სრული პროფესორი როლანდ ომანაძე

რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები და ამოუხსნადობის ხარისხების საფუძვლები

(არჩევითი კურსი)

თბილისი 2012

გამოთვლადი ფუნქციები

პრიმიტიულად რეკურსიული, ნაწილობრივად რეკურსიული, ზოგადრეკურსიული ფუნქციები ჩერჩის თეზისი

ამ თავში მოცემული იქნება რეკურსიული ფუნქციის ფორმა-ლური (ანუ მათემატიკურად ზუსტი) განსაზღვრა. ეს არის ერთ-ერთი გზა „ალგორითმის დახმარებით“ ან „ეფექტური პროცე-დურის დახმარებით“ გამოთვლადი ფუნქციის არაფორმალური მათემატიკური ცნების დაზუსტების.

უხეშად რომ ვთქვათ, ფუნქციის რეკურსიული განსაზღვრა ეს არის განსაზღვრა, რომელშიც მოცემული არგუმენტებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობები უშუალოდ განისაზღვრებიან იგივე ფუნქციის „უფრო მარტივი“ არგუმენტების მნიშვნელობებით ან „უფრო მარტივი“ ფუნქციების მნიშვნელობებით. ცნება „უფრო მარტივი“ უნდა დაზუსტდეს ფორმალიზაციის არჩევით. როგორც წესი უმარტივესია ყველა კონსტანტა-ფუნქცია.

რეკურსიული განსაზღვრებები კარგადაა ცნობილი მათემატი-კისათვის. მაგალითად, f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$f(0)=1,$$

$$f(1)=1,$$

$$f(x+2)=f(x)+f(x+1),$$

იძლევა ფიბონაჩის მწკრივს: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

პრიმიტიულადრეკურსიული ფუნქციები – ეს არის ყველგან განსაზღვრულ ფართე და საინტერესო კლასის მაგალითი, რომელიც შეიძლება მსგავსი ფორმალიზაციით მივიღოთ.

ვთქვათ [— x —] – ისეთი გამოსახულებაა, რომ „x“-ის ნაცვლად ნებისმიერი რიცხვის ჩახმისას ის იღებს არაუმეტეს ერთი მნიშვნელობისა. მაშინ λx[— x —] აღნიშნავს ფუნქციას $\{<x,y>:$[— x —] აქვს მნიშვნელობა y, როცა „x“ ინტერპრეტი-რებულია როგორც რიცხვი $x\}$. ეს არის ფუნქციის განსაზღვრისა-თვის ჩერჩის (A-Church) ლამბდა-აღნიშვნა. მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია φ_1 და φ_2, მაშინ $\lambda x[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$ არის ისეთი ψ ფუნქცია, რომ $Arg\psi = Arg\varphi_1 \cap Arg\varphi_2$ და $\psi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ ნების-მიერი $x \in Arg\psi$-სთვის. ჩვენ ასევე გამოვიყენებთ ლამბდა-აღნიშვნას k არგუმენტიანი ფუნქციებისათვის, რომლის დროსაც ნაცვლად λx ჩავწერთ $\lambda x_1 x_2 \cdots x_k$.

განსაზღვრა. პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი არის ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციათა უმცირესი $\mathcal{C}$ კლასი, ისეთი რომ

(I) ყველა კონსტანტა-ფუნქცია $\lambda x_1 x_2 \cdots x_k[m]$, $1 \le k$, $0 \le m$ ეკუთვ-ნის $\mathcal{C}$-ს.

(II) წანაცვლების ფუნქცია $\lambda x[x+1]$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს.

(III) ამორჩევის ყველა ფუნქცია $\lambda x_1 \cdots x_k[x_i]$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, $1 \le i \le k$.

(IV) თუ k ცვლადის f ფუნქცია ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს და m-ცვლადის ფუნქციები $g_1, g_2, \cdots, g_k$ ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, მაშინ ფუნქცია $\lambda x_1 \cdots x_m\left[f(g_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,g_k(x_1,\cdots,x_m))\right]$ $1 \le k,\ m$, ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს.

(V) თუ $k+1$ ცვლადის h ფუნქცია ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს და $k-1$ ცვლადის g ფუნქცია ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, მაშინ k ცვლადის ერთადერთი ფუნქცია f, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$f(0, x_2, \cdots, x_k) = g(x_2, \cdots, x_k),$$
$$f(y+1, x_2, \cdots, x_k) = h(y, f(y, x_2, \cdots, x_k), x_2, \cdots, x_k),$$

$1 \le k$, ეკუთვნის $\mathcal{C}$-ს, ((V) პუნქტში „ნული ცვლადის ფუნქცია $\mathcal{C}$-დან“ აღნიშნავს ფიქსირებულ ნატურალურ რიცხვს).

განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ყველგან განსაზღვრული ფუნქცია f პრიმიტიულად რეკურსიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ფუნქციათა ისეთი სასრული მიმდევრობა $f_1, f_2, \cdots, f_n$, რომ $f_n = f$ და ნებისმიერი $j \le n$-სთვის $f_j \in \mathcal{C}$ (I), (II) ან (III) თვისებების ძალით, ან f_j მიიღება რაიმე f_c, $i < j$,-სგან (IV) ან (V) პუნქტების თანახმად. (ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ყველა იმ f ფუნქციათა $\mathcal{D}$ კლასი, რომელთათვისაც არსებობენ ასეთი მიმდევრობები $f_1, f_2, \cdots, f_n$. ცხადია, $\mathcal{D}$ შედის ნებისმიერ $\mathcal{C}$ კლასში, რომელსაც აქვს (I)-(V) თვისება; გარდა ამისა $\mathcal{D}$ თვითონ აქვს (I)-(V) თვისება. მაშასადამე, $\mathcal{D}$ ემთხვევა ყველა ასეთი $\mathcal{C}$ კლასის თანაკვეთას). თუ მოცემულია ასეთი მიმდევრობა f-სთვის იმის ზუსტ აღწერასთან ერთად თუ როგორ მოიცემა ყოველი $f_j, j \le n$, ფუნქცია, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია პრიმიტიულად რეკურსიული f ფუნქციის სქემა.

მაგალითად, განვიხილოთ f ფუნქცია, რომელიც მოცემულია სქემით

$f_1 = \lambda x[x]$	(III)-ით	(1 – ცვლადის ფუნქცია)
$f_2 = \lambda x[x+1]$	(III)-ით	(1 – ცვლადი)
$f_3 = \lambda x_1 x_2, x_3[x_2]$	(III)-ით	(3 – ცვლადიანი)
$f_4 = f_2 f_3$	(IV)-ით	(3 – ცვლადიანი)

f_5 აკმაყოფილებს პირობებს

$f_5 = (0, x_2) = f_1(x_2)$

$f_5 = (y+1, x_2) = f_4(y, f_5(y, x_2), x_2)$ (V)-ით (2 – ცვლადიანი)

$f = f_6 = f_5(f_1, f_1)$ (III)-ით (1 – ცვლადიანი).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფუნქცია f_6 არის $\lambda x[2x]$ (f_5 – არის $\lambda xy[x+y]$). ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\lambda x[2x]$ არის პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქცია.

სქემა შეიძლება ჩაიწეროს რაიმე სტანდარტული სიმბოლური ფორმით. სქემის ჩანაწერი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც განსაზღვრული f ფუნქციის ეფექტური გამოთვლისათვის ინსტ-რუქციათა ერთობლიობა. მაგალითად, წინა მაგალითში $f(2)$-ის გამოსათვლელად სქემა იძლევა შემდეგ გამოთვლას

$$\begin{aligned} f(2) = f_6(2) &= \\ &= f_5(f_1(2), f_1(2)) = \\ &= f_5(2, f_1(2)) = \\ &= f_5(2, 2) = \\ &= f_4(1, f_5(1,2), 2) = \end{aligned}$$

$= f_4(1, f_1(0, f_5(0,2),2),2) =$
$= f_4(1, f_5(0, f_1(2),2),2) =$
$= f_4(1, f_4(0,2,2),2) =$
$= f_4(1, f_2(f_3(0,2,2)),2) =$
$= f_4(1, f_2(2),2) =$
$= f_4(1,3,2) =$
$= f_2(f_3(1,3,2)) =$
$= f_2(3) =$
$=$ 4.

ამიტომ პრიმიტიულ რეკურსიული ფუნქციის ზუსტ განსაზღვრას ჩვენ განვიხილავთ, როგორც ალგორითმით გამოთვლადი ყველგან განსაზღვრული ფუნქციის არაფორმალური ცნების კერძო შემთხ-ვევას.

აუცილებელია ალგორითმისა და ალგორითმული ფუნქციის ცნებებს შორის განსხვავების გაკეთება. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი იმისათვის, რომ ხაზი გავუსვათ ასეთ განსხვავებებს. კერძოდ, განვსაზღვრავთ g ფუნქციას, რომლისთვისაც შეგვიძლია დავამტკიცოთ გარკვეული ალგორითმის არსებობა, მაგრამ არ ვიცით როგორ ავაგოთ კონკრეტული ალგორითმი. განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები f და g:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \pi \text{ რიცხვის ათობით გაშლაში არის ერთმანეთის} \\ \quad \text{მიმდევრობით ციფრი 5 ზუსტად } x; \\ 0 \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში;} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \pi \text{ რიცხვის ათობით გაშლაში არის ერთმანეთის} \\ \quad \text{მიმდევრობით ციფრი 5 } x-\text{ჯერ მაინც;} \\ 0 \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ამჟამად არაა ცნობილი f ფუნქციის გამოთვლის ალგორითმი. მეტიც, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ასეთი ალგორითმი არ არსებობს. f ფუნქციისაგან განსხვავებით ვიცით, რომ g პრიმი-ტიულად რეკურსიულია. მართლაც g უნდა იყოს მუდმივი 1 ან მოიძებნება ისეთი k, რომ

$$g(x) = 1, \quad x \le k\text{-თვის;}$$
$$g(x) = 0, \quad k < x\text{-თვის.}$$

ორივე შემთხვევაში არსებობს პრიმიტიულად რეკურსიული სქემა, მაგრამ ამჟამად არავინ არ იცის, როგორ გამოვავლინოთ სწორი სქემა.

უფრო მარტივი მაგალითის ასაგებად განვიხილოთ პრობლემა, რომელიც არ არის მათემატიკოსების მიერ გადაწყვეტილი, მაგალითად გოლდბახის პრობლემა იმის შესახებ. რომ ორზე მეტი ყოველი ლუწი რიცხვი არის ორი მარტივი რიცხვის ჯამი და განვსაზღვროთ ფუნქცია h ასე:

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ პრობლემა წყდება დადებითად,} \\ 0, \text{ თუ პრობლემა წყდება უარყოფითად.} \end{cases}$$

ცხადია, რომ h-ი მუდმივია. მასასადამე, ის პრიმიტიულად რეკურ-სიულია, თუმცა არ ვიცით, როგორ ავაგოთ სწორი სქერა.

განვიხილოთ **სასრული მექანიკური მოწყობილობა**, რომელიც დაკავშირებულია (ორსავე მხარეს) ქაღალდის უსასრულო ლენ-ტასთან. ლენტა მთელ სიგრძეზე დაყოფილია ტოლი ზომის უჯრებად. ამ უჯრებს ვუწოდებთ ყუთებს.

მოწყობილობა ისეთია, რომ ლენტას შეუძლია მასში მოძრაობა, ამასთან ზუსტად ერთი ყუთი იმყოფება შიგნით. მოწყობილობის შიგნით მყოფ ყუთის შესახებ ვიტყვით, რომ ის არის განსახილ-ველი ყუთი. ლენტის გასწვრივ მიმართულებებს ვუწოდებთ შესა-ბამისად მარცხენას და მარჯვენას. მოწყობილობას შეუძლია შეას-რულოს შემდეგი ოთხი ოპერაციიდან ერთი: (1) მას შეუძლია ჩაწეროს „1“ განსახილველ ყუთში, თუ მასში უკვე არაა ჩაწერილი „1“; (2) მას შეუძლია წაშალოს განსახილველ ყუთში ჩაწერილი და ეს ყუთი აქციოს ცარიელ ყუთად, თუ ის უკვე არ იყო ცარიელი; (3) მას შეუძლია თავისი ყურადღება გადაიტანოს ერთი ყუთით მარჯვნივ (ლენტა გასწიოს ერთი ყუთით მარცხნივ); (4) მას შეუძლია თავისი ყურადღება გადაიტანოს ერთი ყუთით მარცხნივ (ლენტა გასწიოს ერთი ყუთით მარჯვნივ). მოწყობი-ლობა აქტიურ მდგომარეობაში აწარმოებს ძირითად ოპერაციებს სიჩქარით ერთი ოპერაციისა დროის ერთეულში. ზოგჯერ იმ შემთხვევაში, როცა მოწყობილობამ შეასრულა ერთი ოპერაცია, ჩვენ ვიტყვით, რომ შესრულებულია მოწყობილობის მუშაობის ნაბიჯი. ყოველი ნაბიჯის დასრულებისას მოწყობილობას აქვს შესაძლო შინაგანი (მექანიკური) სტრუქტურების ფიქსირებული სასრული სიმრავლიდან ერთ-ერთი. ასეთ სტრუქტურებს ჩვენ ვუწოდებთ შინაგან მდგომარეობებს. სხვადასხვა შინაგანი მდგომარეობის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ სიმბოლოებს q_i, $i = 0,1,2,\cdots$. ბოლოს, მოწყობილობა აგებულია ისე, რომ მისი ქცევა აღიწერება დეტერმინირებული წესების სასრული სიით. ეს წესები განსაზღვრავენ მიმდინარე შინაგანი მდგომარეობათა და განსახილველი ყუთის ჩანაწერით, შემდეგში როგორი ოპერაცია წარმოებს და როგორი უნდა იყოს შემდეგი შინაგანი მდგო-მარეობა (ამ შემდგომი ოპერაციის ბოლოს).

ვთქვათ 1 და B აღნიშნავენ შესაძლო ჩანაწერებს ნებისმიერი ყუთში (B შეესაბამება ცარიელ ყუთს). ვთქვათ, 1, B, R და L აღნიშნავენ შესაბამისად ძირითად ოპერაციებს (1), (2), (3) და (4). მაშინ წესების ერთობლიობა, რომლებიც განსაზღვრავენ მოწყობი-ლობის ქცევას, შეიძლება ჩაიწეროს ოთხეულთა ერთობლიობის სახით. ყოველი ოთხეული (რიგის მიხედვით) შედგება შემდეგი სახის სიმბოლოებისაგან: (I) შინაგანი მდგომარეობის, (II) ყუთში შესაძლო ჩანაწერის, (III) ოპერაციის, (IV) შინაგანი მდგომა-რეობის. ოთხეული (I, II, III, IV) გამოხატავს ასეთ წესს: (I) და (II)-ს არსებობისას მოწყობილობა აწარმოებს (III) ოპერაციას და გადადის (IV)-ში. ვიგულისხმებთ, რომ ასეთი ოთხეულის ნებისმიერი ერთობლიობა არის წესების ერთობლიობა რაღაც მოწყობილობი-სათვის; ვითხოვთ მხოლოდ ერთადერთ შეზღუდვას, რომ ნებისმიერი ორი განსხვავებული ერთობლიობა უნდა განსხვავდებოდეს (I)-ში ან (II)-ში. ამ შეზღუდვას ვუწოდოთ თავსებადობის პირობა; ამ პირობებში წესების ერთობლიობას არ შეუძლია ორი ან მეტი სხვადასხვა მოქმედების მოთხოვნა ერთსა და იმავე დროს. ამას-თანავე ჩვენ არ ვიგულისხმებთ, რომ წესების ერთობლიობაში გათვალისწინებულია (I) და (II)-ის ნებისმიერი კომბინაცია; ამნაირად, ჩვენ ვუშვებთ, რომ გარკვეული გარემოების დროს მოწ-ყობილობას არ შეუძლია შეასრულოს არავითარი ოპერაცია. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მოწყობილობა გაჩერდა.

მაგალითისათვის განვიხილოთ მოწყობილობა q_0 და q_2 შინაგანი მდგომარეობით და რომლის ქცევა განისაზღვრება ორი ოთხეულით $q_0 1 B q_2$ და

q_2BRq_0. თუ ასეთი მოწყობილობა მიიღებს ლენტას ერთმანეთის მიმდევრობით მდგომი ერთიანების სასრული მიმდევრობით და დაიწყებს მუშაობას q_0 მდგომარეობაში ამ მიმდევრობის ყველაზე მარცხენა ყუთზე, ის წაშლის ყველა ერთიანს და გაჩერდება. თუ ასეთი მოწყობილობა დაიწყებს მუშაობას ლენტაზე, რომელიც სულ ერთიანებითაა შევსებული, მაშინ ის არასდროს არ გაჩერდება.

ზემოთ აღწერილი ზოგადი სახის მოწყობილობას ეწოდება ტიურინგის მანქანა. ტიურინგის მანქანა ადვილად განისაზღვრება საყოველთაოდ მიღებულ მათემატიკურ ენაზე. ვთქვათ $T=\{0,1\}$ და $S=\{0,1,2,3\}$. მაშინ ტიურინგის მანქანა შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც გადასახვა $N\times T$ სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლისა $S\times N$-ში. (N-ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა $N=\{0,1,2,\cdots\}$. აქ T წარმოად-გენს ყუთში ჩანაწერს, S – ოპერაციებს, რომლებიც უნდა შესრულ-დეს, ხოლო N იძლევა შინაგანი მდგომარეობების შესაძლო ნომრებს.

ვთქვათ $f(x_1,\cdots,x_n,y)$–ფუნქციაა (არაა აუცილებელი, რომ ის იყოს ყველგან განსაზღვრული) და გვინდა განვსაზღვროთ $g(x_1,\cdots,x_n)$ ფუნქცია.

$g(x_1,\cdots,x_n)=$ უმცირესი y ისეთი, რომ $f(x_1,\cdots,x_n,y)=0$, ისე, რომ f ფუნქციის გამოთვლადობიდან გამომდინარეობს g-ს გამოთვ-ლადობა. აქ უნდა გადავწყვიტოთ ორი საკითხი. პირველი, ზოგიერთი $x_1,\cdots,x_n$-სთვის შეიძლება არ არსებობდეს y, რომლის-თვისაც $f(x_1,\cdots,x_n,y)=0$. მეორე, დავუშვათ, რომ f გამოთვლადია და განვიხილოთ $g(x_1,\cdots,x_n)$-ის გამოთვლის შემდეგი ბუნებრივი ალგორითმი. „გამოვთვალოთ $f(x_1,\cdots,x_n,0)$, $f(x_1,\cdots,x_n,1),\cdots$ მანამ, სანამ არ ვიპოვით ისეთ y-ს, რომ $f(x_1,\cdots,x_n,y)=0$“. ეს პროცედურა შეიძლება არ დასრულდეს, თუ f არაა ყველგან განსაზღვრული, მაშინაც კი, როცა ასეთი y არსებობს; მაგალითად $f(x_1,\cdots,x_n,0)$ არაა განსაზღვრული და $f(x_1,\cdots,x_n,1)=0$.

ამგვარად, ჩვენ მივდივართ მინიმიზაციის μ-ოპერატორის შემდეგ განსაზღვრამდე, რომელიც გამოთვლადი ფუნქციიდან იძლევა გამოთვლად ფუნქციას.

განსაზღვრა. ყოველი $f(x_1,\cdots,x_n,y)$ ფუნქციისათვის

$$\mu y(f(x_1,\cdots,x_n,y)=0)=\begin{cases}\text{უმცირესი } y \text{ ისეთი, რომ}\\ \text{(1) } f(x_1,\cdots,x_n,z) \text{ განსაზღვრულია ყველა}\\ \quad z\le y \quad \text{და}\\ \text{(II) } f(x_1,\cdots,x_n,y)=0, \text{ თუ ასეთი}\\ \quad \text{არსებობს.}\\ \text{არაა განსაზღვრული წინააღმდეგ}\\ \text{შემთხვევაში.}\end{cases}$$

$\mu y(\cdots)$ იკითხება როგორც „უმცირესი y ისეთი, რომ...“ ამ ოპერატორს ზოგჯერ უწოდებენ μ ოპერატორს.

