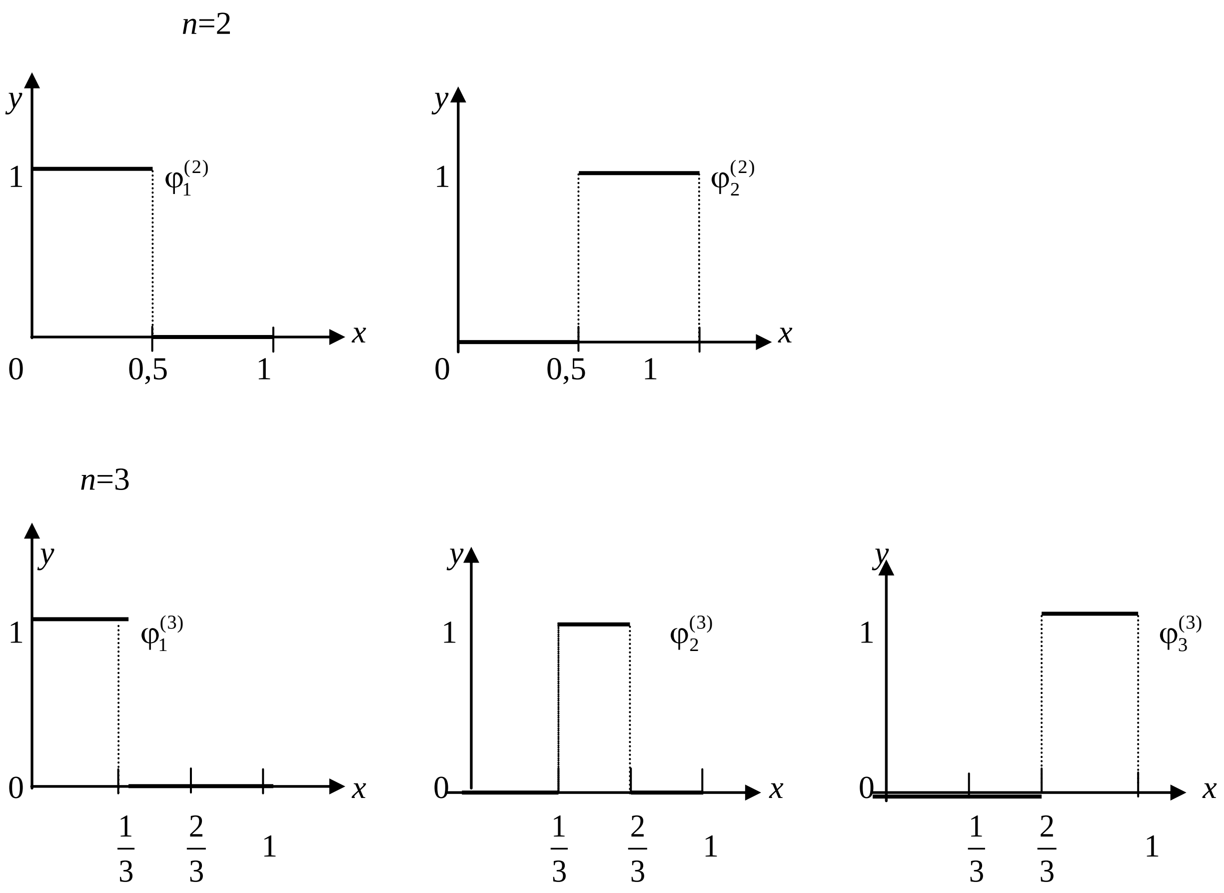
ბაზისური ფუნქციები დამოკიდებულია n-ზე და საზოგადოდ $n_1 \ne n_2$-სათვის $\varphi_i^{(n_1)} \ne \varphi_i^{(n_2)}$. ტოლობა გამორიცხული არ არის. მაგალითად, თუ $\varphi_i^{(n)} = x^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots,$ გვექნება შემდეგი ფუნქციებისაგან შემდგარი ბაზისი

$$\begin{array}{ll} n = 1 & x \\ n = 2 & x,\ x^2 \\ n = 3 & x, x^2, x^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{array}$$

მოვიყვანოთ n-ზე დამოკიდებული ფუნქციების $\varphi_i^{(n)}$ მაგალითი. განვიხილოთ (0,1)-ზე განსაზღვრული ბაზისური ფუნქციები

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad x \in \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right), \\ 0, & \text{როცა} \quad x \notin \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \ n = 1, 2, \dots$$

n=2 და n=3 შემთხვევებისათვის ბაზისური ფუნქციების გრაფიკები მოყვანილია ნახ. 1.1-ზე.



ნახ. 1.1

ჩანაწერის გამარტივების მიზნით ბაზისური ფუნქციებისა და კოეფიციენ-ტების აღნიშვნის დროს n ინდექსს არ დავწერთ.

(1.4)-ის გარდა შემოვიღოთ ბაზისური ფუნქციების კიდევ ერთი სისტემა და ეს სისტემა აღვნიშნოთ $\{\psi_i\}$- თი. დავუშვათ, რომ თითოეული ψ_i ეკუთვნის $D(K)$-ს.

