1. რიმანის ინტეგრალი და მისი თვისებები

1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ იყოს $[a,b]$-ზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქცია. განვიხილოთ $[a,b]$-ის ნებისმიერი დაყოფა, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{f}_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i)} f(x) \quad \text{და} \quad \underline{f}_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i)} f(x).$$

1.2. დარბუს ზედა ჯამი: $\overline{D}(f) = \overline{D}(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i (x_i - x_{i-1})$.
დარბუს ქვედა ჯამი: $\underline{D}(f) = \overline{D}(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \underline{f}_i (x_i - x_{i-1})$.

$$\underline{D}(f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \overline{D}(f).$$

1.3. განსაზღვრება. თუ $\overline{D}(f) - \underline{D}(f) \to 0$, როცა $\Lambda_n = \sup_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$ მაშინ არსებობს f-ის რიმანის ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Lambda_n\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad x_{i-1} \le \xi_i < x_i.$$

1.4 სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ თუ f უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$-ზე მაშინ არსებობს მისი რიმანის ინტეგრალი. (მითითება: გამოიყენეთ f-ის თანაბრად უწყვეტობა)

1.5. თვისებები:

ა) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$

ბ) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx;$

გ) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx;$

დ) $\displaystyle f \ge g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$ კერძოდ $\displaystyle f \ge 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0;$

ე) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a).$

1.6. ჯამის წარმოდგენა ინტეგრალის სახით: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \int\limits_0^n f(x)\,dx$, სადაც $f(x) = a_k$ როცა $k-1 \le x < k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

1.7. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b, \quad \text{სადაც } F'(x) = f(x).$$

1.8. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

1.9. ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\Psi^{-1}(a)}^{\Psi^{-1}(b)} f\big(\Psi(u)\big)\Psi'(u)\,du.$$

1.10. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა: თუ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ არსებობს $\xi\in[a,b]$ ისეთი რომ $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

2. ჰელდერისა და მინკოვსკის უტოლობები

2.1. ლემა. თუ $u,v>0$ და $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, მაშინ

$$uv \le \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q. \tag{2.1}$$

დამტკიცება. I გზა: ვინაიდან $f(x)=e^x$ (ზემოდან) ამოზნექილი ფუნქციაა და ე.ი. მისთვის სრულდება უტოლობა

$$f\big(\lambda s+(1-\lambda)t\big) \le \lambda f(s)+(1-\lambda)f(t), \qquad 0\le\lambda\le 1,$$

თუკი s და t-ს ისეთებს შევარჩევთ, რომ $u^p=e^s$ და $v^q=e^t$, და ავიღებთ $\lambda=\frac{1}{p}$, მაშინ გვექნება

$$uv = e^{\frac{s}{p}}e^{\frac{t}{q}} = e^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}} = e^{\lambda s+(1-\lambda)t} \le \lambda e^s+(1-\lambda)e^t = \frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q.$$

II გზა: ვინაიდან $f(x)=\ln x$ ჩაზნექილი ფუნქციაა და ე.ი. მისთვის სრულდება უტოლობა

$$\ln\big(\lambda s+(1-\lambda)t\big) \ge \lambda\ln(s)+(1-\lambda)\ln(t), \qquad 0\le\lambda\le 1,$$

ამიტომ

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q\right) \ge \frac{1}{p}\ln u^p+\frac{1}{q}\ln v^q = \ln u+\ln v = \ln uv$$

და, რახან $f(x)=\ln(x)$ ზრდადი ფუნქციაა, სრულდება უტოლობა (2.1) □

2.2. **ჰელდერის უტოლობა.** თუ $p>1$ და $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, მაშინ

$$\text{(დისკრეტული)} \qquad \sum_{k=1}^n |a_kb_k| \le \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\text{(ინტეგრალური)} \qquad \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.2}$$

დამტკიცება (ინტეგრალური შემთხვევის): შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f,g\ge 0$. თუკი (2.2) უტოლობას დავამტკიცებთ f_1 და g_1 ფუნქციებისათვის, მაშინ იგი სამართლიანი იქნება $f=\alpha f_1$ და $g=\beta g_1$ ფუნქციებისათვისაც (აჩვენეთ!). ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 1 \quad \text{და} \quad \int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1$$

(ზოგადი შემთხვევა დაიყვანება ამ შემთხვევაზე αf-ასა და βg-ს ფუნქციების განხილვით, სადაც $\alpha = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{-\frac{1}{p}}$ და $\beta = \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{-\frac{1}{q}}$). ლემა 2.1-ის ძალით გვექნება

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b \left(\frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q\right)\,dx = \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx =$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

2.3. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ ჰელდერის უტოლობა დისკრეტულ შემთხვევაში (მითითება: აჩვენეთ, რომ 1.6-ის გამოყენებით დისკრეტული შემთხვევა დაიყვანება ინტეგრალურ შემთხვევაზე)

2.4. **მინკოვსკის უტოლობა.** თუკი $p \ge 1$, მაშინ

$$\text{(დისკრეტული)} \qquad \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\text{(ინტეგრალური)} \qquad \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3}$$

დამტკიცება. თუკი $p = 1$ მაშინ თეორემა ტრივიალურია, ამიტომ ვიგულისხმოთ $p > 1$.

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \le$$

$$\text{(ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით)} \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left\{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \times$$

$$\times \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\text{ რადგან } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow q(p-1) = p\right)$$

თუკი ამ უტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$-ზე, მივიღებთ მინკოვსკის უტოლობას.

2.5. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ მინკოვსკის უტოლობა დისკრეტულ შემთხვევაში (მითითება: აჩვენეთ, რომ 1.6-ის გამოყენებით დისკრეტული შემთხვევა დაიყვანება ინტეგრალურ შემთხვევაზე)

2.6. <u>განმარტება</u>. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია ეკუთვნის $L_p(a,b)$ სივრცეს, თუკი

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.4}$$

$\|f\|_p$-ს ეწოდება f ფუნქციის ნორმა $L_p(a,b)$ სივრცეში. ცხადია ნორმის ტერმინებში ჰელდერისა და მინკოვსკის უტოლობები ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \qquad \text{და} \qquad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

3. ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები

3.1. x წერტილის მომცველ (a,b) ინტერვალს ეწოდება x-ის მიდამო. როცა $\varepsilon > 0$, მაშინ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ არის x-ის სიმეტრიული მიდამო.

3.2. x წერტილს ეწოდება A სიმრავლის შიგა წერტილი თუკი იგი შედის A-ში თავის მიდამოსთან ერთად, ე.ი. მოიძებნება ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

3.3. x წერტილს ეწოდება A სიმრავლის დაგროვების წერტილი თუკი x-ის ნებისმიერ მიდამოში მოხვდება A სიმრავლის უსასრულო რაოდენობა წერტილებისა.

3.4. G სიმრავლეს ეწოდება ღია სიმრავლე თუკი ყველა მისი წერტილი შიგა წერტილია.

3.5. F სიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი სიმრავლე თუკი იგი მოიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს.

3.6. მაგალითები: ა) $(0,1)$ სიმრავლე ღიაა; ბ) $[0,1]$ სიმრავლე ჩაკეტილია; გ) $[0,1)$ არც ღიაა არც ჩაკეტილი, რადგან 0 არ არის მისი შიგა წერტილი, ხოლო 1 არის მისი დაგროვების წერტილი, მაგრამ არ ეკუთვნის ამ სიმრავლეს; დ) ყველა სასრულო სიმრავლე ჩაკეტილია, რადგან მას არ გააჩნია დაგროვების წერტილი; ე) განმარტების თანახმად $\emptyset$ ღიაც არის და ჩაკეტილიც, ასეთივეა მთელი ღერძი $\mathbb{R}$.

3.7. შენიშვნა. როგორც წესი G-თი აღვნიშნავთ ღია სიმრავლეებს და F-ით ჩაკეტილ სიმრავლეებს.

3.8. ძირითადი თვისებები:

ა) ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი გაერთიანება ღიაა და ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი თანაკვეთა ჩაკეტილია;

ბ) ღია სიმრავლეთა სასრულო თანაკვეთა ღიაა და ჩაკეტილ სიმრავლეთა სასრულო გაერთიანება ჩაკეტილია;

გ) ღია სიმრავლი დამატება (მთელ ღერძამდე) ჩაკეტილია და ჩაკეტილი სიმრავლის დამატება ღიაა.

დამტკიცება: ა) $x \in \cup_\alpha G_\alpha \Longrightarrow \exists n \ x \in G_n \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_n \Longrightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \cup_\alpha G_\alpha$;

თუ x არის $\cap_\alpha F_\alpha$-ის დაგროვების წერტილი, მაშინ x არის F_α-ს დაგროვების წერტილიც $\forall\alpha$-თვის, ანუ $x \in F_\alpha$ $\forall\alpha$-თვის და $x \in \cap_\alpha F_\alpha$.

ბ) საკმარისია დავამტკიცოთ ორი სიმრავლისთვის. $x \in G_1 \cap G_2 \Longrightarrow x \in G_1$ და $x \in G_2 \Longrightarrow \exists \varepsilon_1 > 0 \ (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset G_1$ და $\exists \varepsilon_2 > 0 \ (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset G_2 \Longrightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_1 \cap G_2$ სადაც $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. ე.ი. $G_1 \cap G_2$ ღიაა.

თუ x არის $F_1 \cup F_2$-ის დაგროვების წერტილი, მაშინ x იქნება ან F_1-ის დაგროვების წერტილი ან F_2-ის. შესაბამისად x შევა ან F_1-ში ან F_2-ში და $x \in F_1 \cup F_2$. ანუ $F_1 \cup F_2$ მოიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს.

გ) თუ $x \in G$, მაშინ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G \Longleftrightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap G^c = \emptyset$. ე.ი. x არ არის G^c-ს დაგროვების წერტილი. ანუ G^c-ს დაგროვების წერტილი არ შეიძლება მოხვდეს G^c-ს გარეთ (G-ში). ე.ი. G^c ჩაკეტილია.

თუ $x \in F^c \Longleftrightarrow x \notin F$, მაშინ x არ არის F-ის დაგროვების წერტილი. ამიტომ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset \Longleftrightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset F^c$. ე.ი. F^c ღიაა.

3.9. კონტრმაგალითები. ღია სიმრავლეთა უსასრულო თანაკვეთა შეიძლება აღარ იყოს ღია, მაგალითად $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

ჩაკეტილ სიმრავლეთა უსასრულო გაერთიანება შეიძლება აღარ იყოს ჩაკეტილი, მაგალითად $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ არ მოიცავს თავის დაგროვების წერტილს 0-ს, ე.ი. არაა ჩაკეტილი.

3.10. თეორემა. ნებისმიერი ღია სიმრავლე $G \subset \mathbb{R}$ წარმოდგება სასრული ან თვლადი რაოდენობის თანაუკვეთ ინტერვალთა გაერთიანების სახით, ანუ

$$G = \cup_{i=1}(a_i, b_i) \quad \text{სადაც} \ \ (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \ \ \text{როცა} \ \ i \neq j \tag{3.1}$$

დამტკიცება. ყოველი x-თვის G-დან ავიღოთ $a_x := \inf\{a < x : (a, x] \subset G\}$ და $b_x := \sup\{b > x : [x, b) \subset G\}$ (ცხადია, რახან G ღიაა, $\{a < x : (a, x] \subset G\} \neq \emptyset$ და $\{b > x : [x, b) \subset G\} \neq \emptyset$). მაშინ

$$x \in (a_x, b_x) \subset G \quad \text{და} \quad a_x \notin G, \ b_x \notin G \tag{3.2}$$

რადგან თუკი $a_x \in G$ და $a_x \in (\alpha, \beta) \subset G$, მაშინ $(\alpha, x] \subset G$ და $a_x > \inf\{a < x : (a, x] \subset G\}$; ანალოგიურად b_x-თვის. ე.ი. ყოველ x წერტილს G-დან შეგვიძლია შევუსაბამოთ (a_x, b_x) ინტერვალი (3.2) თვისებებით. ეხლა თუ $y \in (\alpha_x, \beta_x)$, მაშინ $(\alpha_x, \beta_x) = (\alpha_y, \beta_y)$. მაშასადამე ყოველი x და y წერტილებისთვის G-დან ან $(\alpha_x, \beta_x) = (\alpha_y, \beta_y)$ ან $(\alpha_x, \beta_x) \cap (\alpha_y, \beta_y) = \emptyset$, და თუკი ინტერვალთა სისტემაში $(a_x, b_x)_{x \in G}$ გავაიგივებთ ერთიდაიგივე ინტერვალებს, მივიღებთ

$$G = \bigcup_{x \in G} (a_x, b_x)$$

წარმოდგენას თანაუკვეთ ინტერვალთა სახით (თუ ორ ინტერვალს აქვს თანაკვეთა, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან და ამიტომ გაიგივებულია). თანაუკვეთ ინტერვალთა სისტემა არ შეიძლება იყოს თვლადზე მეტი (რადგან ყოველ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც რაციონალური წერტილი და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია), ამიტომ (3.1) წარმოდგენა სამართლიანია.

3.11. ღია G სიმრავლის წარმოდგენას (3.1) სახით ჰქვია ღია სიმრავლის დაშლა შემადგენელ ინტერვალებად.

3.12. დამტკიცებიდან გამომიდინარეობს, რომ ღია სიმრავლის დაშლა შემადგენელ ინტერვალებად ერთადერთია, ანუ თუკი (3.1) წარმოდგენასთან ერთად სამართლიანია

$$G = \cup_{i=1}(\alpha_i, \beta_i) \quad \text{სადაც} \ \ (\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \emptyset \ \ \text{როცა} \ \ i \neq j$$

მაშინ $\big\{(a_i, b_i)\big\}_{i=1}$ და $\big\{(\alpha_i, \beta_i)\big\}_{i=1}$ ინტერვალთა სისტემები ერთიდაიგივეა.

3.13. ჩაკეტილი სიმრავლის საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს კანტორის სიმრავლე:

$$K = [0, 1] \backslash \left((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup \ldots \right).$$

კანტორის სიმრავლე ჩაკეტილია, რადგანაც იგი წარმოდგება ჩაკეტილი და ღია სიმრავლის სხვაობის სახით.

თუკი რიცხვებს ჩავწერთ 3-ობით სისტემაში (მხოლოდ 0,1 და 2 ციფრების გამოყენებით) მაშინ კანტორის სიმრავლის წერტილები ჩაიწერებიან 0.20220200... ტიპის რიცხვების სახით (დაიწყება 0 მთელით და შემდეგ იქნება 0-ებისა და 2-ების ნებისმიერი კომბინაცია). რადგან ამგვარი წერტილების რაოდენობა არათვლადია (იხილე სავარჯიშო 3.9). კანტორის სიმრავლე არათვლადია.

3.14. თეორემა (ღია სიმრავლის წინარესახის შესახებ). ვთქვათ $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა და $G \subset \mathbb{R}$ ღიაა. მაშინ $f^{-1}(G)$-ც ღიაა.

დამტკიცება: ავიღოთ ნებისმიერი $x \in f^{-1}(G)$. ვინაიდან $f(x) \in G$ და G ღიაა, არსებობს $f(x)$-ის ε მიდამო რომელიც შედის G-ში, ანუ $\big(f(x) - \varepsilon, \ f(x) + \varepsilon\big) \subset G$. უწყვეტობის გამო (კოშის განმარტებით) არსებობს x-ის ისეთი δ მიდამო $(x - \delta, x + \delta)$ რომელიც მთლიანად აისახება $\big(f(x) - \varepsilon, \ f(x) + \varepsilon\big)$-ში, ანუ $f\big((x - \delta, x + \delta)\big) \subset G$ და $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(G)$. მაშასადამე x არის $f^{-1}(G)$-ის შიგა წერტილი და x-ის ნებისმიერობის გამო $f^{-1}(G)$ ღიაა.

3.15. თეორემა (ჩაკეტილი სიმრავლის წინარესახის შესახებ). ვთქვათ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა და $F\subset\mathbb{R}$ ჩაკეტილია. მაშინ $f^{-1}(F)$-ც ჩაკეტილია.