განსაზღვრა. ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასი ეწოდება უმცირეს კლასს, რომელიც შეიცავს ფუნქციებს $\lambda x[m]$, $\lambda x[x+1]$, $\lambda x_1,\cdots,x_k[x_i]$, $1\le i\le k$ და ჩაკეტილია ჩასმის ოპერაციის მიმართ (იხ. პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასის განსაზღვრის (IV) პუნქტი), პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციის მიმართ (იხ. პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასის გან-საზღვრის (V) პუნქტი) და მინიმიზაციის ოპერაციის მიმართ.

განსაზღვრა. ყველგან განსაზღვრულ ნაწილობრივად რეკურ-სიულ ფუნქციას ეწოდება ზოგადრეკურსიული ფუნქციას.

ჩერჩის თეზისი. ალგორითმულად გამოთვლად ნაწილობრივ რიცხვით ფუნქციათა კლასი ემთხვევა ყველა ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს.

გეოდელის ნომრები, უნივერსალურობა, *ს –მ–ნ* თეორემა

წინა პარაგრაფიდან ჩანს, რომ ინსტრუქციათა ერთობლიობა ეს არის ოთხეულთა ერთობლიობა, რომელიც აკმაყოფილებს თავსებადობის პირობას. ყველა პრიმიტიულად რეკურსიული სქემის გადათვლის ანალოგიურად შეიძლება მოვახდინოთ ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობის გადათვლის პროცესი. ეს პროცესი ალგორითმულია (ამ სიტყვის არაფორმალური აზრით). არსებობენ პროცედურები, რომლებიც ყოველ x-ს უსაბამებენ ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობის გადათვლაში $(x+1)$ ადგილზე მყოფ ინსტრუქციათა ერთობლიობას. დავუშვათ, რომ ჩვენ ამოვირჩიეთ ერთი ასეთი გადამთვლელი პროცედურა.

განსაზღვრა. P_x – ეს არის ინსტრუქციათა ერთობლიობა, რომელიც შეესაბამება x – რიცხვს ყველა ინსტრუქციათა ერთობ-ლიობის ფიქსირებულ გადათვლაში. x-ს ეწოდება P_x ერთობლიო-ბის ინდექსი ან გედელის ნომერი.

ვთქვათ $\varphi_x^{(k)}$ – არის k ცვლადის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვ-რულია P_x ერთობლიობით. x-ს ეწოდება $\varphi_x^{(k)}$ ნაწილობრივი ფუნქციის ინდექსი ან გეოდელის ნომერი.

ცხადია, რომ გადათვლის პროცესი იძლევა როგორც (a) ნების-მიერი x-დან შესაბამის P_x-ზე გადასვლის ალგორითმს, ასევე (b) ნებისმიერი თავსებადი ოთხეულთა ერთობლიობიდან P ისეთ x- რიცხვზე გადასვლის ალგორითმს, რომ P არის შესაბამისი P_x.

თეორემა 1. არსებობს ზუსტად $\aleph_0$ (თვლადი რაოდენობა) ნაწი-ლობრივ რეკურსიული ფუნქციებისა და ზუსტად $\aleph_0$ რაოდენობა ზოგადრეკურსიული ფუნქციებისა.

დამტკიცება. ჩერჩის თეზისის თანახმად ყველა კონსტანტა-ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია. მაშასადამე, არსებობს $\aleph_0$ რაოდე-ნობა მაინც ზოგადრეკურსიული ფუნქციებისა. გედელის ნუმერაცია გვიჩვენებს, რომ არსებობს არაუმეტეს $\aleph_0$ რაოდენობა ნაწილობ-რივად რეკურსიული ფუნქციებისა.

თეორემა 2. არსებობენ არარეკურსიული ფუნქციები.

დამტკიცება. კანტორის ცნობილი თეორემის თანახმად არსებობს $2^{\aleph_0}$ ფუნქცია.

თეორემა 3. ყოველ ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციას აქვს $\aleph_0$ განსხვავებული ნომერი.

დამტკიცება. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\aleph_0$ ნომერი მაინც. ვთქვათ მოცემულია ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია φ_{x_0}. ვთქვათ m ისეთი რიცხვია, რომელიც მეტია ვიდრე P_{x_0}-ში შემავალი შინაგანი მდგომარეობის რიცხვითი ინდექსები. P_{x_0}-სთვის ამ ჩანაწერში 1-იანი ჩანს, როგორც ზედა ინდექსი. სინამდვილეში კი უნდა იყოს q-ს გვერდით. მაგალითად, $q_m^{11}q_m$ $q_m^{11}q_m, q_{m+1}^{11}q_{m+1},\cdots$ $\cdots, q_{m+k}^{11}q_{m+k}$ ოთხეულების დამატებით შესაბამისი ნაწილობრივი ფუნქცია არ იცვლება, რადგან გამოთვლის პროცესში არ შეიძლება გამოჩნდეს არც $q_m,\cdots$, არც q_{m+k}. k-ს ცვლილებით მივიღებთ φ_{x_0} ფუნქციის ინსტრუქციათა ერთობლიობისათვის $\aleph_0$ განსხვავებულ ნომერს.

აღვნიშნოთ, რომ შემდეგი ტექსტი, საზოგადოდ, განსაზღვრავს არაფორმალურად ალგორითმს გარკვეულ ψ ფუნქციისათვის: მივიღებთ შესასვლელს <x, y>, იპოვეთ P_x (აწარმოეთ სტანდარტული ეფექტური გადათვლა ყველა ინსტრუქციათა ერთობლიობების, სანამ არ მივიღებთ P_x), შემდეგ გამოიყენეთ $P_x(y)$ შესასვლელზე იმისათვის, რომ გამოთვალით $\varphi_x(y)$; როცა $\varphi_x(y)$ მოგცემთ გამოსასვლელს (თუ ეს მოხდება), აიღეთ ის როგორც გამოსასვ-ლელი $\psi(x,y)$-სთვის.

გვაქვს:

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\varphi_x(y), \text{ თუ } \varphi_x(y) \text{ განსაზღვრულია;}\\ \text{განუსაზღვრულია, თუ } \varphi_x(y) \text{ განუსაზღვრულია.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად მივიღებთ, რომ ψ არის ნაწილობ-რივად რეკურსიული ფუნქცია და რომ გარკვეული x_1-სთვის $\psi=\varphi_{x_1}^{(2)}$. მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 4. არსებობს ისეთი z, რომ ნებისმიერი x და y-სთვის $\varphi_z(x,y)=\varphi_x(y)$, თუ $\varphi_x(y)$ განსაზღვრულია, და $\varphi_z(x,y)$ არაა გან-საზღვრული, თუ $\varphi_x(y)$ არაა განსაზღვრული.

$\varphi_z^{(2)}$ ფუნქციას თეორემა 4-დან ეწოდება **უნივერსალური ფუნქცია** ერთცვლადიანი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციე-ბისათვის. P_z-ეს არის ტიურინგის მანქანა, რომელიც შეიძლება გამოვიყენოთ იმისათვის, რომ მოვახდინოთ ნებისმიერი ერთცვლა-დიანი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის დუბლირება. P_z-ს ვუწოდოთ უნივერსალური მანქანა.

თეორემა 5. ნებისმიერი m, $n\geq 1$ არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია s_n^m $m+1$ ცვლადის ისეთი, რომ ყოველი $x, y_1,\cdots,y_m$

$$\lambda z_1\cdots z_n\left[\varphi_x^{(m+n)}(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n)\right]=\varphi_{S_n^m(x,y_1,\cdots,y_m)}^{(n)}.$$

თეორემა 5 ცნობილია $s-m-n$ თეორემა და ეკუთვნის კლინის.

გაჩერების პრობლემა

არსებობს თუ არა ეფექტური პროცედურა იმის დასადგენად განსაზღვრულია თუ არა $\varphi_x(y)$ მოცემული x და y-სთვის ანუ იძლევა თუ არა გამოსავალს P_x ერთობლიობა y შესავალზე გამო-ყენებისას? ჩერჩის თეზისის თანახმად ამ კითხვას მივცეთ მისი ექვივალენტური და ზუსტი ფორმა. არსებობს თუ არა ისეთი რეკურსიული ფუნქცია g, რომ $g(x,y)=1$, თუ $\varphi_x(y)$ განსაზღვ-რულია $g(x,y)=0$, თუ $\varphi_x(y)$ არაა განსაზღვრული? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6. არ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია g, რომ ნებისმიერი x, y

$$g(x,y)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(y) \text{ განსაზღვრულია;}\\ 0, \text{ თუ } \varphi_x(y) \text{ არაა განსაზღვრული.}\end{cases}$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ψ შემდეგნაირად:

$$\psi(z,x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_z^{(2)}(x,x)=0;\\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_z^{(2)}(x,x)\neq 0 \text{ ან}\\ \qquad\qquad\qquad \varphi_z^{(2)}(x,x) \text{ განუსაზღვრელია.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია. თეორემა 5-ის თანახმად z-ით ეფექტურად ვიპოვოთ $\lambda x[\psi(x,z)]$ ფუნქციის გედელის ნომერს, ანუ არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია h ისეთი, რომ ნებისმიერი z-სთვის $\varphi_{h(z)}=\lambda x[\psi(z,x)]$. ($h$-ის როლში შეიძლება ავიღოთ $\lambda z[s_1^1(w_1,z)]$, სადაც w_1-არის ψ-ს გედელის ნომერი).

დავუშვათ, რომ $g=\varphi_{z_0}$ რაიმე z_0-სთვის. h-ის განსაზღვრის თანახმად, $\varphi_{h(z_0)}(x)$ განსაზღვრულია $\Leftrightarrow \varphi_{z_0}(x,x)=0$. x-ის ნაცვლად $h(z_0)$-ის ჩასმით გვაქვს

$$\varphi_{h(z_0)}(h(z_0)) \text{ განსაზღვრულია} \Leftrightarrow \varphi_{z_0}(h(z_0),h(z_0))=0.$$

მაგრამ მაშინ φ_{z_0} არ შეიძლება ემთხვეოდეს g-ს, რადგან $<h(z_0),h(z_0)>$ შესასვლელისათვის φ_{z_0} ფუნქცია ან არაა გან-საზღვრული ან იძლევა მცდარ ინფორმაციას.

შედეგი. არ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;}\\ 0, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.}\end{cases}$$

დამტკიცება გამომდინარეობს თეორემის დამტკიცებიდან.

ჩვენს საწყის პრობლემას (რომელიც ჩამოყალიბებულია ამ პარაგრაფის პირველ აბზაცში) ეწოდება გაჩერების პრობლემა, სადაც სიტყვა „გაჩერება“ აღნიშნავს „გამოსასვლელის არსებობას“. თეორემა 6-ში დადგენილი ფაქტი ცნობილია, გაჩერების პრობლემის რეკურსულად ამოუხსნადობის სახელით.

თეორემა 7. არ არსებობს ეფექტური პროცედურა ნებისმიერი x-სთვის φ_x ფუნქცია ყველგან არის თუ არა განსაზღვრული. სხვა სიტყვებით, არ არსებობს ზოგადრეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x \text{ ყველგან განსაზღვრულია;}\\ 0, \text{ თუ } \varphi_x \text{ არაა ყველგან განსაზღვრული.}\end{cases}$$

დამტკიცება. მოვიყვანთ არაფორმალურ დამტკიცებას. დავუშვათ, რომ ასეთი f ფუნქცია არსებობს. მაშინ განვსაზღვრით g ფუნქცია ასე:

$$g(0)=\mu y[f(y)=1],$$
$$g(x+1)=\mu y[y>g(x)\,\&\,f(y)=1].$$

რადგან $f(y)=1$ უსასრულოდ ბევრი y-სთვის (იხ. თეორემა 1), ამიტომ g ყველგან განსაზღვრულია. ჩერჩის თეზისის თანახმად g ზოგადრეკურსიულია. განვსაზღვროთ h შემდეგნაირად:

$$h=\lambda x\left[\varphi_{g(x)}(x)+1\right].$$

f ფუნქციაზე დაშვების გამო h ფუნქცია ყველგან განსაზღვ-რულია. ჩერჩის თეზისის ძალით h ზოგადრეკურსიულია. ვთქვათ $h=\varphi_{z_0}$. g-ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, $g^{-1}(z_0)$ განისაზღვ-რება ცალსახად, აღვნიშნოთ ის y_0-ით. მაშინ $h(y_0)=\varphi_{g(y_0)}(y_0)+1$, h ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, მაგრამ $h(y_0)=\varphi_{g(y_0)}(y_0)$ y_0-ის განსაზღვრის გამო. რადგან h ყველგან განსაზღვრულია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

რეკურსიულობა

თეორემა 8. ვთქვათ f არის $k+1$ ცვლადი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია, მაშინ $\lambda x_1\cdots x_k[\mu y[f(x_1,\cdots,x_k,y)=1]]$ არის k ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია.

დამტკიცება. ის გამომდინარეობს ჩერჩის თეზისიდან. დავუშვათ

$$\psi=\lambda x_1\cdots x_k[\mu y[f(x_1,\cdots,x_k,y)=1]].$$

მაშინ იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x_1,\cdots,x_k)$ საჭიროა მიმ-დევრობით გამოვთვალოთ

$$f(x_1,\cdots,x_k,0),\ f(x_1,\cdots,x_k,1),\ f(x_1,\cdots,x_k,2),\cdots$$

როგორც კი მოიძებნება ისეთი y, რომ $f(x_1,\cdots,x_k,y)=1$ (თუ ეს მოხდება), მას ავიღებთ ψ-ს მნიშვნელობად. f-ის გამოთვლები ყოველთვის განსაზღვრულია რადგან f-ი ზოგადრეკურსიულია.

თეორემა 8-ს უწოდებენ μ-თეორემას. შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა არაა სამართლიანი თუ f-ს შევცვლით $k+1$ ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციით.

თეორემა 9. არსებობს კონკრეტული ზოგადრეკურსიული ფუნქ-ციები ერთი ცვლადის ფუნქცია p და სამი ცვლადის ფუნქცია t ისეთი, რომ ნებისმიერი z-სთვის.

$$\varphi_z = \lambda x[p(\mu y[t(z,x,y)=1])].$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ s-ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$s(z,x,y,w)=\begin{cases}1, \text{ თუ } P_z \ x \text{ შესასვლელზე იძლევა } y \text{ გამოსასვლელს} \\ \qquad \text{არა უმეტეს } w \text{ ნაბიჯის შემდეგ;} \\ 0, \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად s-ზოგადრეკურსიულია. განვსაზღვ-როთ p და q ასე:
$p=\lambda x[x+1$-ის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 3-ის მაჩვენებელი],
$q=\lambda x[x+1$-ის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-ის მაჩვენებელი].
დავუშვათ

$$t=\lambda zxy[s(z,x,p(y),q(y))].$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად, p,q და, მაშასადამე, t- ზოგადრეკურ-სული ფუნქციებია. თეორემა გამომდინარეობს s, p,q და t ფუნქ-ციების განსაზღვრიდან.

თეორემა 9-ს ეწოდება **კლინის თეორემა ნორმალური ფორმის** შესახებ.

შედეგი. არსებობენ ისეთი ზოგადრეკურსიული p და t_k ფუნქ-ციები, რომ ნებისმიერი z-სთვის

$$\varphi_z^{(k)}=\lambda x_1\cdots x_k\left[p(\mu[t_k(z,x_1,\cdots,x_k y)=1])\right].$$

დამტკიცება. თეორემა 9 დამტკიცების ანალოგიურია.

ამოუხსნადი პრობლემების მაგალითები

თეორემა 6, მისი შედეგი და თეორემა 7 იძლევიან რეკურ-სიულად ამოუხსნადობის მაგალითებს. ყოველი მათგანი დაკავში-რებულია „პრობლემასთან“, რომელიც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ, როგორც რაიმე სიმრავლის ელემენტთა ეფექტური გამოცნობის პრობლემა. მაგალითად თეორემა 6-ის შედეგისათვის ასეთი სიმრავლე იქნება $\{x:\varphi_x(x)-$ განსაზღვრულია$\}$. ყოველი ამ სამი შედეგიდან გვიჩვენებს, რომ შესაბამის სიმრავლეს არ აქვს რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია. ჩვენ ამ შედეგებს გავაერ-თიანებთ და ვიტყვით, რომ მოცემული პრობლემები რეკურსიულად ამოუხსნადია.
განვიხილოთ შემდეგი პრობლემები:
(a) ნებისმიერი x-სთვის განისაზღვროს არის თუ არა φ_x ფუნქცია მუდმივი ფუნქცია.

(b) ნებისმიერი x და y-სთვის განისაზღვროს ეკუთვნის თუ არა y φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

(c) ნებისმიერი x, y და z-სთვის განისაზღვროს სრულდება თუ არა $\varphi_x(y)=z$.

(d) ნებისმიერი x და y-სთვის განისაზღვროს სრულდება თუ არა $\varphi_x=\varphi_y$.

(e) ნებისმიერი x-სთვის განისაზღვროს უსასრულოა თუ არა φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

(f) ფიქსირებული y_0-სთვის ნებისმიერი x-სთვის განისაზღვროს ეკუთვნის თუ არა y_0 φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა არე.

(g) ფიქსირებული x_0-სთვის ნებისმიერი y-სთვის განისაზღვროს ეკუთვნის თუ არა y φ_{x_0} ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს.

თეორემა I. პრობლემები (a), (b), (c), (d) და (e) რეკურსიულად ამოუხსნადია. y_0-ის ნებისმიერი არჩევის დროს (f) პრობლემა ამოუხსნადია. პრობლემა (g) შეიძლება იყოს ამოხსნადიც და ამოუხსნადიც, ეს დამოკიდებულია x_0-ის შერჩევაზე.

დამტკიცება. (a) ვთქვათ g – არის $\{x:\varphi_x$ არის მუდმივი ფუნქცია$\}$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია. ($C_A(x)$ ფუნქციას ეწოდება A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია, თუ $C_A(x)=1$, როცა $x\in A$, და $C_A(x)=0$ როცა $x\notin A$). ვაჩვენოთ, რომ g არაა რეკურ-სიული.

განვსაზღვროთ ორი ცვლადის ψ ფუნქცია შემდეგნაირად: $<x, y>$ შესასვლელის მიღებისას ვიპოვოთ P_x და გამოვიყენოთ P_x P_x-ის შესასვლელისთვის; როცა პროცესი დამთავრდება (თუ ეს მოხდა) გამოსასვლელად მივიღოთ 0. ჩერჩის თეზისის თანახმად ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია. ცხადია, რომ ψ აკმაყოფილებს ასეთ პირობას:

$$\psi(x,y)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;}\\ \text{არაა განსაზღვრული, თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.}\end{cases}$$

s-m-n თეორემის თანახმად არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია h_1 ისეთი, რომ $\lambda y[\psi(x,y)]=\varphi_{h_1(x)}$ (h_1 არის ფუნქცია $\lambda x[s_1^1(z_0 x)]$, სადაც z_0 არის ψ-ს ნომერი). მაშ ასე,

$$\varphi_{h_1(x)}(y)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;}\\ \text{არაა განსაზღვრული, თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.}\end{cases}$$

მაშასადამე $\varphi_{h_1(x)}$ – მუდმივი ფუნქციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია.

თუ g ფუნქცია რეკურსიულია, მაშინ $gh_1(=\lambda x[g(h_1(x))])$ ზოგად- რეკურსიულია და

$$gh_1(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;}\\ 0, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ არაა განსაზღვრული.}\end{cases}$$

მაგრამ gh_1 იქნება $\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლის მახა-სიათებელი ფუნქცია, რაც ეწინააღმდეგება თეორემა 6-ის შედეგს. ამიტომ g არ შეიძლება იყოს რეკურსიული.

