1. ზომად სიმრავლეთა σ-ალგებრა

1.1. X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{S}$ სისტემას ჰქვია <u>σ-ალგებრა</u> თუკი იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას
ა) $\emptyset, X \in \mathbb{S}$
ბ) $A, B \in \mathbb{S} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathbb{S}$
გ) $A_n \in \mathbb{S},\ \ n = 1, 2, \ldots, \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{S}$
ეს განმარტება საკმარისია იმის საჩვენებლად, რომ ნებისმიერი σ-ალგებრა ჩაკეტილია გაერთიანების, თანაკვეთის და სიმრავლური სხვაობის ნებისმიერი თვლადი რაოდენობა ოპერაციების მიმართ.

1.2. ცხადია სიგმა ალგებრათა ნებისმიერი თანაკვეთა ისევ სიგმა ალგებრაა. ამიტომ არსებობს უმცირესი σ-ალგებრა რომელიც მოიცავს სიმრავლეთა რაიმე კლასს. მას ამ კლასზე მოჭიმული სიგმა ალგებრა ეწოდება.

1.3. σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა ეწოდება σ-ადიციურ ფუნქციას: თუ $A_n \in \mathbb{S}$, $n = 1, 2, \ldots,$ სიმრავლეთა თანაუკვეთი სისტემააა, $A_i \cap A_j = \emptyset$ როცა $i \neq j$, მაშინ

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1.1}$$

სიგმა ალგებრის ელემენტებს ვუწოდებთ ზომად სიმრავლეებს.

1.4. თეორემა. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

დამტკიცება. უბრალოდ დავშალოთ შემდეგი სიმრავლეები თანაუკვეთ ნაწილებად: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ და $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. მაშინ 6.6. თეორემის ძალით $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$, $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$ და $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$ და ამ ტოლობების შეკრებით მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

8.2. შედეგი. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ და აგრეთვე $\mu(\cup_{n=1}^{N} A_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$.

8.3. თეორემა. თუ $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ სიმრავლეთა ჩალაგებული მიმდევრობაა, მაშინ

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

დამტკიცება. ავიღოთ თანაუკვეთი სიმრავლეები: $B_1 = A_1$ და $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. მაშინ $A_n = \cup_{i=1}^{n} B_i$ და $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. ამიტომ, 7.3 თეორემის ძალით,

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

8.4. შედეგი. (ზომის ნახევრად σ-ადიციურობა).

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1.2}$$

დამტკიცება. 8.3-ისა და 8.2-ის გათვალისწინებით

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\cup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2. ზომადი ფუნქციები

9.1. $f; X \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება <u>ზომადი</u> თუკი ნებისმიერი t რიცხვისთვის, $t \in \mathbb{R}$, ზომადია სიმრავლე

$$\{f > t\} := \{x \in X : f(x) > t\} = f^{-1}(t, +\infty)\,.$$

9.3. თეორემა. თუ f და g ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ასევე ზომადი იქნება $f+g$, fg, f/g, და ა. შ.

დამტკიცება. სანიმუშოდ დავამტკიცოთ პირველი დებულება და დანარჩენები გამოვა ანალოგიურად.

ვაჩვენოთ სიმრავლური ტოლობა

$$\{x : f(x) + g(x) > t\} = \cup_{\tau\in\mathbb{Q}}\big(\{x : f(x) > \tau\} \cap \{x : g(x) > t - \tau\}\big) \tag{2.1}$$

მართლაც თუ x ეკუთვნის (1)-ის მარჯვენა მხარეს, მაშინ არსებობს ისეთი τ, რომ $f(x)+g(x) > \tau + t - \tau = t$ და x ეკუთვნის მარცხენა მხარესაც.

ეხლა ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია პირიქით ჩართვაც. ვთქვათ $f(x) + g(x) > t$. მაშინ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი რომ $f(x) + g(x) > t + \varepsilon$. ავიღოთ რაციონალური τ ისეთი, რომ $f(x) > \tau > f(x) - \varepsilon$. მაშინ $g(x) > t - \tau$ და $x \in \{f > \tau\} \cap \{g > t - \tau\}$. მაშასადამე x ეკუთვნის (1)-ის მარჯვენა მხარესაც. ე.ი. (1) ტოლობა სრულდება.

(1) ტოლობა გვეუბნება რომ $\{f + g > t\}$ წარმოდგება ზომად სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანების სახით. მაშასადამე ეს სიმრავლე ზომადია. რ.დ.გ.

9.4. თეორემა. თუ გვაქვს f_n, $n = 1, 2, \ldots$, ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა, მაშინ ასევე ზომადია $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს სიმრავლური ტოლობიდან

$$\{x : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \geq t\} = \cap_{m=1}^{\infty} \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x : f_n(x) > t - \frac{1}{m}\}$$

3. აბსტრაქტული ინტეგრალი

10.1. f ფუნქციას ეწოდება <u>მარტივი</u> თუკი მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია.

10.2. $X \supset A$ სიმრავლის ინდიკატორი ეწოდება ფუნქციას

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{თუ} \quad x \in A \\ 0 & \text{თუ} \quad x \notin A. \end{cases}$$

ცხადია $\mathbf{1}_A$ მარტივი ფუნქციაა. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{0, 1\}$.

10.3. თუ f მარტივი ფუნქცია იღებს მნიშვნელობებს $a_1, a_2, \ldots, a_n$, მაშინ იგი ყოველთვის ჩაიწერება ტოლობით

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} \quad \text{სადაც} \quad A_k = \{x \in X : f(x) = a_k\} = f^{-1}\{a_k\} \tag{3.1}$$

ცხადია $A_i \cap A_j = \emptyset$ როცა $i \neq j$. ცხადია აგრეთვე, რომ მარტივი ფუნქცია ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ზომადია თითოეული A_k.