დამტკიცება: ვთქვათ x არის $f^{-1}(F)$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. მაშინ არსებობს მიმდევრობა $x_n\in f^{-1}(F)$ ისეთი რომ $x_n\to x$ (იხ. სავარჯიშო 2.10). ფუნქციის უწყვეტობის გამო (ჰაინეს განმარტება) $f(x_n)\to f(x)$. ვინაიდან თითოეული $f(x_n)$ ეკუთვნის F-ს, ამიტომ $f(x)$-ის ყოველ მიდამოში მოხვდება F სიმრავლის ერთი მაინც წერტილი. ე.ი. $f(x)$ შედის F-ში ან $f(x)$ არის F-ის დაგროვების წერტილი. რადგან F ჩაკეტილია, დავასკვნით რომ $f(x)\in F$. ანუ $x\in f^{-1}(F)$. ე.ი. $f^{-1}(F)$ მოიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს.

4. კომპაქტურობა

4.1. ღია ინტერვალთა $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას (სიმრავლეს) ეწოდება A სიმრავლის ღია დაფარვა, თუ $A\subset\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$. ამ სისტემის სასრულ ქვესისტემას $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{N}$, ეწოდება A-ს სასრულო ქვედაფარვა თუკი $A\subset\cup_{n=1}^{N}(a_n,b_n)$.

4.2. სიმრავლეს ეწოდება <u>კომპაქტური</u> თუკი მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრულო ქვედაფარვა.

4.3. თუკი A სიმრავლე შემოუსაზღვრელია, მაშინ ამ სიმრავლეს ჰფარავს ინტერვალთა $\{(-n,n)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა, $A\subset\cup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$, საიდანაც არ გამოიყოფა სასულო ქვედაფარვა $A\not\subset\cup_{n=1}^{N}(-n,n)$. ამიტომ A ვერ იქნება კომპაქტური.

თუკი A სიმრავლე გააჩნია დაგროვების წერტილი x და $x\notin A$, მაშინ ამ სიმრავლეს ჰფარავს ინტერვალთა $\{(-\infty,x-\frac{1}{n}),(x+\frac{1}{n},\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა, $A\subset\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-\frac{1}{n})\cup(x+\frac{1}{n},\infty)$, საიდანაც არ გამოიყოფა სასულო ქვედაფარვა $A\not\subset\cup_{n=1}^{N}(-\infty,x-\frac{1}{n})\cup(x+\frac{1}{n},\infty)$. ამიტომ A ვერ იქნება კომპაქტური.

ე.ი. $A\subset\mathbb{R}$ რომ იყოს კომპაქტური აუცილებელია ის იყოს შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი.

4.4. ზუსტად ისევე, როგორც დამტკიცებული გვაქვს, რომ $[0,1]$-ის ღია ინტერვალთა ნებისმიერი დაფარვიდან გამოიყოფა სასრულო ქვედაფარვა, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ჩაკეტილი სიმრავლე კომფაქტურია.

4.5. თეორემა. თუ K არის კომპაქტური სიმრავლე და $M\subset K$ არის მისი უსასრულო ქვესიმრავლე, მაშინ K-ს ერთი წერტილი მაინც არის M-ის დაგროვების წერტილი.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ ყოველი x-თვის K-დან არსებობს მისი $(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)$ მიდამო რომელიც შეიცავს M სიმრავლის არაუმეტეს ერთი წერტილისა (იხ სავარჯიშო 2.8). ცხადია $K\subset\cup_{x\in K}(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)$ და ეს გაერთიანება ფარავს M-საც. ამიტომ, K-ს კომპაქტურობის გამო, არსებობს $\{x_1,x_2,\dots,x_N\}\subset K$ ისეთი რომ $M\subset\cup_{n=1}^{N}(x_n-\varepsilon_{x_n},x_n+\varepsilon_{x_n})$. მაშასადამე M არ შეიძლება შეიცავდეს N-ზე მეტ წერტილს, რაც ეწინააღმდეგება M სიმრავლის უსასრულობას.

4.6. თეორემა (კომპაქტის ანასახის შესახებ). ვთქვათ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა და $K\subset\mathbb{R}$ კომპაქტური სიმრავლეა. მაშინ $f(K)$-ც კომპაქტურია.

დამტკიცება: ვთქვათ $f(K)\subset\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ არის ღია დაფარვა. მაშინ $K\subset\cup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(a_n,b_n)$ იქნება K-ს ღია დაფარვა (თეორემების 3.14-ისა და 3.10-ის გათვალისწინებით). ვინაიდან K კომპაქტურია, არსებობს მისი სასრულო ქვედაფარვა $K\subset\cup_{n=1}^{N}f^{-1}(a_n,b_n)$ ანუ $f(K)\subset\cup_{n=1}^{N}(a_n,b_n)$. რ.დ.გ.

5. ლებეგის ზომის თეორია

5.1. ლებეგის ზომა წარმოადგენს ინტერვალის სიგრძის ცნების ბუნებრივ განზოგადებას. თუმცა ჩვენ მოვახერხებთ გაცილებით რთული ბუნების სიმრავლეების "სიგრძის"გაზომვას.

ყველამ კარგად ვიცით, რომ (a,b) ინტერვალის სიგრძე არის $|a-b|$ და ჩვენ ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ

$$m(a,b)=|a-b|$$

რაც ნიშნავს, რომ (a,b) ინტერვალის ზომა არის დადებითი რიცხვი $b-a$. ცხადია იგივე ზომა აქვთ ინერვალებს $[a,b]$, $[a,b)$ და $(a,b]$, რადგან ყოველი წერტილის ზომა ანუ "სიგრძე"0-ია.

თავდაპირველად, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ სიმრავლეები რომელთა "სიგრძესაც"გავზომავთ არიან [0,1]-ის ქვესიმრავლეები, ანუ m განვმარტოთ [0,1]-ზე. მოგვიანებით ზომას გავავრცელებთ მთელ ღერძზე.

თუ A არის $\langle a_i,b_i\rangle$ ინტერვალთა (ღია, ჩაკეტილი ან ნახევრადღია, ანუ "$\langle$" არის "(" ან "[" და "$\rangle$" არის ")" ან "]") სასრული თანაუკვეთი გაერთიანება, $A=\cup_{i=1}^n\langle a_i,b_i\rangle$, მაშინ

$$|A|:=m(A):=\sum_{i=1}^n m\langle a_i,b_i\rangle=\sum_{i=1}^n|b_i-a_i|.$$

ინტერვალთა სიგრძეების თვისებების შესწავლისას გამოვიყენებთ შემდეგ ლემას, რომელიც ინტუიციურად ცხადია.

5.2. ლემა. თუ $(a,b)=\cup_{i=1}^\infty(a_i,b_i)$, მაშინ

$$m(a,b)\le\sum_{i=1}^\infty m(a_i,b_i). \tag{5.1}$$

დამტკიცება. ინტერვალთა რაოდენობა რომ იყოს სასრული, ეს ლემა შეგვიძლია უშუალოდ წარმოვიდგინოთ თვალსაჩინოდ. უსასრულო რაოდენობა რომ არ იყოს ხელის შემშლელი, გამოვიყენოთ კომპაქტურობა. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის $m(a,b)\le\sum_{i=1}^\infty m(a_i,b_i)+\varepsilon$ საიდანაც გამომდინარეობს (1). ავიღოთ $[c,d]\subset(a,b)$ ისეთი რომ $|d-c|>|b-a|-\varepsilon$. $[c,d]$-ს კომპაქტურობიდან გამომდინარე, არსებობს ისეთი N, რომ $[c,d]\subset\cup_{i=1}^N(a_i,b_i)$ საიდანაც დავასკვნით, რომ $|d-c|\le\sum_{i=1}^N|b_i-a_i|$. მაშასადამე

$$m(a,b)<|d-c|+\varepsilon\le\sum_{i=1}^N|b_i-a_i|+\varepsilon\le\sum_{i=1}^\infty|b_i-a_i|+\varepsilon=\sum_{i=1}^\infty m(a_i,b_i)+\varepsilon.$$

5.3. G ღია სიმრავლის ზომა ბუნებრივად განიმარტება როგორც მისი შემადგენელი ინტერვალების სიგრძეების ჯამი

$$m(G):=\sum_{i=1} m(a_i,b_i)=\sum_{i=1}|b_i-a_i|,$$

სადაც $G=\cup_{i=1}(a_i,b_i)$ არის G-ს დაშლა შემადგენელ ინტერვალებად.

5.4. შევნიშნოთ, რომ თუ G ღია სიმრავლეა, მაშინ არსებობს ჩალაგებულ ღია სიმრავლეთა მიმდევრობა

$$G_1\subset G_2\subset G_3\subset\dots,\quad \cup_{n=1}^\infty G_n=G, \tag{5.2}$$

სადაც თითოეული G_n წარმოდგება სასრული რაოდენობა ღია თანაუკვეთი ინტერვალების გაერთიანების სახით და $\lim_{n\to\infty}|G_n|=m(G)$. მართლაც, ავიღოთ $G_n=\cup_{i=1}^n(a_i,b_i)$, სადაც (a_i,b_i) G-ს შემადგენელი ინტერვალებია. მაშინ (2) ცხადია და ამასთანავე $|G_n|=\sum_{i=1}^n|b_i-a_i|\to\sum_{i=1}^\infty|b_i-a_i|=m(G)$.

5.5. შევნიშნოთ, რომ $G_1 \subset G_2 \Longrightarrow m(G_1) \le m(G_2)$. მართლაც თუ $G_1 = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ და $G_2 = \cup_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$ არიან ამ სიმრავლეების შემადგენელ ინტერვალებად დაშლები, მაშინ თითოეული (a_i, b_i) მთლიანად შედის რომელიმე (c_j, d_j)-ში და

$$m(G_1) = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\{i:(a_i,b_i)\subset(c_j,d_j)\}} |b_i - a_i| \le \sum_{j=1}^{\infty} |d_j - c_j| = m(G_2).$$

5.6. <u>$F \subset [0,1]$ ჩაკეტილი სიმრავლის ზომა</u> ბუნებრივად განიმარტება იმის გათვალისწინებით, რომ $G = (0,1) \setminus F$ ღია სიმრავლეა და მისი ზომა უკვე განმარტებული გვაქვს. მაშასადამე

$$m(F) := 1 - m(G).$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ზომა შეგვეძლო განგვემარტა აგრეთვე შემდეგი ტოლობითაც

$$m(F) := m(a,b) - m\big((a,b) \setminus F\big)$$

სადაც (a,b) ნებისმიერი ინტერვალია, რომელიც მოიცავს F-ს.

5.7. შევნიშნოთ, რომ თუ $F \subset [0,1]$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშინ არსებობს ჩალაგებული მიმდევრობა

$$[0,1] \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots, \quad \cap_{n=1}^{\infty} F_n = F, \tag{5.3}$$

სადაც თითოეული F_n წარმოდგება სასრული რაოდენობა თანაუკვეთი ჩაკეტილი სეგმენტების გაერთიანების სახით (ვიგულისხმოთ, რომ წერტილი არის "გადაგვარებული"სეგმენტი) და $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n| = m(F)$.

მართლაც, ვთქვათ $F \subset (a,b)$ და $(a,\alpha) \cup (\beta,b) \cup \big(\cup_{i=1}^{\infty} (a_i,b_i)\big)$ იყოს $(a,b) \setminus F$-ის დაშლა შემადგენელ ინტერვალებად (გვექნება, რომ $\alpha = \inf F$ და $\beta = \sup F$). მაშინ ავიღოთ $F_n = [0,1] \setminus (a,\alpha) \cup (\beta,b) \cup \big(\cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\big)$ რომელიც ყოველთვის იქნება ჩაკეტილი სეგმენტების სასრული თანაუკვეთი გაერთიანება, შესრულდება (3)-იც და

$$|F_n| = m(a,b) - |\alpha - a| - |b - \beta| - \sum_{i=1}^{n} m(a_i,b_i) \to m(a,b) - |\alpha - a| - |b - \beta| - \sum_{i=1}^{\infty} m(a_i,b_i) = m(F).$$

5.8. შევნიშნოთ, რომ თუ $F_1 \subset F_2$ მაშინ $m(F_1) \le m(F_2)$. მართლაც, ავიღოთ (a,b) რომელიც მოიცავს ორივე ჩაკეტილ სიმრავლეს. შემდეგი ღია სიმრავლეებისთვის გვექნება ჩართვა $(a,b) \setminus F_1 \supset (a,b) \setminus F_2$ ამიტომ, 5.5-ის ძალით, $m\big((a,b) \setminus F_1\big) \ge m\big((a,b) \setminus F_2\big)$. მაშასადამე

$$m(F_1) = m(a,b) - m\big((a,b) \setminus F_1\big) \le m(a,b) - m\big((a,b) \setminus F_2\big) = m(F_2).$$

5.9. შემდეგი ლემაც ინტუიციურად ცხადია, მაგრამ ჩვენ მას მკაცრად დავამტკიცებთ.

ლემა. თუ $F \subset G$ მაშინ $m(F) \le m(G)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი ინტერვალი (a,b), რომელიც მოიცავს G-ს. წარმოდგენები $G = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ და $(a,b) \setminus F = \cup_{i=1}^{\infty}(c_i,d_i)$ იყოს შემადგენელ ინტერვალებად დაშლა. მაშინ $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| = m(G)$ და $\sum_{i=1}^{\infty} |d_i - c_i| = m(a,b) - m(F)$. ვინაიდან $\cup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i) \cup$ $\cup \big(\cup_{i=1}^{\infty} (c_i,d_i)\big) = G \cup \big((a,b) \setminus F\big) = (a,b)$, 5.2 ლემის ძალით $|b - a| \le \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| +$ $+ \sum_{i=1}^{\infty} |d_i - c_i| = m(G) + |b - a| - m(F)$. ე.ი. $m(G) - m(F) \ge 0$ და ლემა დამტკიცებულია.

5.10. <u>A სიმრავლის გარე ზომა</u> ეწოდება სიდიდეს

$$m^*(A) = \inf_{G \supset A} m(G).$$

და A სიმრავლის შიგა ზომა ეწოდება სიდიდეს

$$m_*(A) = \sup_{F \subset A} m(F).$$

ლემა 5.9-ის ძალით, $m_*(A) \leq m^*(A)$ ნებისმიერი A სიმრავლისთვის. აგრეთვე , თუ $A \subset B$, მაშინ $m_*(A) \leq m_*(B)$ და $m^*(A) \leq m^*(B)$.

A სიმრავლეს ეწოდება ზომადი თუკი

$$m_*(A) = m^*(A) \tag{5.4}$$

და $m(A) = m_*(A) = m^*(A)$ რიცხვს ეწოდება A-ს ზომა.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, თუკი A და B ზომადებია და $A \subset B$ მაშინ $m(A) \leq m(B)$.

5.11. თეორემა. A სიმრავლე არის ზომადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობენ $F \subset A$ და $G \supset A$ ისეთნი რომ

$$m(G) - m(F) \leq \varepsilon. \tag{5.5}$$

დამტკიცება. თუ F და G მცირე ε-ის შესაბამისი სიმრავლეებია, მაშინ $m(F) \leq m_*(A) \leq m^*(A) \leq m(G)$ და $m^*(A) - m_*(A) \leq m(G) - m(F) \leq \varepsilon$. ε-ის ნებისმიერობის გამო სრულდება (4).

პირიქით, ვთქვათ $\varepsilon > 0$. სუპრემუმისა და ინფიმუმის განმარტების ძალით, არსებობენ $F \subset A$ და $G \supset A$ ისეთნი რომ $m^*(A) \geq m(G) - \frac{\varepsilon}{2}$ და $m^*(A) \leq m(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. ცხადია გვაქვს $G \supset F$ და თუკი (4) სრულდება, მაშინ $m(F) + \frac{\varepsilon}{2} \geq m(G) - \frac{\varepsilon}{2}$, საიდანაც მიიღება (5).

5.12. თეორემა. ნებისმიერი ღია სიმრავლე ზომადია.

დამტკიცება. 5.5 დებულების ძალით, $m(G) = m^*(G)$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$m_*(G) = m(G). \tag{5.6}$$

თუ G შედგება სასრული რაოდენობა თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან, $G = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i)$, მაშინ, ნებისმიერი მცირე დადებითი ε-ისთვის, ჩაკეტილი $F = \cup_{i=1}^n [a_i + \frac{\varepsilon}{n}, b_i - \frac{\varepsilon}{n}]$ სიმრავლისთვის სრულდება $F \subset G$ და $|F| = m(G) - \varepsilon$. მაშასადამე (6) სამართლიანია.