(b) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია მიმართების $\{<x,y>: y$ ეკუთვნის φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს}. ვთქვათ h_1-ზოგადრეკურსიული ფუნქციაა (a) პუნქტის დამტკიცებიდან. თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_1(x),0)]$ იქნება რეკურსიული მახა-სიათებელი ფუნქცია $\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია} სიმრავლისათვის, რაც არ შეიძლება.

(c) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია მიმართების $\{<x,y,z>:\varphi_z(y)=z\}$. თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_1(x),0,0)]$ იქნება რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია $\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვ-რულია} სიმრავლისათვის, რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას (აქ h_1 კვლავ (a) პუნქტიდანაა აღებული).

(d) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია მიმართების $\{<x,y>:\varphi_x=\varphi_y\}$, ავიღოთ $\lambda x[0]$ ფუნქციის რაიმე y_0 ნომერი, მაშინ $\lambda x[f(h_1(x),y_0)]$ იქნება რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია $\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია} – სიმრავლისათვის, სადაც h_1-კვლავ (a) პუნქტის დამტკიცებიდანაა.

(e) ვთქვათ f არის მახასიათებელი ფუნქცია, სიმრავლის $\{x:\varphi_x$-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე უსასრულოა}. (a) პუნქტის დამტკიცების მეთოდის ანალოგიურად განვსაზღვროთ ზოგადრე-კურსიული h_2 ფუნქცია ისე, რომ

$$\varphi_{h_2(x)}(y)=\begin{cases} y, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.} \end{cases}$$

თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_2(x))]$ იქნება $\{x:\varphi_x(x)$ გან-საზღვრულია} სიმრავლის რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია.

(f) ვთქვათ მოცემულია y_0 და ვთქვათ f არის $\{x: y_0$ ეკუთვნის φ_x ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე} სიმრავლის მახასია-თებელი ფუნქციაა. მაშინ თუ f რეკურსიულია, მაშინ $\lambda x[f(h_2(x))]$ იქნება $\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია} სიმრავლის ზოგადრეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია, სადაც h_2 არის (e)-ს დამტკიცებაში განსაზღვრული ზოგადრეკურსიული ფუნქცია.

(g) შევარჩიოთ x_0 ისე, რომ φ_{x_0} იყოს იგივური ფუნქცია ანუ $\varphi_{x_0}(y)=y$ ნებისმიერი y-სთვის. მაშინ $\{y: y$ ეკუთვნის φ_{x_0} ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს} სიმრავლისათვის რეკურსიული მახასიათე-ბელი ფუნქციის როლში შეიძლება ავიღოთ ფუნქცია $\lambda x[1]$.

ამოუხსნადი პრობლემები მათემატიკის სხვადასხვა დარგში

მთელი რიგი კლასიკური მათემატიკური ამოცანებისა ეხება გარკვეული „პრობლემების“ ამოხსნადობის ალგორითმის არსე-ბობის საკითხს. კოდირების დახმარებით ეს საკითხები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ, როგორც საკითხები რეკურსიული ფუნქციების არსებობის შესახებ. ამ უკანასკნელში უფრო ზუსტი ფორმით მთელმა რიგმა ასეთი საკითხებისა მიიღო უარყოფითი ამოხსნა.

ასეთი სახის პირველი შედეგები მათემატიკურ ლოგიკაში აღმოჩენილი იყო გედელის, ჩერჩის და ტიურინგის შრომებში. გედელისა და ჩერჩის შედეგები ეხებოდნენ კონკრეტულ ფორმალურ ლოგიკურ სისტემებში დამტკიცებადი ფორმულების განსაზღვრის ალგორითმის არსებობას.

ამოუხსნადობის შესახებ შედეგები მიღებული იყო რიცხვთა თეორიაში და ალგებრაში. განვიხილოთ პოლინომი რაციონალური კოეფიციენტებით და ნებისმიერი რაოდენობა ცვლადებით. განვი-ხილოთ პრობლემა იმის განსაზღვრისა, რომ ნებისმიერ ასეთ პოლინომს აქვს თუ არა ნამდვილი ამონახსენი ($<r_1,\cdots,r_k>$ არის $p(x_1,\cdots,x_k)$ პოლინომის ამონახსენი, თუ $p(r_1,\cdots,r_k)=0$). ეს პრობ-ლემა ამოხსნადია. ანალიზის ცნობილი მეთოდები იძლევიან ამ პრობლემის ამოხსნის ალგორითმს. არსებობს თუ არა ალგორითმი, რომელიც გაარკვევს ნებისმიერი ასეთი პოლინომისათვის, აქვს თუ არა მას ამონახსენი რაციონალურ რიცხვებში („დიოფანტეს ფესვები“)? ამ საკითხთან დაკავშირებული „პრობლემა“ ცნობილია ჰილბერტის მეათე პრობლემის სახელით. მატიასევიჩმა აჩვენა, რომ ჰილბერტის ეს პრობლემა არის რეკურსიულად ამოუხსნადი.

ჯგუფთა თეორია იძლევა ამოუხსნადობის მაგალითს ალგებ-რაში. ჯგუფის ჩანაწერი ეს არის ჯგუფის განმსაზღრელი წარმომქმნელების და დამოკიდებულებების სასრული სია (ჩვენ აქ არ განვსაზღვრავთ ამ ტერმინებს). პრობლემა იმის განსაზღვრისა, რომ ნებისმიერი ჯგუფის ჩანაწერით და ნებისმიერი სიტყვისათვის წარმომქმნელებიდან შეიძლება თუ არა გარდავქმნათ ეს სიტყვა ერთეულში ჯგუფის დამოკიდებულებების თანახმად, ცნობილია როგორც იგივეობის (ტოლობის) პრობლემა ჯგუფთა თეორიაში. ნივიკოვმა და ბუნმა აჩვენეს, რომ ეს პრობლემა რეკურსიულად ამოუხსნადია.

ამოუხსნადობის შესახებ პრობლემები მიღებული იქნა ასევე ტოპოლოგიაში. პრობლემა იმის განსაზღვრისა, როცა ცხადად მოცემულია ორი ტრიანგულაცია ოთხგანზომილებიანი მრავალსა-ხეობებისა, ჰომომორფულია თუ არა ეს მრავალსახეობები, არის რეკურსიულად ამოუხსნადი.

პრობლემათა რეკურსიულად ამოუხსნადობის დასამტკიცებლად, რომლებიც რეკურსიულ ფუნქციათა თეორიას არ ეკუთვნიან, თითქმის ყოველთვის გამოიყენება დაყვანადობის მეთოდი. გამო-საკვლევი პრობლემა უკავშირდება რეკურსიულ ფუნქციათა თეორიის ამოუხსნად პრობლემას – ჩვეულებრივ გაჩერების პრობ-ლემის რაიმე ფორმას.

ზოგიერთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის არსებობა

თეორემა II. არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ არცერთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f არ არის ψ ფუნქციის გაგრძელება, ანუ არაა სამართლიანი, რომ

$$(\forall x)[\psi(x)\ \text{განსაზღვრულია}\ \Rightarrow \psi(x) = f(x)].$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ψ შემდეგნაირად: იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x)$, საჭიროა ვიპოვოთ P_x და გამოვიყენოთ P_x x-ზე; როგორც კი გამოჩნდება გამოსასვლელი (თუ ეს მოხდება), უნდა ავიღოთ $\varphi_x(x)+1$ $\psi(x)$-ის მნიშვნელობად. ჩერჩის თეზისის თანახმად ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია (ψ არის $\lambda x[\varphi_{z_0}(x,x)+1]$, სადაც φ_{z_0}-უნივერსალური ფუნქციაა). ვაქვს

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.} \end{cases}$$

ვთქვათ f-ნებისმიერი ზოგადრეკურსიული ფუნქციაა, და y არის f-ის ნომერი, ანუ $f=\varphi_y$. რადგან f ყველგან განსაზღვრულია, ამიტომ $f(y)=\varphi_y(y)-$ განსაზღვრულია. მაშასადამე, $\psi(y)$ გან-საზღვრულია და

$$\psi(y) = f(y)+1.$$

ამიტომ f არ შეიძლება იყოს ψ ფუნქციის გაგრძელება.

თეორემა III. არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ ნებისმიერი ზოგადრეკურსიული f ფუნქციისა-თვის არაა სამართლიანი

$$\psi = \lambda x[\mu y[f(x,y)=1]].$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ შემდეგნაირად. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x)$, ვიპოვოთ P_x, გამოვიყენოთ P_x-ი x-ზე, როგორც კი გამოჩნდება გამოსავალი (თუ ეს მოხდება), დავუშვათ $\psi(x)=x$. ცხადია, რომ ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია. გარდა ამისა,

$$\psi(x) = \begin{cases} x, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{არაა განსაზღვრული, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.} \end{cases}$$

დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ნებისმიერი x-სთვის $\psi(x)=\mu u[f(x,y)=1]$. მაშინ

$$\varphi_x(x)\ \text{განსაზღვრულია}\ \Rightarrow f(x,x)=1\ \text{და}$$
$$\varphi_x(x)\ \text{არ არის განსაზღვრული}\ \Rightarrow (\forall y)[f(x,y)\neq 1] \Rightarrow f(x,x)=1.$$

განვსაზღვროთ g ფუნქცია ასე:

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } f(x,x)=1; \\ 0, \text{ თუ } f(x,x)\neq 1. \end{cases}$$

$g(x)$ ფუნქცია რეკურსიული, რადგან $f(x,x)$ განსაზღვრულია ნებისმიერი x-სთვის. მაგრამ მაშინ g მახასიათებელი ფუნქციაა $\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ სიმრავლისათვის. რაც არ შეიძლება.

რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების განსაზღვრებები

განსაზღვრა. სიმრავლე რეკურსიულია, თუ მას აქვს ზოგად-რეკურსიული მახასიათებელი ფუნქცია (ანუ A რეკურსიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ ნებისმიერი x-სთვის $x \in A \Rightarrow f(x)=1$ და $x \in \overline{A} \Rightarrow f(x)=0)$.

ინტუიციურად, A რეკურსიულია, თუ არსებობს ეფექტური პროცედურა, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი მოცემული x-სთვის გავარკვიოთ, ეკუთვნის თუ არა x-ი A სიმრავლეს.

მაგალითები. შემდეგი სიმრავლეები რეკურსიულებია:

(I) სიმრავლე $\{0, 2, 4, \ldots\}$ ყველა ლუწი რიცხვებისა;

(II) N და $\varnothing$;

(III) ნებისმიერი სასრული სიმრავლე;

(IV) ნებისმიერი სიმრავლე სასრული დამატებით.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია, თუ $A=\varnothing$ ან არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ A არის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ინტუიციურად, სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია, თუ არსებობს მისი ელემენტების გადათვლის (შესაძლოა განმეორებით) ეფექტური პროცედურა.

თეორემა I. A რეკურსიულია $\Rightarrow$ A რეკურსიულად გადათვლადია.

დამტკიცება. **(I) შემთხვევა**. $A=\varnothing$. მაშინ განვსაზღვროთ A რეკურსიულად გადათვლადია.

(II) შემთხვევა. A სასრულია და $\neq \varnothing$. ვთქვათ $A=\{n_1,\cdots,n_k\}$. განვსაზღვროთ f შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases} n_x, \text{ თუ } x \le k; \\ n_k, \text{ თუ } k < x. \end{cases}$$

(III) შემთხვევა. A უსასრულოა. ვთქვათ g მახასიათებელი ფუნქცია A-სთვის. განვსაზღვროთ f ასე:

$$f(0)=\mu y[g(y)=1];$$
$$f(x+1)=\mu y[g(y)=1 \text{ და } f(x)<y].$$

(II) და (III) შემთხვევებში f ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია ჩერჩის თეზისის თანახმად და A არის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

თეორემა II. A რეკურსიულია $\Rightarrow$ როგორც A ასევე $\overline{A}$ რეკურ-სიულად გადათვლადია.

დამტკიცება. $\Rightarrow$ უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა I-დან.

$\Leftarrow$. თუ A ან $\bar{A}$ ცარიელია, მაშინ A რეკურსიულობა ცხადია. თუ A და $\bar{A}$ არ არიან ცარიელი, მაშინ რაიმე ზოგადრეკურ-სიული ფუნქციებისათვის f, g გვაქვს $A=Valf$, $\bar{A}=Val\,g$ ($Valf$-არის f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე). f და g ფუნქციებით შეიძლება აღვწეროთ რეკურსიული პროცედურა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოვიცნოთ ეკუთვნის თუ არა რიცხვი A სიმრავლეს: სახელდობრ, ვთქვათ გვინდა გავარკვიოთ x ეკუთვნის თუ არა A-ს. მიმდევრობით განვიხილავთ $f(0)$, $g(0)$, $f(1)$, $g(1)$, $f(2),\cdots$. თუ x აღმოჩნდება f-ის მნიშვნელობა, მაშინ x ეკუთვნის A-ს. თუ x აღმოჩნდება g-ს მნიშვნელობა, მაშინ x ეკუთვნის $\bar{A}$-ს. რადგან $A\cup\bar{A}=N$, x-ი აუცილებლად იქნება f-ის ან g-ს მნიშვ-ნელობა.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია არა-კლებადობით, თუ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ $A=Valf$ და f არაკლებადი ფუნქციაა, ანუ $(\forall x)(\forall y)[x<y\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)\le f(y)]$.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია ზრდადობით, თუ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ $A=Valf$ და f ზრდადი ფუნქციაა, ანუ $(\forall x)(\forall y)[x<y\Rightarrow\ \Rightarrow f(x)<f(y)]$.

თეორემა III. (a) [A რეკურსიულია $\& A\neq\varnothing] \Leftrightarrow A$ რეკურსიულად გადათვლადია არაკლებადობით.

(b) [A რეკურსიულია და A უსასრულოა] $\Leftrightarrow$ A რეკურსიულად გადათვლადია ზრდადობით.

დამტკიცება. $\Rightarrow$ (a) და (b)-სთვის. მარტივად მტკიცდება თეორემა I-ის დამტკიცების II და III შემთხვევებში აგებული ფუნქციების გამოყენებით.

$\Leftarrow$ (a) – შემთხვევა. განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

(I) – შემთხვევა. A სასრულია. მაშინ A რეკურსიულია, რადგან ყოველი სასრული სიმრავლე რეკურსიულია.

(II) – შემთხვევა. A უსასრულოა. ვთქვათ f ფუნქცია გადათვლის A სიმრავლეს არაკლებადობით. იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ეკუთვნის თუ არა x-ი A სიმრავლეს, გამოვითვლით f ფუნქციის მნიშვნელობებს მანამ, სანამ არ გამოითვლება რიცხვი, რომელიც მეტია x-ზე. მაშინ $x\in A\Leftrightarrow x$ უკვე აღმოჩნდა გამოთვლილ მნიშვნელობებში. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს ეფექტური მეთოდი იმისა, რომ გავარკვიოთ x რიცხვი ეკუთვნის თუ არა A სიმრავლეს. მაშასადამე, A რეკურსიულია.

$\Leftarrow$ (b) - შემთხვევა. ეს მტკიცება მიმდინარეობს (a) შემთხვევის (II) ქვეშემთხვევის მსგავსად (ამ შემთხვევაში საჭიროა მხოლოდ $f(0), f(1),\cdots,f(x)$ მნიშვნელობების გამოთვლა).

თეორემა IV. ყოველ უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს აქვს უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ A უსასრულო და რეკურსიულად გადათვლადია. დავუშვათ, რომ f ზოგადრეკურსიული ფუნქციაა და $Valf = A$. განვსაზღვროთ ზოგადრეკურსიული ფუნქცია g შემდეგნაირად:

$$g(0) = f(0),$$
$$g(x+1) = f(\mu y[f(y) > g(x)]).$$

ვთქვათ $B = Val\,g$. მაშინ g გადათვლის B სიმრავლეს ზრდა-დობით და, წინა თეორემის თანახმად, B სიმრავლე რეკურსიულია. რადგან $B \subset A$, თეორემა დამტკიცებულია.

ძირითადი თეორემა

თეორემა (ძირითადი თეორემა რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების შესახებ). A რეკურსიულად გადათვლადია $\Leftrightarrow$ A არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის განსაზღვრის არე (ანუ $(\exists x)[A = Arg\varphi_x]$, სადაც $Arg\varphi_x$-ით აღინიშნება φ_x-ის გან-საზღვრის არე).

დამტკიცება. $\Rightarrow$ **(I) შემთხვევა**. $A = \varnothing$. ვთქვათ ψ არის არსად განსაზღვრული ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია. მაშინ $A = Arg\psi$.

(II) შემთხვევა. $A \neq \varnothing$. მაშინ A არის გარკვეული ზოგადრეკურ-სიული ფუნქციის f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე. განვსაზღვროთ ψ შემდეგი ინსტრუქციით: იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(x)$, დავიწყოთ f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის გადათვლა. თუ x აღმოჩნდა f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეში, მაშინვე x-ი გამოვაცხადოთ გამოსასვლელის მნიშვნელობად. ცხადია, რომ ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია და $A = Arg\psi$.

$\Leftarrow$ ვთქვათ $A = Arg\psi$, სადაც ψ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა. განვსაზღვროთ ეფექტური პროცედურა, რომელიც წარმოქმნის A-ს, თუ $A \neq \varnothing$. პროცედურის განხორციელება მოხდება ეტაპობრივად.

1 ეტაპი. შევასრულოთ 1 ნაბიჯი $\psi(0)$-ის გამოთვლაში. თუ $\psi(0)$ გამოთვლის პროცესი დამთავრდება პირველ ნაბიჯზე, მაშინ 0 გადავცეთ A-სთვის განკუთვნილ სიაში.

n+1 ეტაპი. შევასრულოთ n+1 ნაბიჯი $\psi(0),\cdots,\psi(n)$ გამოთვლაში. ის k, $0\le k\le n$, რომელთათვისაც $\psi(k)$ გამოთვლის პროცესი დასრულდება $(n+1)$ ნაბიჯზე ან უფრო ადრე, დავუმატოთ A-სთვის განკუთვნილ სიას.

....

განვსაზღვროთ η შემდეგნაირად:

$\eta(0)=$გადათვლის პირველი ელემენტი;

$$\eta(x+1)=\begin{cases}\mu y[y \text{ დაემატა სიას } x+1 \text{ ეტაპზე და} \\ \quad y\notin\{\eta(0),\eta(1),\cdots,\eta(x)\}], \text{ თუ ასეთი} \\ \quad y \text{ არსებობს;} \\ \eta(0) \qquad\qquad \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.}\end{cases}$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად, η არის ნაწილობრივად რეკურ-სიული ფუნქცია. თუ $A=\varnothing$, მაშინ განვსაზღვრით A რეკურსიუ-ლად გადათვლადია. თუ $A\neq\varnothing$, მაშინ აგების თანახმად η ყველგან განსაზღვრულია და $Val\eta=Arg\psi=A$; ამრიგად A სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

განსაზღვრა. $W_x=Arg\varphi_x$. ასეთ x-ს ვუწოდოთ რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსი ან გედელის ნომერი რეკურსიულად გადა-თვლადი W_x სიმრავლის.

დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი.

შედეგი. A რეკურსიულად გადათვლადია $\Leftrightarrow$ A არის ნაწილობ-რივად რეკურსიული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე (ანუ $(\exists x)[A=Val\varphi_x]$).

განსაზღვრა. $K=\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ = $\{x:x\in W_x\}$.

თეორემა. არსებობს რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, რომელიც არ არის რეკურსიული, და K სიმრავლე არის ასეთი სიმრავლე.