10.4. (1) მარტივი ზომადი ფუნქციის ინტეგრალი განისაზღვრება ტოლობით

$$\int_X f\,dm = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu(A_k) = a_1 \cdot \mu(A_1) + a_2 \cdot \mu(A_2) + \ldots + a_n \cdot \mu(A_n)$$

იგი ტოლია f-ის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებული “მართკუთხედების” ფართობების ჯამის ნიშნების გათვალისწინებით(თუკი შევინარჩუნებთ მართკუთხედების ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას: ფუძის “სიგრძე” × სიმაღლე). ცხადია დადებითი ფუნქციის ინტეგრალიც დადებითია.

10.5. ლემა. თუ f მარტივი ზომადი ფუნქციაა და $|f| \le \varepsilon$, მაშინ

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \varepsilon\,.$$

დამტკიცება:

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \mu(A_k) \le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot \mu(A_k) = \varepsilon \cdot \mu\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \varepsilon \cdot mX = \varepsilon$$

10.6. ლემა. თუ f და g მარტივი ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ასეთივეა $f+g$-ც და

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

დამტკიცება: ვთქვათ $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ და $g = \sum_{k=1}^{l} b_k \mathbf{1}_{B_k}$ (A_k-ები თანაუკვეთია და ასეთივეა B_k-ებიც. შეგვიძლია აგრეთვე ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\cup_{k=1}^{n} A_k = \cup_{k=1}^{n} B_k = X$). მაშინ $f+g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_i+b_j)\mathbf{1}_{A_i\cap B_j}$ და

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\big(a_i\mu(A_i\cap B_j) + b_j\mu(A_i\cap B_j)\big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{l} \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^{l} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu\big(\cup_{j=1}^{l}(A_i\cap B_j)\big) +$$

$$\sum_{j=1}^{l} b_j \mu\big(\cup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_j)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j\mu(B_j) = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

10.7. ლემა. თუ f მარტივი ზომადი ფუნქციაა და C რაიმე მუდმივია, მაშინ

$$\int_X C\cdot f\,dm = C\cdot\int_X f\,dm$$

დამტკიცება. თუ f წარმოდგება (1) სახით, მაშინ

$$\int_X C\cdot f\,dm = \sum_{k=1}^{n} C\,a_k\cdot\mu(A_k) = C\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\mu(A_k) = C\cdot\int_X f\,dm$$

10.8. შედეგი. თუ f და g მარტივი ზომადი ფუნქციებია და $f \ge g$, მაშინ $\int_X f\,d\mu \ge \int_X g\,dm$

10.9. თუ $f : X \to [0,a]$ ზომადი ფუნქციაა და $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = a$ არის $[0,a]$-ს ისეთი დაყოფა, რომ $\delta_n := \sup_{k\le n}|a_k - a_{k-1}| \le \varepsilon$ მაშინ

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\cdot\mathbf{1}_{\{x\in X: a_{k-1}<f(x)\le a_k\}} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\cdot\mathbf{1}_{\{f^{-1}(a_{k-1},a_k]\}}$$

არის მარტივი ზომადი ფუნქცია და $\sup\limits_{x\in X}|f(x)-f_n(x)| \le \varepsilon$. ამიტომ ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ f-ის ინტეგრალი არის f_n-ის ინტეგრალთან ε სიზუსტით. უფრო მკაცრად f-ის ინტეგრალი

განიმარტება ტოლობით:

$$\int_X f\,d\mu := \lim_{\delta_n\to 0}\int_X f_n\,dm = \lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\cdot\mu\{f^{-1}(a_{k-1},a_k]\} \tag{3.2}$$

10.10. თეორემა. ყოველი შემოსაზღვრული დადებითი ზომადი f-ისთვის (2) ზღვარი არსებობს და სასრულია, ანუ ინტეგრალი განიმარტება (რიმანის ინტეგრალისგან განსხვავებით)

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $\int_X f_n\,dm$ კოშის მიმდევრობაა. ნებისმიერი მცირე ε-ისთვის ავიღოთ $\delta_N < \frac{\varepsilon}{2}$, ისე რომ $\sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n \ge N$. ავიღოთ n და $l \ge N$. მაშინ

$$|f_n(x)-f_l(x)| = |f_n(x)-f(x)+f(x)-f_l(x)| \le |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_l(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

და 10.5–10.7 ლემების ძალით $\left|\int_X f_n\,dm - \int_X f_l\,d\mu\right| = \left|\int_X (f_n-f_l)\,d\mu\right| \le \varepsilon$.

10.11. თუ $f : X \to \mathbb{R}$ ზომადი ფუნქციაა, მაშინ ღერძზე განსაზღვრულ ფუნქციას $D_f : \mathbb{R} \to X$ ქვემოთ მოცემული ტოლობით

$$D_f(t) = \mu\{x \in X : f(x) > t\}$$

ეწოდება f ფუნქციის განაწილების ფუნქცია.