(1.3)-ის ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \, ,$$

სადაც a_i კოეფიციენტებს ვპოულობთ განტოლებათა სისტემიდან

$$(Au_n + Bu_n - f\,,\, K\psi_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \, . \qquad (1.5)$$

აქ (u,v)-თი აღნიშნულია სკალარული ნამრავლი H სივრცეში ნორმით $\| u \| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$.

(1.5) სისტემის ამონახსნის არსებობა და u_n-ების კრებადობა u ზუსტი ამონახ-სნისაკენ, როცა $n \to \infty$, დამოკიდებულია როგორც K, $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}$-ების შერჩევაზე, ასევე A და B ოპერატორების თვისებებზე. ამ ოპერატორებისა და ბაზისების შერჩევით ვღებულობთ ზოგიერთ ცნობილ მიახლოებით მეთოდს (რითცის, ბუზნოვ-გალერკინის და ა.შ.).

2. რითცის მეთოდი

2.1. მეთოდის კლასიკური ფორმა

დავუშვათ, რომ (1.3) განტოლებაში და (1.5) ალგორითმში $B = 0,\ K = I$ (I-ერთეულოვანი ოპერატორი), $\varphi_i = \psi_i$, ხოლო A სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია (ე.ი. $(Av, w) = (v, Aw),\ (Av, v) \ge \gamma \| v \|^2,\ \gamma = const > 0$, ნებისმიერი v და w სათვის $D(A)$-დან). ამგვარად, გვაქვს განტოლება

$$Au = f, \quad f \in H. \tag{2.1}$$

ასეთ შემთხვევაში ალგორითმს ეწოდება რითცის კლასიკური მეთოდი. ზოგადი სქემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მეთოდი

1. ვირჩევთ ბაზისს $\{\varphi_i\},\ \varphi_i \in D(A),\ i = 1, 2, \ldots, n.\ n = 1, 2, \ldots$.
2. მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\,. \tag{2.2}$$

3. a_i კოეფიციენტების საპოვნელად უნდა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა

$$(Au_n, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.3}$$

(2.3) წარმოადგენს

$$\hat{A}a = \hat{f} \tag{2.4}$$

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, სადაც $\hat{A}$ მატრიცია ელემენტებით $A_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j), \quad a = (a_1, a_2, \cdots a_n)^T, \quad \hat{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T, \quad f_i = (f, \varphi_i)$.

მართლაც, (2.3)-ში ჩავსვათ (2.2). გავითვალისწინოთ A ოპერატორისა და სკალარული ნამრავლის თვისებები. მივიღებთ

$$(Au_n, \varphi_i) = \left(A\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j, \varphi_i \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} Aa_j \varphi_j, \varphi_i \right) = \sum_{j=1}^{n} (Aa_j \varphi_j, \varphi_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (A\varphi_j, \varphi_i) a_j = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j, A\varphi_i) a_j = \sum_{j=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_j) a_j\,.$$

ამრიგად, (2.3)-ის i-ურ განტოლებას აქვს სახე

$$(A\varphi_i, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_i, \varphi_2)a_2 + \cdots + (A\varphi_i, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_i)\,,$$

ე.ი. (2.4) ფორმულა მართებულია, ამასთან

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & (A\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (A\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A\varphi_n, \varphi_1) & (A\varphi_n, \varphi_2) & \cdots & (A\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \big((f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \ldots (f, \varphi_n) \big)^T.$$

მტკიცდება, რომ (2.3) სისტემის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია.

რითცის მეთოდის ჩამოყალიბებისას ჩვენ საფუძვლად გამოვიყენეთ (1.5) ალგორითმი. მაგრამ ისტორიულად ეს მეთოდი წარმოიშვა $D(A)$ სიმრავლეზე

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \tag{2.5}$$

კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის მოძებნის პრობლემის საფუძველზე. ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას.

თეორემა 1. ვთქვათ, A დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია. თუ (2.1) განტოლებას აქვს ამონახსნი, მაშინ ეს ამონახსნი ანიჭებს (2.5) ფუნქციონალს

მინიმუმს. და პირიქით, ფუნქცია, რომელიც (2.5) ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმუმს, აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ რიტცის მეთოდი შეიძლება შემდეგნაირადაც ჩამოვაყალიბოთ.

აღვნიშნოთ H_n-ით $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$-ზე მოჭიმული წრფივი გარსი. განვიხილოთ ამოცანა ისეთი $u_n \in H_n$ ფუნქციის მოძებნის შესახებ, რომლისთვისაც

$$F(u_n) = \min_v F(v), \quad v \in H_n .$$

რადგან $v = \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i$, ამიტომ $F(u_n) = \min_{b_i} F(v)$, სადაც (2.5)-ის გათვალისწინებით $F(v) = F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{i,j=1}^n b_i b_j (A\varphi_i, \varphi_j) - 2\sum_{j=1}^n b_j (f, \varphi_j)$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $F(v)$ ფუნქციონალის მინიმუმი, მისი კერძო წარმოებულები b_i-თი უნდა გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{\partial F(v)}{\partial b_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

რომელიც (2.3)-ის ექვივალენტურია. მაშასადამე, განხილული კლასის ოპერატორებისათვის რიტცის მეთოდს როგორც (2.3)-ის, ასევე H_n-ზე $F(u)$ ფუნქციონალის მინიმიზების ფორმულებს მივყავართ a_i კოეფიციენტების გამოსათვლელ ერთ და იმავე სისტემამდე.