დამტკიცება. დავუშვათ

$$\psi(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi_x(x) \text{ განსაზღვრულია;} \\ \text{განუსაზღვრელია, თუ } \varphi_x(x) \text{ განუსაზღვრელია.}\end{cases}$$

ცხადია, რომ ψ ნაწილობრივად რეკურსიულია და $K=Arg\psi$. მაშასადამე, წინა თეორემის თანახმად, K რეკურსიულად გადათვ-ლადია.

დავუშვათ, რომ K რეკურსიულია. მაშინ $\overline{K}=W_m$ რაღაც m-სთვის. K-ს განსაზღვრის გამო გვაქვს

$$m\in K\Leftrightarrow m\in W_m,$$

ამასთანავე

$$m\in\overline{K}\Leftrightarrow m\in W_m,$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ K არ შეიძლება იყოს რეკურსიული სიმრავლე.

რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი მიმართებები. n-ეულთა კოდირება

განსაზღვრა. $\tau(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+3x+y)$.

ლემა. τ არის რეკურსიული ურთიერთცალსახა გადასახვა $N \times N$ სიმრავლისა N-ზე.

დამტკიცება. τ-ს რეკურსიულობა ცხადია. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,… რიცხვებს შევუსაბამოთ $<0,0>$, $<0,1>$, $<1,0>$, $<0,2>$ $<1,1>$, $<2,0>$, $<0,3>$, $<1,2>$,… ცნობილი ტოლობით $0+1+2+\cdots+n=$ $=\frac{1}{2}n(n+1)$ შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ეს შესაბამისობა მოიცემა τ-ს საშუალებით.

τ-ფუნქციას ეწოდება წყვილთა გადათვლის ფუნქცია.

განსაზღვრა. π_1 და π_2 არის ერთი ცვლადის ფუნქციები, რომლებიც ახორციელებენ τ გადასახვის შებრუნებულ გადა-სახვას. სხვანაირად, ყოველი z-სთვის $\tau(\pi_1(z),\pi_2(z))=z$. ცხადია π_1 და π_2 ფუნქციები ზოგადრეკურსიულია.

განსაზღვრა. $\tau(x,y)$-ს ნაცვლად გამოვიყენებთ აღნიშვნას $<x,y>$. $A\times B$-ს განვსაზღვრავთ, როგორც სიმრავლეს $\{<x,y>: x\in A \ \ \& y\in B\}$, ანუ $A\times B=\tau(A\times B)$.

ნებისმიერი $n>0$ τ^n კოდირება, N^n-ის გადასახვა N-ზე, განი-საზღვრება τ-ს საშუალებით შემდეგი ინდუქციური განსაზღვრით.

განსაზღვრა.

$$\tau^1=\lambda x[x],$$
$$\tau^{n+1}=\lambda x_1,\cdots,x_{n+1}[\tau(\tau^n(x_1,\cdots,x_n),x_{n+1})].$$

(კერძოდ $\tau^2=\tau\cdot$)

$\pi_1^n,\cdots,\pi_n^n$ არიან τ^n-ის ინვერსიული ფუნქციები, ანუ ყოველი z-ისთვის $\tau^n=(\pi_1^n(z),\cdots,\pi_n^n(z))=z$, (კერძოდ, $\pi_1^2=\pi_1$ და $\pi_2^2=\pi_2\cdot$).

ცხადია, რომ ყველა მოყვანილი ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია. $\tau^n(x_1,\cdots,x_n)$-ს აღვნიშნავთ $<x_1,\cdots,x_n>$-ით.

შეთანხმება. ვთქვათ P არის სიმრავლეთა თვისება. ვიტყვით, რომ n-არული მიმართებას R-ს აქვს P თვისება, თუ $r^n(R)$ აქვს P თვისება.

ამით რეკურსიულობისა და რეკურსიულად გადათვლადობის ცნებები გადატანილია მიმართებებზე.

თეორემა. (a) ვთქვათ φ არის ერთი ცვლადის ნაწილობრივად-რეკურსიული ფუნქცია, მაშინ

$$\psi^{(n)} = \lambda x_1,\cdots,x_n[\varphi(<x_1,\cdots,x_n>)]$$

არის n-ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია.

(b) ვთქვათ $\psi^{(n)}$ არის n-ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია, მაშინ

$$\varphi = \lambda z[\psi^{(n)}(\pi_1^n(z),\cdots,\pi_n^n(z))]$$

არის ერთი ცვლადის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია.

დამტკიცება. გამომდინარეობს ჩერჩის თეზისიდან. შევნიშნოთ. რომ ყველგან განსაზღვრული ფუნქციები შეესაბამებიან ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციებს და (a)-ში დამყარებული შესაბამისობა არის (b)-ში დამყარებული შესაბამისობის შებრუნებული.

თეორემები პროექციის შესახებ

შევთანხმდეთ, რომ ნაცვლად ჩანაწერისა $<x_1,\cdots,x_n>\in R$ ვისარგებლებთ ჩანაწერით $R(x_1,\cdots,x_n)$.

განსაზღვრა. შიმრავლეს

$$\{<x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n>:(\exists x_j)R(x_1,\cdots,x_n)\}$$

ეწოდება R მიმართების პროექცია j-ური კოორდინატის გასწვრივ.

თეორემა 1. თუ R მიმართება რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ არსებობს რეკურსიული მიმართება S ისეთი, რომ R არის S-ის პროექცია. მეტიც თუ R არის

n-არული რეკურსიულად გადაღვლადი მიმართება, მაშინ არსებობს $(n+1)$-არული რეკურ-სიული მიმართება S ისეთი, რომ

$$R = \{< x_1, \cdots, x_n >: (\exists x_{n+1}) S(x_1, \cdots, x_{n+1})\}.$$

თეორემა 2. თუ R მიმართება რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ ყოველი მისი პროექცია რეკურსიულად გადათვლადია. კერძოდ, თუ R n-არული რეკურსიულად გადაღვლადი მიმართებაა, მაშინ მიმართება

$$\{< x_1, \cdots, x_{n-1} >: (\exists x_n) R(x_1, \cdots, x_n)\}$$

რეკურსიულად გადათვლადია.

ამ თეორემებს ეწოდებათ თეორემები პროექციის შესახებ.

დამტკიცება (თეორემა 1). ვთქვათ $\hat{R} = \tau^n(R)$. მაშინ $\hat{R}$ არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე. ამიტომ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ $\hat{R} = Arg\psi$. ვთქვათ m არის ψ ფუნქციის ფიქსირებული ინდექსი და P_m ინსტრუქციათა შესაბამისი სიმრავლე. მაშინ $R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow < x_1, \cdots, x_n > \in \hat{R} \Leftrightarrow$ $\psi(< x_1, \cdots, x_n >)$ განსაზღვრულია $\Leftrightarrow (\exists x_{n+1})[P_m$-ის შესაბამისი გამოთვ- ლის პროცესი $< x_1, \cdots, x_n >$ შესასვლელისათვის მთავრდება x_{n+1} ნაბიჯამდე]. ჩერჩის თეზისის თანახმად, კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი წინადადება განსაზღვრავს N^{n+1}-ზე რეკურსიულ მიმარ-თებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცება (თეორემა 2). საკმარისია ვაჩვენოთ თეორემის დებულების სამართლიანობა R მიმართების პროექციისათვის n-ური კოორდინატის გასწვრივ. ვთქვათ მოცემულია რეკურსიულად გადათვლადი მიმართება R. წინა თეორემით შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი რეკურსიული მიმართება S, რომ $R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow (\exists x_{n+1})$ $S(x_1, \cdots, x_{n+1})$. ვთქვათ Q - არის R მიმართების მოცემული პროექცია. მაშინ $Q(x_1, \cdots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (\exists x_n)\ R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow (\exists x_n)(\exists x_{n+1})\ S(x_1, \cdots, x_{n+1})$. განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ შემდეგ-ნაირად. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\psi(< x_1, \cdots, x_{n-1} >)$, მიმდევ-რობით შევამოწმოთ, შესრულებულია თუ არ $S(x_1, \cdots, x_{n-1}, \pi_1(z),$ $\pi_2(z))$ როცა $z = 0,1,2,\cdots$ სანამ არ მივიღებთ დადებით პასუხს. როგორც კი ეს მოხდება (თუ საერთოდ მოხდება) გამოსასვლელზე გადავცეთ 1. მაშინ $Q(x_1, \cdots, x_{n-1}) \Leftrightarrow \psi(< x_1, \cdots, x_{n-1} >)$ განსაზღვრუ-ლია $\Leftrightarrow < x_1, \cdots, x_{n-1} > \in Arg\psi$. მაშასადამე, Q-რეკურსიულად გადათვ-ლადია.

ეფექტურობა

წინა პარაგრაფებში ჩვენს მიერ მოყვანილი არსებობის შესახებ ზოგიერთი დამტკიცება იყო არაკონსტრუქციული იმ აზრით, რომ არ იყო მოცემული არავითარი ეფექტური პროცედურა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა დაგვედგინა რამდენიმე შესაძლებლობიდან რომელ შემთხვევას ჰქონდა ადგილი. განვიხილოთ არსებობის შესახებ ისეთი დამტკიცებები, რომელთათვისაც შეიძლება ეფექტური პროცედურის პოვნა. ვიტყვით, რომ თეორემას აქვს ადგილი თანაბრად ან თანაბრად ეფექტურად, თუ ასეთი პროცე-დურა შეიძლევა იქნეს მოცემული. ტერმინის „თანაბრად ეფექ-ტურად“ ზუსტი აზრი ჩვეულებრივ ნათელი იქნება კონტექსტიდან.

თეორემა. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა კლასი ჩაკეტილია ∪, ∩ და × ოპერაციების მიმართ თანაბრად ეფექტურად.

დამტკიცება. აქ ტერმინი „თანაბრად“ გულისხმობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქციების f, g და h არსებობას, რომ $W_{f(x,y)}=W_x \cup W_y$, $W_{g(x,y)}=W_x \cap W_y$ და $W_{h(x,y)}=W_x \times W_y$. (დაამტკიცეთ თეორემა დამოუკიდებლად).

თეორემა. რეკურსიულ სიმრავლეთა კლასი ჩაკეტილია ∪, ∩, × და დამატების ოპერაციის მიმართ. რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსების დონეზე ჩაკეტილობა ∪, ∩ და × ოპერაციების მიმართ თანაბარია, მაგრამ ჩაკეტილობა დამატების ოპერაციის მიმართ არ შეიძლება იყოს თანაბარი.

დამტკიცება. ჩაკეტილობისა და თანაბრობის დამტკიცებებს დავტოვებთ სავარჯიშოს სახით. ვაჩვენოთ, რომ ჩაკეტილობა დამა-ტების ოპერაციის მიმართ არ შეიძლება იყოს თანაბარი ანუ არ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ ყოველი x-სთვის სიმრავლე W_x რეკურსიულია $\Leftrightarrow[\psi(x)$ განსაზღვ-რულია და $W_{\psi(x)}=\overline{W}_s]$. დავუშვათ, რომ ასეთი ფუნქცია ψ არსე-ბობს. გამოვიყენოთ სიმრავლე K რომ მივიღოთ წინააღმდეგობა. რადგან K რეკურსიულად გადათვლადია და, მაშასადამე, შეიძლება ეფექტურად გადაითვალოს, ამიტომ არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია g, რომ ყოველი x-სთვის $\varphi_{g(x)}$ ყველგან განსაზღვრულია, თუ $x \in K$ და არსად არაა განსაზღვ-რული, თუ $x \notin K$.

ამრიგად,

$$W_{g(x)}=\begin{cases} N, \text{ თუ } x\in K, \\ \varnothing, \text{ თუ } x\notin K. \end{cases}$$

ყოველთვის x-სთვის $W_{g(x)}$ არის რეკურსიული სიმრავლე. დაშვების გამო $\psi g(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყოველი x-სთვის. ვთქვათ f არის ყველგან განსაზღვრული ფუნქცია ψg. გვაქვს

$$W_{f(x)}=\begin{cases} \varnothing, \text{ თუ } x\in K, \\ N, \text{ თუ } x\notin K. \end{cases}$$

ამრიგად $\overline{K}=\{x:W_{f(x)}\neq\varnothing\}$, მაგრამ $\{x:W_{f(x)}\neq\varnothing\}=\{x:(\exists y)[y=f(x)\,\&\,W_y\neq\varnothing]\}=\{x:(\exists y)(\exists z)(\exists w)[y=f(x)$ და P_y-ის შესაბამისი გამოთვლის პროცესი z შესასვლელის დროს მთავრდება w ნაბიჯამდე]}. მაშასადამე, პროექციის შესახებ მეორე თეორემის თანახმად, $\overline{K}$ სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია $\Rightarrow$ K რეკურსიულია. წინააღმდეგობა.

სასრული სიმრავლეები

განსაზღვრა. ვთქვათ A არის არაცარიელი სასრული სიმრავლე $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, სადაც $x_1<x_2<\cdots<x_n$. მაშინ $2^{x_1}+2^{x_2}+\cdots+2^{x_n}$ რიცხვს ეწოდება A სიმრავლის კანონიკური ინდექსი. თუ $A=\varnothing$, A-ს კანონიკური ინდექსი არის 0.

განსაზღვრა. D_x-ით აღვნიშნოთ სასრული სიმრავლე, რომლის კანონიკური ინდექსი არის x.

ცხადია, რომ შესაძლებელია თანაბარი გადასვლა კანონიკური ინდექსიდან მახასიათებელ ინდექსზე და, მაშასადამე, რეკურსიუ-ლად გადათვლად ინდექსზე. (რეკურსიული სიმრავლე შეიძლება მოცემული იქნას მისი მახასიათებელი ფუნქციით. ასეთ ინდექსს ეწოდება რეკურსიული სიმრავლის მახასიათებელი ინდექსი). შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ თანაბარი გადასვლა მახასია-თებელი ინდექსიდან კანონიკურ ინდექსზე შეუძლებელია.

თეორემა. (a) არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველ x-სთვის $f(x)$ არის D_x-ის სიმძლავრე.

(b) არ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ ყოველი x-სთვის, თუ φ_x არის მახასიათებელი ფუნქცია სასრული A- სიმრავლისათვის, მაშინ $\psi(x)$ განსაზღვრულია $\psi(x)$ არის A-ს სიმძლავრე.

დამტკიცება. (a) უშუალოდ გამომდინარეობს ჩერჩის თეზისიდან.

(b) დავუშვათ, რომ ასეთი ψ ფუნქცია არსებობს. ყოველი x-სთვის განვსაზღვროთ η ფუნქცია:

$$\eta(z)=\begin{cases}1, \text{ თუ } P_x \text{-ის შესაბამისი გამოთვლის პროცესი } x- \\ \quad \text{შესასვლელის დროს მთავრდება ზუსტად } z \text{ ნაბიჯზე,} \\ 0 \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.}\end{cases}$$

ცხადია, რომ η ფუნქცია ზოგადრეკურსიულია. მისი გედელის ნომერი შეიძლება ვიპოვოთ თანაბრად x-ით; ვთქვათ ესაა $g(x)$. მაშინ $\varphi_{g(x)}$ არის მახასიათებელი ფუნქცია სიმრავლისა, რომელსაც აქვს 1-ის ტოლი სიმძლავრე, თუ $x \in K$, და 0-ის ტოლი სიმძ-ლავრე, თუ $x \notin K$. მაშასადამე, ψg არის ისეთი ზოგად რეკურ-სიული ფუნქცია, რომ

$$\psi g(x)=\begin{cases}1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K.\end{cases}$$

ეს ეწინააღმდეგება K სიმრავლის არარეკურსიულობას.

შედეგი. შეუძლებელია თანაბარი გადასვლა მახასიათებელი ინდექსიდან კანონიკურ ინდექსზე.

დამტკიცება. ასეთი გადასვლა რომ შესაძლებელი იყოს, მაშინ (a)-დან გამოვიდოდა (b)-სთვის ψ ფუნქციის არსებობა დამტ-კიცებული თეორემაში.

თეორემა ცალსახობის შესახებ. რედუქციის რინციპი

განსაზღვრა. A სიმრავლე ცალსახაა, თუ $\{<x,y>: <x,y> \in A\}$ არის ცალსახა მიმართება.

(ვთქვათ R k-ადგილიანი მიმართებაა. ვიტყვით, რომ R ცალ-სახაა, თუ ნებისმიერი კორტეჟისათვის $<x_1,\cdots,x_{k-1}>$ არსებობს არაუმეტეს ერთი z ელემენტისა ისეთი, რომ $<x_1,\cdots x_{k-1},z> \in R\cdot\}$.

განსაზღვრა. $ArgA = \{x : (\exists y)[< x, y > \in A]\}$.

თეორემა (თეორემა ცალსახობის შესახებ). არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი z-სთვის

(I) $W_{f(z)}$ ცალსახაა;

(II) $W_{f(z)} \subset W_z$;

(III) $ArgW_{f(z)} = ArgW_z$;

(IV) W_z ცალსახაა $\Rightarrow$ $W_{f(z)} = W_z$.

დამტკიცება. (IV) უშუალოდ გამომდინარეობს (II) და (III)-დან. W_z-სთვის z-ით შეიძლება ეფექტურად მოიძებნოს პროცედურა მისი განმეორებების გარეშე გათვლისა (ეს გამომდინარეობს ძირითადი თეორემიდან). განვსაზღვროთ

$$A_z = \{< x, y >:< x, y > \in W_z \text{ და } (\forall y')[[y' \neq y \& < x, y' > \in W_z] \Rightarrow$$
$$< x, y > \text{ უსწრებს } < x, y' > \text{-ს } W_z\text{-ის გადათვლაში}]\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ A_z რეკურსიულად გადათვლადია და მისი რეკურსიულად გადათვლადი ინდექსი შეიძლება მოიძებნოს თანაბრად ეფექტურად z-ით. მაშასადამე, არსებობს ისეთი ზოგად- რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი z-სთვის $W_{f(z)} = A_z$. A_z-ის განსაზღვრიდან გამოდის, რომ f-ს აქვს (I), (II) და (III)-ში მოთხოვ-ნილი თვისებები.

თეორემა (რედუქციის პრინციპი). როგორიც არ უნდა იყოს ორი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე A და B, არსებობენ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები A' და B' ისეთი, რომ $A' \subset A$, $B' \subset B$, $A \bigcup B = A' \bigcup B'$ და $A' \bigcap B' = \varnothing$.

დამტკიცება. განვსაზღვროთ $C = (A \times \{0\}) \bigcup (B \times \{1\})$ C სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია. ვთქვათ $C = W_n$ და $C' = W_{f(n)}$, სადაც f ისეთივე ფუნქციაა, როგორც წინა თეორიაში. მაშინ $\tau^{-1}(C')$ არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ. დავუშვათ $A' = \psi^{-1}(0)$ და $B' = \psi^{-1}(1)$.

m-დაყვანადობა და 1-დაყვანადობა

განსაზღვრა. A-სიმრავლე 1-დაყვანადია B-სიმრავლეზე (სიმბოლურად, $A \le_1 B$), თუ არსებობს ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

$$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B).$$

განსაზღვრა. A-სიმრავლე m-დაყვანადია B-სიმრავლეზე (სიმბოლურად, $A \le_m B$), თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ

$$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B).$$

თეორემა I. (a) $\le_1$ და $\le_m$ მიმართებები არიან რეფლექსური და ტრანზიტული.

(b) $A \le_1 B \Rightarrow A \le_m B$.

(c) $A \le_1 B \Rightarrow \overline{A} \le_1 \overline{B}$.

(d) $A \le_m B \Rightarrow \overline{A} \le_m \overline{B}$.

(e) $[A \le_m B \,\&\, B-$რეკურსიულია$] \Rightarrow A-$რეკურსიულია.

(f) $[A \le_m B \,\&\, B-$რეკურსიულად გადათვლადია$] \Rightarrow A-$რეკურსიულად გადათვლადია.

დამტკიცება. (a), (b), (c) და (d) პუნქტები ცხადია.