10.12. ლემა. D_f არის კლებადი, მარჯვნიდან უწყვეტი და $\lim\limits_{t\to-\infty} D_f(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} D_f(t) = 0$

დამტკიცება. ვინაიდან $\{f > t_1\} \subset \{f > t_2\}$ როცა $t_1 > t_2$, ამიტომ $\mu\{f > t_1\} \le \mu\{f > t_2\}$, ანუ D_f კლებადი (არაზრდადი) ფუნქციაა.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0+} D_f(t) &= \lim_{t\to t_0+}\mu\{f>t\} = \mu\big(\cup_{t>t_0}\{f>t\}\big) = \mu\{f>t_0\} = D_f(t_0)\\
\lim_{t\to-\infty} D_f(t) &= \lim_{t\to-\infty}\mu\{f>t\} = \mu\big(\cup_{t\in\mathbb{R}}\{f>t\}\big) = mX = 1\\
\lim_{t\to+\infty} D_f(t) &= \lim_{t\to+\infty}\mu\{f>t\} = \mu\big(\cap_{t\in\mathbb{R}}\{f>t\}\big) = \mu(\emptyset) = 0
\end{aligned}$$

10.13. შენიშვნა. ალბათობის თეორიაში განაწილების ფუნქცია ჰქვია შემდეგი ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციას $F_f(t) = \mu\{x : f(x) \le t\} = 1 - D_f(t)$. იგი გამოდის ზრდადი მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია რომლის ზღვარიც $-\infty$-ში არის 0 და $+\infty$-ში არის 1. ამ ფუნქციის წარმოებულს, თუკი იგი არსებობს, ჰქვია განაწილების სიმკვრივე $P_f(t) = F_f'(t)$

10.14. ინტეგრალი შეიძლება ჩაიწეროს განაწილების ფუნქციის რიმანის ინტეგრალით:

თეორემა. ვთქვათ $f : X \to [0,a]$ ზომადი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_X f\,d\mu = \int_0^a D_f(t)\,dt \tag{3.3}$$

დამტკიცება. გავაკეთოთ $[0,a]$-ს დაყოფები $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = a$ რომელთათვისაც $\delta_n \to 0$ (იხ. §10.8) n-ის ზრდასთან ერთად. თუ ჩავწერთ f-ის ინტეგრალს 10.9 თეორემის გათვალისწინებით, D_f-ის რიმანის ინტეგრალს მისი განმარტებიდან გამომდინარე და

გავითვალისწინებთ, რომ $a_0 = 0$ და $D_f(a_n) = D_f(a) = \mu\{f > a\} = \mu(\emptyset) = 0$ მივიღებთ

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \cdot \mu\{a_{k-1} < f \le a_k\} = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\big(D_f(a_{k-1}) - D_f(a_k)\big) =$$

$$\lim_{\delta_n \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} D_f(a_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} D_f(a_k) \right) = \lim_{\delta_n \to 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D_f(a_k) - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} D_f(a_k) \right) =$$

$$\lim_{\delta_n \to 0} \left(a_0 D_f(a_0) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) D_f(a_k) - a_{n-1} D_f(a_n) \right) = \int_0^a D_f(t)\,dt.$$

10.15. შენიშვნა. ალბათობის თეორიაში ინტეგრალის ანუ მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულა (იხ. 1.13)

$$E(f) = \int_X f\,d\mu = \int_0^a t \cdot P_f(t)\,dt$$

ეს ფორმულა მიიღება (3)-ისგან ნაწილობითი ინტეგრებით თუ გავითვალისწინებთ, რომ $F_f(a) = \mu\{f \le a\} = 1$. მართლაც $\int_0^a t \cdot P_f(t)\,dt = \int_0^a t \cdot F_f'(t)\,dt = t\,F_f(t)\big|_0^a - \int_0^a F_f(t)\,dt =$ $a - \int_0^a F_f(t)\,dt = \int_0^a (1 - F_f(t))\,dt = \int_0^a D_f(t)\,dt = \int_X f\,d\mu$

10.16. თუ $0 \le f$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია, მაშინ მის ინტეგრალს განვიხილავთ როგორც წაკვეთილი ინტეგრალების ზღვარს (როგორც არასაკუთრივ ინტეგრალს)

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{a \to \infty} \int_X f_a\,d\mu \tag{3.4}$$

სადაც $f_a(x) = f(x)$ როცა $f(x) \le a$ და $f_a(x) = a$ როცა $f(x) > a$. a-ს ზრდასთან ერთად ინტეგრალი იზრდება (იხ. შედეგი 10.8) ამიტომ ზღვარი (4)-ში ყოველთვის არსებობს, მაგრამ ზოგჯერ იგი შეიძლება გამოვიდეს $+\infty$-ის ტოლი. ამ დროს ამბობენ რომ ფუნქცია არაინტეგრებადია. არაშემოსაზღვრული ფუნქციისთვის (3) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_X f\,d\mu = \int_0^\infty D_f(t)\,dt$$

თუ f ნებისმიერი ნიშნისაა, რომლის მოდულიც ინტეგრებადია $\int_X |f|\,d\mu < \infty$, ცალ-ცალკე განვიხილავთ მის დადებით და უარყოფით ნაწილს $f^+ = \max(f, 0)$ და $f^- = \max(-f, 0)$. ამ დროს $f = f^+ - f^-$ და ინტეგალს განვმარტავთ ტოლობით: $\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$.

4. ინტეგრალის თვისებები

ა) (წრფივობა) $\int_X (f + g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$ და $\int_X c \cdot f\,dm = c \cdot \int_X f\,dm$

ბ) (ზემოდან შეფასება) $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu \le \sup_{x \in X} |f(x)|(\mu(X))$.

ამასთანავე, თუკი ინტეგრალს ზომად სიმრავლეზე განვმარტავთ ტოლობით $\int_A f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A f\,d\mu$, გვექნება ინტეგრალის ადიციურობის და σ-ადიციურობის თვისებებიც

$$\text{გ)}\ \int_{A \cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu, \text{ და } \int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu$$

როცა $A \cap B = \emptyset$ პირველ შემთხვევაში და $A_i \cap A_j = \emptyset$ მეორე შემთხვევაში.