თეორემა 2. თუ ნებისმიერი $u \in D(A)$ ფუნქციისათვის არსებობს $\tilde{u}_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ $\in H_n$ ელემენტთა ისეთი მიმდევრობა, $n = 1, 2, \ldots$, რომ $\left\| A(u - \tilde{u}_n) \right\| \to 0$, როცა $n \to \infty$, მაშინ რიტცის მეთოდის u_n ამონახსნთა მიმდევრობა მიისწრაფვის (2.1) განტოლების u ზუსტი ამონახსნისკენ, როცა $n \to \infty$, ამასთან ადგილი აქვს შეფასებას

$$\| u - u_n \| \le c \min_{c_i} \left\| A(u - \tilde{u}_n) \right\|,$$

სადაც c-დადებითი რიცხვია, რომელიც არ არის დამოკიდებული u და $\tilde{u}_n$-ზე.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ u და ნებისმიერი $v \in D(A)$-სათვის სრულდება ტოლობა

$$(A(u - v), u - v) = F(v) - F(u).$$

თუ გავითვალიწინებთ, რომ $Au = f$ და $(Av, u) = (Au, v)$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} &(A(u - v), u - v) = (Au - Av, u - v) = (Au, u) - (Au, v) - (Av, u) + (Av, v) = \\ &= (Au, u) + (Av, v) - 2(Au, v) = (Au, u) + (Av, v) - 2(f, v) = \\ &= [\,(Av, v) - 2(f, v)\,] + [\,2(Au, u) - (Au, u)] = F(v) - [\,(Au, u) - 2(f, u)\,] = F(v) - F(u). \end{aligned}$$

გავიხსენოთ, რომ u ზუსტი და u_n მიახლოებითი ამონახსნები $F(v)$ ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას შესაბამისად $D(A)$ და H_n-ში. მივიღებთ

$$(A(u - u_n), u - u_n) = F(u_n) - F(u) \le F(v_n) - F(u) = (A(u - v_n), u - v_n)$$

ნებისმიერი $v_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ ფუნქციისათვის H_n-დან. მაშასადამე,

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \| u - u_n \|^2 \le (A(u - u_n), u - u_n) \le (A(u - v_n), u - v_n) = \\ &= (A(u - v_n), \quad A^{-1} A(u - v_n)) \le \| A^{-1} \| \, \| A(u - v_n) \|^2 . \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\| u-u_n \|^2 \le \frac{\| A^{-1} \|}{\gamma^2} \| A(u-v_n) \|^2 .$$

თუ ჩავსვამთ $v_n = \tilde{u}_n$, მივიღებთ დასამტკიცებელს.

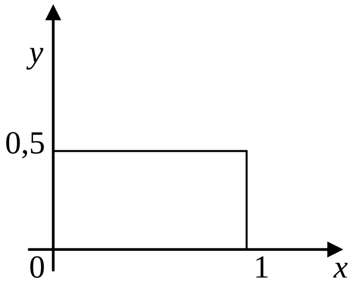
მაგალითი 1. ამოვხსნათ ამოცანა

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + qu = f(x,y),$$

$$(x,y) \in \Omega, \ q = const \ge 0,$$

$$u \,|\, \partial\Omega = 0, \text{ სადაც}$$

$$\Omega = \{(x,y) \,|\, 0 < x < 1, \ 0 < y < 0{,}5\},$$



ნახ. 2.1

ხოლო $\partial\Omega$ Ω-ს საზღვარია (ნახ. 2.1).

ამოხსნა. მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად გამოვიყენოთ რიტცის მეთოდი. ბაზისურ ფუნქციებად გამოვიყენოთ $A = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + qI$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციები. A ოპერატორის განსაზღვრის არე $D(A) = C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. აქ I - ერთეულოვანი ოპერატორია, ხოლო $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

აღნიშვნების გამარტივების მიზნით ვისარგებლოთ ორინდექსიანი დანომვრით.