(e) ვთქვათ $A \le_m B$ f ფუნქციით, მაშინ $C_A = C_B \cdot f$, მაშასადამე, თუ C_B რეკურსიულია, მაშინ C_A-რეკურსიული იქნება.

(f) ვთქვათ $A \le_m B$ f ფუნქციით, მაშინ $A = f^{-1}(B)$. რადგან რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლის წინასახე ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის მიმართ არის რეკურსიულად გადათვლადი, ამიტომ B-ს რეკურსიულად გადათვლადობიდან გამომდინარეობს A-ს რეკურსიულად გადათვლადობა.

შედეგი I. $[A \le_1 B \,\&\, B$რეკურსიულია$] \Rightarrow A-$რეკურსიულია.

$[A \le_1 B \,\&\, B$ რეკურსიულად გადათვლადია$] \Rightarrow A-$რეკურსიულად გადათვლადია.

განსაზღვრა.

$$A \equiv_1 B,\ \text{თუ}\ \ A \leq_1 B \,\&\, B \leq_1 A;$$

$$A \equiv_m B,\ \text{თუ}\ \ A \leq_m B \,\&\, B \leq_m A.$$

თეორემა I (a)-ს თანახმად ეს მიმართებები არიან ეკვივალენტობის მიმართებები. მათ ეკვივალენტობის კლასებს შესაბამისად ეწოდებათ ამოუხსნადობის ხარისხები 1-დაყვანადობის მიმართ და ამოუხსნადობის ხარისხები m-დაყვანადობის მიმართ, პირველს ვუწოდებთ 1-ხარისხებს, ხოლო მეორეს m-ხარისხებს.

თეორემა I (e)-დან და შედეგი I-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ხარისხი, რომელიც შეიცავს რეკურსიულ სიმრავლეს, მთლიანად შედგება რეკურსიული სიმრავლეებისაგან. თეორემა I (f)-დან და შედეგი I-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ხარისხი, რომელიც შეიცავს რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს, მთლიანად შედგება რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებისაგან. ამრიგად, თითოეული ამ სახის დაყვანადობით დალაგებისას, ჩვენ შეგვიძლია ვისაუბროთ რეკურსიულ ხარისხებზე და რეკურსიულად გადათვლად ხარისხებზე.

განსაზღვრა. $A \oplus B = \{y : y = 2x \,\&\, x \in A\} \bigcup \{y : y = 2x+1 \,\&\, x \in B\}$.

თეორემა II. (a) არსებობს ორი არარეკურსიული სიმრავლე, რომლებიც არ არიან სადარი $\leq_m$-ის მიმართ.

(b) m-დაყვანადობით დალაგება იძლევა ზედანახევარ მესერს: ნებისმიერ ორ m-ხარისხს აქვს ერთადერთი უმცირესი ზედა საზღვარი. მეტიც, ორი რეკურსიულად გადათვლადი m-ხარისხის უმცირესი ზედა საზღვარი არის რეკურსიულად გადათვლადი.

დამტკიცება. (a) ($\omega = \{0,1,2,\cdots\}$ და $\varnothing$-არასადარი სიმრავლეებია, მაგრამ ისინი რეკურსიულია).

განვიხილოთ სიმრავლეები K და $\overline{K}$. K-სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია, ხოლო $\overline{K}$ არ არის რეკურსიულად გადათვლადი.

თეორემა I (f)-ის ძალით $\overline{K} \nleq_m K$ ხოლო თეორემა I (*d*)-დან გამოდის, რომ $K \nleq_m \overline{K}$.

(b) ვთქვათ ნებისმიერი *X* სიმრავლისათვის $d(X)$ არის *X*-ის *m*-ხარისხი. ვთქვათ მოცემულია ორი სიმრავლე *A* და *B*. მაშინ $d(A \oplus B)$ არის $d(A)$ და $d(B)$ ხარისხების უმცირესი ზედა საზღვარი *m*-დაყვანადობის მიმართ. მართლაც

$$A \le_m A \oplus B \quad \lambda x[2x] \text{ ფუნქციით;}$$

$$B \le_m A \oplus B \quad \lambda x[2x+1] \text{ ფუნქციით.}$$

ნებისმიერი *C* სიმრავლისათვის, თუ $A \le_m C$ f ფუნქციით და $B \le_m C$ g ფუნქციით, მაშინ $A \oplus B \le_m C$ h ფუნქციით, სადაც h ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით:

$$h(2x) = f(x),$$

$$h(2x+1) = g(x).$$

სრული სიმრავლეები

განსაზღვრა. *A* სიმრავლე სრულია $\le_1$-ის მიმართ (*A* 1-სრულია), თუ

(i) *A* რეკურსიულად გადათვლადია,

(ii) $(\forall B)$ [*B* რეკურსიულად გადათვლადია $\Rightarrow B \le_1 A$].

A სიმრავლე სრულია $\le_m$-ის მიმართ (*A* *m*-სრულია), თუ

(i) *A* რეკურსიულად გადათვლადია,

(ii) $(\forall B)$ [*B* რეკურსიულად გადათვლადია $\Rightarrow B \le_m A$].

ვთქვათ $K_0 = \{<x, y>: x \in W_y\}$. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ K_0 1-სრულია და, მაშასადამე. K_0 *m*-სრულია.

თეორემა III. K_0 სიმრავლე არის 1-სრული.

დამტკიცება. $K_0 = \{< x, y >: (\exists z)$ [გამოთვლის პროცესი, რომელიც შეესაბამება P_y ინსტრუქციათა ერთობლიობას, x-ის შესვლის შემთხვევაში გაჩერდება z ნაბიჯის შესრულებამდე]}. მაშასადამე, K_0 რეკურსიულად გადათვლადია პროექციის მეორე თეორემის თანახმად.

ვთქვათ B-ნებისმიერი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა. მაშინ $B = W_{y_1}$ გარკვეული y_0-თვის. აქედან გვაქვს

$$(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow < x, y_0 > \in K_0)$$

და $B \leq_1 K_0$ $\lambda x[< x, y_0 >]$ ფუნქციით.

თეორემა IV. K სიმრავლე არის 1-სრული.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $K_0 \leq_1 K$. დასაწყისში ვაჩვენოთ, რომ $K_0 \leq_m K$. ვიპოვოთ რეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\varphi_{f(x)}(z) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \varphi_{\pi_2(x)}(\pi_1(x)) \text{ განსაზღვრულია}, \\ \text{განუსაზღვრელია წინააღმდეგ შემთხვევაში}. \end{cases}$$

($\varphi_{f(x)}$ ფუნქციის ქცევა არაა დამოკიდებული z შესასვლელზე), მაშინ

$$x \in K_0 \Leftrightarrow f(x) \in K ,$$

ე.ი. $K_0 \leq_m K$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ f ფუნქცია არ არის ურთიერთცალსახა, მაშინ ის შეიძლება შევცვალოთ f^* ფუნქციით, რომელიც არის ურთიერთცალსახა და $K_0 \leq_1 K$ f^* ფუნქციით.

თეორემა 1-III-ის მეთოდით განსაზღვროთ რეკურსიული ფუნქცია t' ისეთი, რომ

(i) $\varphi_{t'(x,y)} = \varphi_x$,

(ii) $y_1 \neq y_2 \Rightarrow t'(x, y_1) \neq t'(x, y_2)$.

ინდუქციურად განვსაზღვროთ შემდეგი t ფუნქცია:

$$t(0,0) = t'(0,0) ,$$

თუ $t(x',y')$ განსაზღვრულია ყველა ისეთი $<x',y'>$-სთვის, რომ $<x',y'> << x,y>$, მაშინ დავუშვათ

$$t(x,y)=t'(x,z),$$

სადაც $z=\mu w[t'(x,w)\neq t(x',y')$ ყველა $<x',y'>$-სთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $<x',y'> < <x,y>]$.

ამრიგად,

(i) $\varphi_{t(x,y)}=\varphi_x$,

(ii) $[x_1\neq x_2$ ან $y_1\neq y_2]\Rightarrow t(x_1,y_1)\neq t(x_2,y_2)$.

განვსაზღვროთ f^* ფუნქცია შემდეგი ფორმულით:

$$f^*=\lambda x[t(f(x),x)].$$

ცხადია, რომ f^* ურთიერთცალსახაა და $K_0\leq_1 K$ f^* ფუნქციით.

შედეგი III. $K\equiv_1 K_0$.

კრეატიული სიმრავლეები

განსაზღვრა. A სიმრავლე პროდუქტიულია, თუ არსებობს ისეთი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ψ, რომ

$$(\forall x)[W_x\subset A\Rightarrow[\psi(x) \text{ განსაზღვრულია}\,\&\,\psi(x)\in A\setminus W_x]].$$

ψ-ს ეწოდება A სიმრავლის პროდუქტიული ფუნქცია.

განსაზღვრა. A სიმრავლე კრეატიული სიმრავლეა, თუ

(i) $A-$ რეკურსიულად გადათვლადია (რ.გ.),

(ii) $\overline{A}-$ პროდუქტიულია.

მაგალითი. $K=\{x:x\in W_x\}=\{x:\varphi_x(x)$ განსაზღვრულია$\}$ კრეატიული სიმრავლეა, რადგან K რ.გ. სიმრავლეა და $\overline{K}$ პროდუქტიულია, რომლის პროდუქტიული ფუნქციაა $\lambda x[x]$.

თეორემა V (a) A პროდუქტიულია $\Rightarrow A$ არაა რ.გ. სიმრავლე.

(b) $[A$ პროდუქტიულია$\&\, A\leq_m B]\Rightarrow B$ პროდუქტიულია.

დამტკიცება. (a) უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრიდან.

(b) ვთქვათ ψ არის პროდუქტიული ფუნქცია A სიმრავლისათვის და $A\leq_m B$ f ფუნქციით. არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია g, რომ $W_{g(x)}=f^{-1}(W_x)$. მაშინ ფუნქცია $f\psi g$ არის პროდუქტიული ფუნქცია B-სთვის. მართლაც,

$$W_x\subset B\Rightarrow W_{g(x)}\subset A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\psi g(x)\ \text{განსაზღვრულია}\&\,\psi g(x)\in A\backslash W_{g(x)}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[f\psi g(x)\ \text{განსაზღვრულია}\&\,\psi g(x)\in B\backslash W_x].$$

შედეგი IV. (a) A-კრეატიულია $\Rightarrow A$ არაა რეკურსიული,

(b) $[A$ კრეატიულია $\&$ $A\leq_m B]\Rightarrow\overline{B}-$ პროდუქტიულია.

(c) A m-სრულია $\Rightarrow A$ კრეატიულია.

1-ეკვივალენტობა და რეკურსიული იზომორფიზმი

განსაზღვრა. ვთქვათ p არის ისეთი ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა $\omega=\{0,1,2,\dots\}$ სიმრავლეს გადასახავს ω-ზე. მაშინ ასეთ p ფუნქციას ეწოდება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის რეკურსიული გადასმა.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულად იზომორფულია B სიმრავლის (სიმბოლურად, $A\equiv B$), თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული გადასმა p, რომ

$$P(A)=B.$$

ზოგჯერ ნაცვლად „რეკურსიული იზომორფიზმისა" ვიტყვით „იზომირფიზმი".

თეორემა (Myhill) VI. $A\equiv B \Leftrightarrow A\equiv_1 B$.

დამტკიცება. $\Rightarrow$. ცხადია.

$\Leftarrow$. შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრა. დალაგებულ წყვილთა სასრულ მიმდევრობას $<<x_1,y_1>,\dots,<x_n,y_n>>$ ეწოდება სასრული შესაბამისობა A და B სიმრავლეებს შორის, თუ

(i) $i\neq j \Rightarrow [x_i\neq x_j \ \&\ y_i\neq y_j]$, $1\leq i\leq n$, $i\leq j\leq n$,

(ii) $x_i\in A \Leftrightarrow y_i\in B$.

დავამტკიცოთ შემდეგი.

ლემა. დავუშვათ, რომ $C\leq_1 D$. მაშინ არსებობს ეფექტური პროცედურა, რომელიც C და D სიმრავლეებს შორის ნებისმიერი სასრული შესაბამისობისათვის $<<x_1,y_1>,\dots,<x_n,y_n>>$ და ნებისმიერი $x'\notin\{x_1,\dots,x_x\}$ იპოვის ისეთ y'-ს, რომ

$$<<x_1,y_1>,\dots,<x_n,y_n>,<x',y'>>$$

არის სრული შესაბამისობა C და D-ს შორის.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $C\leq_1 D$ f ფუნქციით. გამოვთვალოთ $f(x')$. შევამოწმოთ $f(x')\neq y_i$ ყოველი i, $1\leq i\leq n$. თუ ეს ასეა, მაშინ დავუშვათ $y'=f(x')$.

თუ არა და $f(x') = y_{i_1}$, გამოვთვალოთ $f(x_{i_1})$ და შევამოწმოთ $f(x_{i_1}) \neq y_i$ ყოველი i, $1 \leq i \leq n$. თუ ეს ასეა, მაშინ დავუშვათ, რომ $y' = f(x_{i_1})$. თუ არა და $f(x_{i_1}) = y_{i_2}$, გამოვთვალოთ $f(x_{i_2})$ და შევამოწმოთ $f(x_{i_2}) \neq y_i$ ყოველი i, $1 \leq i \leq n$ და ა.შ. f ფუნქციის ურთიერთცალსახობიდან და მოცემული სასრული შესაბამისობის ურთიერთცალსახობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ეს პროცედურა დამთავრდება ისეთი y'-ის პოვნით, რომ $y' \neq y_i$, $1 \leq i \leq n$. მეტიც, აგებიდან ჩანს, რომ

$$x' \in C \Leftrightarrow y' \in D.$$

ეს კი ამტკიცებს ლემას.

დავუბრუნდეთ თეორემის დამტკიცებას. რადგან $A \equiv_1 B$, ლემა შეიძლება გამოვიყენეთ A და B-ზე ნაცვლად C და D-ს, ან B და A-ზე ნაცვლად C და D-ს. ჩვენ ვისარგებლებთ ამ გარემოებით იზომორფიზმის მისაღებად. აღვწეროთ ნატურალურ რიცხვთა წყვილების გადათვლის ეფექტური პროცედურა. ეს პროცედურა იქნება ისე განსაზღვრული, რომ გადათვლის ყოველ ეტაპზე უკვე გადათვლილი დალაგებული წყვილები ქმნიან სასრულ შესაბამისობას და, გარდა ამისა, ყოველი ნატურალური რიცხვი, ადრე თუ გვიან, გვხვდება გარკვეული დალაგებული წყვილის პირველი კომპონენტის როლში ამ გადათვლაში და ყოველი ნატურალური რიცხვი, ადრე თუ გვიან, გვხვდება გადათვლაში გარკვეული დალაგებული წყვილის მეორე კომპონენტის როლში. ასეთნაირად გადათვლილი დალაგებულ წყვილთა სრული ერთობლიობა ქმნიან რეკურსიულ გადასმას, რომელიც განსაზღვრავს A და B სიმრავლეებს შორის რეკურსიულ იზომორფიზმს.

პროცედურა მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ $A \leq_1 B$ g ფუნქციით და $B \leq_1 A$ h ფუნქციით.

ეტაპი 0. პირველი დალაგებული წყვილის როლში ავიღოთ $< o, g(o) >$.

ეტაპი 1. ვაკვირდებით, სრულდება თუ არა $g(0) = 0$. თუ სრულდება, მაშინ გადავდივართ ეტაპი 2-ზე. თუ არა, ვისარგებლოთ ლემით (A იყოს D-ს როლში, და B C-ს როლში, h f-ის როლში), ამოვიწეროთ ახალი დალაგებული წყვილი, რომლის მეორე კომპონენტი არის 0.

....

ეტაპი 2k. ვაკვირდებით, გვხვდება თუ არა k უკვე გადათვლილი წყვილებიდან რომელიმეს პირველი კომპონენტის როლში. თუ გვხვდება, გადავდივართ ეტაპი $2k+1$-ის შესრულებაზე. თუ არა, მაშინ ვსარგებლობთ ლემით (A C-ს როლში და B

D-ს როლში, ხოლო g f-ის როლში), ამოვიწერთ ახალ დალაგებულ წყვილს, რომლის პირველი კომპონენტი არის k.

ეტაპი 2k+1. ვაკვირდებით გვხვდება თუ არა k უკვე გადათვლილი წყვილებიდან რომელიმეს მეორე კომპონენტის როლში. თუ გვხვდება, გადავდივართ ეტაპი $2k+2$-ის შესრულებაზე. თუ არა, ვისარგებლოთ ლემით (A B-ს როლში, B C-ს როლში და h f-ის როლში), გათვლაში მოვათავსოთ ახალი დალაგებული წყვილი, რომლის მეორე კომპონენტი არის k.

....

დამტკიცება დამთავრებულია.

შედეგი V. $K \equiv K_0$.

1-სისრულე და *m*-სისრულე

თეორემა VII. A m-სრულია $\Leftrightarrow$ A 1-სრულია.

დამტკიცება. $\Leftarrow$. ცხადია.

$\Rightarrow$. დავუშვათ, რომ A m-სრულია. მაშინ A რ.გ. და $K \leq_m A$ რაღაც რეკურსიული f ფუნქციით. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $K \leq_1 A$. მაშინ A-ს 1-სისრულე მიიღება K-ს 1-სისრულიდან.

შეგახსენებთ, რომ D_x არის სასრული სიმრავლე კანონიკური ინდექსით x. დავუშვათ, რომ უკვე დამტკიცებული გვაქვს შემდეგი.

ლემა. თუ $K \leq_m A$, მაშინ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია g ისეთი, რომ ყოველი x-სთვის

$$[D_x \neq \varnothing \& D_x \subset A] \Rightarrow g(x) \in A \setminus D_x$$

და

$$[D_x \neq \varnothing \& D_x \subset \overline{A}] \Rightarrow g(x) \in \overline{A} \setminus D_x .$$

ჩვენ შეგვიძლია გავაგრძელოთ დამტკიცება, რომ $K \leq_1 A$ შემდეგნაირად. განვსაზღვროთ f' ფუნქცია ასეთი კონსტრუქციით. $f'(0)$-ის გამოთვლა. დავუშვათ $f'(0) = f(0)$ (მაშინ $0 \in K \Leftrightarrow f'(0) \in A$).

$f'(n+1)$-ის გამოთვლა. ვაკვირდებით სრულდება თუ არა

$$f(n+1) \in \{f'(0), \ldots, f'(n)\}.$$

თუ არა, დავუშვათ

$$f'(n+1) = f(n+1).$$

თუ სრულდება და $f'(n+1) = f'(m_0)$, მაშინ ავიღოთ სასრული სიმრავლე

$$D_{x_0} = \{f'(m_0)\}$$

და ვისარგებლოთ g ფუნქციით ლემიდან და გამოვთვალოთ $g(x_0)$ (ცხადია, x_0 შეიძლება მივიღოთ $f'(m_0)$-ით, ის უდრის $2^{f'(m_0)}$). ვაკვირდებით სრულდება თუ არა

$$g(x_0) \in \{f'(0), \ldots, f'(n)\}.$$

თუ არა, დავუშვათ

$$f'(n+1) = g(x_0).$$

თუ სრულდება და $g(x_0) = f'(m_1)$, მაშინ ავიღოთ სასრული სიმრავლე

$$D_{x_1} = \{f'(m_0), f'(m_1)\}$$

და გამოვთვალოთ $g(x_1)$.

(აქ $x_1 = 2^{f'(m_0)} + 2^{f'(m_1)}$).

ვაკვირდებით სრულდება თუ არა

$$g(x_1) \in \{f'(0), \ldots, f'(n)\}.$$

....

ლემის თანახმად, ეს პროცედურა საბოლოოდ გვაძლევს

$$f'(n+1) \notin \{f'(0), \ldots, f'(n)\}.$$

ასევე

$$n+1 \in K \Leftrightarrow f'(n+1) \in A.$$

აქედან, $K \leq_1 A$.