ცხადია აგრეთვე, რომ (10.2) ფორმულა ფაქტიურად გვეუბნება, რომ ინტეგრალი შეიძლება განიმარტოს ტოლობითაც

$$\int_X f\,d\mu = \sup_{SX\ni g\leq f}\int_X g\,d\mu\,, \tag{4.1}$$

სადაც SX არის X სეგმენტზე განსაზღვრულ მარტივ (ზომად) ფუნქციათა კლასი.

11.2. ინტეგრალის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ე.ჵ. ჩებიშევის უტოლობა

$$\mu\{x\in X : |f|>t\}\leq \frac{1}{t}\int_X |f|\,d\mu\,.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $f\geq 0$. ცხადია, ყოველი დადებითი t-სთვის, სრულდება შემდეგი უტოლობა (ფუნქციებს შორის)

$$f\geq t\cdot \mathbf{1}_{\{f>t\}}. \tag{4.2}$$

თუკი ვაინტეგრებთ ამ უტოლობის ორივე მხარეს გვექნება $\int_X f\,d\mu\geq t\cdot\mu\{f>t\}$. საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

11.3. ეხლა დავამტკიცოთ შემდეგი მარტივი დებულება, რომ თუკი არაუარყოფითი ფუნქციის ინტეგრალი 0-ია, მაშინ ასეთი ფუნქცია 0-ისგან განსახვავებული შეიძლება იყოს მხოლოდ ნული ზომის სიმრავლეზე, ანუ თუკი $f\geq 0$, მაშინ $\int_X f\,d\mu=0 \Longleftrightarrow f=0$ თითქმის ყველა x-ისთვის X-დან. “თითქმის ყველგან”ამ შემთხვევაში არის მათემატიკური ტერმინი (მას შევამოკლებთ ხოლმე როგორც “თ.ყ.”) და ნიშნავს, რომ მოცემული პირობა სრულდება ყველგან, გარდა შესაძლებელია 0 ზომის სიმრავლეზე.

დამტკიცება: (1) ტოლობის ძალით, ცხადია რომ თუ $f=0$ თ.ყ. მაშინ $\int_X f\,d\mu=0$. უნდა ვაჩვენოთ პირიქით გამომდინარეობა, რომ თუკი ინტეგრალი ნულია, მაშინ $\mu\{f\neq 0\}=0$. ვინაიდან $f\geq 0$, ამიტომ $\{f\neq 0\}=\{f>0\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{f>\frac{1}{n}\}$. მაგრამ ყოველი n-ისთვის $\mu\{f>\frac{1}{n}\}\leq n\int_X f\,d\mu=0$, და 0 ზომის სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება ისევ 0 ზომისაა. რ.დ.გ.

11.4. ინტეგრალის თეორიაში, ფუნქციები რომლებიც თ.ყ. ემთხვევიან ერთმანეთს გაიგივებულია, ანუ ყოველი ფუნქციის მნიშვნელობები გვაინტერესებს 0 ზომის სიზუსტით, რადგან 0 ზომის სიმრავლეები ინტეგრალის მნიშვნელობაზე როგორც ვნახეთ გავლენას ვერ ახდენს. ფორმალურად ეს კეთდება ექვივალენტობის მიმართებით $f\sim g$ თუკი $\mu\{f\neq g\}=0$.

5. L_p სივრცეები და ფუნქციათა კრებადი მიმდევრობები

12.1. f ფუნქციის p ნორმა $\|\cdot\|_p$, სადაც $p\geq 1$, განიმარტება ტოლობით

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

ნორმას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისებები;

ა) $\|f\|_p\geq 0,\quad \|f\|_p=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $f=0$;

ბ) $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\cdot\|f\|_p$; გ) $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$ (იგივე მინკოვსკის უტოლობა)

12.2. L_pX სივრცე არის იმ $f:X\to\mathbb{R}$ (ზომად) ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა p ნორმა სასრულია

$$L_pX := \{f : \|f\|_p<\infty\}.$$

ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეს $L:=L_1$. ამ სივრცეში განვიხილავთ ფუნქციათა მიმდევრობების სამი სხვადასხვა ტიპის კრებადობებს. ყველგან შემდგომში ვიგულისხმებთ რომ განხილული ფუნქციები არიან განსაზღვრული სასრულ X სეგმენტზე,

$|a-b| < \infty$, და არიან ზომადნი. §9.4-ის თანახმად, ზომადნი იქნებიან აგრეთვე ზღვარითი ფუნქციები

12.3. f_n, $n=1,2,\ldots$, ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია f-ისკენ თითქმის ყველგან (თ.ყ.), $f_n \to f$, თუკი $f_n(x) \to f(x)$ თ.ყ. x-თვის X-დან.

12.4. f_n ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია f-ისკენ ზომით, $f_n \rightrightarrows f$, თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის

$$\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \to 0.$$

12.5. f_n ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია f-ისკენ ნორმით, თუკი

$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

უნდა კარგად გვესმოდეს რა დამოკიდებულებააა ამ ტიპის კრებადობებს შორის.

12.6. თეორემა. თუ f_n ნორმით კრებადია, მაშინ ის ზომით კრებედიცაა, ანუ

$$\|f_n - f\| \to 0 \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f$$

დამტკიცება უშუალოდ მიიღება ჩებიშევის უტოლობიდან $\mu\{|f_n - f| > \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon}\|f_n - f\| \to 0$.

12.7. ცხადია თუ $\|f_n - f\| \to 0$ მაშინ $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$. მართლაც $\left|\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f)\, d\mu\right| \le \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$.