ნებისმიერი G ღია სიმრავლისთვის, $G_n \subset G$ იყოს ის ღია სიმრავლე რომელიც შედგება თანაუკვეთი ინტერვალების სასული გაერთიანებისგან (იხ. 5.4) და რომლისთვისაც $m(G_n) \geq m(G) - \frac{\varepsilon}{2}$. თავის მხრივ $F_n \subset G_n$ იყოს ის ჩაკეტილი სიმრავლე, რომლისთვისაც $m(F_n) \geq m(G_n) - \frac{\varepsilon}{2}$. მაშინ გვექნება, რომ $F_n \subset G$ და $m(F_n) \geq m(G) - \varepsilon$. ე.ი. (6) სრულდება.

5.13. თეორემა. ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე ზომადია.

დამტკიცება. 5.8 დებულების ძალით, $m(F) = m_*(F)$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$m^*(F) = m(F). \tag{5.7}$$

თუ F შედგება სასრული რაოდენობა თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან, $F = \cup_{i=1}^n [a_i, b_i]$, მაშინ, ნებისმიერი საკმარისად მცირე დადებითი ε-ისთვის, ღია $G = \cup_{i=1}^n (a_i - \frac{\varepsilon}{n}, b_i + \frac{\varepsilon}{n})$ სიმრავლისთვის სრულდება $G \supset F$ და $|G| = m(F) + \varepsilon$. მაშასადამე (7) სამართლიანია.

ნებისმიერი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის, $F_n \supset F$ იყოს ის ჩაკეტილი სიმრავლე რომელიც შედგება თანაუკვეთი სეგმენტების სასული გაერთიანებისგან (იხ. 5.6) და რომლისთვისაც $m(F_n) \leq m(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. თავის მხრივ $G_n \supset F_n$ იყოს ის ღია სიმრავლე, რომლისთვისაც $m(G_n) \leq m(F_n) + \frac{\varepsilon}{2}$. მაშინ გვექნება, რომ $G_n \supset F$ და $m(G_n) \leq m(F) + \varepsilon$. ე.ი. (7) სრულდება.

6. ლებეგის ზომის ადიციურობა

6.1. თეორემა. თუ $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, მაშინ $m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $G_1 = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ და $G_2 = \cup_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$ არიან მოცემული ღია სიმრავლეების შემადგენელ ინტერვალებად დაშლა. მაშინ $\big(\cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\big) \cup \big(\cup_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)\big)$ იქნება $G_1 \cup G_2$-ის შემადგენელ ინტერვალებად დაშლა. ამიტომ

$$m(G_1 \cup G_2) = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |d_i - c_i| = m(G_1) + m(G_2)$$

6.2. ლემა. თუ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ მაშინ არსებობენ $G_1 \supset F_1$ და $G_2 \supset F_2$ ისეთნი რომ $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $\rho(F_1, F_2) > 0$ (იხ. სავ. 4.7). მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, რომ არსებობენ $x_n \in F_1$ და $y_n \in F_2$ მიმდევრობები ისეთნი, რომ $|x_n - y_n| \le \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, მაშინ ამ მიმდევრობებს ექნებათ საერთო დაგროვების წერტილი რომელიც შევა F_1-შიც და F_2-შიც, რაც დაუშვებელია.

ვთქვათ $\rho(F_1, F_2) > \varepsilon > 0$. მაშინ $G_1 = \cup_{x \in F_1}(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$ და $G_2 = \cup_{x \in F_2}(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$ სიმრავლეები თანაუკვეთია და აკმაყოფილებენ ლემის პირობებს.

6.3. თეორემა. თუ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, მაშინ $m(F_1 \cup F_2) = m(F_1) + m(F_2)$.

დამტკიცება. ნებისმიერი ε-თვის მოიძებნება $G \supset F_1 \cup F_2$ ისეთი, რომ $m(G) - m(F_1 \cup F_2) < \varepsilon$. ამიტომ ნებისმიერი G_0-თვის რომლისთვისაც $(F_1 \cup F_2) \subset G_0 \subset G$, გვაქვს $m(G_0) - m(F_1 \cup F_2) < \varepsilon$. ავიღოთ ასევე $G_1 \supset F_1$ და $G_2 \supset F_2$ ისეთნი, რომ $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \cup G_2 \subset G$ და $m(G_j) - m(F_j) < \varepsilon$, $j = 1, 2$. მაშინ

$$|m(F_1 \cup F_2) - m(F_1) - m(F_2)| = |m(F_1 \cup F_2) - m(G_1 \cup G_2) + m(G_1) - m(F_1) +$$
$$+ m(G_2) - m(F_2)| \le |m(F_1 \cup F_2) - m(G_1 \cup G_2)| + |m(G_1) - m(F_1)| + |m(G_2) - m(F_2)| \le 3\varepsilon$$

და ε-ის ნებისმიერობის გამო მოდულში მყოფი გამოსახულება 0-ის ტოლია, ანუ დასამტკიცებელი ტოლობა სამართლიანია.

6.4. თეორემა (ღია სიმრავლეთა ნახევრად ადიციურობა): $m(G_1 \cup G_2) \le m(G_1) + m(G_2)$.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε-ისთვის

$$m(G_1 \cup G_2) \le m(G_1) + m(G_2) + \varepsilon$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა.

ავიღოთ $F \subset G_1 \cup G_2$ ისეთი, რომ $m(G_1 \cup G_2) - m(F) < \varepsilon$. $G_1 = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ და $G_2 = \cup_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$ იყოს ღია სიმრავლეების შემადგენელ ინტერვალებად დაშლა. მაშინ $F \subset \big(\cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\big) \cup \big(\cup_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)\big)$ და F-ის კომპაქტურობის გამო არსებობს ისეთი N, რომ $F \subset \big(\cup_{i=1}^{N}(a_i, b_i)\big) \cup \big(\cup_{i=1}^{N}(c_i, d_i)\big)$. მაშასადამე

$$m(G_1 \cup G_2) \le m(F) + \varepsilon \le m\big(\cup_{i=1}^{N}(a_i, b_i)\big) \cup \big(\cup_{i=1}^{N}(c_i, d_i)\big) + \varepsilon \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{N} |b_i - a_i| + \sum_{i=1}^{N} |d_i - c_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} (|b_i - a_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |d_i - c_i| = m(G_1) + m(G_2) + \varepsilon$$

6.5. შედეგი. ზუსტად ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს ღია სიმრავლეთა ნახევრად σ-ადიციურობა

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n).$$

6.6. თეორემა (ლებეგის ზომის ადიციურობა). თუ A და B ზომადი თანაუკვეთი სიმრავლეებია, მაშინ $A \cup B$ ზომადია და

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B). \tag{6.1}$$

დამტკიცება. ნებისმიერი დადებითი ε-თვის, ავიღოთ $F_1 \subset A \subset G_1$ ისეთი, რომ $m(G_1) - m(F_1) < \varepsilon$ და $F_2 \subset A \subset G_2$ ისეთი, რომ $m(G_2) - m(F_2) < \varepsilon$. მაშინ $F_1 \cup F_2 \subset A \cup B \subset G_1 \cup G_2$ და ამასთანავე $m(G_1 \cup G_2) - m(F_1 \cup F_2) \leq m(G_1) + m(G_2) - m(F_1) - m(F_2) \leq m(G_1) - m(F_1) + m(G_2) - m(F_2) \leq 2\varepsilon$. ანუ $A \cup B$ ზომადია.

(1) ტოლობის დამტკიცება განვაგრძოთ შესაბამისად

$$\begin{aligned}
|m(A \cup B) - m(A) - m(B)| &= |m(A \cup B) - m(F_1 \cup F_2) + m(F_1) - m(A) + m(F_2) - m(B)| \leq \\
&\leq |m(A \cup B) - m(F_1 \cup F_2)| + |m(F_1) - m(A)| + |m(F_2) - m(B)| \leq \\
&\leq |m(G_1 \cup G_2) - m(F_1 \cup F_2)| + |m(F_1) - m(A)| + |m(F_2) - m(B)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon
\end{aligned}$$

რაც ნიშნავს (1) ტოლობის სამართლიანობას.

6.7. შედეგი. თუ $F \subset G$,

$$m(G \setminus F) = m(G) - m(F).$$

7. ზომად სიმრავლეთა σ-ალგებრა

§5-ში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები ზომადია. ეხლა ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ზომად სიმრავლეთა კლასი გაცილებით დიდია. კერძოდ, ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი თვლადი რაოდენობის კომბინაცია ისევ ზომადია. ამ შემთხვევაში ამბობენ რომ ზომადი სიმრავლეები ადგენენ σ-ალგებრას (ზუსტი განმარტება იხილე ქვემოთ). ეს ჯერ კიდევ არ ნიშნავს, რომ ჩვენ შეგვიძლია გავზომოთ $[0, 1]$-ის ყველა ქვესიმრავლე. კერძოდ არსებობენ ზოგიერთი "პათოლოგიური" სიმრავლეები რომელთა გაზომვა პრინციპულად შეუძლებელია (ჩვენ ვნახავთ მაგალითებს).

7.1. $[0, 1]$-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathcal{F}$ სისტემას ჰქვია <u>σ-ალგებრა</u> თუკი იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას

ა) $\emptyset, [0, 1] \in \mathcal{F}$

ბ) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

გ) $A_n \in \mathcal{F}, \ \ n = 1, 2, \ldots, \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

ეს განმარტება საკმარისია იმის საჩვენებლად, რომ ნებისმიერი σ-ალგებრა ჩაკეტილია გაერთიანების, თანაკვეთის და სიმრავლური სხვაობის ნებისმიერი თვლადი რაოდენობა ოპერაციების მიმართ (იხ. სავ. 6.1-6.3).

7.2. ცხადია სიგმა ალგებრათა ნებისმიერი თანაკვეთა ისევ სიგმა ალგებრაა. ამიტომ არსებობს უმცირესი σ-ალგებრა რომელიც მოიცავს ყველა ღია სიმრავლეს. მას <u>ბორელის სიგმა ალგებრა</u> ეწოდება. რახან ყოველი ღია სიმრავლე ზომადია და ზომად სიმრავლეთა კლასი სიგმა ალგებრაა, ამიტომ ყოველი ბორელის სიგმა ალგებრის სიმრავლე ზომადია.

7.3. ზომად სიმრავლეებზე განსაზღვრული ზომის ყველაზე მნიშვნელობანი თვისება იქნება მისი σ-ადიციურობა, რომელასაც ჩვენ ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ.

თეორემა (ლებეგის ზომის σ-ადიციურობა). თუ $A_n, n = 1, 2, \ldots,$ ზომად სიმრავლეთა თანაუკვეთი სისტემააა, $A_i \cap A_j = \emptyset$ როცა $i \neq j$, მაშინ

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \tag{7.1}$$

(დამტკიცება იხილე 7.7-ში).

7.4. ჯერ დავამტკიცოთ თეორემა, რომ ზომად სიმრავლეთ კლასი წარმოადგენს ალგებრას, ანუ ზომად სიმრავლეთა სასრული კომბინაცია ისევ ზომადია.

თეორემა. თუ A და B ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ ასევე ზომადია ა) $A \cup B$; ბ) $A \cap B$; და გ) $A \setminus B$.

დამტკიცება. ნებისმიერი დადებითი ε-თვის ვთქვათ $F_1 \subset A \subset G_1$ და $F_2 \subset B \subset G_2$, სადაც $m(G_j \setminus F_j) < \varepsilon$, $j = 1, 2$. მაშინ

ა) $F_1 \cup F_2 \subset A \cup B \subset G_1 \cup G_2$ და ვინაიდან $(G_1 \cup G_2) \setminus (F_1 \cup F_2) \subset (G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)$ (იხ. სავ. 6.1), ამიტომ 6.7 შედეგისა და 6.4 თეორემის ძალით $m(G_1 \cup G_2) - m(F_1 \cup F_2) = m\big((G_1 \cup G_2) \setminus (F_1 \cup F_2)\big) \le m(G_1 \setminus F_1) + m(G_2 \setminus F_2) \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ და, 5.11 თეორემის გათვალისწინებით, ა) დამტკიცებულია.

ბ) $(F_1 \setminus G_2) \subset (A \setminus B) \subset (G_1 \setminus F_2)$ და ვინაიდან $(G_1 \setminus F_2) \setminus (F_1 \setminus G_2) \subset (G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)$ (იხ. სავ. 6.1) ამიტომ, ამიტომ 6.7 შედეგისა და 6.4 თეორემის ძალით, $m(G_1 \setminus F_2) - m(F_1 \setminus G_2) = m\big((G_1 \setminus F_2) \cup (F_1 \setminus G_2)\big) \le m\big((G_1 \setminus F_1) \cup (G_2 \setminus F_2)\big) \le m(G_1 \setminus F_1) + m(G_2 \setminus F_2) \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ და, 5.11 თეორემის გათვალისწინებით, ბ) დამტკიცებულია.

გ) ვინაიდან $A \cap B = (A \cup B) \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$ (იხ. სავ 6.1), ამიტომ გ) გამომდინარეობს ა)-დან და ბ)-დან.

7.5. შედეგი. ზომად სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული კომბინაცია ზომადია.

7.6. თეორემა. თუ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ აგრეთვე ზომადია ა) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$; ბ) $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

დამტკიცება: ა) ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A_n-ები თანაუკვეთია (იხ. სავ. 6.2).

ნებისმიერი დადებითი ε-თვის მოვძებნოთ $F_n \subset A_n \subset G_n$ ისეთი რომ $m(G_n) - m(F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$. ვინაიდან F_n-ები თანაუკვეთია და $[0,1]$-ის ქვესიმრავლეა, ამიტომ ნებისმიერი N-ისთვის გვაქვს $\sum_{n=1}^{N} m(F_n) = m\big(\cup_{n=1}^{N} F_n\big) \le m[0,1] = 1$. მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$ მწკრივი კრებადია. შევარჩიოთ ისეთი N, რომ $\sum_{n=N+1}^{\infty} m(F_n) < \varepsilon$. მაშინ $\sum_{n=N+1}^{\infty} m(G_n) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \big(m(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\big) = \sum_{n=N+1}^{\infty} m(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^N} \le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^N}$.

განვიხილოთ ჩაკეტილი $F := \cup_{n=1}^{N} F_n$ და ღია $G := \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. მაშინ $F \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G$ და $(G \setminus F) \subset (\cup_{n=1}^{N} G_n \setminus F) \cup (\cup_{n=N+1}^{\infty} G_n) \subset \big(\cup_{n=1}^{N} (G_n \setminus F_n) \cup \cup_{n=N+1}^{\infty} G_n\big)$. ამიტომაც

$$m(G) - m(F) = m(G \setminus F) \le m\big(\cup_{n=1}^{N} (G_n \setminus F_n)\big) + m(\cup_{n=N+1}^{\infty} G_n) \le$$
$$\sum_{n=1}^{N} \big(m(G_n) - m(F_n)\big) + \sum_{n=N+1}^{\infty} m(G_n) \le \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^N} = 2\varepsilon$$

და ა) დამტკიცებულია. ბ) გამომდინარეობს ა)-დან და ტოლობიდან

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \setminus \big(\cup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A_n)\big).$$

7.7. მას შემდეგ რაც ნაჩვენებია $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$-ის ზომადობა, უკვე ადვილია 7.3. თეორემის დამტკიცება. მართლაც $\sum_{n=1}^{N} m(A_n) = m(\cup_{n=1}^{N} A_n) \le m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ (იხ. სავ. 6.3). მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \le m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ და (1) ტოლობის საჩვენებლად საკმარისია დავამტკიცოთ შებრუნებული უტოლობაც.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \ge m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon.$$

მოვძებნოთ ყოველი n-ისთვის $G_n \supset A_n$ ისეთი, რომ $m(A_n) \ge m(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \big(m(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) - \varepsilon \ge m(\cup_{n=1}^{\infty} G_n) - \varepsilon \ge m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon$ (იხ. §6.5).

მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \geq m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ უტოლობაც სამართლიანია და (1) ტოლობა დამტკიცებულია.

8. ლებეგის ზომის თვისებები

ამ პარაგრაფში ვიგულისხმებთ, რომ ყველა განხილული სიმრავლე ზომადია.

8.1. თეორემა. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

დამტკიცება. უბრალოდ დავშალოთ შემდეგი სიმრავლეები თანაუკვეთ ნაწილებად: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ და $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. მაშინ 6.6. თეორემის ძალით $m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$, $m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B)$ და $m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A)$ და ამ ტოლობების შეკრებით მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

8.2. შედეგი. $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ და აგრეთვე $m(\cup_{n=1}^{N} A_n) \leq \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$.