დასამტკიცებლად დარჩა ლემა. ამისათვის დაგვჭირდება f ფუნქციისათვის სუბლემის დამტკიცება.

სუბლემა. თუ $K \leq_m A$ f ფუნქციით, მაშინ

(a) B - რეკურსიული $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ რეკურსიულია,

(b) $f(K)$ უსასრულოა.

დამტკიცება. (a) ყოველი B-სთვის

$$f'(B) \leq_m B$$

f ფუნქციით. აქედან თეორემა I (e)-ს ძალით, B-რეკურსიულია $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ რეკურსიულია.

(b) რადგან f ფუნქციით $K \leq_m A$, ამიტომ

$$f^{-1}(f(K)) = K .$$

აქედან (a)-ს გამო, თუ $f(K)$ არის სასრული (და, მაშასადამე, რეკურსიულია), K იქნება რეკურსიული. მაგრამ K არაა რეკურსიული.

ლემის დამტკიცება. შევარჩიოთ K-ს გადათვლის რაიმე ეფექტური პროცედურა. ეს პროცედურა მიგვიყვანს $f(K)$ სიმრავლის გადათვლის ეფექტურ პროცედურამდე. სუბლემის თანახმად $f(K)$ უსასრულოა.

რადგან A რ.გ. სიმრავლეა, არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია h, რომ

$$W_{h(x)} = \begin{cases} f^{-1}(D_x), & \text{თუ } D_x \bigcap A = \varnothing, \\ \omega, & \text{თუ } D_x \bigcap A \neq \varnothing. \end{cases}$$

ვთქვათ მოცემულია რაიმე D_x. შემდეგი ინსტრუქციით გამოვითვლით $g(x)$-ს.

თუ $fh(x) \notin D_x$, დავუშვათ $f(x) = fh(x)$. თუ $fh(x) \in D_x$, დავუშვათ $g(x) = [\,f(K)$-ს გადათვლაში ის პირველი ელემენტი, რომელიც არ არის D_x-ის ელემენტი].

რადგან $f(K)$ უსასრულოა, ამიტომ $g(x)$ განსაზღვრულია ყოველი x-სთვის. დარჩა ვაჩვენოთ, რომ g ფუნქციას აქვს საჭირო თვისებები. განსაზღვრით $g(x) \notin D_x$. მეტიც,

$$[D_x \neq \varnothing \,\&\, D_x \subset A] \Rightarrow W_{h(x)} = \omega \Rightarrow h(x) \in W_{f(x)} \Rightarrow h(x) \in K \Rightarrow g(x) \in A].$$

$$[D_x \neq \varnothing \,\&\, D_x \subset \overline{A}] \Rightarrow W_{h(x)} = f^{-1}(D_x) \Rightarrow h(x) \notin f^{-1}(D_x)$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x) \in K \,\&$

$fh(x) \in A \,\&\, fh(x) \in D_x \,\&\, D_x \bigcap A \neq \varnothing) \Rightarrow$

$\Rightarrow [h(x) \notin W_{h(x)} \,\&\, fh(x) \notin D_x] \Rightarrow$

$\Rightarrow [h(x) \in \overline{K} \,\&\, fh(x) \notin D_x] \Rightarrow g(x) \in \overline{A}$.

ეს ასრულებს ლემის დამტკიცებას და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ჩილინდრები

განსაზღვრა. A სიმრავლე არის ცილინდრი, თუ $A \equiv B \times \omega$ რომელიმე B-სთვის.

თეორემა VIII (a) $A \leq_1 A \times \omega$.

(b) $A \times \omega \leq_m A$ (და, მაშასადამე, $A \equiv_m A \times \omega$).

(c) A-ცილინდრია $\Leftrightarrow$ $(\forall B)[B \leq_m A \Rightarrow B \leq_1 A]$.

(d) $A \leq_m B \Leftrightarrow A \times \omega \leq_1 B \times \omega$.

დამტკიცება. (a) $A \leq_1 A \times \omega$ $\lambda x[<x,0>]$ ფუნქციით.

(b) $A \times \omega \leq_m A$ π_1 ფუნქციით.

(c) $\Rightarrow$. დავუშვათ, რომ $A \equiv C \times \omega$ და $B \leq_m A$. მაშინ $B \leq_m C$ რომელიმე f ფუნქციით. ვთქვათ $f' = \lambda x[<f(x), x>]$. მაშინ $B \leq_1 C \times \omega$ f'-ით. აქედან $B \leq_1 A$.

$\Leftarrow$. დავუშვათ, რომ

$$(\forall B)[B \leq_m A \Rightarrow B \leq_1 A].$$

განვიხილოთ $A \times \omega$. (b)-ს ძალით $A \times \omega \leq_m A$; აქედან, ჩვენი დაშვებით, $A \times \omega \leq_1 A$. (a)-ს ძალით $A \leq_1 A \times \omega$. მაშასადამე, $A \equiv_1 A \times \omega$. აქედან, თეორემა VII-ის ძალით. $A \equiv A \times \omega$ და A არის ცილინდრი.

(d) $\Rightarrow$. დავუშვათ, რომ $A \leq_m B$. მაშინ $A \times \omega \leq_m A \leq_m B \leq_1 B \times \omega$. აქედან $A \times \omega \leq_m B \times \omega$. (c)-ს თანახმად,

$$A \times \omega \leq_1 B \times \omega.$$

$\Leftarrow$. დავუშვათ, რომ

$$A \times \omega \leq_1 B \times \omega.$$

მაშინ

$$A \leq_1 A \times \omega \leq_1 B \times \omega \leq_m B \text{ და მაშასადამე, } A \leq_m B.$$

შედეგი VII. $A-$ ცილინდრია $\Leftrightarrow A \times \omega \leq_1 A \Leftrightarrow A \equiv A \times \omega$.

$A \times \omega -$ეწოდება A სიმრავლის ცილინდრიფილაცია.

(a), (b) და (c) პუნქტებიდან გამოდის, რომ ყოველი m-ხარისხი შეიცავს მაქსიმალურ 1-ხარისხს და ეს ხარისხი არის m-ხარისხის ნებისმიერი სიმრავლის ცილინდრიფიკაციით მიღებული.

პროდუქტიულობა

თეორემა X. A პროდუქტიულია $\Rightarrow$ A შეიცავს უსასრულო რ.გ. ქვესიმრავლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ f არის ისეთი რეკურსიული ფუნქცია, რომ

$$W_{f(x,y)} = W_x \cup W_y .$$

ჩერჩის თეზისის თანახმად არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია h, რომ

$$W_{h(x)} = \{x\} .$$

ვთქვათ z_0 არის ცარიელი სიმრავლის რ.გ. ინდექსი. განვსაზღვროთ k ფუნქცია შემდეგნაირად.

$$k(0) = z_0 ,$$
$$k(n+1) = f(h\psi k(n), k(n)) .$$

მაშინ განვსაზღვრით

$$g = \psi k .$$

შედეგი IX. A პროდუქტიულია $\Rightarrow$ A შეიცავს უსასრულო რეკურსიულ ქვესიმრავლეს.

თეორემა X. A პროდუქტიულია $\Leftrightarrow$ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ A პროდუქტიულია პროდუქტიული ფუნქციით f.

დამტკიცება. $\Leftarrow$ ცხადია.

$\Rightarrow$. ვთქვათ A პროდუქტიულია ψ პროდუქტიული ფუნქციით. მოვიყვანოთ f ფუნქციის გამოთვლის ინსტრუქცია.

არსებობს რეკურსიული ფუნქცია g ისეთი, რომ

$$W_{g(z,x)} = \begin{cases} W_x, \text{ თუ } z \in K, \\ \varnothing \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ვთქვათ $k_0, k_1, \ldots$ არის K-ს ეფექტური გადათვლა.

$f(x)$-ის გამოთვლა. დავიწყოთ გამოთვლა $\psi(x)$, $\psi g(k_0, x)$, $\psi g(k_1, x), \cdots f(x)$-ის მნიშვნელობად ავიღოთ ის, რომელიც გამოითვლება ყველაზე ადრე (პირველად). ვაჩვენოთ, რომ f არის პროდუქტიული ფუნქცია A სიმრავლისთვის. რადგან

$$x,\ g(k_0, x),\ g(k_1, x), \cdots$$

არიან W_x სიმრავლის ინდექსები, $f(x)$ უნდა იყოს განსაზღვრული, როცა $\psi(x)$ არის განსაზღვრული. f ფუნქცია ყველგან განსაზღვრულია. მართლაც, დავუშვათ, $f(x_0)$ არაა განსაზღვრული რაიმე x_0 წერტილში. მაშინ $\psi g(y, x_0)$ არაა განსაზღვრული არცერთი $y \in K$-თვის. მაგრამ $y \in \overline{K}$-თვის $W_{g(y, x_0)} = \varnothing$ და, მაშასადამე, $y \in \overline{K}$-თვის $\psi g(y, x_0)$ განსაზღვრულია. ამრიგად, ჩვენ მივიღებდით

$$\overline{K} = \{y : \psi g(y, x_0) - \text{განსაზღვრულია}\}$$

და პროექციის მეორე თეორემის თანახმად $\overline{K}$ იქნებოდა რ.გ. სიმრავლე. რაც ეწინააღმდეგება K-ს არარეკურსიულობას.

განსაზღვრა. A სიმრავლეს ეწოდება სავსებით პროდუქტიული, თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი x-სთვის

$$f(x) \in (A \setminus W_x) \cup (W_x \setminus A).$$

ამ შემთხვევაში f ფუნქციას ეწოდება A სიმრავლის სავსებით პროდუქტიული ფუნქცია.

მაგალითი. $\overline{K}$ სავსებით პროდუქტიული სიმრავლეა $\lambda x[x]$ ფუნქციით. მართლაც, $x \in W_x \Rightarrow x \notin \overline{K}$ და $x \notin W_x \Rightarrow x \in \overline{K}$.

მარტივი სიმრავლეები

განსაზღვრა. A სიმრავლე მარტივია, თუ

(i) A რ.გ. სიმრავლეა,

(ii) $\overline{A}$ უსასრულოა

(iii) $(\forall x)[B$ უსასრულოა & B რ.გ.] $\Rightarrow B\bigcap A\neq\emptyset]$.

თეორემა I. (a) A მარტივია $\Rightarrow$ A არაა რეკურსიული.

(b) A მარტივია $\Rightarrow$ A არაა კრეატიული.

(c) A მარტივი $\Rightarrow$ A არაა m-სრული.

(d) A მარტივია $\Rightarrow$ A არაა ცილინდრი.

დამტკიცება. (a) თუ A რეკურსიულია და წინა განსაზღვრის (ii) პუნქტი სრულდება, მაშინ (iii) არ სრულდება, როცა $B=\overline{A}$.

(b) რადგან ყოველი პროდუქტიული სიმრავლე ფლობს უსასრულო რ.გ. ქვესიმრავლეს, ამიტომ თუ A კრეატიული სიმრავლეა, მაშინ (iii) არ შესრულდება.

(c) უშუალოდ გამომდინარეობს (b)-დან.

(d) დავუშვათ, რომ $A\equiv C\times\omega$ და A მარტივია, მაშინ $\overline{A}\neq\emptyset$; აქედან

$$\overline{C\times\omega}=\overline{C}\times\omega\neq\emptyset$$

და $\overline{C}\neq\emptyset$. ვთქვათ $m\in\overline{C}$. მაშინ $\{m\}\times\omega$ არის $\overline{C}\times\omega$ სიმრავლის უსასრულო რ.გ. ქვესიმრავლე.

თეორემა II (Post). არსებობს მარტივი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$C=\{<x,y>: y\in W_x \;\&\; y>2x\}.$$

პროექციის მეორე თეორემის თანახმად C რ.გ. სიმრავლეა. დავაფიქსიროთ C სიმრავლის გადათვლის რაიმე ეფექტური მეთოდი. განვსაზღვროთ სიმრავლე C':

$$C'=\{<x,y>:<x,y>\in C\,\&\,(\forall z)[[z\neq y\,\&<x,z>\in C]\Rightarrow$$

$\Rightarrow <x,z>$ შეგვხვდება C-ს მოცემულ გადათვლაში უფრო გვიან ვიდრე $<x,y>]\}$.

ცხადია C' სიმრავლე რ.გ. და

$$\{<x,y>:<x,y>\in C'\}$$

არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია. ვთქვათ S არის ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ანუ

$$S=\{y:(\exists x)(<x,y>\in C')\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ S არის მარტივი სიმრავლე.

(i) S რ.გ. სიმრავლეა, რადგან ის არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

(ii) აგების თანახმად $\{0,1,\cdots,2k\}$-დან მაქსიმუმ k რაოდენობა შეიძლება ეკუთვნოდეს S-ს. ამას აქვს ნებისმიერი k-თვის, მაშასადამე, $\bar{S}$ უსასრულოა.

(iii) დავუშვათ, რომ B უსასრულო რ.გ. სიმრავლეა. ვთქვათ $B=W_{x_0}$. მაშინ მასში არსებობენ რიცხვები, რომლებიც მეტია ვიდრე $2x_0$. აგების თანახმად რომელიმე z-თვის B-დან $<x_0,z>$ უნდა ეკუთვნოდეს C'. აქედან, $z\in B\bigcap S$ და $B\bigcap S\neq\varnothing$.

შედეგი II (a). არსებობს რ.გ. არარეკურსიული სიმრავლე, რომელიც არ არის არც m-სრული, არც კრეატიული, არც ცილინდრი.

შედეგი II (b) $\equiv_1$ და $\equiv_m$ არ ემთხვევიან ერთმანეთს რ.გ. არარეკურსიულ სიმრავლეებზე და ამით $\leq_1$ და $\leq_m$ არ ემთხვევიან ერთმანეთს რ.გ. რეკურსიულ სიმრავლეებზე.

დამტკიცება. ცნობილია, რომ $S\equiv_m S\times\omega$. მაგრამ თეორემა I-ის ძალით $S\not\equiv_1 S\times\omega$. აქედან $S\times\omega\leq_m S$, მაგრამ $S\times\omega\not\leq_1 S$.

იმუნური სიმრავლეები

განსაზღვრა. A სიმრავლე იმუნურია, თუ

(i) A უსასრულოა.

(ii) $(\forall x)[[B$ უსასრულოა & B რ.გ.] $\Rightarrow B \bigcap \overline{A} \neq \varnothing]$

თეორემა III. არსებობს $2^{\aleph_0}$ რაოდენობა ისეთი A სიმრავლეებისა, რომ როგორც A ისე $\overline{A}$ არის იმუნური.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_0, x_1, \ldots$ არის $\{x : W_x$ უსასრულოა$\}$ სიმრავლის ელემენტები, რომლებიც დალაგებული არიან ზრდადობით. განვსაზღვროთ წყვილთა მიმდევრობა შემდეგნაირად:

$$\{y_0, z_0\} = [\text{ ორი უმცირესი ელემენტი } W_{x_0} - \text{დან}],$$

ამასთან $y_0 < z_0$.

$\{y_{k+1}, z_{k+1}\} = [$ ორი ისეთი უმცირესი ელემენტი $W_{x_{k+1}}$ –დან, რომლებიც მეტია y_k -ზე და z_k -ზე],

ამასთან $y_{k+1} < z_{k+1}$.

განვსაზღვროთ A სიმრავლე შემდეგნაირად. ამოვირჩიოთ ერთი ელემენტი წყვილთა ამ მიმდევრობის ყოველი წევრიდან. არსებობს $2^{\aleph_0}$ რაოდენობა ასეთი ამორჩევის. ყოველი სიმრავლე A და $\overline{A}$-დან უნდა გადაიკვეთოს ყოველ უსასრულო რ.გ. სიმრავლესთან. მაშასადამე, როგორც A, ისე $\overline{A}$ არის იმუნური.

თეორემა IV. არსებობს რ.გ. სიმრავლე, რომელიც არ არის არც რეკურსიული, არც მარტივი, არც კრეატიული.

დამტკიცება. ვთქვათ A მარტივია. განვიხილოთ $A \times \omega$. $A \times \omega$ არის რ.გ., რადგან A არის რ.გ. $A \times \omega$ არ არის რეკურსიული, რადგან $A \leq_1 A \times \omega$. სიმრავლე $A \times \omega$ არ არის მარტივი, რადგან ის არის ცილინდრი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $A \times \omega$ კრეატიული სიმრავლეა, მაშინ A კრეატიულია.

შედეგი IV. არსებობს სიმრავლე, რომელიც არ არის არც რ.გ., არც პროდუქტიული, არც იმუნური.

განსაზღვრა. დალაგებულ წყვილს $<< x_1,\dots,x_n >,\alpha>$, სადაც

$$< x_1,\dots,x_n >$$

არის რიცხვთა n-ეული, ხოლო α n-არული ბულის ფუნქცია ($n>0$), ეწოდება n-რიგის ცხრილური პირობა (ან tt-პირობა). $\{x_1,\dots,x_n\}$ სიმრავლეს ეწოდება ამ tt-პირობასთან ასოცირებული სიმრავლე.

განსაზღვრა. tt-პირობა სრულდება A სიმრავლეზე, თუ

$$\alpha(C_A(x_1),\dots,C_A(x_n))=1,$$

სადაც C_A არის A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

ყოველი tt-პირობა არის სასრული ობიექტი; ცხადია, შეიძლება მოვახდინოთ ეფექტური კოდირება, რომელიც ყველა tt-პირობას (განსხვავებული რიგის) გადასახავს ω-ზე. დავუშვათ, ამ მომენტიდან დაწყებული, რომ ასეთი კოდირება ფიქსირებულია. როცა ვამბობთ „tt-პირობა x“, ჩვენ მხედველობაში გვაქვს tt-პირობა კოდური ნომრით x.

განსაზღვრა. A სიმრავლე ცხრილურად დაყვანილია B სიმრავლეზე (სიმბოლურად, $A\le_{tt} B$), თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი $x\in\omega$-თვის $[x\in A \Leftrightarrow tt-$პირობა $f(x)$ სრულდება B-ზე].

თეორემა V. (Dekker). მარტივი სიმრავლის m-ხარისხი შეიცავს 1-ხარისხების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც წრფივადაა დალაგებული $\le_1$ მიმართებით მთელ რიცხვთა $(\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ ტიპით და რომლებიც მთლიანად შედგებიან მარტივი სიმრავლეებისაგან.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. ვთქვათ A და B რ.გ. სიმრავლეებია, ისეთი, რომ

$$B = A\bigcup\{m\}.$$

სადაც $m \in \overline{A}$. მაშინ

(i) A მარტივია $\Leftrightarrow$ B მარტივია.

(ii) A მარტივია $\Rightarrow [B \leq_1 A \,\&\, A \leq_m B \,\&\, A \not\leq_1 B]$.

ლემის დამტკიცება. (i) ცხადია.

(ii). ვთქვათ $n \in \overline{A}$, $n \neq m$. მაშინ $A \leq_m B$ შემდეგი f ფუნქციით:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{თუ} \quad x \neq m, \\ n, & \text{თუ} \quad x = m. \end{cases}$$

ვთქვათ C არის A სიმრავლის უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლე. ვთქვათ p არის რეკურსიული გადასმა, რომელიც $C\bigcup\{m\}$ სიმრავლეს გადასახავს C-ზე. მაშინ $B \leq_1 A$ შემდეგი g ფუნქციით:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{თუ } x \notin C\bigcup\{m\}, \\ p(x), & \text{თუ } x \in C\bigcup\{m\}. \end{cases}$$

დავუშვათ, რომ $A \leq_1 B$. მაშინ $A \equiv B$ რომელიმე რეკურსიული გადასმით h. მაშინ $m,\ h(m),\ hh(m), \cdots$ ერთმანეთისგან განსხვავდებიან და, მაშასადამე, წარმოქმნიან $\overline{A}$ სიმრავლის უსასრულო რ.გ. ქვესიმრავლეს, რაც ეწინააღმდეგება A სიმრავლის მარტივობას. მაშასადამე $A \not\leq_1 B$.