12.8. განვიხილოთ X-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{როცა } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{როცა } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

და იგივურად 0-ის ტოლი ფუნქცია $f(x) = 0$ როცა $x \in X$. მაშინ ცხადია, რომ ეს ფუნქციათა მიმდევრობა მიისწრაფის თ.ყ. და ზომით f-ისკენ, მაგრამ $\|f_n - f\| = \int_0^{1/n} n\, dx = 1 \not\to 0$. ანუ 12.7 თეორემის შებრუნებული თეორემა არ არის სწორი.

12.9. (თეორემა) თუ f_n ფუნქციათა მიმდევრობა თ.ყ. კრებადია f-ისკენ, $f_n \to f$, მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია ზომითაც, $f_n \rightrightarrows f$.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი ε. ვინაიდან

$$\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \tag{5.1}$$

და $\mu\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \le \mu\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n(x) - f(x)| \ne 0\} = 0$. ამიტომ $\mu\left(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$. მაშასადამე, 8.3 თეორემის გათვალისწინებით $\lim_{k\to\infty} \mu\left(\cup_{n=k}^{\infty}\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$, ანუ
$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$. რ.დ.გ.

12.10. განვიხილოთ X-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობა: $f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{41}, \ldots$ სადაც

$$f_{nj}(x) = \begin{cases} 1 & \text{როცა } \frac{j-1}{n} \le x < \frac{j}{n} \\ 0 & \text{როცა } x \notin \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right) \end{cases}, \qquad j = 1,2,\ldots,n; \quad n = 1,2,\ldots,$$

ცხადია ეს ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია ზომით $f \equiv 0$ ფუნქციისკენ, მაგრამ $f(x) \not\to 0$ ყველა x-ისთვის X-დან. მაშასადამე 12.9 თეორემის შებრუნებული არ არის სწორი. მიუხედავად ამისა სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

12.11. (რისის თეორემა) თუ f_n ზომით კრებადია f-ისკენ, $f_n \rightrightarrows f$, მაშინ f_n-დან გამოიყოფა ისეთი ქვემიმდევრობა f_{n_k} რომელიც თ.ყ. კრებადია f-ისკენ, $f_{n_k} \to f$.

დამტკიცება. ავიღოთ $\varepsilon_k \searrow 0$, ვთქვათ $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. f_n-იდან გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $f_n^{(1)}$, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in X : |f_n^{(1)}(x) - f(x)| > \varepsilon_1\} < \infty.$$

მაშინ, ბორელ კანტელის ლემის ძალით (იხ §8.12)

$$\mu\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x \in X : |f_n^{(1)}(x) - f(x)| > \varepsilon_1\}\right) = 0$$

$f_n^{(1)}$-იდან გამოვყოთ $f_n^{(2)}$ ქვემიმდევრობა , რომლისთვისაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in X : |f_n^{(2)}(x) - f(x)| > \varepsilon_2\} < \infty.$$

მაშინ

$$\mu\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x \in X : |f_n^{(2)}(x) - f(x)| > \varepsilon_2\}\right) = 0$$

და ასე შემდეგ გავაგრძელოთ უსასრულოდ. მიღებული ფუნქციების კვადრატული ცხრილიდან $f_n^{(j)}$ გამოვყოთ დიაგონალური ქვემიმდევრობა $f_n^{(n)}$ (გააკეთეთ შესაბამისი ნახატი), რომელიც იქნება თავიდან არსებული მიმდევრობის რაღაც f_{n_k} ქვემიმდევრობა.

ნებისმეირი დადებითი ε-თვის, თუკი $\varepsilon_k < \varepsilon$, გვექნება

$$\mu\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \le \mu\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon_k\}\right) = 0$$

და მაშასადამე $\mu\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$ (იხ. (1)). ე.ი. $\mu\{x \in X : \lim_{n\to\infty}|f_n^{(n)}(x) - f(x)| \neq 0\} = \mu\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n^{(n)}(x) - f(x)| > 0\} =$
$\mu\left(\cup_{k=1}^{\infty}\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$. რ.დ.გ.

12.12. როგორც 12.8-ში ვნახეთ, თითქმის ყველგან კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობ ნორმით კრებადობა. მაგრამ თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა იყოს ერთობლივ შემოსაზღვრული, მაშინ ადგილი აქვს ნორმით კრებადობას:

თეორემა (შემოსაზღვრულად კრებადობის შესახებ). თუ $f_n \to f$ და $|f_n| < M$, მაშინ $\|f_n - f\| \to 0$.

დამტკიცება. ნებისიერი დადებითი ε-ისთვის გვექნება

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu = \int_{\{|f_n - f| \le \varepsilon\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f|\, d\mu \le \varepsilon \cdot \mu\{x \in X : |f_n - f| \le \varepsilon\}$$
$$+2M \cdot \mu\{x \in X : |f_n - f| > \varepsilon\} \le \varepsilon(\mu(X)) + 2M \cdot \mu\{x \in X : |f_n - f| > \varepsilon\}.$$

12.10 თეორემის თანახმად, $f_n \rightrightarrows f$. მაშასადამე უკანასკნელი გამოსახულების მეორე შესაკრები მიისწრაფის 0-ისკენ და ვღებულობთ

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \le \varepsilon(\mu(X))$$

საიდანც გამომდინარეობს ნორმით კრებადობა ε-ის ნებისმიერობის გამო.

12.13. დამტკიცებულ თეორემებს გამოვიყენებთ რიმანის ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის დასადგენად.

თეორემა. ვთქვათ, f შემოსაზღვრულია X-ზე. იმისათვის რომ არსებობდეს მისი რიმანის ინტეგრალი აუცილებელია და საკმარისი f-ის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე იყოს 0 ზომის. ამ შემთხვევაში

$$\int_X f(x)\, dx = \int_X f\, d\mu. \tag{5.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, A არის f-ის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე.