A ოპერატორის λ_{ij} საკუთრივი რიცხვი და შესაბამისი φ_{ij} საკუთრივი ფუნქცია

$$A\varphi_{ij} = \lambda_{ij}\varphi_{ij} \tag{2.6}$$

ამოცანის ამონახსნებია. მათ აქვს სახე $\varphi_{ij}(x,y) = \sin i\pi x \sin 2j\pi y,$ $\lambda_{ij} = \pi^2(i^2 + 4j^2) + q, \quad i,j = 1,2,\dots$

მიახლოებითი ამონახსნი წარმოვადგინოთ $u_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$ სახით, სადაც a_{ij} კოეფიციენტები მიიღება რიტცის (2.3) სისტემიდან, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int_0^1 \int_0^{0,5} \left[-\left(\frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial y^2} \right) + q\varphi_{ij} \right] \varphi_{kl}(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{0,5} f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\,dxdy, \ k,l = 1,2,\dots,n .$$

(2.6)-ის ძალით გვექნება

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int_0^1 \int_0^{0,5} \lambda_{ij}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{0,5} f(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\,dxdy . \tag{2.7}$$

φ_{ij} ფუნქციები ორთოგონალურები არიან $L^2(0,1;0,0.5)$ სივრცეში, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\int_0^1\int_0^{0,5}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & \text{თუ } i\neq k, \text{ ან } j\neq l,\\ \frac{1}{8}, & \text{თუ } i=k, \text{ და } j=l.\end{cases}$$

ამიტომ (2.7)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{1}{8}a_{ij}\lambda_{ij}=\int_0^1\int_0^{0,5}f(x,y)\varphi_{ij}(x,y)dxdy\,.$$

ამის შედეგად a_{ij} კოეფიციენტების გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ტოლობას

$$a_{ij}=\frac{8}{\pi^2(i^2+4j^2)+q}\int_0^1\int_0^{0,5}f(x,y)\sin i\pi x\sin 2j\pi y\,dxdy,\qquad i,j=1,2,\ldots,n\,,$$

ხოლო შემდეგ

$$u_n(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sin i\pi x\sin 2j\pi y$$

ფორმულის საშუალებით ავაგებთ მოცემული ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს.

2.2 რითცის მეთოდი ენერგეტიკულ სივრცეში

როგორც ვიცით (2.1) ამოცანა (2.5) ვარიაციული ამოცანის ექვივალენტურია. საზოგადოდ, ამონახსნი $D(A)$-ში შეიძლება არ არსებობდეს, მაგრამ ის არსებობს გარკვეულად უფრო ფართე სივრცეში, რომელიც შეიცავს $D(A)$-ს. ამასთან დაკავშირებით საჭიროა შეიცვალოს ვარიაციული ამოცანის დასმა. (2.1)-ის განხილვისას ვიგულისხმეთ, რომ A-სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია, რომლის განსაზღვრის არე $D(A)$ სრულია H-ში.

შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი და ნორმა $D(A)$-ში

$$(\varphi,\psi)_A=(A\varphi,\psi),\ \ \|\varphi\|_A=(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}}\,.$$

მოვახდინოთ $D(A)$-ს შევსება შემოღებული ნორმის მიხედვით. მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ H_A-თი. H_A-ს ეწოდება A ოპერატორით წარმოშობილი ენერგეტიკული სივრცე. ყოველი ფუნქცია $D(A)$-დან ეკუთვნის H_A სივრცეს, მაგრამ შევსების შედეგად H_A-ში შეიძლება წარმოიშვას ელემენტები, რომელიც არ შედის $D(A)$. ამის გამო ნებისმიერი $\varphi,\psi\in H_A$-სათვის $(\varphi,\psi)_A$ სკალარული ნამრავლის $(A\varphi,\psi)$ სახით წარმოდგენას ადგილი არა აქვს. თუ $\varphi_n\to\varphi$, $\psi_n\to\psi$, $\varphi_n,\psi_n\in D(A)$, მაშინ $(\varphi,\psi)_A=\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\psi_n)$.

(2.7)-ის გამოყენებით $F(u)$ ფუნქციონალი (2.5)-დან წარმოვადგინოთ

$$F(u)=(u,u)_A-2(f,u) \tag{2.8}$$

სახით.

ჩაწერის ასთი ფორმა საშუალბას იძლევა განვიხილოთ $F(u)$ არა მარტო $D(A)$-ზე, არამდ H_A ენერგეტიკული სივრცის ყველა ელემენტისათვის. ამრიგად, მოხდა $F(u)$ ფუნქციონალის განსაზღვრის არის გაფართოება. მტკიცდება, რომ H_A სივრცეში $F(u)$ ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს, როცა u უდრის რაღაც u_0-ს.

ასეთი u_0 ელემენტი ერთადერთია და ეკუთვნის H_A-ს. თუ აღმოჩნდა, რომ $u_0 \in D(A)$, მაშინ u_0 იქნება განხილული ამოცანის კლასიკური ამონახსნი, ე.ი. დააკმაყოფილებს (2.1)-ს. შესაძლებელია, რომ u_0 არ ეკუთვნოდეს $D(A)$-ს. მაშინ u_0-ს ეწოდება (2.1) განტოლების განზოგადოებული ამონახსნი.

ამგვარად, მოცემული ამოცანა დაყვანილია H_A ენეგგეტიკულ სივრცეში (2.8) ფუნქციონალის მინიმიზების ამოცანაზე. მიღებული ვარიაციული ამოცანა ამოვხსნათ რითცის მეთოდით, რომელსაც ამ შემთხვევაში ეწოდება რითცის მეთოდი ენერგეტიკულ სივრცეში. განვიხილოთ ეს მეთოდი დაწვრილებით.