8.3. თეორემა. თუ $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ სიმრავლეთა ჩალაგებული მიმდევრობაა, მაშინ

$$m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$$

დამტკიცება. ავიღოთ თანაუკვეთი სიმრავლეები: $B_1 = A_1$ და $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. მაშინ $A_n = \cup_{i=1}^{n} B_i$ და $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. ამიტომ, 7.3 თეორემის ძალით,

$$m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = m(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \lim_{n \to \infty} m(\cup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n \to \infty} m(A_n).$$

8.4. შედეგი. (ლებეგის ზომის ნახევრად σ-ადიციურობა).

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} m(A_n) \tag{8.1}$$

დამტკიცება. 8.3-ისა და 8.2-ის გათვალისწინებით

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \to \infty} m\left(\cup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{N} m(A_n) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

8.5. თეორემა. რომ თუ $[0,1] \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ სიმრავლეთა ჩალაგებული მიმდევრობაა, მაშინ

$$m(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$$

დამტკიცება. $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1] \setminus \cup_{i=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A_i)$. ამიტომ, ზედა თეორემის გამოყენებით,

$$m(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - m\big(\cup_{i=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A_i)\big) = 1 - \lim_{n \to \infty} m([0,1] \setminus A_n) = 1 - \lim_{n \to \infty} \big(1 - m(A_n)\big) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$$

ზომადი სიმრავლეების ზოგადი განმარტებიდან გამომდინარეობს 0 ზომის სიმრავლეების შედარებით მარტივი განმარტება

8.6. A-ს ეწოდება 0 ზომის სიმრავლე, თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობს ღია სიმრავლე G რომელიც მოიცავს A-ს, $G \supset A$, და $m(G) < \varepsilon$. ცხადია 0 ზომის ყველა ქვესიმრავლის ზომა 0-ია.

8.7. თეორემა (ნული ზომის სიმრავლეების თვლადი გაერთიანების შესახებ). ვთქვათ $A_1, A_2, A_3, \dots,$ 0 ზომის სიმრავლეებია. მაშინ $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε. ყოველი n-თვის მოვძებნოთ $G_n \supset A_n$ სადაც $m(G_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. მაშინ $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ და, 6.5 შედეგის ძალით,

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq m(\cup_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} m(G_n) \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

8.8. განმარტება. A სიმრავლეს ეწოდება G_δ ტიპის, თუკი ის წარმოდგება ღია სიმრავლეების თვლადი თანაკვეთით და F_σ ტიპის თუკი ის წარმოდგება ჩაკეტილი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით.

ცხადია G_δ და F_σ ტიპის სიმრავლეები ბორელის სიმრავლეებია. ისინი აგრეთვე ზომადები არიან. შემდეგი თეორემები გვიჩვენებენ, რომ ყველა ზომადი სიმრავლე ფაქტიურად ამგვარია (0 ზომის სიზუსტით).

8.9. თეორემა. A სიმრავლე ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუკი ის წარმოდგება G_δ ტიპის სიმრავლისა და 0 ზომის სიმრავლის სხვაობის სახით

8.10. თეორემა. A სიმრავლე ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუკი ის წარმოდგება F_σ ტიპის სიმრავლისა და 0 ზომის სიმრავლის გაერთიანების სახით.

ამ ორივე თეორემას ერთდროულად დავამტკიცებთ. თეორემების I ნაწილები ცხადია: თუ $A = (\cap_{n=1}^{\infty} G_n) \setminus N$ ან $A = (\cup_{n=1}^{\infty} F_n) \cup N$, სადაც $m(N) = 0$, მაშინ A ზომადია.

პირიქით, ავიღოთ $\varepsilon_n \searrow 0$. (ვთქვათ $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$). ყოველი n-თვის მოვძებნოთ $F_n \subset A$ და $G_n \supset A$ ისეთნი, რომ $m(G_n) - m(F_n) < \varepsilon_n$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$ და $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ (რატომ!). მაშინ $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset A \subset \cap_{n=1}^{\infty} G_n$.

განვიხილოთ $N := \cap_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)$. მაშინ $m(N) = \lim_{n\to\infty} m(G_n \setminus F_n) = \lim_{n\to\infty} \big(m(G_n) - m(F_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ე.ი. N ნული ზომისაა. ამასთანავე $N = (\cap_{n=1}^{\infty} G_n) \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} F_n)$ მოიცავს $N_1 := (\cap_{n=1}^{\infty} G_n) \setminus A$-ს და $N_2 := A \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n$-ს (აჩვენეთ!) ანუ ეს სიმრავლეები 0 ზომისაა და $A = \cap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus N_1$; $A = \cup_{n=1}^{\infty} F_n \cup N_2$. რ.დ.გ.

8.11. ზომად სიმრავლეთა სიგმა ალგებრას ეწოდება ლებეგის სიგმა ალგებრა. იგი შედგება ბორელის სიგმა ალგებრაზე და ნული ზომის სიმრავლეებზე მოჭიმულ ალგებრაზე.

8.12. თეორემა (ბორელ-კანტელის ლემა). თუ $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ მაშინ

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) = 0$$

დამტკიცება. $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} m(A_n) = 0$ მაშასადამე 8.5-ისა და 8.4-ის ძალით გვექნება $m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \le \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} m(A_n) = 0$

8.12. ცხადია ლებეგის ზომა ინვარიანტულია ძვრის მიმართ, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ზომადი A-თვის და ნამდვილი x რიცხვისთვის

$$m(A) = m(x + A),$$

სადაც $x + A = \{x + y : y \in A\}$.

8.13. ცნობილია აგრეთვე, რომ ღერძის ყველა ქვესიმრავლე არ არის ზომადი. არაზომადი სიმრავლის მაგალითს ავაგებთ [0,1) ინტერვალზე (იხ. სავ. 7.2), ოღონდ ვიგულისხმებთ, რომ იგი დახვეულია ერთეულოვანი სიგრძის წრეწირზე, ანუ $x = x + 1 (\bmod 1)$. [0,1)-ზე შემოვიღოთ ექვივალენტობის მიმართება: $a \sim b$ თუკი $a - b \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ არის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე). მაშინ [0,1) დაიყოფა თანაუკვეთ ექვივალენტობის კლასებად $[0,1) = \cup \mathcal{C}_\alpha$, სადაც თუ $x \in \mathcal{C}_\alpha$, მაშინ $\mathcal{C}_\alpha = \{x + y (\bmod 1) : y \in [0,1)\}$. B იყოს სიმრავლე, რომელსაც ზუსტად ერთი საერთო ელემენტი აქვს ყოველ $\mathcal{C}_\alpha$-თან. მაშინ $x_i + B(\bmod 1) \cap x_j + B(\bmod 1) = \emptyset$ როცა $i \neq j$ და $\cup_{x_i \in [0,1)\cap\mathbb{Q}} \big(x_i + B(\bmod 1)\big) = [0,1)$. მაშასადამე [0,1) დაიყო თვლად თანაუკვეთ ერთმანეთისგან მობრუნებით მიღებულ სიმრავლეებად. B რომ იყოს ზომადი, და მისი ზომა იყოს b, მაშინ თითოეული $x_i + B(\bmod 1)$ იქნებოდა b ზომის და, თუ გამოვიყენებთ ლებეგის ზომის σ-ადიცურობას, მივიღებდით $1 = m[0,1) = \sum_i m\big(x_i + B(\bmod 1)\big) = b + b + b \dots$, რაც შეუძლებელია.

9. ზომადი ფუნქციები

9.1. $f;[0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება ზომადი თუკი ნებისმიერი t რიცხვისთვის, $t \in \mathbb{R}$, ზომადია სიმრავლე

$$\{f > t\} := \{x \in [0,1] : f(x) > t\} = f^{-1}(t, +\infty)\,.$$

9.2. თეორემა. f ფუნქცია ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ზომადია $f^{-1}(B)$ ნებისმიერი B ბორელის სიმრავლისთვის, $B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ აღნიშნავს ბორელის სიგმა ალგებრას იხ.§7.2)

დამტკიცება. რადგან ღია სიმრავლე $(t, +\infty) \in \mathcal{B}$, ამიტომ თეორემის ერთი ნაწილი ცხადია. მეორე ნაწილის დამტკიცებას დავყოფთ პუნქტებად.

ა) ნებისმიერი τ-სთვის $f^{-1}[\tau, +\infty)$ ზომადია, რადგან
$f^{-1}[\tau, +\infty) = f^{-1}\big(\cup_{n=1}^{\infty}(\tau - \frac{1}{n}\,, +\infty)\big) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\tau - \frac{1}{n}\,, +\infty)$;

ბ) ნებისმიერი (a,b) ინტერვალისთვის $f^{-1}(a,b) = f^{-1}(a,\infty) \setminus f^{-1}[b,\infty)$ ზომადია;

გ) ნებისმიერი $G = \cup_{n=1}(a_n, b_n)$ სიმრავლისთვის $f^{-1}(G) = \cup_{n=1} f^{-1}(a_n, b_n)$-ც ზომადია.

ეხლა განვიხილოთ $\mathbb{R}$-ის ყველა ის A ქვესიმრავლეები, $A \subset \mathbb{R}$, რომელთა წინარესახეებიც $f^{-1}(A)$ ზომადია. ასეთი ქვესიმრავლეების კლასი აღვნიშნოთ $\mathcal{A}$-თი. გ)-ს ძალით, ყველა ღია სიმრავლე შედის $\mathcal{A}$-ში. ამასთანავე, თუკი A_n, $n = 1, 2, \ldots$, სიმრავლეები შედიან $\mathcal{A}$-ში, ანუ $f^{-1}(A_n)$-ები ზომადია, მაშინ A_n-ების ნებისმიერი თვლადი კომბინაციიის წინარესახე, როგორც $f^{-1}(A_n)$-ების იგივე კომბინაცია, იქნება ზომადი (რადგან ზომად სიმრავლეთა კლასი არის სიგმა ალგებრა). მაშასადამე $\mathcal{A}$ არის სიგმა ალგებრა, და ბორელის სიგმა ალგებრის განმარტების ძალით $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. რ.დ.გ.

9.3. თეორემა. თუ f და g ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ასევე ზომადი იქნება $f + g$, fg, f/g, და ა. შ.

დამტკიცება. სანიმუშოდ დავამტკიცოთ პირველი დებულება და დანარჩენები გამოვა ანალოგიურად.

ვაჩვენოთ სიმრავლური ტოლობა

$$\{x : f(x) + g(x) > t\} = \cup_{\tau \in \mathbb{Q}}\big(\{x : f(x) > \tau\} \cap \{x : g(x) > t - \tau\}\big) \tag{9.1}$$

მართლაც თუ x ეკუთვნის (1)-ის მარჯვენა მხარეს, მაშინ არსებობს ისეთი τ, რომ $f(x) + g(x) > \tau + t - \tau = t$ და x ეკუთვნის მარცხენა მხარესაც.

ეხლა ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია პირიქით ჩართვაც. ვთქვათ $f(x) + g(x) > t$. მაშინ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი რომ $f(x) + g(x) > t + \varepsilon$. ავიღოთ რაციონალური τ ისეთი, რომ $f(x) > \tau > f(x) - \varepsilon$. მაშინ $g(x) > t - \tau$ და $x \in \{f > \tau\} \cap \{g > t - \tau\}$. მაშასადამე x ეკუთვნის (1)-ის მარჯვენა მხარესაც. ე.ი. (1) ტოლობა სრულდება.

(1) ტოლობა გვეუბნება რომ $\{f + g > t\}$ წარმოდგება ზომად სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანების სახით. მაშასადამე ეს სიმრავლე ზომადია. რ.დ.გ.

9.4. თეორემა. თუ გვაქვს f_n, $n = 1, 2, \ldots$, ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა, მაშინ ასევე ზომადია $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს სიმრავლური ტოლობიდან

$$\{x : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) > t\} = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x : f_n(x) > t\}$$

10. ლებეგის ინტეგრალი

10.1. f ფუნქციას ეწოდება მარტივი თუკი მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია.

10.2. $[0,1]\supset A$ სიმრავლის ინდიკატორი ეწოდება ფუნქციას

$$\mathbf{1}_A(x)=\begin{cases}1 & \text{თუ} \quad x\in A\\ 0 & \text{თუ} \quad x\notin A.\end{cases}$$

ცხადია $\mathbf{1}_A$ მარტივი ფუნქციაა. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{0,1\}$.

10.3. თუ f მარტივი ფუნქცია იღებს მნიშვნელობებს $a_1,a_2,\dots,a_n$, მაშინ იგი ყოველთვის ჩაიწერება ტოლობით

$$f=\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbf{1}_{A_k} \quad \text{სადაც} \quad A_k=\{x\in[0,1]:f(x)=a_k\}=f^{-1}\{a_k\} \tag{10.1}$$

ცხადია $A_i\cap A_j=\emptyset$ როცა $i\neq j$. ცხადია აგრეთვე, რომ მარტივი ფუნქცია ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ზომადია თითოეული A_k.

10.4. (1) მარტივი ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება ტოლობით

$$\int_0^1 f\,dm=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot m(A_k)=a_1\cdot m(A_1)+a_2\cdot m(A_2)+\ldots+a_n\cdot m(A_n)$$

იგი ტოლია f-ის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებული "მართკუთხედების"ფართობების ჯამის ნიშნების გათვალისწინებით(თუკი შევინარჩუნებთ მართკუთხედების ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას: ფუძის "სიგრძე"$\times$ სიმაღლე). ცხადია დადებითი ფუნქციის ინტეგრალიც დადებითია.

10.5. ლემა. თუ f მარტივი ზომადი ფუნქციაა და $|f|\le\varepsilon$, მაშინ

$$\left|\int_0^1 f\,dm\right|\le\varepsilon\,.$$

დამტკიცება:

$$\left|\int_0^1 f\,dm\right|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot m(A_k)\le\sum_{k=1}^{n}\varepsilon\cdot m(A_k)=\varepsilon\cdot m\left(\cup_{k=1}^{n}A_k\right)\le\varepsilon\cdot m[0,1]=\varepsilon$$

10.6. ლემა. თუ f და g მარტივი ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ასეთივეა $f+g$-ც და

$$\int_0^1(f+g)\,dm=\int_0^1 f\,dm+\int_0^1 g\,dm$$

დამტკიცება: ვთქვათ $f=\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbf{1}_{A_k}$ და $g=\sum_{k=1}^{l}b_k\mathbf{1}_{B_k}$ (A_k-ები თანაუკვეთია და ასეთივეა B_k-ებიც. შეგვიძლია აგრეთვე ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\cup_{k=1}^{n}A_k=\cup_{k=1}^{n}B_k=[0,1]$). მაშინ $f+g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_i+b_j)\mathbf{1}_{A_i\cap B_j}$ და

$$\int_0^1(f+g)\,dm=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\big(a_im(A_i\cap B_j)+b_jm(A_i\cap B_j)\big)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{l}m(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{l}b_j\sum_{i=1}^{n}m(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{n}a_im\big(\cup_{j=1}^{l}(A_i\cap B_j)\big)+$$

$$\sum_{j=1}^{l}b_jm\big(\cup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_j)\big)=\sum_{i=1}^{n}a_im(A_i)+\sum_{j=1}^{n}b_jm(B_j)=\int_0^1 f\,dm+\int_0^1 g\,dm$$

10.7. ლემა. თუ f მარტივი ზომადი ფუნქციაა და C რაიმე მუდმივია, მაშინ

$$\int_0^1 C \cdot f\,dm = C \cdot \int_0^1 f\,dm$$

დამტკიცება. თუ f წარმოდგება (1) სახით, მაშინ

$$\int_0^1 C \cdot f\,dm = \sum_{k=1}^n C\,a_k \cdot m(A_k) = C \sum_{k=1}^n a_k \cdot m(A_k) = C \cdot \int_0^1 f\,dm$$

10.8. შედეგი. თუ f და g მარტივი ზომადი ფუნქციებია და $f \geq g$, მაშინ $\int_0^1 f\,dm \geq \int_0^1 g\,dm$

10.9. თუ $f : [0,1] \to [0,a]$ ზომადი ფუნქციაა და $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = a$ არის $[0,a]$-ს ისეთი დაყოფა, რომ $\delta_n := \sup_{k \leq n} |a_k - a_{k-1}| \leq \varepsilon$ მაშინ

$$f_n = \sum_{k=1}^n a_{k-1} \cdot \mathbf{1}_{\{x\in[0,1]: a_{k-1} < f(x) \leq a_k\}} = \sum_{k=1}^n a_{k-1} \cdot \mathbf{1}_{\{f^{-1}(a_{k-1}, a_k]\}}$$

არის მარტივი ზომადი ფუნქცია და $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. ამიტომ ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ f-ის ლებეგის ინტეგრალი არის f_n-ის ლებეგის ინტეგრალთან ε სიზუსტით. უფრო მკაცრად f-ის ლებეგის ინტეგრალი განიმარტება ტოლობით:

$$\int_0^1 f\,dm := \lim_{\delta_n \to 0} \int_0^1 f_n\,dm = \lim_{\delta_n\to 0} \sum_{k=1}^n a_{k-1} \cdot m\{f^{-1}(a_{k-1}, a_k]\} \tag{10.2}$$

10.10. თეორემა. ყოველი შემოსაზღვრული დადებითი ზომადი f-ისთვის (2) ზღვარი არსებობს და სასრულია, ანუ ლებეგის ინტეგრალი განიმარტება (რიმანის ინტეგრალისგან განსხვავებით)

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $\int_0^1 f_n\,dm$ კოშის მიმდევრობაა. ნებისმიერი მცირე ε-ისთვის ავიღოთ $\delta_N < \frac{\varepsilon}{2}$, ისე რომ $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, როცა $n \geq N$. ავიღოთ n და $l \geq N$. მაშინ

$$|f_n(x) - f_l(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_l(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

და 10.5–10.7 ლემების ძალით $\left|\int_0^1 f_n\,dm - \int_0^1 f_l\,dm\right| = \left|\int_0^1 (f_n - f_l)\,dm\right| \leq \varepsilon$.