თუ $x_0 \in X$, განვმარტოთ "ნახტომი"

$$N(x_0) = \inf_{\varepsilon \to 0} \sup_{x,y \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} |f(x) - f(y)| .$$

ცხადია $x_0 \in A \iff N(x_0) > 0$. დავუშვათ $A_k := \{x \in X : N(x) > \frac{1}{k}\}$. ცხადია $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, და $\cup_k A_k = A$.

განვიხილოთ X-ის ნებისმიერი დაყოფა, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ და ვისარგებლოთ §1.1-ის აღნიშვნებით:

$$\overline{f}_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x) \quad \text{და} \quad \underline{f}_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x).$$

განვიხილოთ ფუნქციები $g_n(x) = \overline{f}_i$ და $h_n(x) = \underline{f}_i$, როცა $x \in [x_i, x_{i+1})$, $0 \le i < n$. მაშინ g_n და h_n უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია, $n = 1, 2, \ldots$, და მათი ინტეგრალები იქნება,შესაბამისად, დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები:

$$\overline{D}(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \int_X g_n \, d\mu \quad \text{და} \quad \underline{D}(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \int_X h_n \, d\mu.$$

თუ $\mu(A) \neq 0$ მაშინ, ვინაიდან თვლადი რაოდენობა 0 ზომის სიმრავლეების გაერთიანება ისევ 0 ზომისაა, არსებობს ისეთი k, რომ $\mu(A_k) \neq 0$. ე.ი. იარსებებს ისეთი $\delta > 0$, რომ $\mu(G) > \delta$ ყველა ღია G-თვის რომელიც მოიცავს A_k-ს. ცალკე განვიხილოთ დაყოფის ის ინტერვალები, რომლებიც კვეთენ A_k-ს. გვექნება

$$\overline{D} - \underline{D} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{f}_i (x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f}_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_{i+1} - x_i) \ge$$

$$\sum_{\{i : (x_i, x_{i+1}) \cap A_k \neq \emptyset\}} (\overline{f}_i - \underline{f}_i)(x_{i+1} - x_i) \ge \frac{1}{k} \sum_{\{i : (x_i, x_{i+1}) \cap A_k \neq \emptyset\}} (x_{i+1} - x_i) \ge \frac{1}{k} m^*(A_k) \ge \frac{\delta}{k} .$$

მივიღეთ, რომ დარბუს ზედა და ქვედა ჯამებს შორის სხვაობა ყოველთვის მეტია რაღაც ფიქსირებულ რიცხვზე, ე.ი. რიმანის ინტეგრალი არ არსებობს.

თუკი $\mu(A) = 0$, მაშინ $g_n(x) \to f(x)$ და $h_n(x) \to f(x)$ თითქმის ყველგან, კერძოდ ყველა უწყვეტობის წერტილში (აჩვენეთ!). ამიტომ 12.12 თეორემისა და 12.7 შენიშვნის გათვალისწინებით

$$\int_X g_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu \quad \text{და} \quad \int_X h_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu,$$

ანუ დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები ერთიდაიგივე რიცხვისკენ მიისწრაფიან და სრულდება (2) ტოლობაც.

ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ აგრეთვე რამოდენიმე ცნობილ თეორემას ფუნქციათა კრებადი მიმდევრობების შესახებ.

12.14. ფატუს თეორემა. თუ f_n დადებით ფუნქციათა მიმდევრობა, $f_n \ge 0$, კრებადია თ.ყ f ფუნქციისკენ, $f_n \to f$, მაშინ

$$\int_X f \, d\mu \le \underline{\lim}_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

კერძოდ, არ გამოირიცხება შესაძლებლობა, რომ ამ უტოლობის რომელიმე მხარე იყოს $+\infty$.

დამტკიცება. დავუშვათ g ისეთი მარტივი ფუნქციაა რომ $0 \le g \le f$. დავუშვათ $g_n(x) = \min(g(x), f_n(x))$, $n = 1, 2, \ldots$. მაშინ $g_n \to g$ თ.ყ. და შემოსაზღვრულად კრებადობის თეორემის

ძალით (იხ.12.12) $\int_X g_n\,d\mu \to \int_X g\,d\mu$. აგების ძალით $g_n \le f_n$ და შესაბამისად $\int_X g_n\,d\mu \le \int_X f_n\,d\mu$. ამიტომაც ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\int_X g\,d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

თუ ავიღებთ სუპრემუმს ყველა g-ს მიმართ (იხ. (11.1)) მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

12.15. თეორემა (მონოტონური კრებადობის შესახებ). თუ f_n დადებით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობაა და $f_n \to f$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

აქაც არ გამოვრიცხავთ შესაძლებლობას, რომ ამ ტოლობის ორივე მხარე იყოს $+\infty$.

დამტკიცება. ვინაიდან $f_n(x) \le f(x)$ თ.ყ. x-ისთვის, გვაქვს $\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu$ ყოველი n-ისთვის. მაშასადამე $\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu$ და ფატუს თეორემასთან ერთად ეს უტოლობა გვაძლევს დასამტკიცებელ ტოლობას.

12.16. წინა თეორემიდან, თუკი მწკრივებს ჩავწერთ კერძო ჯამების ტერმინებში, მივიღებთ ლევის თეორემას.

თეორემა. თუ h_n არის დადებით ფუნქციათა მიმდევრობა, მაშინ

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} h_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X h_n\,d\mu$$

12.17. შედეგი. თუ h_n არის დადებით ფუნქციათა მიმდევრობა და $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X h_n\,d\mu < \infty$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) < \infty$ თ.ყ. x-ისთვის. (მითითება: თუ $\mu\{f=\infty\} > 0$, მაშინ $\int_X f\,d\mu = \infty$.)