შევარჩიოთ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in H_A$. H_n-ით აღვნიშნოთ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ფუნქციებზე მოჭიმული წრფივი გარსი. სხვადასხვა n-სავის, $n = 1, 2, \dots$, ვღებულობთ სხვადასხვა H_n-ს. დავუშვათ, რომ $\{H_n\}$ ქვესიმრავლეების მიმდევრობა ზღვრულად სრულია H_A-ში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $u \in H_A$ ფუნქციისათვის არსებობს ისეთი $\tilde{u}_n \in H_n$, $n = 1, 2, \dots$, რომ

$$\| u - \tilde{u}_n \|_A = \inf_w \| u - w \|_A \le \varepsilon(u, n), \qquad w \in H_n,$$

სადაც $\varepsilon(u, n)$ - მიახლოების ცდომილების შეფასება, რომელიც მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$.

რითცის მეთოდის დანიშნულება იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით უნდა ვიპოვოთ ისეთი $u_n \in H_n$ ელემენტი, რომელიც $F(u)$ ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას H_n-ში. ამისათვის საჭიროა

1. დავაფიქსიროთ n და შევარჩიოთ $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\varphi_i \in H_A$.
2. მიახლოებით ამონახსნს მივანიჭოთ შემდეგი სახე
$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i .$$
3. a_i კოეფიციენტების საპოვნელად ვხსნით განტოლებათა სისტემას
$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

ეს სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\hat{A}a = \hat{f} \quad \text{ან} \quad (u_n, \varphi_i)_A = (f, \varphi_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\hat{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $f_i = (f, \varphi_i)$, ხოლო $\hat{A}$ მატრიცია ელემენტებით $A_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_A$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

$\hat{A}$ მატრიცი სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრულია. აქედან გამომდინარეობს $\hat{A}a = \hat{f}$ სისტემისათვის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა.

ჩამოვაყალიბოთ დებულება ენერგეტიკულ სივრცეში რითცის მეთოდის კრებადობის შესახებ.

თეორემა 3. თუ ქვესიმრავლეების $\{H_n\}$ მიმდევრობა ზღვრულად სრულია H_A-ში, მაშინ u_n მიახლოებების მიმდევრობა H_A სივრცის მეტრიკის აზრით მიისწრაფვის განზოგადოებული ამონახსნისაკენ, როცა $n \to \infty$.

2.3. ბუნებრივი და მთავარი სასაზღვრო პირობები

ის გარემოება, რომ $u \in D(A)$, ხშირად იმის მანიშნებელია, რომ u აკმაყოფილებს ამა თუ იმ სასაზღრო პირობას: $T_k u = 0$, $k = 1, 2, \dots, K$. აქ T_k - ოპერატორია, რომელიც განსაზღვრავს k-ურ სასაზღვრო პირობას.

ვთქვათ, ვეძებთ ამოცანის განზოგადოებულ ამონხსნს. $D(A)$-ს $\| \ \|_A$ ნორმის აზრით შევსების შედეგად მიღებულ H_A ენერგეტიკულ სივრცეში შეიძლება წარმოიშვას ელემენტები, რომლებიც არ აკმაყოფილებს ყველა $T_k u = 0$ პირობას. თუ H_A-ში არსებობს ელემენტები, რომლებიც არ აკმაყოფილებს რომელიმე $T_k u = 0$ პირობას, მაშინ ასეთი სახის პირობას ეწოდება A ოპერატორის ბუნებრივი სასაზღვრო პირობა. თუ მოცემულ სასაზღვრო პირობას აკმაყოფილებს H_A-ს ყველა ელემენტი, მაშინ მას ეწოდება A ოპერატორის მთავარი სასაზღვრო პირობა.

განსაზღვრებიდან ვასკვნით, რომ არ არის სავალდებულო, რომ φ_i ბაზისური ფუნქციები აკმაყოფილებდეს ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს, რადგან საკმარისია, რომ ეს ფუნქციები ეკუთვნოდნენ H_A-ს (და არაა აუცილებელი $D(A)$-ს). ამრიგად, განზოგადოებული ამონახსნის აგების დროს ბაზისური ფუნქციებისაგან მოითხოვება მხოლოდ მთავარი სასაზღვრო პირობის შესრულება. ეს გარემოება ხშირად გვიადვილებს ბაზისის არჩევას. ჩამოვაყალიბოთ ერთი ნიშანი, რომლიც საშუალბას იძლვა მარტივად განვასხვაოთ ერთმანეთისაგან ბუნებრივი და მთავარი სასაზღვრო პირობები (ამ ალგორითმის თეორიულ დასაბუთება აქ არ მოგვყავს). ვთქვათ (2.1) განტოლებაში A წარმოადგენს $2m$ რიგის დიფერენციალურ ოპერატორს და დავუშვათ მოცემულია ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები $T_k u = 0,\ k = 1, 2, \ldots, K$. თუ სასაზღვრო პირობა შეიცავს წარმოებულს, რომლის რიგი უდრის m-ს ან m-ზე მეტია, მაშინ ასეთი სასაზღვრო პირობა არის ბუნებრივი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მთავარი.