10.11. თუ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ზომადი ფუნქციაა, მაშინ ღერძზე განსაზღვრულ ფუნქციას $D_f : \mathbb{R} \to [0,1]$ ქვემოთ მოცემული ტოლობით

$$D_f(t) = m\{x \in [0,1] : f(x) > t\}$$

ეწოდება f ფუნქციის <u>განაწილების ფუნქცია</u>.

10.12. ლემა. D_f არის კლებადი, მარჯვნიდან უწყვეტი და $\lim\limits_{t\to-\infty} D_f(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} D_f(t) = 0$

დამტკიცება. ვინაიდან $\{f > t_1\} \subset \{f > t_2\}$ როცა $t_1 > t_2$, ამიტომ $m\{f > t_1\} \leq m\{f > t_2\}$, ანუ D_f კლებადი (არაზრდადი) ფუნქციაა.

$$\lim_{t\to t_0+} D_f(t) = \lim_{t\to t_0+} m\{f > t\} = m\big(\cup_{t>t_0} \{f > t\}\big) = m\{f > t_0\} = D_f(t_0)$$
$$\lim_{t\to-\infty} D_f(t) = \lim_{t\to-\infty} m\{f > t\} = m\big(\cup_{t\in\mathbb{R}} \{f > t\}\big) = m[0,1] = 1$$
$$\lim_{t\to+\infty} D_f(t) = \lim_{t\to+\infty} m\{f > t\} = m\big(\cap_{t\in\mathbb{R}} \{f > t\}\big) = m(\emptyset) = 0$$

10.13. შენიშვნა. ალბათობის თეორიაში განაწილების ფუნქცია ჰქვია შემდეგი ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციას $F_f(t) = m\{x : f(x) \leq t\} = 1 - D_f(t)$. იგი გამოდის ზრდადი მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია რომლის ზღვარიც $-\infty$-ში არის 0 და $+\infty$-ში არის 1. ამ ფუნქციის წარმოებულს, თუკი იგი არსებობს, ჰქვია განაწილების სიმკვრივე $P_f(t) = F'_f(t)$

10.14. ლებეგის ინტეგრალი შეიძლება ჩაიწეროს განაწილების ფუნქციის რიმანის ინტეგრალით:

თეორემა. ვთქვათ $f : [0,1] \to [0,a]$ ზომადი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_0^1 f\,dm = \int_0^a D_f(t)\,dt \tag{10.3}$$

დამტკიცება. გავაკეთოთ $[0,a]$-ს დაყოფები $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = a$ რომელთათვისაც $\delta_n \to 0$ (იხ. §10.8) n-ის ზრდასთან ერთად. თუ ჩავწერთ f-ის ლებეგის ინტეგრალს 10.9 თეორემის გათვალისწინებით, D_f-ის რიმანის ინტეგრალს მისი განმარტებიდან გამომდინარე და გავითვალისწინებთ, რომ $a_0 = 0$ და $D_f(a_n) = D_f(a) = m\{f > a\} = m(\emptyset) = 0$ მივიღებთ

$$\int_0^1 f\,dm = \lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n a_{k-1}\cdot m\{a_{k-1} < f \leq a_k\} = \lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n a_{k-1}\big(D_f(a_{k-1}) - D_f(a_k)\big) =$$

$$\lim_{\delta_n\to 0}\left(\sum_{k=1}^n a_{k-1}D_f(a_{k-1}) - \sum_{k=1}^n a_{k-1}D_f(a_k)\right) = \lim_{\delta_n\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D_f(a_k) - \sum_{k=1}^n a_{k-1}D_f(a_k)\right) =$$

$$\lim_{\delta_n\to 0}\left(a_0 D_f(a_0) + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1})D_f(a_k) - a_{n-1}D_f(a_n)\right) = \int_0^a D_f(t)\,dt.$$

10.15. შენიშვნა. ალბათობის თეორიაში ინტეგრალის ანუ მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულა (იხ. 1.13)

$$E(f) = \int_0^1 f\,dm = \int_0^a t\cdot P_f(t)\,dt$$

ეს ფორმულა მიიღება (3)-ისგან ნაწილობითი ინტეგრებით თუ გავითვალისწინებთ, რომ $F_f(a) = m\{f \leq a\} = 1$. მართლაც $\int_0^a t\cdot P_f(t)\,dt = \int_0^a t\cdot F'_f(t)\,dt = t\,F_f(t)\big|_0^a - \int_0^a F_f(t)\,dt =$
$a - \int_0^a F_f(t)\,dt = \int_0^a (1 - F_f(t))\,dt = \int_0^a D_f(t)\,dt = \int_0^1 f\,dm$

10.16. თუ $0 \leq f$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია, მაშინ მის ინტეგრალს განვიხილავთ როგორც წაკვეთილი ინტეგრალების ზღვარს (როგორც არასაკუთრივ ინტეგრალს)

$$\int_0^1 f\,dm = \lim_{a\to\infty}\int_0^1 f_a\,dm \tag{10.4}$$

სადაც $f_a(x) = f(x)$ როცა $f(x) \leq a$ და $f_a(x) = a$ როცა $f(x) > a$. a-ს ზრდასთან ერთად ინტეგრალი იზრდება (იხ. შედეგი 10.8) ამიტომ ზღვარი (4)-ში ყოველთვის არსებობს, მაგრამ ზოგჯერ იგი შეიძლება გამოვიდეს $+\infty$-ის ტოლი. ამ დროს ამბობენ რომ ფუნქცია არაინტეგრებადია. არაშემოსაზღვრული ფუნქციისთვის (3) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\int_0^1 f\,dm = \int_0^\infty D_f(t)\,dt$$

თუ f ნებისმიერი ნიშნისაა, რომლის მოდულიც ინტეგრებადია $\int_0^1 |f|\,dm < \infty$, ცალ-ცალკე განვიხილავთ მის დადებით და უარყოფით ნაწილს $f^+ = \max(f,0)$ და $f^- = \max(-f,0)$. ამ დროს $f = f^+ - f^-$ და ინტეგალს განვმარტავთ ტოლობით: $\int_0^1 f\,dm = \int_0^1 f^+\,dm - \int_0^1 f^-\,dm$.

10.17. ვიცით რა ლებეგის ზომისა და ინტეგრალის აგება [0,1]-ზე, შეგვიძლია იგი ანალოგიურად ავაგოთ ნებისმიერ $[n, n+1]$ ინტერვალზე, $n \in \mathbb{Z}$, და შემდეგ განვავრცოთ მთელ $\mathbb{R}$-ზე. მართლაც $A \subset \mathbb{R}$ და $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ იყვნენ ზომადნი თუკი $A \cap [n, n+1]$ და $\mathbf{1}_{[n,n+1]} f$ არიან ზომადნი ყოველი მთელი n-თვის და

$$m(A) = \sum\nolimits_{n \in \mathbb{Z}} m\big(A \cap [n, n+1)\big) \quad \text{და} \quad \int_{\mathbb{R}} f\, dm = \sum\nolimits_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[n,n+1]} f\, dm$$

შეიძლება ამ დროს ზოგიერთი სიმრავლის ზომა და ზოგიერთი ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი გამოვიდეს უსასრულობა, მაგალითად $m(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} 1\, dm = \infty$. ცხადია ღერძზე აგებული ლებეგის ზომასა და ინტეგრალს ექნება იგივე თვისებები რაც მონაკვეთზე.

11. ლებეგის ინტეგრალის თვისებები

11.1. ლებეგის ინტეგრალს გააჩნია რიმანის ინტეგრალის მსგავსი თვისებები, რომლებიც მიიღებიან შესაბამისი დისკრეტული ანალოგებიდან (მარტივი ფუნქციებისათვის) ზღვარზე გადასვლით (10.2) ფორმულის მიხედვით.

ა) (წრფივობა) $\int_a^b (f+g)\, dm = \int_a^b f\, dm + \int_a^b g\, dm$ და $\int_a^b c \cdot f\, dm = c \cdot \int_a^b f\, dm$

ბ) (ზემოდან შეფასება) $\left|\int_a^b f\, dm\right| \le \int_a^b |f|\, dm \le \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|(b-a)$.

ამასთანავე, თუკი ინტეგრალს ზომად სიმრავლეზე განვმარტავთ ტოლობით $\int_A f\, dm = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A f\, dm$, გვექნება ლებეგის ინტეგრალის ადიციურობის და σ-ადიციურობის თვისებებიც

$$\text{გ)} \int_{A \cup B} f\, dm = \int_A f\, dm + \int_B f\, dm, \text{ და } \int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, dm$$

როცა $A \cap B = \emptyset$ პირველ შემთხვევაში და $A_i \cap A_j = \emptyset$ მეორე შემთხვევაში.

ცხადია აგრეთვე, რომ (10.2) ფორმულა ფაქტიურად გვეუბნება, რომ ლებეგის ინტეგრალი შეიძლება განიმარტოს ტოლობითაც

$$\int_a^b f\, dm = \sup_{S[a,b] \ni g \le f} \int_a^b g\, dm\,, \tag{11.1}$$

სადაც $S[a, b]$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ მარტივ (ზომად) ფუნქციათა კლასი.

11.2. ლებეგის ინტეგრალის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ე.წ. ჩებიშევის უტოლობა

$$m\{x \in [a, b] : |f| > t\} \le \frac{1}{t} \int_a^b |f|\, dm\,.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $f \ge 0$. ცხადია, ყოველი დადებითი t-სთვის, სრულდება შემდეგი უტოლობა (ფუნქციებს შორის)

$$f \ge t \cdot \mathbf{1}_{\{f>t\}}. \tag{11.2}$$

თუკი ვაინტეგრებთ ამ უტოლობის ორივე მხარეს გვექნება $\int_a^b f\, dm \ge t \cdot m\{f > t\}$. საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

11.3. ეხლა დავამტკიცოთ შემდეგი მარტივი დებულება, რომ თუკი არაუარყოფითი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი 0-ია, მაშინ ასეთი ფუნქცია 0-ისგან განსხვავებული შეიძლება იყოს მხოლოდ ნული ზომის სიმრავლეზე, ანუ თუკი $f \ge 0$, მაშინ $\int_a^b f\, dm = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ თითქმის ყველა

x-ისთვის $[a,b]$-დან. "თითქმის ყველგან"ამ შემთხვევაში არის მათემატიკური ტერმინი (მას შევამოკლებთ ხოლმე როგორც "თ.ყ.") და ნიშნავს, რომ მოცემული პირობა სრულდება ყველგან, გარდა შესაძლებელია 0 ზომის სიმრავლეზე.

დამტკიცება: (1) ტოლობის ძალით, ცხადია რომ თუ $f = 0$ თ.ყ. მაშინ $\int_a^b f\,dm = 0$. უნდა ვაჩვენოთ პირიქით გამომდინარეობა, რომ თუკი ინტეგრალი ნულია, მაშინ $m\{f \neq 0\} = 0$. ვინაიდან $f \geq 0$, ამიტომ $\{f \neq 0\} = \{f > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{f > \frac{1}{n}\}$. მაგრამ ყოველი n-ისთვის $m\{f > \frac{1}{n}\} \leq n\int_a^b f\,dm = 0$, და 0 ზომის სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება ისევ 0 ზომისაა. რ.დ.გ.

11.4. ლებეგის ინტეგრალის თეორიაში, ფუნქციები რომლებიც თ.ყ. ემთხვევიან ერთმანეთს გაიგივებულია, ანუ ყოველი ფუნქციის მნიშვნელობები გვაინტერესებს 0 ზომის სიზუსტით, რადგან 0 ზომის სიმრავლეები ინტეგრალის მნიშვნელობაზე როგორც ვნახეთ გავლენას ვერ ახდენს. ფორმალურად ეს კეთდება ექვივალენტობის მიმართებით $f \sim g$ თუკი $m\{f \neq g\} = 0$.

12. ლებეგის L_p სივრცეები და ფუნქციათა კრებადი მიმდევრობები

12.1. f ფუნქციის <u>p ნორმა</u> $\|\cdot\|_p$, სადაც $p \geq 1$, განიმარტება ტოლობით

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{\frac{1}{p}}$$

ნორმას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისებები;

ა) $\|f\|_p \geq 0$, $\|f\|_p = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $f = 0$;

ბ) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$; გ) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (იგივე მინკოვსკის უტოლობა)

12.2. ლებეგის $L_p[a,b]$ სივრცე არის იმ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ზომად) ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა p ნორმა სასრულია

$$L_p[a,b] := \{f : \|f\|_p < \infty\}.$$

ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეს $L := L_1$. ამ სივრცეში განვიხილავთ ფუნქციათა მიმდევრობების სამი სხვადასხვა ტიპის კრებადობებს. ყველგან შემდგომში ვიგულისხმებთ რომ განხილული ფუნქციები არიან განსაზღვრული სასრულ $[a,b]$ სეგმენტზე, $|a-b| < \infty$, და არიან ზომადნი. §9.4-ის თანახმად, ზომადნი იქნებიან აგრეთვე ზღვარითი ფუნქციები

12.3. f_n, $n = 1, 2, \ldots$, ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია f-ისკენ თითქმის ყველგან (თ.ყ.), $f_n \to f$, თუკი $f_n(x) \to f(x)$ თ.ყ. x-თვის $[a,b]$-დან.

12.4. f_n ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია f-ისკენ ზომით, $f_n \rightrightarrows f$, თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის

$$m\{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \to 0.$$

12.5. f_n ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია f-ისკენ ნორმით, თუკი

$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f|\,dm \to 0.$$

უნდა კარგად გვესმოდეს რა დამოკიდებულებააა ამ ტიპის კრებადობებს შორის.

12.6. თეორემა. თუ f_n ნორმით კრებადია, მაშინ ის ზომით კრებედიცაა, ანუ

$$\|f_n - f\| \to 0 \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f$$

დამტკიცება უშუალოდ მიიღება ჩებიშევის უტოლობიდან $m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f_n - f\| \to 0$.

12.7. ცხადია თუ $\|f_n - f\| \to 0$ მაშინ $\int_a^b f_n\,dm \to \int_a^b f\,dm$. მართლაც $\left|\int_a^b f_n\,dm - \int_a^b f\,dm\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\,dm\right| \le \int_a^b |f_n - f|\,dm \to 0$.

12.8. განვიხილოთ [0,1]-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{როცა} \quad 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{როცა} \quad \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

და იგივურად 0-ის ტოლი ფუნქცია $f(x) = 0$ როცა $x \in [0,1]$. მაშინ ცხადია, რომ ეს ფუნქციათა მიმდევრობა მიისწრაფის თ.ყ. და ზომით f-ისკენ, მაგრამ $\|f_n - f\| = \int_0^{1/n} n\,dx = 1 \not\to 0$. ანუ 12.7 თეორემის შებრუნებული თეორემა არ არის სწორი.