ახლა თეორემის დამტკიცება მარტივია. ვთქვათ A მარტივი სიმრავლეა. $\{a_0, a_1, \cdots\}$ არის A სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე და $\{b_0, b_1, \cdots\}$ არის $\overline{A}$ სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე. მაშინ, ლემის თანახმად,

$$\cdots A\bigcup\{b_0, b_1\},\ A\bigcup\{b_0\},\ A,\ A\setminus\{a_0\},\ A\setminus\{a_0, a_1\}, \cdots$$

იძლება მარტივ სიმრავლეთა 1-ხარისხების საძებნ წრფივ დალაგებას.

შედეგი V. იმუნური სიმრავლის m-ხარისხი შეიცავს უსასრულო ბევრ 1-ხარისხს.

ტიურინგის აზრით დაყვანადობა და ჰიპერმარტივი სიმრავლეები

განსაზღვრება. $<x,y,u,v>$ არის თავსებადი, თუ $D_u \bigcap D_v = \varnothing$; $<x_1,y_1,u_1,v_1>$ და $<x_2,y_2,u_2,v_2>$ შეთანხმებულია, თუ

$$D_{u_1} \bigcap D_{v_1} = D_{u_2} \bigcap D_{v_2} = \varnothing .$$

განსაზღვრა. W_z რეგულარულია, თუ

(i) $<x,y,u,v> \in W_z \Leftarrow <x,y,u,v>$ თავსებადია,

(ii) $[<x,y_1,u_1,v_1> \in W_z \,\&\, <x,y_2,u_2,v_2> \in W_z \,\&\, <x,y_1,u_1,v_1> \neq$
$<x,y_2,u_2,v_2>] \Rightarrow <x,y_1,u_1,v_1>$ და $<x,y_2,u_2,v_2>$ არ არის შეთანხმებული.

თეორემა. არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია ρ, რომ ყოველი A-თვის.

(i) $W_{\rho(z)}$ რეგულიარულია.

(ii) W_z რეგულარულია $\Rightarrow W_{\rho(z)} = W_z$.

განსაზღვრა.

$$\varphi_z^X = \{<x,y>: (\exists u,v)[<x,y,u,v> \in W_{\rho(z)} \,\&$$

$$\& D_u \subset X \,\&\, D_v \subset \overline{X}]\}.$$

ვთქვათ A ფიქსირებული სიმრავლეა.

განსაზღვრა. ფუნქცია η არის A-ნაწილობრივად რეკურსიული, თუ $\eta = \varphi_z^A$ რომელიმე z-სთვის. ფუნქცია f არის A-რეკურსიული, თუ რომელიმე z-სთვის $f = \varphi_z^A$ და φ_z^A ყველგან განსაზღვრულია.

თეორემა. A-რეკურსიულია $\Rightarrow \varphi_z^A$ არის ნაწილობრივად რეკურსიული.

დამტკიცება. A სიმრავლის რეკურსიულობა იძლევა ყველა გამოთვლის რეკურსიულობას.

განსაზღვრა. A სიმრავლე რეკურსიულია B სიმრავლის მიმართ (ან B-ში), თუ ფუნქცია C_A არის B-რეკურსიული. A სიმრავლე რ.გ. B-ს მიმართ (ან B-ში), თუ $A = \varnothing$, ან $A = Valf$ რაიმე B-რეკურსიული f ფუნქციისათვის.

თეორემა. A რეკურსიულია B-ში $\Leftrightarrow$ თუ A და $\overline{A}$ სიმრავლეები არიან რ.გ. B-ში.

განსაზღვრა. $W_z^X = Arg\varphi_z^X$.

თეორემა. A რ.გ. B-ში $\Leftrightarrow (\exists z)[A = W_z^B]$.

განსაზღვრა. A სიმრავლე ტიურინგის აზრით დაყვანილია B სიმრავლეზე (სიმბოლურად, $A \leq_T B$), თუ A რეკურსიულია B.

განსაზღვრა. ვთქვათ A უსასრულო სიმრავლეა. f ფუნქცია ახდენს A სიმრავლის მაჟორირებას, თუ

$$(\forall x)[f(n) \geq z_n],$$

სადაც $z_0, z_1, \ldots$ არიან A სიმრავლის ელემენტები, რომლებიც დალაგებულია მკაცრად ზრდადობით.

დიაგონალური მეთოდით მარტივად შეიძლება იმის ჩვენება, რომ არსებობს სიმრავლე, რომლის მაჟორირება არ ხდება არცერთი რეკურსიული ფუნქციით.

ვთქვათ $f_0, f_1, \ldots$ არის ყველგან განსაზღვრული ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც შეიცავს ყველა რეკურსიულ ფუნქციას.

განვსაზღვროთ

$$g(0) = f_0(0) + 1,$$

$$g(n+1) = \mu z[z > g(n) \,\&\, z > f_{n+1}(n+1)].$$

მაშინ g ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის მაჟორირება არ ხდება არცერთი რეკურსიული ფუნქციით. ჩვენ ასეთ სიმრავლეებს ვუწოდებთ ჰიპერიმუნურებს.

განსაზღვრა. A სიმრავლე ჰიპერიმუნურია, თუ A უსასრულოა და ($\forall$ რეკურსიული f) (f არ ახდენს A-ს მაჟორირებას).

განსაზღვრა. A სიმრავლე ჰიპერმარტივია, თუ A არის რ.გ. და $\overline{A}$ ჰიპერიმუნური.

თეორემა I (Кузнецов, Медведев, Успенский), A სიმრავლე ჰიპერიმუნურია $\Leftrightarrow$ A უსასრულოა და $\neg$($\exists$ რეკურსიული f ფუნქცია).

$$[(\forall u)[D_{f(u)} \bigcap A \neq \varnothing] \,\&\, (\forall u)(\forall v)[u \neq v \Rightarrow D_{f(u)} \bigcap D_{f(v)} = \varnothing]].$$

დამტკიცება. $\Rightarrow$ დავუშვათ, რომ ასეთი რეკურსიული ფუნქცია არსებობს, მაშინ

$$(\forall u)(D_{f(u)} \neq \varnothing).$$

განვსაზღვროთ

$$g = \lambda y \left[\bigcup_{i=0}^{y} D_{f(i)} \ \text{სიმრავლის მაქსიმალური ელემენტი} \ \right].$$

ცხადია g არის რეკურსიული ფუნქცია და ის ახდენს A-ს მაჟორირებას.

$\Leftarrow$. დავუშვათ, რომ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია g, რომელიც ახდენს A-ს მაჟორირებას. განვსაზღვროთ რეკურსიული ფუნქცია h შემდეგნაირად:

$$h(0) = g(0),$$

$$h(n+1) = g(h(n)+1).$$

განვიხილოთ სასრულ სიმრავლეთა მიმდევრობა

$$D^{(0)} = \{0,1,\cdots.h(0)\},$$
$$D^{(1)} = \{h(0)+1,\cdots,h(1)\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D^{(n+1)} = \{h(n)+1,\cdots,h(n+1)\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ცხადია ეს მიმდევრობა რ.გ. კანონიკური ინდექსებით. ყოველი n-თვის $D^{(n+1)}$ სიმრავლეს აქვს $h(n+1) = g(h(n)+1)$ თავის უდიდეს ელემენტად. მაშასადამე, დაშვებით, რომ g-ს აქვს მაჟორირების თვისება, $h(n)+2$ ელემენტი მაინც A

სიმრავლიდან არ აღემატებიან $h(n+1)$-ს. მაგრამ $D^{(n+1)}$ შეიცავს ყველას, გარდა $(h(n)+1)$-ე, ნატურალურ რიცხვს, რომლებიც არ აღემატებიან $h(n+1)$-ს. აქედან $D^{(n+1)} \bigcap A \neq \varnothing$.

თეორემა II (Dekker). [A არარეკურსიულია $\& A$ რ.გ.] $\Rightarrow$ ($\exists B[B \equiv_T A \& B$ ჰიპერმარტივია].

დამტკიცება. ვთქვათ A მოცემული რ.გ. არარეკურსიული სიმრავლეა. მაშინ $A = Valf$ რომელიმე ურთიერთცალსახა რეკურსიული f ფუნქციისათვის. x-ს ვუწოდოთ მინიმალური f ფუნქციის მიმართ, თუ

$$(\forall y)[x < y \& f(x) < f(y)].$$

ვთქვათ

$B = \{x : x$ არ არის მინიმალური f-ის მიმართ$\}$ =

$= \{x : (\exists y)[x < y \& f(y) \leq f(x)]\}$.

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ B არის ჰიპერმარტივი სიმრავლე და $B \equiv_T A$.

(i) B რ.გ. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს პროექციის მეორე თეორემიდან.

(ii) $\overline{B}$ ჰიპერიმუნურია. თუ ეს ასე არაა, ვთქვათ g ახდენს $\overline{B}$-ს მაჟორირებას. მაშინ

$$x \in A \Leftrightarrow x \in \{f(0), f(1), \cdots, f(g(x))\}.$$

ეს იძლევა რიცხვის A სიმრავლისათვის კუთვნილების გარკვევის ეფექტურ საშუალებას. მაშასადამე, A რეკურსიულია, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

(iii) $B \leq_{tt} A$. მართლაც.

$$x \in A \Leftrightarrow f(y) < f(x) \text{ გარკვეული } y > x \Leftrightarrow$$

$$C \bigcap A \neq \varnothing,$$

სადაც

$$C = (\{0,1,\cdots, f(x)\} \setminus \{f(0), \cdots, f(x)\}),$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება გამოისახოს tt-პირობით.

(iv) $A \leq_T B$. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია გავარკვიოთ $x \in A$ შემდეგნაირად. შევამოწმებთ, ეკუთვნიან თუ არა B სიმრავლეს რიცხვები, 0,1,2,... მანამ, ვიდრე არ მიიღება $\overline{B}$ სიმრავლის $z+1$ ელემენტი. ვთქვათ მათ შორის უდიდესი არის n_z. ვაკვირდებით, გვხვდება თუ არა z სიმრავლეში $\{f(0), f(1), \cdots f(n_z)\}$. თუ ეკუთვნის,

მაშინ $z \in A$; თუ არა $z \notin A$. B სიმრავლისათვის კუთვნილების ასეთი მეთოდი სწორია, რადგან n_z მინიმალურია f-ის მიმართ და $z \le f(n_z)$.

შედეგი. (a) ყოველ რ.გ. არარეკურსიული T-ხარისხი შეიცავს მარტივ სიმრავლეს.

(b) ყოველი რ.გ. არარეკურსიული A სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი ჰიპერმარტივი სიმრავლე B, რომ $B \le_{tt} A$.

პოსტის პრობლემა და ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები

ყოველი A სიმრავლისათვის ვთქვათ $d_T(A)$ არის A სიმრავლის T-ხარისხი (ტიურინგის ხარისხი). პოსტის პრობლემა მდგომარეობს შემდეგში: არსებობენ თუ არა $d_T(\varnothing)$ და $d_T(K)$-გან განსხვავებული რ.გ. T-ხარისხები ანუ არსებობენ თუ არა რ.გ. სიმრავლეები, რომლებიც არ არიან არც რეკურსიული და არც სრული?

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ არსებობენ არასადარი ($\le_T$-ს მიმართ) რ.გ. სიმრავლეები და ამით მოცემული იქნება პოსტის პრობლემის გადაწყვეტა.

ვთქვათ A რ.გ. სიმრავლეა. განვიხილოთ დებულება A-ს არარეკურსიულობის შესახებ. ეს დებულება შეიძლება გამოიხატოს შემდეგნაირად:

$$(\forall x)[\overline{A} \ne W_x],$$

ან ეკვივალენტური სახით,

$$(\forall x)(\exists y)[y \in A \Leftrightarrow y \in W_x].$$

თუ ამ დებულებაში არსებობის კვანტორი შეიძლება შეიცვალოს რეკურსიული ფუნქციით, ანუ თუ

$$(\exists \text{ რეკურსიული } f)(\forall x)[f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x],$$

ვიტყვით, რომ A სიმრავლე კონსტრუქციულად არარეკურსიულია. რ.გ. სიმრავლისათვის A კონსტრუქციულად არარეკურსიულობის დებულება ეკვივალენტურია იმ დებულებისა, რომ $\overline{A}$ არის სავსებით პროდუქტიული. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი შედეგი.

თეორემა I. თუ სიმრავლე A რ.გ. და კონსტრუქციულად არარეკურსიულია, მაშინ A-კრეატიული სიმრავლეა.

დამტკიცება. თეორემის დებულება გამომდინარეობს უშუალოდ განსაზღვრიდან.

ფრიდბერგისეული გადაწყვეტა

პოსტის პრობლემა ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად და თითქმის ერთდროულად გადაწყვეტილი იქნა 1956 წელს მუჩნიკის და ფრიდბერგის მიერ. გარკვეული აზრით მუჩნიკისა და ფრიდბერგის მეთოდები ანალოგიურია. ქვემოთ მოვიყვანთ ფრიდბერგის მეთოდის მოდიფიცირებულ ფორმას.

თეორემა II (მუჩნიკ-ფრიდბერგის თეორემა). არსებობენ ისეთი რ.გ. სიმრავლეები A და B, რომ A და B არ არიან სადარი $\leq_T$-ს მიმართ.

დამტკიცება. ჩვენ უნდა (1) მოვიყვანოთ A და B სიმრავლეების გადათვლის ინსტრუქციები და (2) დავამტკიცოთ ორი ისეთი ფუნქციის f და g არსებობა, რომ

$$(\forall x)[f(x)\in A \Leftrightarrow f(x)\in W_x^B]$$

და

$$(\forall x)[g(x)\in B \Leftrightarrow g(x)\in W_x^A].$$

დავიწყოთ ორი იდენტური უსასრულო ვერტიკალური სიით, რომლებსაც ჩვენ ვუწოდებთ A-სიას და B-სიას. ყოველი ასეთი სია შედგება ზევიდან ქვევით ზრდადობით დალაგებული ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლისაგან. გამოთვლის ნებისმიერ ეტაპზე ჩვენ გამოვიყენებთ ყოველი სიის მხოლოდ სასრულ ნაწილს. გამოთვლის პროცესში ყოველ სიაში გარკვეული ნატურალური რიცხვების გვერდით ვწერთ პლიუს (+). ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებსაც A-სიაში აქვთ პლიუსი, შეადგენენ A სიმრავლეს. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებსაც B-სიაში აქვთ პლიუსი, შეადგენენ B სიმრავლეს. გამოთვლა ხორციელდება ეტაპობრივად.

განსაზღვრა. $A_0 = B_0 = \varnothing$.

$A_n = \{x : x$ ღებულობს პლიუს A-სიაში n-ური ეტაპის ბოლოსათვის$\}$, $n = 1,2,\ldots$;

$B_n = \{x : x$ ღებულობს პლიუს B-სიაში n-ური ეტაპის ბოლოსათვის$\}$, $n = 1,2,\ldots$.

მაშინ $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$; $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots$;

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n ; \qquad B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n .$$

გამოთვლის პროცესში გამოიყენება მოძრავი მარკერების ორი უსასრულო სიმრავლე. პირველი ერთობლიობის მარკერებს ჩვენ აღვნიშნავთ $\boxed{0}_1, \boxed{1}_1, \boxed{2}_1, \ldots$, მეორე ერთობლიობის მარკერებს კი $\boxed{0}_2, \boxed{1}_2, \boxed{2}_2, \ldots$. პირველი ერთობლიობის მარკერები შეესაბამებიან A-სიის რიცხვებს, მეორე ერთობლიობის მარკერები კი შეესაბამებიან B-სიის რიცხვებს. ეს მარკერები არიან მოძრავები შემდეგი აზრით: გამოთვლის პროცესში შემოყვანისას მას შეუსაბამებენ რომელიმე სიის გარკვეულ რიცხვს; გამოთვლის უფრო გვიან მომენტში მარკერის კავშირი ამ რიცხვთან შეიძლება დაირღვეს, და ეს მარკერი შეესაბამება სხვა რიცხვს, რომელიც იმყოფება ამ სიაში უფრო ქვევით; კიდევ უფრო გვიან მომენტში ის კვლავ

შეიძლება გადაადგილდეს ქვევით და ა.შ. მოცემული მარკერი შეიძლება ასეთნაირად გადაადგილდეს რამდენჯერმე.

ჩვენ გვამოძრავებს შემდეგი მოსაზრება: საბოლოოდ ჩვენ გვინდა ყოველი მარკერი $\boxed{j}_1$ შევუსაბამოთ ისეთ x_j რიცხვს, რომ

$$x_j \in A \Leftrightarrow x_j \text{ აქვს პლიუსი } \Leftrightarrow x_j \in W_j^B.$$

თუ ჩვენ შევძლებთ ყოველი $\boxed{j}_1$-თვის ეს წარმატებით გავაკეთოთ, მაშინ გვექნება

$$(\forall x)(\exists y)[y \in A \Leftrightarrow y \in W_x^B]$$

და, მაშასადამე, $A \not\leq_T B$. ანალოგიურად ნებისმიერი $\boxed{j}_2$ მარკერისათვის და $B \not\leq_T A$.

ვთქვათ მოცემულია z და სასრული სიმრავლე D. მაშინ

$$W_z^D = \{x : (\exists y)(\exists u)(\exists v)[< x, y, u, v > \in W_{\rho(z)} \,\&\, D_u \subset D \,\&\, D_v \subset \overline{D}]\}.$$

მოქმედებათა შემდეგი მიმდევრობა არის (ეფექტური) ალგორითმი W_z^D სიმრავლის გადათვლისათვის. გადათვალეთ $W_{\rho(z)}$ სიმრავლის ელემენტები; როგორც კი გამოჩნდება რაიმე ელემენტი $< x, y, u, v >$, შეამოწმეთ, სამართლიანია თუ არა $D_u \subset D$ და $D_v \subset \overline{D}$; თუ ეს სრულდება დაუმატეთ x-ი სიას W_x^D-თვის,

განსაზღვრა. ვთქვათ მოცემულია z და სასრული სიმრავლე D. W_z^D სიმრავლის გადათვლის n ნაბიჯის ქვეშ ჩვენ გავიგებთ აღწერილი ალგორითმის გამოყენების პროცესს, რომელიც შეესაბამება $W_{\rho(z)}$ სიმრავლის გადათვლის n მანქანურ ნაბიჯს.

ლემა. სასრულ სიმრავლეთა $A_0, A_1, \cdots$ ნებისმიერი ისეთი მიმდევრობისათვის, რომ $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, თუ $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ და თუ $a \in W_z^A$, მაშინ $(\exists m)(\forall n)[m \leq n \Rightarrow a$ გამოჩნდება $W_z^{A_n}$ სიმრავლის გადათვლის n ნაბიჯის შემდეგ.

ლემის დამტკიცება ცხადია.

გავაგრძელოთ თეორემის დამტკიცება და მოვიყვანოთ ძირითადი გამოთვლის ინსტრუქცია.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ ნატურალური რიცხვი თავისუფალია მოცემულ სიაში დროის მოცემულ მომენტში, თუ არც ამ რიცხვს, არც ნებისმიერ სხვა რიცხვს, რომელიც იმყოფება მის ქვევით ამ სიაში, არ აქვთ მათთან შესაბამისი არავითარი ნიშანი და მარკერი. ვიტყვით, რომ ნატურალური რიცხვი ვაკანტურია მოცემულ სიაში დროის მოცემულ მომენტში, თუ მას არ აქვს გვერდით პლიუსი.

ეტაპი 1. შეუსაბამეთ $\boxed{0}_1$ 0-ს A-სიაში.

ეტაპი 2. შეუსაბამეთ $\boxed{0}_2$ 0-ს B-ში.

....