მაგალითი 2. განვიხილოთ განტოლება

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y), \quad f \in L^2(0,3;0,1),$$

და სასაზღვრო პირობები

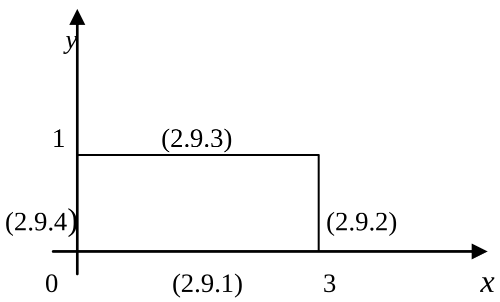
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 3, \tag{2.9.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(3,y) + u(3,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1, \tag{2.9.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,1) + 2u(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 3, \tag{2.9.3}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1, \tag{2.9.4}$$

(ნახ. 2.2)



ნახ. 2.2

ამ შემთხვევაში (2.9.1) და (2.9.4) მთავარი პირობებია, ხოლო (2.9.2) და (2.9.3) – ბუნებრივი. მართლაც, $A = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ ოპერატორის რიგი უდრის $2m$=2. ამიტომ m=1. ვინაიდან (2.9.2) და (2.9.3)-ში შედის m-ური (ე.ი. პირველი) რიგის წარმოებული, ამიტომ (2.9.2) და (2.9.3) ბუნებრივი პირობებია. (2.9.1) და (2.9.4) არ შეიცავს m-ურ და უფრო მაღალი რიგის წარმოებულებს, რის გამოც ორივე მთავარი პირობაა.

მაგალითი 3. განვიხილოთ განტოლება

$$-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a(x)u=f(x), \qquad (2.10)$$

სადაც $x=(x_1,x_2)\in\Omega$, Ω - შემოსაზღვრული არეა R^2-დან, რომლის საზღვარი $\partial\Omega$ უწყვეტად წარმოებადია. დავუშვათ, რომ $a_{ij}(x)$ უწყვეტად წარმოებადი კოეფიციენტებია $\bar{\Omega}$-ზე, $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, გარდა ამისა $a_{ij}=a_{ji}$, ხოლო $0<a(x)\le const$ $\bar{\Omega}$-ზე. $f(x)$-საგან მოითხოვება, რომ $\max_{x\in\Omega}|f(x)|<\infty$.

ვთქვათ, (2.10) ელიფსური ტიპის განტოლებაა, ე.ი. სრულდება

$$-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\mu_0\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2 \qquad (2.11)$$

ყოველი $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ არანულოვანი ვექტორისათვის და ყოველი $x\in\Omega$-სათვის. აქ μ_0 დადებითი მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც x-ზე და არც ξ-ზე.

თუ (2.10)-ის გარდა მოითხოვება, რომ საძიებელი ფუნქცია აკმაყოფილებდეს დირიხლეს სასაზღვრო პირობას

$$u=0 \qquad \partial\Omega\text{-ზე}, \qquad (212)$$

მაშინ ვღებულობთ (2.10), (2.12) პირველ სასაზღვრო ამოცანას: საძიებელია ისეთი $u(x)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $\bar{\Omega}$-ზე, აქვს მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები Ω-ზე და რომელიც თითქმის ყველგან აკმაყოფილებს (2.10) განტოლებას და (2.12) პირობას.

შევცვალოთ (2.12) პირობით

$$\frac{\partial u}{\partial N}=0 \qquad \partial\Omega\text{-ზე}, \qquad (2.13)$$

სადაც $\frac{\partial u}{\partial N}-u$ ფუნქცის კონორმალური წარმოებულია, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$\frac{\partial u}{\partial N}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)$, ($\nu-\partial\Omega$ საზღვრის ერთეულოვანი გარე ნორმალია).

შედეგად ვღებულობთ (2.10), (2.13) მეორე სასაზღვრო ამოცანას: საძიებელია ისეთი $u(x)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად წარმოებადია $\bar{\Omega}$-ზე, აქვს მეორე რიგის წარმოებულები Ω-ზე და რომელიც თითქმის ყველგან აკმაყოფილებს (2.10) განტოლებას და (2.13) პირობას.

(2.10), (2.12) და (2.10), (2.13) სასაზღვრო ამოცანებისათვის დავადგინოთ შესაბამისი ენერგეტიკული სივრცეები და სასაზღვრო პირობებს შორის განვსაზღვროთ, რომელია მთავარი და რომელი ბუნებრივი. ამისათვის დაგვჭირდება გრინის ფორმულა

$$\int_{\Omega}vAudx=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\int_{\Omega}auvdx-\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial N}dS, \qquad (2.14)$$

სადაც $Au=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a(x)u$.