12.9. (ლებეგის თეორემა) თუ f_n ფუნქციათა მიმდევრობა თ.ყ. კრებადია f-ისკენ, $f_n \to f$, მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია ზომითაც, $f_n \rightrightarrows f$.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი ε. ვინაიდან

$$\{x \in [a,b] : \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \quad (12.1)$$

და $m\{x \in [a,b] : \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \le m\{x \in [a,b] : \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \ne 0\} = 0$. ამიტომ $m\left(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$. მაშასადამე, 8.3 თეორემის გათვალისწინებით $\lim_{k\to\infty} m\left(\cup_{n=k}^{\infty} \{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$, ანუ $\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$. რ.დ.გ.

12.10. განვიხილოთ [0,1]-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობა: $f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{41}, \ldots$ სადაც

$$f_{nj}(x) = \begin{cases} 1 & \text{როცა} \quad \frac{j-1}{n} \le x < \frac{j}{n} \\ 0 & \text{როცა} \quad x \notin \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right) \end{cases}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ცხადია ეს ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია ზომით $f \equiv 0$ ფუნქციისკენ, მაგრამ $f(x) \not\to 0$ ყველა x-ისთვის [0,1]-დან. მაშასადამე 12.9 თეორემის შებრუნებული არ არის სწორი. მიუხედავად ამისა სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

12.11. (რისის თეორემა) თუ f_n ზომით კრებადია f-ისკენ, $f_n \rightrightarrows f$, მაშინ f_n-დან გამოიყოფა ისეთი ქვემიმდევრობა f_{n_k} რომელიც თ.ყ. კრებადია f-ისკენ, $f_{n_k} \to f$.

დამტკიცება. ავიღოთ $\varepsilon_k \searrow 0$, ვთქვათ $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. f_n-იდან გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $f_n^{(1)}$, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\{x \in [a,b] : |f_n^{(1)}(x) - f(x)| > \varepsilon_1\} < \infty.$$

მაშინ, ბორელ კანტელის ლემის ძალით (იხ §8.12)

$$m\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x \in [a,b] : |f_n^{(1)}(x) - f(x)| > \varepsilon_1\}\right) = 0$$

$f_n^{(1)}$-იდან გამოვყოთ $f_n^{(2)}$ ქვემიმდევრობა , რომლისთვისაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\{x \in [a,b] : |f_n^{(2)}(x) - f(x)| > \varepsilon_2\} < \infty.$$

მაშინ

$$m\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x \in [a,b] : |f_n^{(2)}(x) - f(x)| > \varepsilon_2\}\right) = 0$$

და ასე შემდეგ გავაგრძელოთ უსასრულოდ. მიღებული ფუნქციების კვადრატული ცხრილიდან $f_n^{(j)}$ გამოვყოთ დიაგონალური ქვემიმდევრობა $f_n^{(n)}$ (გააკეთეთ შესაბამისი ნახატი), რომელიც იქნება თავიდან არსებული მიმდევრობის რაღაც f_{n_k} ქვემიმდევრობა.

ნებისმეირი დადებითი ε-თვის, თუკი $\varepsilon_k < \varepsilon$, გვექნება

$$m\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \le m\left(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon_k\}\right) = 0$$

და მაშასადამე $m\{x \in [a,b] : \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$ (იხ. (1)). ე.ი. $m\{x \in [a,b] : \lim_{n\to\infty} |f_n^{(n)}(x) - f(x)| \ne 0\} = m\{x \in [a,b] : \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > 0\} = m\left(\cup_{k=1}^{\infty} \{x \in [a,b] : \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n^{(n)}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$. რ.დ.გ.

12.12. როგორც 12.8-ში ვნახეთ, თითქმის ყველგან კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობ ნორმით კრებადობა. მაგრამ თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა იყოს ერთობლივ შემოსაზღვრული, მაშინ ადგილი აქვს ნორმით კრებადობას:

თეორემა (შემოსაზღვრულად კრებადობის შესახებ). თუ $f_n \to f$ და $|f_n| < M$, მაშინ $\|f_n - f\| \to 0$.

დამტკიცება. ნებისიერი დადებითი ε-ისთვის გვექნება

$$\int_a^b |f_n - f|\, dm = \int_{\{|f_n - f| \le \varepsilon\}} |f_n - f|\, dm + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f|\, dm \le \varepsilon \cdot m\{x \in [a,b] : |f_n - f| \le \varepsilon\}$$
$$+2M \cdot m\{x \in [a,b] : |f_n - f| > \varepsilon\} \le \varepsilon(b-a) + 2M \cdot m\{x \in [a,b] : |f_n - f| > \varepsilon\}.$$

12.10 თეორემის თანახმად, $f_n \rightrightarrows f$. მაშასადამე უკანასკნელი გამოსახულების მეორე შესაკრები მიისწრაფის 0-ისკენ და ვღებულობთ

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f|\, dm \le \varepsilon(b-a)$$

საიდანც გამომდინარეობს ნორმით კრებადობა ε-ის ნებისმიერობის გამო.

12.13. დამტკიცებულ თეორემებს გამოვიყენებთ რიმანის ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის დასადგენად.

თეორემა. ვთქვათ, f შემოსაზღვრულია $[a,b]$-ზე. იმისათვის რომ არსებობდეს მისი რიმანის ინტეგრალი აუცილებელია და საკმარისი f-ის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე იყოს 0 ზომის. ამ შემთხვევაში

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f\, dm. \tag{12.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, A არის f-ის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე.

თუ $x_0 \in [a,b]$, განვმარტოთ "ნახტომი"

$$N(x_0) = \inf_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,y \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} |f(x) - f(y)|\,.$$

ცხადია $x_0 \in A \iff N(x_0) > 0$. დავუშვათ $A_k := \{x \in [a,b] : N(x) > \frac{1}{k}\}$. ცხადია $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, და $\cup_k A_k = A$.

განვიხილოთ $[a,b]$-ის ნებისმიერი დაყოფა, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ და ვისარგებლოთ §1.1-ის აღნიშვნებით:

$$\overline{f}_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x) \quad \text{და} \quad \underline{f}_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x).$$

განვიხილოთ ფუნქციები $g_n(x) = \overline{f}_i$ და $h_n(x) = \underline{f}_i$, როცა $x \in [x_i, x_{i+1})$, $0 \le i < n$. მაშინ g_n და h_n უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია, $n = 1, 2, \ldots$, და მათი ინტეგრალები იქნება,შესაბამისად,

დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები:

$$\overline{D}(f;x_0,x_1,\ldots,x_n)=\int_a^b g_n\,dm \quad \text{და} \quad \underline{D}(f;x_0,x_1,\ldots,x_n)=\int_a^b h_n\,dm.$$

თუ $m(A)\neq 0$ მაშინ, ვინაიდან თვლადი რაოდენობა 0 ზომის სიმრავლეების გაერთიანება ისევ 0 ზომისაა, არსებობს ისეთი k, რომ $m(A_k)\neq 0$. ე.ი. იარსებებს ისეთი $\delta>0$, რომ $m(G)>\delta$ ყველა ღია G-თვის რომელიც მოიცავს A_k-ს. ცალკე განვიხილოთ დაყოფის ის ინტერვალები, რომლებიც კვეთენ A_k-ს. გვექნება

$$\overline{D}-\underline{D}=\sum_{i=0}^{n-1}\overline{f}_i(x_{i+1}-x_i)-\sum_{i=0}^{n-1}\underline{f}_i(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(\overline{f}_i-\underline{f}_i)(x_{i+1}-x_i)\geq$$

$$\sum_{\{i:(x_i,x_{i+1})\cap A_k\neq\emptyset\}}(\overline{f}_i-\underline{f}_i)(x_{i+1}-x_i)\geq\frac{1}{k}\sum_{\{i:(x_i,x_{i+1})\cap A_k\neq\emptyset\}}(x_{i+1}-x_i)\geq\frac{1}{k}m^*(A_k)\geq\frac{\delta}{k}\,.$$

მივიღეთ, რომ დარბუს ზედა და ქვედა ჯამებს შორის სხვაობა ყოველთვის მეტია რაღაც ფიქსირებულ რიცხვზე, ე.ი. რიმანის ინტეგრალი არ არსებობს.

თუკი $m(A)=0$, მაშინ $g_n(x)\to f(x)$ და $h_n(x)\to f(x)$ თითქმის ყველგან, კერძოდ ყველა უწყვეტობის წერტილში (აჩვენეთ!). ამიტომ 12.12 თეორემისა და 12.7 შენიშვნის გათვალისწინებით

$$\int_a^b g_n\,dm\to\int_a^b f\,dm \quad \text{და} \quad \int_a^b h_n\,dm\to\int_a^b f\,dm,$$

ანუ დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები ერთიდაიგივე რიცხვისკენ მიისწრაფიან და სრულდება (2) ტოლობაც.

ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ აგრეთვე რამოდენიმე ცნობილ თეორემას ფუნქციათა კრებადი მიმდევრობების შესახებ.

12.14. ფატუს თეორემა. თუ f_n დადებით ფუნქციათა მიმდევრობა, $f_n\geq 0$, კრებადია თ.ყ f ფუნქციისკენ, $f_n\to f$, მაშინ

$$\int_a^b f\,dm\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dm.$$

კერძოდ, არ გამოირიცხება შესაძლებლობა, რომ ამ უტოლობის რომელიმე მხარე იყოს $+\infty$.

დამტკიცება. დავუშვათ g ისეთი მარტივი ფუნქციაა რომ $0\leq g\leq f$. დავუშვათ $g_n(x)=\min(g(x),f_n(x)),\,n=1,2,\ldots$. მაშინ $g_n\to g$ თ.ყ. და შემოსაზღვრულად კრებადობის თეორემის ძალით (იხ.12.12) $\int_a^b g_n\,dm\to\int_a^b g\,dm$. აგების ძალით $g_n\leq f_n$ და შესაბამისად $\int_a^b g_n\,dm\leq\int_a^b f_n\,dm$. ამიტომაც ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\int_a^b g\,dm\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dm.$$

თუ ავიღებთ სუპრემუმს ყველა g-ს მიმართ (იხ. (11.1)) მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

12.15. თეორემა (მონოტონური კრებადობის შესახებ). თუ f_n დადებით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობაა და $f_n\to f$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dm=\int_a^b f\,dm.$$

აქაც არ გამოვრიცხავთ შესაძლებლობას, რომ ამ ტოლობის ორივე მხარე იყოს $+\infty$.

დამტკიცება. ვინაიდან $f_n(x) \le f(x)$ თ.ყ. x-ისთვის, გვაქვს $\int_a^b f_n\,dm \le \int_a^b f\,dm$ ყოველი n-ისთვის. მაშასადამე $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dm \le \int_a^b f\,dm$ და ფატუს თეორემასთან ერთად ეს უტოლობა გვაძლევს დასამტკიცებელ ტოლობას.

12.16. წინა თეორემიდან, თუკი მწკრივებს ჩავწერთ კერძო ჯამების ტერმინებში, მივიღებთ ლევის თეორემას.

თეორემა. თუ h_n არის დადებით ფუნქციათა მიმდევრობა, მაშინ

$$\int_a^b \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} h_n\,dm = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \int_a^b h_n\,dm$$

12.17. შედეგი. თუ h_n არის დადებით ფუნქციათა მიმდევრობა და $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b h_n\,dm < \infty$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) < \infty$ თ.ყ. x-ისთვის. (მითითება: თუ $m\{f=\infty\} > 0$, მაშინ $\int_a^b f\,dm = \infty$.)

12.8. შედეგი. ვთქვათ g დადებითი ფუნქციაა და

$$g_N(x) = \begin{cases} g(x) & \text{როცა } \; g(x) \le N \\ 0 & \text{როცა } \; g(x) > N \end{cases} \quad , \qquad N = 1, 2, \ldots .$$

მაშინ

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b g_N\,dm = \int_a^b g\,dm.$$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 12.15-დან რადგან $g_N(x)$ ზრდადი (არამკაცრად) მიმდევრობაა ყოველი x-ისთვის.

12.19. ლებეგის თეორემა (ინტეგრებადი მაჟორანტის შესახებ). თუ f_n, $n = 1, 2, \ldots$, ფუნქციათა მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისკენ, $f_n \to f$ თ.ყ., და თუ არსებობს ისეთი დადებითი ინტეგრებადი g ფუნქცია, რომ $|f_n(x)| \le g(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f|\,dm = 0$$

და შესაბამისად (იხ. §12.7)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dm = \int_a^b f\,dm.$$

დამტკიცება. ნებისმიერი დადებითი ε-ისთვის ავიღოთ იმდენად დიდი N რომ შესრულდეს უტოლობა $\int_a^b g\,dm - \int_a^b g_N\,dm < \varepsilon$ (იხ.12.18). ვთქვათ $A_N := \{x \in [a,b] : g(x) \le N\}$. მაშინ ცხადია $g_N = \mathbf{1}_{A_N} g$ და $\varepsilon > \int_a^b g\,dm - \int_a^b \mathbf{1}_{A_N} g\,dm = \int_a^b g\,dm - \int_{A_N} g\,dm = \int_{A_N^c} g\,dm$ სადაც $A_N^c := [a,b] \setminus A_N$. თუ განვიხილავთ ფუნქციათა მიმდევრობას $\mathbf{1}_{A_N} f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, მაშინ ეს მიმდევრობა იქნება შემოსაზღვრული, $|\mathbf{1}_{A_N} f_n(x)| \le N$, და თ.ყ. კრებადი $\mathbf{1}_{A_N} f$-ისკენ. ამიტომ 12.12 თეორემის ძალით

$$\int_a^b |\mathbf{1}_{A_N} f_n - \mathbf{1}_{A_N} f|\,dm = \int_{A_N} |f_n - f|\,dm \to 0.$$

მაშასადამე

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_a^b |f_n - f|\,dm = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{A_N} |f_n - f|\,dm + \int_{A_N^c} |f_n - f|\,dm\right) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{A_N} |f_n - f|\,dm +$$
$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{A_N^c} |f_n - f|\,dm \le \int_{A_N^c} 2g\,dm < 2\varepsilon$$

საიდანაც მიიღება თეორემა ε-ის ნებისმიერობის გამო.

ჩვენ დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბებთ კიდევ რამოდენიმე მნიშვნელოვან თეორემას ლებეგის ინტეგრალის თეორიიდან.

12.20. თეორემა (ლუზინის). f იყოს ნებისმიერი (ზომადი) ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია g რომლისთვისაც

$$m\{x : f(x) \ne g(x)\} < \varepsilon$$

12.21. (ლებეგის თეორემა განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულის შესახებ) ვთქვათ $f \in L_1(a,b)$. მაშინ

$$F(x) = \int_a^x f\,dm, \qquad a < x < b, \tag{12.3}$$

ფუნქციის წარმოებული არსებობს თ.ყ. x-ისთვის და

$$F'(x) = f(x) \quad \text{თ.ყ.}$$

შეგახსენებთ, რომ თუ f უწყვეტია და (3)-ში გაიგება რიმანის ინტეგრალი, მაშინ ზედა ტოლობა სრულდება ყველა x-ისთვის.

12.22. უწყვეტ F ფუნქციას ეწოდება <u>აბსოლუტურად უწყვეტი</u>, თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1} |x_{i+1} - x_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \varepsilon\,.$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ (3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია. სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც.

12.23. თეორემა (აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის წარმოებულის შესახებ). თუ $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციია, მაშინ $F'(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან, $F' \in L_1(a,b)$ და

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt. \tag{12.4}$$

12.24. მონოტონური ფუნქცია არ არის სავალდებულო იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი. მიუხედავად ამისა სამართლიანია შემდეგი

ლებეგის თეორემა (მონოტონური ფუნქციის წარმოებულის შესახებ). თყ F მონოტონური ფუნქციაა, მაშინ $F'(x)$ არსებობს და სასრულია თითქმის ყველგან.

მიუხედავად თეორემა 12.24-ის სამართლიანობისა, არსებობენ მონოტონური ფუნქციები რომელთათვისაც (4) წარმოდგენა არ სრულდება. კერძოდ არსებობენ მკაცრად მონოტონური ფუნქციები რომელთა წარმოებული 0-ია თითქმის ყველგან. ასეთ ფუნქციებს ჰქვიათ სინგულარული.

13. მონოტონური ფუნქციები. შემოსაზღვრული ვარიაცია. სტილტიესის ინტეგრალი

13.1. თეორემა (მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა შესახებ). მონოტონური f ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ან სასრულია ან თვლადი.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f ზრდადია.