12.8. შედეგი. ვთქვათ g დადებითი ფუნქციაა და

$$g_N(x) = \begin{cases} g(x) & \text{როცა } g(x) \le N \\ 0 & \text{როცა } g(x) > N \end{cases}, \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

მაშინ

$$\lim_{N\to\infty}\int_X g_N\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 12.15-დან რადგან $g_N(x)$ ზრდადი (არამკაცრად) მიმდევრობაა ყოველი x-ისთვის.

12.19. თეორემა (ინტეგრებადი მაჟორანტის შესახებ). თუ f_n, $n = 1, 2, \ldots$, ფუნქციათა მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისკენ, $f_n \to f$ თ.ყ., და თუ არსებობს ისეთი დადებითი ინტეგრებადი g ფუნქცია, რომ $|f_n(x)| \le g(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

და შესაბამისად (იხ. §12.7)

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

დამტკიცება. ნებისმიერი დადებითი ε-ისთვის ავიღოთ იმდენად დიდი N რომ შესრულდეს უტოლობა $\int_X g\,d\mu - \int_X g_N\,d\mu < \varepsilon$ (იხ.12.18). ვთქვათ $A_N := \{x \in X : g(x) \le N\}$. მაშინ ცხადია $g_N = \mathbf{1}_{A_N} g$ და $\varepsilon > \int_X g\,d\mu - \int_X \mathbf{1}_{A_N} g\,d\mu = \int_X g\,d\mu - \int_{A_N} g\,d\mu = \int_{A_N^c} g\,d\mu$ სადაც $A_N^c := X \setminus A_N$. თუ განვიხილავთ ფუნქციათა მიმდევრობას $\mathbf{1}_{A_N} f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, მაშინ ეს

მიმდევრობა იქნება შემოსაზღვრული, $|\mathbf{1}_{A_N} f_n(x)| \leq N$, და თ.ყ. კრებადი $\mathbf{1}_{A_N} f$-ისკენ. ამიტომ 12.12 თეორემის ძალით

$$\int_X |\mathbf{1}_{A_N} f_n - \mathbf{1}_{A_N} f| \, d\mu = \int_{A_N} |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

მაშასადამე

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_X |f_n - f| \, d\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{A_N} |f_n - f| \, d\mu + \int_{A_N^c} |f_n - f| \, d\mu \right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{A_N} |f_n - f| \, d\mu +$$
$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{A_N^c} |f_n - f| \, d\mu \leq \int_{A_N^c} 2g \, d\mu < 2\varepsilon$$

საიდანაც მიიღება თეორემა ε-ის ნებისმიერობის გამო.

ჩვენ დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბებთ კიდევ რამოდენიმე მნიშვნელოვან თეორემას ინტეგრალის თეორიიდან.

12.20. თეორემა (ლუზინის). f იყოს ნებისმიერი (ზომადი) ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია g რომლისთვისაც

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$$

12.21. (თეორემა განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულის შესახებ) ვთქვათ $f \in L_1(a, b)$. მაშინ

$$F(x) = \int_a^x f \, d\mu, \qquad a < x < b, \tag{5.3}$$

ფუნქციის წარმოებული არსებობს თ.ყ. x-ისთვის და

$$F'(x) = f(x) \quad \text{თ.ყ.}$$

შეგახსენებთ, რომ თუ f უწყვეტია და (3)-ში გაიგება რიმანის ინტეგრალი, მაშინ ზედა ტოლობა სრულდება ყველა x-ისთვის.

12.22. უწყვეტ F ფუნქციას ეწოდება <u>აბსოლუტურად უწყვეტი</u>, თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1} |x_{i+1} - x_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \varepsilon \, .$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ (3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია. სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც.

12.23. თეორემა (აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის წარმოებულის შესახებ). ვთქვათ $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ინტეგრებადი ფუნქციაა და

$$F(x) = \int_0^x f \, dm.$$

მაშინ

$$F'(x) = f(x) \tag{5.4}$$

თ.ყ. x-თვის $[0, 1]$-დან.

დაფარვის ლემა 3.2. ვთქვათ $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ (0,1)-ის ინტერვალთა რაღაც სისტემაა, და $\varepsilon > 0$. მაშინ არსებობს სასრული თანაუკვეთი ქვესისტემა $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} m(\Delta_i) = m\left(\cup_{i=1}^{n}\Delta_i\right) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\cdot m\left(\cup_{\alpha\in\Gamma}\Delta_\alpha\right). \tag{5.5}$$

დამტკიცება. ავიღოთ ჩაკეტილი $F \subset \cup_{\alpha\in\Gamma}\Delta_\alpha$-ის რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$m(F) \geq (1-\varepsilon)\cdot m\left(\cup_{\alpha\in\Gamma}\Delta_\alpha\right). \tag{5.6}$$

$\{\Delta_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ იქნება F-ის დაფარვა. ამოვარჩიოთ მისგან სასული ქვედაფარვა $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$. ვთქვათ $\Delta_i = (a_i, b_i)$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ეს დაფარვავა "მინიმალურია"(ე.ი. $\cup_{i=1}^{k}\Delta_i$ შემცირდება მისგან თუნდაც ერთი ინტერვალის ამოგდებითაც კი) და $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ (აჩვენეთ, რომ $\leq$ არ გვექნება დაფარვის მინიმალურობის გამო!). მაშინ კენტნომრიანი და ლუწნომრიანი ინტერვალების სისტემები თანაუკვეთი ინტერვალებისგან შედგება (აჩვენეთ!) და რადგან $\sum_{i=1}(b_i - a_i) \geq m(F)$ ამიტომ $\sum_{i=2j}(b_i - a_i)$ ან $\sum_{i=2j+1}(b_i - a_i)$ მეტია $\frac{1}{2}m(F)$-ზე. ე.ი., რადგან სრულდება (11), ამიტომ შესრულდება (12)-იც.