A ოპერატორის $D(A)$ განსაზღვრის არე შევადგინოთ $\bar{\Omega}$-ზე უწყვეტი და Ω-ზე ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.12) პირობას. ჩავთვალოთ, რომ და $a_{ij}=a_{ji}$, მაშინ (2.10), (2.12) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$Au=f, \qquad f\in H,$$

სადაც $H = L^2(\Omega)$ – $u(x)$ ფუნქციების ჰილბერტის სივრცეა სკალარული ნამრავლით

$$(u,v)=(u,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u(x)v(x)dx, \qquad x\in(x_1,x_2), \qquad \text{და} \qquad \|u\|=\|u\|_{L^2(\Omega)}=(u,u)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ნორმით.

ვაჩვენოთ, რომ A – სიმეტრიული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია. (2.14)-ის გამოყენებით და (2.12)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$(A\varphi,\psi)=\int_\Omega A\varphi\psi dx=-\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\psi+a(x)\varphi\psi\right)dx=$$

$$=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+a(x)\varphi\psi\right)dx.$$ φ-ს მაგივრად ჩავსვათ ψ და პირიქით

$$(A\psi,\varphi)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+a(x)\varphi\psi\right)dx.$$ იმის გამო, რომ $a_{ij}=a_{ji}$, ვღებულობთ $(A\varphi,\psi)= \;=(A\psi,\varphi)=(\varphi,A\psi)$, ანუ A ოპერატორი სიმეტრიულია. ვინაიდან $a(x)>0$ და ადგილი აქვს (2.11)-ს, გვექნება

$$(A\varphi,\varphi)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+a(x)\varphi^2\right)dx\ge\mu_0\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2dx+$$

$$+\int_\Omega a(x)\varphi^2dx\ge\gamma\|\varphi\|^2, \qquad \gamma>0,$$ ე.ი. A ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია. ამრიგად, (2.10), (2.12) შეიძლება ამოიხსნას რიტცის მეთოდით. ვთქვათ, ვეძებთ განზოგადოებულ ამონახსნს. H_A ენერგეტიკულ სივრცეს გააჩნია სკალარული ნამრავლი და ნორმა

$$(\varphi,\psi)_A=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+a(x)\varphi\psi\right)dx,$$

$$\|\varphi\|_A=\left[\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+a(x)\varphi^2\right)dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

ზემოთ ჩამოყალიბებული პრინციპის თანახმად, (2.12) პირობა არის მთავარი. ფუნქციონალს, რომლის მინიმიზებას ვახდენთ H_A სივრცეში, აქვს სახე

$$F(u)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+a(x)u^2-2uf(x)\right)dx. \tag{2.16}$$

$F(u)$-ს მინიმუმს ვეძებთ $u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$ ფუნქციის საშუალებით. φ_k ბაზისური ფუნქციები უნდა შეირჩეს ისეთნაირად, რომ $\varphi_k=0$ $\partial\Omega$-ზე, ვინაიდან როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (2.12) პირობა არის მთავარი.

განვიხილოთ ამოცანა (2.10), (2.13). ამ შემთხვევაშიც ამოცანის A ოპერატორი სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია. შესაბამისი ენერგეტიკულ სივრცის სკალარული ნამრავლი და ნორმის (2.15) სახე ისეთივეა, როგორც დირიხლეს ამოცანის შემთხვევაში. $F(u)$ ფუნქციონალის სახეც არ შეიცვლება, (2.16) ფორმულა რჩება ძალაში. მაგრამ არის ერთი არსებითი განსხვავება. H_A სივრცის ფუნქციები შეიძლება არ აკმაყოფილებდეს (2.13) პირობას, ვინაიდან (2.13) – ბუნებრივი პირობაა. ამიტომ ბაზისური ფუნქციების შერჩევისას, (2.13)-ს არ ვითვალისწინებთ.

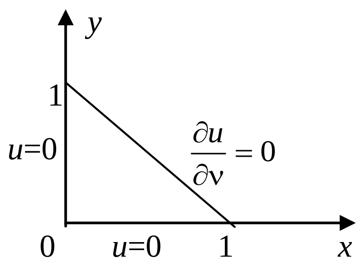
მაგალითი 4. განვიხილოთ ამოცანა

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=1,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1-x\},$$

$u=0$, როცა $x=0$ ან $y=0$,

$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$, როცა $y=1-x$ (ν კონტურის გარე ნორმალია) (ნახ. 2.3).



ნახ. 2.3

შევნიშნავთ, რომ ეს ამოცანა აღწერს ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის მქონე მემბრანის დეფორმაციას. მემბრანას აწვება თანაბრად განაწილებული ტვირთი. მემბრანის კათეტები ხისტად არის ჩამაგრებული, ხოლო ჰიპოტენუზა თავისუფალია.