ვთქვათ D არის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე. მაშინ ყოველი a-ისთვის D-დან

$$f(a-) = \sup_{x<a} f(x) \qquad \text{და} \qquad f(a+) = \inf_{x>a} f(x),$$

ანუ ყოველ წყვეტის წერტილში არსებობა მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები (წყვეტა არის I გვარის). ამასთანავე f-ის ზრდადობის გამო, თუ $a < b \in D$, მაშინ $f(a+) \le f(b-)$. მაშასადამე ინტერვალთა სისტემა $\{(f(a-), f(a+))\}_{a\in D}$ თანაუკვეთია და რადგან ვიცით რომ თანაუკვეთ ინტერვალთა სისტემა არ შეიძლება იყოს თვლადზე მეტი (იხ. 3.10), თეორემა დამტკიცებულია.

13.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ჰქვია <u>შემოსაზღვრული ვარიაციის</u> $[a, b]$ სეგმენტზე, თუკი

$$V_f[a, b] = \sup_{a\le x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k\le b} \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \infty.$$

ცხადია, რომ თუ f მონოტონურია, მაშინ $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$. საზოგადოდ:

1) $V_f[a, c] = V_f[a, b] + V_f[b, c]$

2) $V_f[a, b] \ge |f(b) - f(a)|$

13.3. თეორემა (შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის შესახებ). იმისთვის, რომ f იყოს შემოსაზღვრული ვარიაციის $[a, b]$-ზე აუცილებაელია და საკმარისი იგი წარმოდგეს ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.

დამტკიცება: (საკმარისობა) ვთქვათ $f = g - h$ სადაც g და h ზრდადი ფუნქციებია. მაშინ

$$V_f[a, b] = \sup \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sup \sum_{i=1}^{k-1} |g(x_{i+1}) - h(x_{i+1}) - g(x_i) + h(x_i)| \le \sup$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \big(|g(x_{i+1}) - g(x_i)| + |h(x_{i+1}) - h(x_i)|\big) = \sup \sum_{i=1}^{k-1} \big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big)$$

$$+ \sup \sum_{i=1}^{k-1} \big(h(x_{i+1}) - h(x_i)\big) \le g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$$

(აუცილებლობა) განვიხილოთ $V_f(x) = V_f[a, x] = \sup_{a\le x_0<x_1<\ldots<x_k\le x} \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ ფუნქცია, რომელიც ცხადია იქნება ზრდადი. ამასთანავე თუ $x < y$, მაშინ $V_f(y) - f(y) \ge V_f(x) - f(x)$, რადგან $V_f(y) - V_f(x) = V_f[x, y] \ge |f(y) - f(x)| > f(y) - f(x)$. ე.ი. თუ განვიხილავთ ფუნქციებს $g(x) = V_f(x)$ და $h(x) = V_f(x) - f(x)$, ორივე ეს ფუნქცია იქნება ზრდადი და ცხადია სულდება ტოლობაც $f = g - h$.

13.4. შეგახსენებთ, რომ $C[a, b]$-თი აღინიშნება $[a, b]$-ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე ხოლო $C^1[a, b]$-თი უწყვეტი წარმოებულების მქონე ფუნქციათა სიმრავლე.

თუ Ψ ზრდადი ფუნქციაა $[a, b]$-ზე და $f \in C[a, b]$ მაშინ სტილტიესის ინტეგრალი განიმარტება ტოლობით:

$$\int_a^b f\, d\Psi = \lim_{\delta_n\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1}^{(n)})\big(\Psi(x_i^{(n)}) - \Psi(x_{i-1}^{(n)})\big) \tag{13.1}$$

სადაც $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots, x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b$, $\delta_n = \max_{1\le i\le n}|x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}|$ და $x_{i-1}^{(n)} \le \xi_{i-1}^{(n)} \le x_i^{(n)}$. ზღვრის არსებობა (1)-ში შეიძლება დამტკიცდეს ისევე როგორც რიმანის ინტეგრალისთვის.

13.5 . თეორემა (სტილტიესის ინტეგრალის შესახებ). თუ $f \in C[a,b]$ და $\Psi \in C^1[a,b]$ მაშინ

$$\int_a^b f\,d\Psi = \int_a^b f(x)\Psi'(x)\,dx$$

დამტკიცება: ლაგრანჟის თეორემის $\big(\Psi(y) - \Psi(x) = \Psi'(\eta)(y-x)\big)$ გამოყენებით

$$\int_a^b f\,d\Psi = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1}^{(n)})\big(\Psi(x_i^{(n)}) - \Psi(x_{i-1}^{(n)})\big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1}^{(n)})\Psi'(\eta_{i-1}^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\eta_{i-1}^{(n)})\Psi'(\eta_{i-1}^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x)\Psi'(x)\,dx$$

(ჩვენ ვისარგებლეთ შემდეგი დამოკიდებულებით: $\left|\sum_{i=1}^n \big(f(\xi_{i-1}^{(n)}) - f(\eta_{i-1}^{(n)})\big)\Psi'(\eta_{i-1}^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})\right| \le \sup_{|x-y|\le\delta_n}|f(x) - f(y)|\cdot(\Psi(b) - \Psi(a)) \to 0$).

14. მეტრიკული სივრცეები

14.1. X სიმრავლეს ეწოდება მეტრიკული სივრცე თუ მისი ყოველი ორი x და y ელემენტისთვის განსაზღვრულია მანძილი $\rho(x,y)$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $\rho(x,y) \ge 0$ და $\rho(x,y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (სამკუთხედის უტოლობა).

X სივრცის ელემენტებს ვუწოდებთ წერტილებს.

14.2. მოვიტანოთ მეტრიკული სივრცეების მაგალითები:

ა) $\mathbb{R}$ ღერძი ჩვეულებრივი მანძილით: $\rho(x,y) = |x-y|$;

ბ) $\mathbb{R}^2$ სიბრტყე ჩვეულებრივი მანძილით: $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$;

გ) $C[a,b]$ —— $[a,b]$-ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე:

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|;$$

დ) $L_1[a,b]$ —— $[a,b]$-ზე განსაზღვრულ ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე:

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f-g|\,dm.$$

(აჩვენეთ, რომ თითოეულ შემთხვევაში ρ აკმაყოფილებს 14.1-ში ჩამოთვლილ პირობებს)

14.3. თუ $a \in X$, მაშინ a წერტილის ε მიდამო ეწოდება ღია "ბირთვს"

$$B(a,\varepsilon) := \{x \in X : \rho(a,x) < \varepsilon\}. \tag{14.1}$$

14.4. როდესაც გვაქვს მიდამოს ცნება, ზუსტად $\mathbb{R}$-ის ანალოგიურად შემოგვაქვს კრებადი მიმდევრობის ცნება, შიგა წერტილისა და ღია სიმრავლის ცნება, დაგროვების წერტილისა და ჩაკეტილი სიმრავლის ცნება, X-დან X-ში უწყვეტი ასახვის ცნება, და ა. შ. მაგალითად: $\{x_n\}_{n\ge1}$ მიმდევრობას ეწოდება a-სკენ კრებადი თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის მოიძებნება ისეთი N, რომ როცა $n > N$ მაშინ $\rho(a,x_n) < \varepsilon$ (ანუ x_n ხვდება a-ს ε მიდამოში); $f : X \to X$ არის უწყვეტი თუ $x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)$; და ა. შ.

14.5. თეორემა. თუ $a \in X$-დან და $\varepsilon > 0$, მაშინ $B(a,\varepsilon)$ (იხ. (1)) ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in B(a,\varepsilon)$. მაშინ $\rho(a,x) < \varepsilon$. ვთქვათ $\delta > 0$ ისეთია, რომ $\rho(a,x)+\delta < \varepsilon$. მაშინ $B(x,\delta) \subset B(a,\varepsilon)$, რადგან თუ $y \in B(x,\delta)$, ე.ი. თუ $\rho(x,y) < \delta$ მაშინ $\rho(a,y) \leq \rho(a,x) + \rho(x,y) < \rho(a,x) + \delta < \varepsilon$ და $y \in B(a,\varepsilon)$. ე.ი. $B(a,\varepsilon)$-ს ყველა x წერტილი შიგაა და იგი ღია სიმრავლეა.

14.6. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება კოშის (ან ფუნდამენტური) მიმდევრობა თუკი ნებისმიერი დადებითი ε-თვის მოიძებნება ისეთი N, რომ როცა $n > N$ და $k > N$ მაშინ $\rho(x_n,x_k) < \varepsilon$.

14.7. X მეტრიკულ სივრცეს ჰქვია სრული თუკი მასში აღებულ ყოველ $\{x_n\}_{n\geq 1}$ კოშის მიმდევრობას, ($x_n \in X$, $n = 1,2,\ldots$) გააჩნია ზღვარი ამავე სივრცეში ($\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$).

როგორც ვიცით $\mathbb{R}$ არის სრული მეტრიკული სივრცე. არასრული სივრცის კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Q}$ (რატომ?).

ვინაიდან უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი უწყვეტია, $C[a,b]$ სივრცე სრულია.

სივრცის სისრულე მისი მნიშვნელოვანი თვისებაა.

14.8. თეორემა. რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე მეტრიკით $\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ არ არის სრული.

მითითება. შეგვიძლია ავაგოთ ერთობლივ შემოსაზღვული ფუნქციათა მიმდევრობაც კი (შემოუსაზღვრელი მიმდევრობის აგება უფრო ადვილია), რომელიც იქნება ფუნდამენტური და არ ექნება ზღვარი ამ სივრცეში. კერძოდ განვიხილოთ [0,1]-ზე კანტორის ტიპის K სიმრავლე, რომლის ზომაც არ იქნება 0, ანუ ამოგდებული თანაუკვეთი ინტერვალების $I_1, I_1, I_3, \ldots$ სიგრძეების ჯამი იყოს 1-ზე ნაკლები, $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < 1$ და მათი დამატება $K = [0,1] \setminus \big(\cup_{j=1}^{\infty} I_j\big)$ იყოს არსადმკვრივი (K სიმრავლეს ეწოდება არსადმკვრივი თუკი ნებისმიერი ღია ინტერვალისთვის მოიძებნება ამ ინტერვალის ქვეინტერვალი რომელსაც თანაკვეთა არა აქვს K-სთან). მაშინ $f_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{I_j}$, $n = 1,2,\ldots$, ფუნქციათა მიმდევრობა იქნება ფუნდამენტური ($\int_a^b |f_n(x) - f_k(x)|\,dx = \sum_{j=k+1}^{n} |I_j| \to 0$ როცა $k,n \to \infty$). მაგრამ ზღვარითი ფუნქცია $f = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{I_j}$ იქნება წყვეტილი K-ს ყოველ წერტილში, ანუ დადებით ზომის სიმრავლეზე. ე.ი. f არ იქნება რიმანის აზრით ინტეგრებადი და f_n ფუნქციათა მიმდევრობას არ ექნება ზღვარი რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეში.

14.9. თეორემა. $L_1[a,b]$ სივრცე სრულია.

მითითება. ვთქვათ $\{f_n\}_{n\geq 1}$ კოშის მიმდევრობაა. გამოვყოთ მისგან $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ ქვემიმდევრობა რომლისთვისაც $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\,dm < \infty$. მაშინ ლევის თეორემის ძალით $\int_a^b \big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\big)\,dm < \infty$ და $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty$ თ.ყ. x-თვის. თითოეული ასეთი x-ისთვის

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

არსებობს, $f \in L_1[a,b]$ და $\int_a^b |f_n - f|\,dm \to 0$.

14.10. $f : X \to X$ ასახვას ჰქვია კუმშვადი თუკი არსებობს ისეთი მუდმივი $C < 1$, რომლისთვისაც ყოველთვის (ნებისმიერი x და y-ისთვის X-დან) შესრულდება უტოლობა

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq C \cdot \rho(x,y).$$

14.11. x წერტილს ეწოდება $f : X \to X$ ასახვის უძრავი წერტილი თუკი $f(x) = x$.

14.12. თეორემა. თუ X არის სრული მეტრიკული სივრცე და f კუმშვადი ასახვაა, მაშინ არსებობს ერთადერთი $x \in X$ რომელიც არის f-ის უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ f უწყვეტია. მართლაც ჰაინეს განმარტებით, თუკი $x_n \to x$ ე.ი. $\rho(x_n, x) \to 0$, მაშინ $\rho\big(f(x_n), f(x)\big) \le C \cdot \rho(x_n, x) \to 0$. მაშასადამე $f(x_n) \to f(x)$ და f უწყვეტია.

ეხლა ავიღოთ ნებისმიერი $x_0 \in X$ და შევადგინოთ რეკურენტული წესით განმარტებული მიმდევრობა $x_1 = f(x_0), x_n = f(x_{n-1}), n = 2, 3, \ldots$. ვაჩვენოთ, რომ x_n იქნება კოშის მიმდევრობა. მართლაც, ყოველი ნატურალური n-ისთვის

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \le C \cdot \rho(x_n, x_{n-1})$$

და თუ გავაგრძელებთ ამ უტოლობების გამოყენებას, მივიღებთ

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le C \cdot \rho(x_n, x_{n-1}) \le C^2 \cdot \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \ldots \le C^n \cdot \rho(x_1, x_0)$$

ვინაიდან $C < 1$, ამიტომ $\sum_{j=1}^{\infty} C^j < \infty$. ე.ი. ყოველი დადებითი ε-თვის არსებობს ნატურალური N ისეთი რომ $\rho(x_1, x_0) \sum_{j=N}^{\infty} C^j < \varepsilon$. მაშინ თუ $n > k > N$ გვექნება

$$\rho(x_n, x_k) \le \sum_{j=k}^{n-1} \rho(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=k}^{n-1} C^j \cdot \rho(x_1, x_0) \le \rho(x_1, x_0) \sum_{j=N}^{\infty} C^j < \varepsilon.$$

ვინაიდან x_n კოშის მიმდევრობაა და X სრულია, არსებობს $x \in X$ ისეთი რომ $x_n \to x$. ამასთანავე $f(x_n) = x_{n+1} \to x$ და f-ის უწყვეტობის გამო $f(x) = x$.

უძრავი წერტილის ერთადერთობა მიიღება შემდეგი მსჯელობიდან: თუ $f(x) = x$ და $f(y) = y$, მაშინ

$$\rho(x, y) = \rho\big(f(x), f(y)\big) \le C \cdot \rho(x, y)$$

და რახან $C < 1$, $\rho(x, y)$ არ შეიძლება იყოს დადებითი, ანუ ვღებულობთ $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

15. **წრფივი სივრცეები**

15.1. როგორც ვიცით V არის წრფივი სივრცე თუ მის ელემენტებს შორის გვაქვს შეკრებისა და სკალარზე (რიცხვზე) გამრავლების ოპერაციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ბუნებრივ თვისებებს (აქსიომებს). V-ს ელემენტებს უწოდებენ ვექტორებს.

წრფივი სივრცის კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots, n\}$, შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციებით

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}; \qquad \alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

15.2. V_0 ქვესიმრავლეს, $V_0 \subset V$, ჰქვია **ქვესივრცე** თუკი იგი ჩაკეტილია V-ში არსებული ოპერაციების მიმართ, ე.ი. $x, y \in V_0 \Longrightarrow x + y \in V_0$ და $\alpha x \in V_0$.

მაგალითად $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ არის $\mathbb{R}^n$-ის ქვესივრცე.

15.3. როგორც ვიცით, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ვექტორთა სისტემას ($\mathbf{v}_k \in V$) ჰქვია წრფივად დამოუკიდებელი თუ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი მათგანი შეიძლება გამოისახოს დანარჩენების წრფივი კომბინაციით. წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. (იხ. დავალება 12.6)

15.4. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ სისტემის **წრფივი გარსი** $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ეწოდება ამ ვექტორთა ყველა შესაძლო წრფივ კომბინაციათა სიმრავლეს: $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}_j,\ \alpha_j \text{ სკალარებია}\}$.

სავარჯიშო: აჩვენეთ, რომ $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ არის V-ს ქვესივრცე.

15.5. შეგახსენებთ, რომ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ სისტემას ჰქვია V-ს **ბაზისი**, თუკი $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ წრფივად დამოუკიდებელია და $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = V$.