ეტაპი $2n+1$. შეუსაბამეთ $\boxed{n}_1$ A-ში პირველი თავისუფალ რიცხვს. ვთქვათ $a_0^{(n)},\ldots,a_n^{(n)}$ არის $\boxed{0}_1, \boxed{1}_1,\ldots,\boxed{n}_1$, მარკერების მიმდინარე პოზიცია. ყოველი $W_0^{B_{2n}},\ldots,W_n^{B_{2n}}$ სიმრავლის გადათვლაში აწარმოეთ n ნაბიჯი. ვთქვათ $a_j^{(n)}$ არის $\{a_0^{(n)},\ldots,a_n^{(n)}\}$ სიმრავლის ისეთი უმცირესი ელემენტი, რომ რიცხვი $a_j^{(n)}$ ვაკანტურია და $a_j^{(n)}$ გვხვდება $W_j^{B_{2n}}$ სიმრავლის გადათვლის შესრულებულ ნაწილში. (თუ ასეთი $a_j^{(n)}$ არ არსებობს. მაშინ გადადით $2n+2$ ეტაპზე). A-სიაში დასვით პლიუსი $a_j^{(n)}$ ელემენტის გვერდით და მინუსი B-სიის ყველა იმ ვაკანტურ რიცხვებთან, რომელთა კუთვნილება $\overline{B}_{2n}$ სიმრავლესთან გამოყენებული იქნა იმ ფაქტის დასადგენად, რომ $a_j^{(n)} \in W_j^{B_{2n}}$. შემდეგ $j<n$, გადადით B-სიაში და გადაადგილეთ ყველა მარკერი $\boxed{i}_2$, $j \le i \le n$, ქვევით B-სიის თავისუფალ რიცხვზე.

ეტაპი $2n+2$. B-სიაში შეუსაბამეთ $\boxed{n}_2$ პირველ თავისუფალ რიცხვს. ვთქვათ $b_0^{(n)},\ldots,b_n^{(n)}$ არის $\boxed{0}_2,\ldots,\boxed{n}_2$ მარკერების მიმდინარე პოზიციები. ყოველ $W_0^{A_{2n+1}},\ldots,W_n^{A_{2n+1}}$ სიმრავლის გადათვლაში აწარმოეთ n ნაბიჯი. ვთქვათ $b_j^{(n)}$ არის $\{b_0^{(n)},\ldots,b_n^{(n)}\}$ სიმრავლის ისეთი უმცირესი ელემენტი, რომ $b_j^{(n)}$ ვაკანტურია და $b_j^{(n)}$ გვხვდება $W_j^{A_{2n+1}}$ სიმრავლის გადათვლის შესრულებულ ნაწილში (თუ ასეთი $b_j^{(n)}$ არ არსებობს, მაშინ გადადით $2n+3$ ეტაპზე) დასვით პლიური $b_j^{(n)}$ ელემენტის გვერდით B-სიაში და მინუსი A-სიის ყოველ იმ ვაკანტური რიცხვის გვერდით, რომელთა კუთვნილება $\overline{A}_{2n+1}$ სიმრავლისათვის იყო გამოყენებული იმისათვის, რომ დავადგინოთ $b_j^{(n)} \in W_j^{A_{2n+1}}\ldots$ შემდეგ, თუ $j<n$, გადადით A-სიაში და გადაადგილეთ ყველა $\boxed{i}_1$ მარკერი, $j<i\le n$, ქვევით A-სიის თავისუფალ რიცხვებზე.

....

(შევნიშნოთ, რომ ყოველ სიაში გარკვეული რიცხვის გვერდით შეიძლება ჯერ ჰამოჩნდეს მინუსი, ხოლო შემდეგ პლიუსი).

მარტივი ინდუქციური მოსაზრება საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ, რომ ყოველი $\boxed{n}_1$ მარკერი და ყოველი $\boxed{n}_2$ მარკერი გადაადგილდება მხოლოდ სასრულჯერ: $\boxed{0}_1$ არასოდეს არ გადაადგილდება; $\boxed{0}_2$ შეიძლება გადაადგილდეს მაქსიმუმ ერთჯერ; $\boxed{1}_1$ შეიძლება გადაადგილდეს არაუმეტეს ერთჯერ $\boxed{0}_2$ მარკერის ყოველი მდგომარეობის დროს; $\boxed{1}_2$ შეიძლება გადაადგილდეს არაუმეტეს ერთჯერ $\boxed{0}_1$ მარკერის გამო და არა უმეტეს ერთჯერ $\boxed{1}_1$ მარკერის ყოველი მდგომარეობისას და ა.შ.

ვთქვათ $f(x)$ არის $\boxed{x}_1$ მარკერის საბოლოო მდგომარეობა, $g(x)$ არის $\boxed{x}_2$ მარკერის საბოლოო მდგომარეობა. დავუშვათ, რომ $f(x)\in A$. მაშინ $f(x)$ ღებულობს პლიუსს რაღაც $2n+1$ ეტაპზე. $2n+1$ ეტაპზე დაწერილი არცერთი მინუსი (B-სიაში) არ შეიძლება შეიცვალოს პლიუსით, რადგან ყველა $\boxed{k}_2$, $x\le k$, მარკერი მოთავსებულია ყველა ასეთი მინუსის ქვევით, და თუ $\boxed{k}_2$, $k<x$, მარკერმა შეცვალა ერთი ასეთი მინუსი პლიუსით, მაშინ $\boxed{x}_1$ გადაადგილდება, ჩვენი დაშვების საწინააღმდეგოდ, რომ $f(x)$ არის $\boxed{x}_1$ მარკერის საბოლოო მდგომარეობა. აქედან დავასკვნით, რომ $f(x)\in W_x^B$. პირიქით, თუ $f(x)\in W_x^B$, მაშინ, ლემის თანახმად, ისეთი m, რომ m-ზე მეტი ყოველი n-თვის $W_x^{B_{2n}}$ სიმრავლე იძლევა $f(x)$ n-ზე ნაკლებ ნაბიჯზე; რადგან $\boxed{x}_1$ მარკერი ბოლოს და ბოლოს აღწევს მდგომარეობას $f(x)$, $f(x)$-მა საბოლოოდ უნდა მიიღოს პლიუსი; და, ამრიგად, $f(x)\in A$. ამრიგად,

$$f(x)\in A\Leftrightarrow f(x)\in W_x^B.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$g(x)\in B\Leftrightarrow g(x)\in W_x^A.$$

აქედან $A\le_T B$ და $B\le_T A$, და თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

მოყვანილი მეთოდის მსგავს მეთოდს უწოდებენ პრიორიტეტის მეთოდს, ხოლო $\boxed{0}_1,\boxed{0}_2,\boxed{1}_1,\ldots$ დალაგების მსგავს დალაგებას – პრიორიტეტულ დალაგებას.

მოყვანილ დამტკიცებაში იმ მომენტში, როცა მარკერი თავის გვერდით სვამს პლიუსს, ყველა უფრო დაბალი რანგის მარკერი უნდა „ამუშავდეს“, ე.ი. უნდა გადაადგილდნენ ქვევით ისე, რომ მათ შემდეგში არ შეეძლოთ გავლენა მოახდინონ მინუსებზე, რომლებიც გამოჩდნენ ამ მომენტისთვის. პრიორიტეტის ასეთი მეთოდის

ძირითადი ხაზი არის ის ფაქტი, რომ ყოველი მარკერი გადაადგილდება მხოლოდ სასრულჯერ.

შედეგი (პოსტის პრობლემის გადაწყვეტა). არსებობენ ორზე მეტი რ.გ. *T*-ხარისხები.

ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები და *Q*-დაყვანადობა

A სიმრავლე *Q*-დაყვანადია *B* სიმრავლზე (სიმბოლურად, $A \leq_Q B$), თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია *f*, რომ ყოველი $x \in \omega = \{0,1,2,\dots\}$,

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B .$$

თუ, დამატებით, სრულდება პირობა

$$(\forall x)\left(\left|W_{f(x)}\right| < \infty\right),$$

მაშინ *A* სიმრავლე Q_k-დაყვანადია *B* სიმრავლეზე (სიმბოლურად, $A \leq_{Q_k} B$).

თეორემა I. ვთქვათ *A* და *B* რ.გ. სიმრავლეებია. მაშინ

$$A \leq_{Q_k} B \Leftrightarrow A \leq_Q B .$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $A \le_{Q_k} B \Rightarrow A \le_Q B$. დავამტკიცოთ პირიქით: $A \le_Q B \Rightarrow A \le_{Q_k} B$. ვთქვათ

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

მოვახდინოთ $W_{f(x)}$ სიმრავლის „ჩამოჭრის“ შემდეგი პროცესი: ვითვლით $W_{f(x)}$-ის პირველ ელემენტს და ველოდებით, გამოითვლება თუ არა ის B-ში (ერთდროულად გადავითვლით B და A-ს). თუ გამოითვლება, მაშინ გამოვითვლით $W_{f(x)}$-ის მეორე ელემენტს და ა.შ. პროცესი შეწყდება, თუ გარკვეულ მომენტში x გამოითვლება A-ში ან რაიმე რიცხვი $W_{f(x)}$-დან არ შედის B-ში. ამ მომენტისათვის ჩვენ გადავთვლით $W_{f(x)}$ ელემენტთა სასრულ რაოდენობას, არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია g, რომ $W_{g(x)}$ შედგება ამ ელემენტებისაგან. მაშინ, ცხადია, $A \le_{Q_k} B$ g ფუნქციით.

განსაზღვრა. უსასრულო A სიმრავლეს ეწოდება ჰიპერჰიპერიმუნური, თუ არ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ

1. $(\forall x)(W_{f(x)} \cap A \neq \varnothing)$,
2. $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \varnothing)$,
3. $(\forall x)\left(\left|W_{f(x)}\right| < \infty\right)$.

განსაზღვრა. A სიმრავლეს ეწოდება ჰიპერჰიპერმარტივი, თუ

1. A – რეკურსიულად გადათვლადია;
2. $\overline{A}$ – ჰიპერჰიპერიმუნურია.

თეორემა 2. რ.გ. სიმრავლე უსასრულო დამატებით ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ შედის არცერთ Q_k-სრულ სიმრავლეში.

დამტკიცება. ვთქვათ A სიმრავლე არაა ჰიპერჰიპერმარტივი (ჰჰ-მარტივი). მაშინ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია g, რომ ადგილი აქვს მიმართებას: $(\forall x)\left(\left|W_{f(x)}\right| < \infty\right) \& (\forall x)(W_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \varnothing) \& (\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \varnothing)$.

ვთქვათ K კრეატიული სიმრავლეა, $K=\{x:x\in W_x)$ და

$$B=A\bigcup\left(\bigcup_{x\in k}W_{g(x)}\right).$$

$B-Q_k$-სრულია. მართლაც, თუ C ნებისმიერი რ.გ. სიმრავლეა, მაშინ არსებობს ურთიერთცალსახა რეკუსრიული ფუნქცია h, რომ $C\leq_1 K$ h-ით. აქედან გვაქვს

$$x\in C\Leftrightarrow h(x)\in K\Leftrightarrow W_{gh(x)}\subseteq B.$$

პირიქით, ვთქვათ ჰჰ-მარტივი A სიმრავლე შედის Q_k-სრულ B სიმრავლეში. მაშინ $K\leq_{Q_k} B$ რომელიმე რეკურსიული f ფუნქციით. ვთქვათ $a\notin K$. მაშინ

$$W_{f(a)}\bigcap\overline{B}\neq\varnothing.$$

ნაბიჯ-ნაბიჯ ავაგოთ M სიმრავლე.

ნაბიჯი 0. $M_0=\varnothing$.

ნაბიჯი $n+1$. $M_{n+1}=\{x:x\leq n+1\,\&\,W_{f(x),n+1}\bigcap(W_{f(a),n+1}\setminus B_{n+1})\neq\varnothing\}$.

$$M=\bigcup_{n=0}^{\infty}M_n.$$

რადგან $W_{f(a)}$ სასრულია, ამიტომ რაიმე n-დან დაწყებული,

$$W_{f(a),n+1}\setminus B_{n+1}\subseteq\overline{B},$$

და, მაშასადამე, ამ მომენტიდან M_{n+i} $(i\geq1)$ შეიცავს მხოლოდ $\overline{K}$-ს ელემენტებს. ხოლო M შეიცავს მხოლოდ სასრულ რაოდენობას ელემენტებისა K-დან და ყველა იმ x ელემენტს $\overline{K}$-დან, რომ

$$W_{f(x)}\bigcap W_{f(a)}\bigcap\overline{B}\neq\varnothing.$$

M სიმრავლე რ.გ. და ცხადია, ვიცით მისი რაიმე ნომერი n_0. ავაგოთ რ.გ. სიმრავლე M_1 შემდეგნაირად: გადავთვალოთ M_1-ში n_0. თუ M-ის გადათვლის პროცესში ჩვენს შეგვხვდა n_0, მაშინ გადავთვალოთ M_1-ში n_1, სადაც n_1 არის

$$M\setminus\{n_0\}$$

სიმრავლის ნომერი და ა.შ. თუ M_1-ში უკვე არიან $n_0,n_1,\ldots,n_k\,\&\,n_k\in M$, მაშინ გადავთვალოთ M_1-ში n_{k+1}, სადაც n_{k+1} არის

$$M\setminus\{n_0,n_1,\ldots,n_k\}$$

სიმრავლის ნომერი. M_1 სასრულია. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$(\exists n_p)\left(W_{n_p} = M \setminus \{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}\} \,\&\, n_p \cap M \cap \overline{K}\right).$$

მაგრამ, მაშინ $n_p \in W_{n_p}$ (რადგან $n_p \notin K$ და $K = \{x : x \in W_x\}$) და n_p-ზე M_1-სიმრავლის გადათვლა შეწყდება. ამრიგად, M_1-სასრულია, $M_1 \cap \overline{K} \neq \varnothing$ და $M_1 \cap M \cap \overline{K} = \varnothing$.

განვსაზღვროთ მიმდევრობა $W_{g(0)}, W_{g(1)}, \ldots$ შემდეგნაირად: ვთქვათ $W_{g(0)} = W_{f(a)}$, $W_{g(1)} = \bigcup\limits_{n_i \in M_1} W_{f(n_i)}$.

თუ n' არის M_1-ის ის ელემენტი, რომელზედაც ხდება M_1-ის აგების შეწყვეტა, მაშინ

$$W_{f(n')} \cap \overline{B} \neq \varnothing \quad (n' \in \overline{K})$$

და

$$W_{f(n')} \cap W_{f(a)} \cap \overline{B} = \varnothing \quad (n' \notin M).$$

რადგან დანარჩენი n_i ეკუთვნიან M_1-ს $n_i \in K$, ამიტომ $W_{f(n_i)} \subseteq B$.

გვაქვს

$W_{g(0)} \cap W_{g(1)} \cap \overline{B} = \varnothing$.

$W_{g(0)} \cap \overline{B} \neq \varnothing$,

$W_{g(1)} \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

გამოვიყენოთ $W_{g(0)} \cup W_{g(1)}$ ნაცვლად $W_{f(a)}$-ს, გავიმეოროთ ზემოთმოყვანილი პროცესი და ავაგოთ $W_{g(2)}$, შემდეგ გამოვიყენოთ $W_{g(0)} \cup W_{g(1)} \cup W_{g(2)}$ ნაცვლად $W_{f(a)}$-ს ავაგოთ $W_{g(3)}$ და ა.შ. სიმრავლეთა მიღებული მიმდევრობას აქვს თვისება:

$(\forall i)(W_{g(i)} \cap \overline{B} \neq \varnothing)$,

$(\forall i)(\forall j)(i \neq j \Rightarrow W_{g(i)} \cap W_{g(j)} \cap \overline{B} = \varnothing)$.

ახლა ავაგოთ ახალი მიმდევრობა $W_{h(i)}$ შემდეგნაირად: გადავთვალოთ ყველა $W_{g(i)}$ სიმრავლე. თუ რომელიმე $W_{g(j)}$ სიმრავლეში ჩვენ გამოვითვლით რიცხვს b, რომელიც ამ მომენტისათვის უკვე გამოთვლილი იყო $W_{g(i)}$-ში, რაიმე i-სთვის, მაშინ მას არ გადავთვლით $W_{h(j)}$-ში. ამ მეთოდით ჩვენ მივიღებთ მიმდევრობას $W_{h(i)}$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება:

$(\forall i)(W_{h(i)} \cap \overline{B} \neq \varnothing)$,

$(\forall i)(\forall j)(i \neq j \Rightarrow W_{h(i)} \cap W_{h(j)} = \varnothing)$,

$(\forall i)\left(\left|W_{h(i)}\right| < \infty\right).$

ცხადია h არის რეკურსიული ფუნქცია, რომელიც ეწინააღმდეგება B სიმრავლის ჰჰ-მარტივობას.

თეორემა. რ.გ. სიმრავლე უსასრულო დამატებით არის ჰჰ-მარტივი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ შედის არცერთ Q-სრულ სიმრავლეში.

განსაზღვრა. A სიმრავლე არის ნახევრადრეკურსიული, თუ არსებობს ისეთი ორადგილიანი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ

1. $f(x,y)=x$ ან $f(x,y)=y$,
2. $x\in A\vee y\in A\Rightarrow f(x,y)\in A$.

თეორემა. თუ A და B არიან რ.გ. და A არის ნახევრადრეკურსიული $A\neq\varnothing$, $A\neq\omega$, მაშინ $B\leq_T A\Rightarrow B\leq_Q A$.

განსაზღვრა. ეკვივალენტობის მიმართებას η-ს ეწოდება პოზიტიური, თუ სიმრავლე $\{<x,y>: x\eta y\}$ არის რ.გ.

განსაზღვრა. A არის η-ჩაკეტილი, თუ

$$x\in A\,\&\,x\eta y\Rightarrow y\in A.$$

A სიმრავლის η-ჩაკეტვა $[A]_\eta$ არის უმცირესი η-ჩაკეტილი კლასი, რომელიც შეიცავს A-ს.

განსაზღვრა. η-ჩაკეტილი A სიმრავლე არის η-სასრული (η-უსასრულო), თუ ის შეიცავს η-ეკვივალენტური კლასების სასრულ (უსასრულო) რაოდენობას.

განსაზღვრა. ვთქვათ η არის პოზიტიური ეკვივალენტობის მიმართება, A არის η-ჩაკეტილი და $\overline{A}$ არის η-უსასრულო, მაშინ A არის

1. η-მარტივი, თუ ნებისმიერი η-ჩაკეტილი რ.გ. სიმრავლე, რომელიც შედის $\overline{A}$-ში არის η-სასრული.

2. η-ჰიპერმარტივი, თუ არ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია *f*, რომ

$$x \neq y \Rightarrow [D_{f(x)}]_\eta \bigcap [D_{f(y)}] = \varnothing$$

$$[D_{f(x)}]_\eta \bigcap \overline{A} \neq \varnothing .$$

3. η-ჰიპერჰიპერმარტივი, თუ არ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია *f*, რომ

$W_{f(x)}$-სასრულია

$$x \neq y \Rightarrow [W_{f(x)}]_\eta \bigcap [W_{f(y)}]_\eta = \varnothing ,$$

$$[W_{f(x)}]_\eta \bigcap \overline{A} \neq \varnothing .$$

4. η-მაქსიმალური, თუ ყოველ η-ჩაკეტილი რ.გ. B სიმრავლისათვის $B \supseteq A$ გვაქვს $B \setminus A$ ან $\overline{B}$ არის η-სასრული.

5.

თეორემა. η-ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე არ არის Q-სრული.

თეორემა. არსებობს არარეკურსიული რ.გ. სიმრავლე A, რომელიც არის ნახევრადრეკურსიული, η-მაქსიმალური, რომელიმე პოზიტიური η-ეკვივალენტური მიმართებისათვის.

თეორემა. η-ჰიპერჰიპერმარტივი ნახევრადრეკურსიული სიმრავლე არ შეიძლება იყოს T-სრული.

ძირითადი ლიტერატურა

1. H. Rogers. Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Company. New York. 1967.
   Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычисли-мость. М. Мир. 1972.

დამატებითი ლიტერატურა

2. R.I. Soare. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Springer. 1987.