ამოხსნა. მაგალით 3-ში ჩატარებული მსჯელობის თანახმად ამოცანის ოპერატორი სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია. განზოგადოებული ამონახსნის აგების შემთხვევაში $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$ ტოლობა – ბუნებრივი სასაზღვრო პირობაა. H_A სივრცე შედგება ფუნქციებისაგან, რომელთაც გააჩნიათ კვადრატით ჯამებადი პირველი რიგის განზოგადოებული წარმოებულები და რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობას: $u=0$, როცა $x=0$ ან $y=0$. სკალარული ნამრავლი და ნორმა განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$(u,v)_A=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]dx,\qquad \|u\|_A^2=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dy\right\}dx,$$

ხოლო ფუნქციონალს აქვს სახე

$$F(u)=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2u\right]dy\right\}dx\,.$$

ბაზისურ ფუნქციებად ავიღოთ

$$\varphi_{km}=x^k y^m,\qquad k,m=1,2,\ldots. \tag{2.17}$$

x და y არგუმენტების მიმართ ამოცანის სიმეტრიულობის გამო მიახლოებით ამონახსნში $x^k y^m$ და $x^m y^k$ ფუნქციებს ექნებათ ერთნაირი კოეფიციენტები, ამიტომ (2.17)-ის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ სისტემა

$$\varphi_{km}=(xy)^k(x^m+y^m),\qquad k=1,2,\ldots,\ m=0,1,\ldots.$$

ბაზისის ასეთი შეცვლა შეამცირებს გამოთვლების მოცულობას.

ავაგოთ

$$u_4=a_1xy+a_2xy(x+y)+a_3x^2y^2+a_4xy(x^2+y^2) \tag{2.18}$$

სახის მიახლოებითი ამონახსნი. თუ ვისარგებლებთ ერთინდექსიანი დანომვრით, გვექნება

$$\varphi_1=xy,\ \varphi_2=xy(x+y),\ \varphi_3=x^2y^2,\ \varphi_4=xy(x^2+y^2)\,.$$

a_i კოეფიციენტების მისაღებად ავაგოთ სისტემა

$$\hat{A}a = \hat{f} ,$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ -საძიებელი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი ვექტორია. $\hat{A} = (A_{ij})$ - მატრიცის ელემენტებისათვის მართებულია ფორმულა

$$A_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_A = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} \right) dy \right] dx, \qquad A_{ij} = A_{ji}, \quad \text{ხოლო} \quad \hat{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)\text{-}$$

ვექტორის კომპონენტებისათვის გვაქვს $f_i = (f, \varphi_i) = (1, \varphi_i) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \varphi_i dy \right) dx$.

ინტეგრალების გამოთვლის შედეგად მივიღებთ რიცის სისტემას

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{30}a_3 + \frac{1}{10}a_4 = \frac{1}{24},\\
&\frac{1}{6}a_1 + \frac{8}{45}a_2 + \frac{4}{105}a_3 + \frac{23}{210}a_4 = \frac{1}{30},\\
&\frac{1}{30}a_1 + \frac{4}{105}a_2 + \frac{1}{105}a_3 + \frac{19}{840}a_4 = \frac{1}{180},\\
&\frac{1}{10}a_1 + \frac{23}{210}a_2 + \frac{19}{840}a_3 + \frac{1}{14}a_4 = \frac{1}{60}
\end{aligned}$$

რომლის ამონახსნია $a_1 = 1\frac{6}{19}$, $a_2 = -1\frac{3}{4}$, $a_3 = 1\frac{8}{13}$, $a_4 = \frac{14}{39}$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (2.18)-ში.

ამრიგად, რითცის მეთოდი იძლევა შემდეგ მიახლოებას

$$u_4 = 1\frac{6}{19}xy - 1\frac{3}{4}xy(x+y) + 1\frac{8}{13}x^2y^2 + \frac{14}{39}xy(x^2+y^2).$$

ძირითადი ლიტერატურა

1. ა. სამარსკი, რიცხვითი მეთოდების შესავალი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2001.
2. А.А.Самарский, А.В.Гулин, Численные методы, М., Наука, 1989-430 стр.
3. С.Г.Михлин, Вариационные методы в математической физике, М., Наука, 1970-512 стр.
4. Г.И.Марчук, Методы вычислительной математики, М., Наука, 1989-608 стр.
5. D.G.Gordeziani, On solvability of some boundary value problems for one variant of equations of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR (1974), 1289-1292..
6. ჰ.მელაძე, მ.მენთეშაშვილი, ნ.მჭედლიშვილი, ნ.სხირტლაძე, გამოთვლითი მათემატიკის საფუძვლები, ნაწილი I, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2003-347 გვ.
7. J.Peradze, On the accuracy of the Galerkin method for a nonlinear dynamic beam equation, Math. Meth. Appl. Sci, 14p., 2011 (in print)
8. ვ.ი.კოსარევი, 12 ლექცია გამოთვლით მათემატიკაში, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2003-323 გვ.

დამატებითი ლიტერატურა

9. A.Quarteroni, R.Sacco, F.Saleri, Numerical Mathematics, Springer, 2007.
10. С.Г.Михлин, Численная реализация вариационных методов, М., Наука, 1966-432 стр.
11. А.А.Самарский, Теория разностных схем, М., Наука, 1977-656 стр.
12. J.N.Reddy, An introduction to the finite element method, Mc-Graw-Hill, 1993-684 p.