ლემა 3.3. ვთქვათ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ინტეგრებადი ფუნქციაა და $\varepsilon > 0$. მაშინ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია g, რომ

$$\int_0^1 |f-g|\,dm < \varepsilon.$$

მითითება: ჯერ განიხილეთ შემთხვევა, როცა

$$f = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1\text{-ს } A\text{-ზე} \\ 0\text{-ს } A\text{-ს გარეთ.} \end{cases}$$

შემდეგ, როცა $f = \sum_i \xi_i \mathbf{1}_{\mathbf{A_i}}$ მარტივი ფუნქციია.

განვიხილოთ მაქსიმალური ოპერატორი M

$$Mf(x) = \sup_{(a,b)\ni x} \frac{1}{b-a}\int_a^b |f|\,dm$$

ლემა 3.4 (სუსტი ტიპის უტოლობა):

$$m\{x : Mf(x) > \lambda\} \leq \frac{2+\varepsilon}{\lambda}\int_0^1 |f|\,dm \tag{5.7}$$

დამტკიცება. ყოველი x წერტილი $\{Mf > \lambda\}$-დან დავფაროთ Δ_x ინტერვალით, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$\int_{\Delta_x} |f| dm > \lambda|\Delta_x|.$$

ცხადია $m\left(\cup_{x\in\{Mf>\lambda\}}\Delta_x\right) \geq m\{x : Mf(x) > \lambda\}$. დაფარვის ლემის ძალით არსებობს თანაუკვეთი ქვესიტემა $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} m(\Delta_i) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\cdot m\left(\cup_x\Delta_x\right) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\cdot m\{x : Mf(x) > \lambda\}. \tag{5.8}$$

ე.ი.$\lambda m\{x : Mf(x) > \lambda\} \le \frac{2}{1-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} \lambda m(\Delta_i) \le \frac{2}{1-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta_i}|f|\,dm \le \frac{2}{1-\varepsilon}\int_0^1|f|\,dm$ საიდანაც მიიღება (12) (შენიშვნა ε სხვადასხვაა (12)-ში და (13)-ში. შეიძლება?)

თეორემა 3.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ

$$N_f(x) := \inf_{\delta\to 0}\ \sup_{\Delta\ni x,\,|\Delta|<\delta}\left|\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta} f\,dm - f(x)\right|.$$

ცხადია:

1) $F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow N_f(x) = 0$

2) $N_{f+g}(x) \le N_f(x) + N_g(x)$. აჩვენეთ, რომ ამ უკანასკნელი ტოლობიდან მიიღება

$$N_f(x) \le N_{f-g}(x) + N_g(x) \tag{5.9}$$

3) (აჩვენეთ!)

$$N_f(x) \le 2\max\{Mf(x), |f(x)|\}. \tag{5.10}$$

ჩვენ ვიცით, რომ თუ f უწყვეტია, მაშინ (9) სრულდება (დაამტკიცეთ!), ანუ $N_g(x) = 0$ უწყვეტი g-თვის და (14)-დან მიიღება $N_f(x) \le N_{f-g}(x)$ ყოველი უწყვეტი g-თვის (აჩვენეთ, რომ სინამდვილეში არის ტოლობა).

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ

$$\overline{m}\{x : N_f(x) \ne 0\} > 0$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\lambda > 0$ და $\delta > 0$, რომ $\overline{m}\{x : N_f(x) > \lambda\} > \delta$, (ვინაიდან 0 ზომის თვლადი რაოდენობა სიმრავლეების გაერთიანების ზომა 0-ია,) ანუ

$$\inf_{g\in C[0,1]} \overline{m}\{x : N_{f-g}(x) > \lambda\} \ge \delta$$

და (15) უტოლობის ძალით $\inf_{g\in C[0,1]} \overline{m}\{x : \max\{M(f-g)(x), |f-g|\} > \lambda/2\} \ge \delta$ მაშინ როცა

$$\inf_{g\in C[0,1]} \int_0^1 |f-g|\,dm = 0$$

ლემა 3.3-ის ძალით. ეს ეწინააღმდეგება (12) უტლობას ჩაწერლის $f-g$-თვის. კერძოდ, $m\{x : \max\{M(f-g)(x), |f-g|\} > \lambda/2\} \le m\{x : \max\{M(f-g)(x)\} > \lambda/2\} + m\{x : \max\{|f-g|\} > \lambda/2\} \le \frac{6+\varepsilon}{\lambda}\int_0^1 |f-g|\,dm$ (აჩვენეთ, რომ გამოვიყენეთ ჩებიშევის უტოლობაც

$$\lambda m\{x : |f(x)| > \lambda\} \le \int_0^1 |f|\,dm \tag{5.11}$$

და ამიტომ დავწერეთ მუდმივი 6).

12.24. მონოტონური ფუნქცია არ არის სავალდებულო იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი. მიუხედავად ამისა სამართლიანია შემდეგი

თეორემა (მონოტონური ფუნქციის წარმოებულის შესახებ). თუ F მონოტონური ფუნქციაა, მაშინ $F'(x)$ არსებობს და სასრულია თითქმის ყველგან.

მიუხედავად თეორემა 12.24-ის სამართლიანობისა, არსებობენ მონოტონური ფუნქციები რომელთათვისაც (4) წარმოდგენა არ სრულდება. კერძოდ არსებობენ მკაცრად მონოტონური ფუნქციები რომელთა წარმოებული 0-ია თითქმის ყველგან. ასეთ ფუნქციებს ჰქვიათ სინგულარული.