მაგალითად $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, …, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ წარმოადგენს სტანდარტულ ბაზისს $\mathbb{R}^n$-ში. მართლაც $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

15.6.ლემა (ბაზისის ორ ნაწილად გახლეჩის შესახებ): თუ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ არის V-ს ბაზისი მაშინ

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cap \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{0}\}$$

დამტკიცება. თუ $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$ მაშინ $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}_j - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j = 0$ და ე.ი. ყველა α_i კოეფიციენტი არის ნული $\square$

15.7. თეორემა (ბაზისში ელემენტების რაოდენობის ინვარიანტობის შესახებ): თუ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ და $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ არიან V-ს ბაზისები, მაშინ $n = m$.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $n \neq m$ და ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $n < m$.

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1\} \tag{15.1}$$

სისტემა იქნება დამოკიდებული (რახან $\mathbf{v}_i$-ები ბაზისია) და

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots \alpha_n\mathbf{v}_n + \beta_1\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$$

წარმოდგენაში ყველა α_j-ები არ იქნება 0 (რახან $\mathbf{w}_i$-ები ბაზისია). ე.ი. რომელიღაც $\mathbf{v}_j$ წარმოდგება დანარჩენების წრფივი კომბინაციით (15.1) სისტემაში და

$$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1\}.$$

ეხლა განვიხილოთ სისტემა

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$$

რომელიც კვლავ იქნება დამოკიდებული და ზუსტად იმავე მსჯელობით ამოვაგდოთ ამ სისტემიდან ერთ-ერთი $\mathbf{v}$. ამ პროცედურის გაგრძელებით მივიღებთ, რომ

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} = V$$

რაც ნიშნავს, რომ $\mathbf{w}_{n+1}, \mathbf{w}_{n+2}, \ldots, \mathbf{w}_m$ ვექტორები აღარ შეიძლება მიემატოს წრფივად დამოუკიდებლობის შენარჩუნებით. მაშასადამე ჩვენი დაშვება მცდარია და $n = m$. $\square$

15.8. V სივრცის ბაზისში ელემენტების რაოდენობას (როგორც ვნახეთ, იგი ინვარიანტულია სხვადასხვა ბაზისის მიმართ) ეწოდება V-ს **განზომილება**, $\dim(V)$. მაგალითად $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

15.9. ლემა (ნებისმიერი დამოუკიდებელი სისტემის ბაზისამდე შევსების შესახებ). თუ $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ არის ვექტორთა დამოუკიდებელი სისტემა სასრულგანზომილებიანი წრფივი V სივრციდან, მაშინ არსებობს V-ს ბაზისი $\mathcal{W} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, რომელიც მოიცავს $\mathcal{V}$ სისტემას.

დამტკიცება. თუ $\mathrm{Span}(\mathcal{V}) = V$, მაშინ $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. ვთქვათ $\mathbf{w}_1 \notin \mathrm{Span}(\mathcal{V})$ და განვიხილოთ $\mathcal{W}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1\}$. მაშინ $\mathcal{W}_1$ იქნება დამოუკიდებელი სისტემა (აჩვენეთ!). თუკი $\mathrm{Span}(\mathcal{W}_1) = V$, მაშინ $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1$. თუ არა, ზუსტად ანალოგიურად გავაგრძელებთ ახალი $\mathbf{w}$-ების ძიებას. ამგვარად მივიღებთ დამოუკიდებელ ვექტორთა ჩალაგებულ სისტემას $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{W}_n \subset$, სადაც $card(\mathcal{W}_{n+1}) = card(\mathcal{W}_n) + 1$. რახან V სასრულგანზომილებიანია, გვექნება $card(\mathcal{W}_n) \leq \dim(V)$ (აჩვენეთ!). მაშასადამე $\mathcal{W}$-ების გავრცობის პროცედურა უსასრულოდ ვერ გაგრძელდება და ოდესმე მივიღებთ $\mathrm{Span}(\mathcal{W}_m) = V$. მაშასადამე $\mathcal{W}$ იქნება $\mathcal{W}_m$. $\square$

15.10. თუ V წრფივ სივრცეში მოიძებნება უსასრულო რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots\}$ (ე.ი. ნებისმიერი სასული რაოდენობა ამ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებელია) მაშინ V-ს ეწოდება **უსასრულო განზომილებიანი**.

15.11. თეორემა. $C[0,1]$ (უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე [0,1]-ზე) უსასრულო განზომილებიანია.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ პოლინომები $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, (ცხადია მათი რაოდენობა უსასრულოა) წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, თუკი ამ პოლინომების რაიმე სასრული ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ იარსებებს ისეთი n, რომ x^n იქნება $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ პოლინომების წრფივი კომბინაცია, $x^n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x^j$. მაშინ $P(x) = x^n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x^j$ იქნება იგივურად 0, რაც შეუძლებელია რადგან P არის n-ური რიგის პოლინომი და მას არ შეიძლება ჰქონდეს n-ზე მეტი ფესვი.

15.12. ვთქვათ V და W ორი წრფივი სივრცეა. $f : V \to W$ ასახვას ეწოდება წრფივი თუკი

$$1)\ f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y});$$
$$2)\ f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}).$$

მაგალითად, მოცემული $n \times k$ მატრიცისთვის

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ტოლობით განსაზღვრული ასახვა $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ არის წრფივი. პირიქით, ყოველ წრფივ ასახვას $\mathbb{R}^n$-დან $\mathbb{R}^k$-ში შეგვიძლია შევუსაბამოთ მატრიცი

$$A = A_f = \left(\begin{bmatrix} \vdots \\ f(\mathbf{e}_1) \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f(\mathbf{e}_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \vdots \\ f(\mathbf{e}_n) \\ \vdots \end{bmatrix} \right),$$

რომლისთვისაც გვექნება

$$f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}\,.$$

მართლაც, თუკი $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$, მაშინ

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) = \alpha_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ f(\mathbf{e}_1) \\ \vdots \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \vdots \\ f(\mathbf{e}_2) \\ \vdots \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} \vdots \\ f(\mathbf{e}_n) \\ \vdots \end{bmatrix} = A_f \cdot \mathbf{x}$$

ე.ი. წრფივი ასახვები $\mathbb{R}^n$-დან $\mathbb{R}^k$-ში შეგვიძლია გავაიგივოთ $n \times k$ მატრიცებთან.

15.13. თუ $f : V \to W$ წრფივი ასახვაა, მაშინ

1) $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V : f(x) = 0\} = f^{-1}(\mathbf{0})$ **(გული)**

2) $\mathrm{Im}(f) = \{y \in W :$ არსებობს ისეთი $x \in V$, რომ $f(x) = y\}$ (**ანასახი**)

15.14. თეორემა. $\mathrm{Ker}(f)$ და $\mathrm{Im}(f)$ ქვესივრცეებია შესაბამისად, V-სა და W-სი.

დამტკიცება. ა) თუ $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$, ე.ი. თუ $f(x) = 0$ და $f(y) = 0$, მაშინ $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ და $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot 0 = 0$. ანუ $x + y \in \mathrm{Ker}(f)$ და $\alpha x \in \mathrm{Ker}(f)$.

ბ) თუ $u, v \in \mathrm{Im}(f)$, ე.ი. თუ $f(x) = u$ და $f(y) = v$, მაშინ $u + v = f(x) + f(y) = f(x + y)$ და $\alpha u = \alpha \cdot f(x) = f(\alpha x)$ ანუ $u + v \in \mathrm{Im}(f)$ და $\alpha u \in \mathrm{Im}(f)$.

15.15. თეორემა. $\dim(Ker\, f) + \dim(Im\, f) = \dim(V)$

დამტკიცება. ვთქვათ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ არის $\mathrm{Ker}\, f$-ის ბაზისი. შევავსოთ იგი V-ის ბაზისამდე (იხ. ლემმა 15.9) $u_1, u_2, \ldots, u_n, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. ცხადია $\dim(Ker\, f) = n$ და $\dim(V) = n + m$. ვაჩვენოთ, რომ $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_m)$ არის $\mathrm{Im}\, f$-ის ბაზისი, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. მართლაც,

$$\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \mathrm{Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cap \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \{\mathbf{0}\},$$

(იხ. ლემმა 15.6) რის გამოც $\sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. ე.ი. $\sum_{i=1}^m \beta_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$ და $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_m)$ წრფივად დამოუკიდებელია. ამასთანავე, თუ $y \in \mathrm{Im}\, f$ და $f(x) = y$, მაშინ $y = f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\mathbf{v}_i)$ სადაც $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{v}_i$. ე.ი. $\mathrm{Span}\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_m)\} = \mathrm{Im}\, f$ $\square$

15.16. წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{15.2}$$

შეგვიძლია შევხედოთ როგორც ფუნქციალურ განტოლებას

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

სადაც f არის (15.2)-ის კოეფიციენტთა მატრიცის შესაბამისი წრფივი ასახვა $\mathbb{R}^n$-დან $\mathbb{R}^n$-ში (იხ. 15.12) $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ და $x \in \mathbb{R}^n$ საძიებელი ვექტორია.

15.17. განმარტება წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{15.3}$$

ჰქვია (15.2)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება. მისი ამონახსნების სიმრავლე გვაძლევს $\mathrm{Ker}\, f$-ს.

15.18. თეორემა (წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა კლასიფიკაციის შესახებ). ა) თუ (15.3)-ს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამოხსნა $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ (ე.ი. $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$) მაშინ (15.2)-ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი ყოველი მარჯვენა მხარისათვის ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$).

ბ) თუ (15.3)-ს აქვს არატრივიალური ამოხსნა (ე.ი. $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}\}$ მაშინ (15.2)-ს არა აქვს ამოხსნა ზოგიერთი $\mathbf{b}$-თვის.

გ) თუ $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ არის (15.2)-ის რაიმე ამონახსნი, მაშინ $\mathbf{x}_0 + \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f\}$ არის (15.2)-ის ამონახსნთა სიმრავლე.

დამტკიცება. ვინაიდან $\dim(Ker\, f) = 0$, თეორემა 15.15-ის ძალით $\dim(Im\, f) = n$. n განზომილებიან სივრცეში ერთადერთი n განზომილებიანი ქვესივრცეა. მაშასადამე $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^n$ და ყოველი $\mathbf{b}$-თვის $\mathbb{R}^n$-დან არსებობს ისეთი $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, რომ $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

თუ $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, მაშინ $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$, საიდანაც გამომდინარეობს ამონახსნის ერთადერთობა.

ბ) თუ $\dim(\mathrm{Ker}\, f) > 0$, მაშინ $\dim(\mathrm{Im}\, f) < n$ ანუ $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^n$ და ყოველი $\mathbf{b}$-თვის $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{Im}\, f$-დან (15.2)-ს არ ექნება ამოხსნა.

გ) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \Leftrightarrow f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \mathrm{Ker}\, f$ $\quad\Box$

15.19. განმარტება. თუ V სასრულგანომილებიანი წრფივი სივრცეა წრფივი ასახვების სიმრავლეს V-დან $\mathbb{R}$-ში ჰქვია V-ს შეუღლებული სივრცე, V^*. ოპერაციები V^*-ში შემოდის ბუნებრივად, როგორც ფუნქციებზე.

15.20. თეორემა თუ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ არის V-ს ბაზისი, მაშინ $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_n^*$ განსაზღვრული ტოლობით $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ წარმოადგენს V^*-ს ბაზისს.

დამტკიცება. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i^* = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \Leftrightarrow \alpha_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$. მაშასადამე, $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_n^*$ წრფივად დამოუკიდებელია.

ამასთანავე თუ $f \in V^*$, მაშინ $f = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i^*$. მართლაც,

. $$\Big(\sum_{i=1}^n f(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i^*\Big)(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j) = f(\mathbf{v}_j),\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

და თუკი ორი წრფივი ასახვა ემთხვევა ბაზისის ელემენტებზე, ისენი ყველგან დაემთხვევა.

16. **ჰილბერტის სივრცეები**

16.1. H იყოს წრფივი სივრცე, და მის ვექტორებს შორის შემოვიტანოთ სკალარული ნამრავლი $\langle x, y\rangle$, $x, y \in H$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

ა) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

ბ) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

გ) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

დ) $\langle x, x\rangle \geq 0$ ყოველი x-ისთვის H-დან, და $\langle x, x\rangle = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $x = 0$.

16.2. ლემა. $\langle \mathbf{0}, x\rangle = 0$ ყოველი x-ისთვის H-დან.

დამტკიცება. $\langle \mathbf{0}, x\rangle + \langle x, x\rangle = \langle \mathbf{0} + x, x\rangle = \langle x, x\rangle$, ე.ი. $\langle \mathbf{0}, x\rangle = 0$.

16.3. H სივრცეში ნორმა განიმარტება შემდეგი ტოლობით:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{16.1}$$

დ) თვისების ძალით $\|x\|$ არის ყოველთვის დადებითი თუ $x \neq \mathbf{0}$ და $\|\mathbf{0}\| = 0$.

16.4. ლემა. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

დამტკიცება. $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\|x\|$

16.5. თეორემა (კოში-შვარცის უტოლობა). ყოველი x, y ვექტოებისთვის H-დან

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|. \tag{16.2}$$

დამტკიცება: ნორმის განმარტებისა და სკალარული ნამრავლის თვისებების ძალით

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle.$$

მაშასადამე, ყველა α-თვის $\mathbb{R}$-დან, $0 \leq \|x\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2$ და თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებას შევხედავთ როგორც კვადრატულ სამწევრს α-ს მიმართ, მისი დისკრიმინანტის მეოთხედი $\left(\frac{b}{4}\right)^2 - ac = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ რაც ტოლფასია (2)-ის.

16.6. თეორემა (სამკუთხედის უტოლობა). $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

დამტკიცება. (1) ტოლობისა და (2) უტოლობის ძალით, $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$.

16.7. თეორემა (პარალელოგრამის წესი). $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

დამტკიცება ჩატარდება ისეთივე გარდაქმნებით, როგორც წინა თეორემაში.

16.8. H წრფივ სივრცეს მასზე განმარტებული სკალარული ნამრავლით, რომელიც არის სრული $\rho(x,y) = \|x-y\|$ მეტრიკის მიმართ (აჩვენეთ, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული ρ იქნება მეტრიკა) ეწოდება ჰილბერტის სივრცე.

ჰილბერტის სივრცეების მაგალითები:

ა) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots, n\}$, სკალარული ნამრავლით

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\,, \qquad \text{სადაც } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ და } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

ბ) $l_2 = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$, სკალარული ნამრავლით $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$.

გ) $L_2(a,b) = \{f : \int_a^b |f|^2\, dm < \infty\}$ სკალარული ნამრავლით

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b fg\, dm \tag{16.3}$$

16.9. თეორემა (სკალარული ნამრავლის უწყვეტობის შესახებ). ნებისმიერი ფიქსირებული y-თვის H-დან, ასახვა $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ არის უწყვეტი H-ზე.

დამტკიცება. კოში-შვარცის უტოლობის ძალით

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n - x\| \cdot \|y\|\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს რომ თუკი $\|x_n - x\| \to 0$, მაშინ $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. რ.დ.გ.

16.10. წრფივ უწყვეტ ასახვას H-დან $\mathbb{R}$-ში ეწოდება ფუნქციონალი. ვინაიდან $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$ ასახვა არის წრფივიც (ფიქსირებული y-ისთვის, 16.9 თეორემა გვეუბნება, რომ ის არიც ფუნქციონალი. შეიძლება იმის ჩვენებაც, რომ ყოველ ფუნქციონალს ჰილბერტის სივრცეში ამგვარი სახე აქვს.

16.11. თეორემა (ნორმის უწყვეტობის შესახებ). ასახვა $x \to \|x\|$ უწყვეტია.

დამტკიცება. სამკუთხედის უტოლობიდან გამომდინარე $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\|$, საიდანაც ვღებულობთ რომ თუ $x_n \to x$ (ე.ი. $\|x_n - x\| \to 0$), მაშინ $\|x_n\| \to \|x\|$. რ.დ.გ.

16.12. თუ $\langle x, y\rangle = 0$, ვიტყვით რომ x ორთოგონალურია y-ის და ჩავწერთ $x \perp y$. ცხადია $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.

16.13. $\{u_1, u_2, \ldots, \}$ ვექტორთა სიმრავლეს H ჰილბერტის სივრცეში ჰქვია ორთოგონალური სიტემა თუკი $u_i \perp u_j$, როცა $i \neq j$. ორთოგონალურ სისტემას ჰქვია ორთონორმირებული თუკი დამატებით $\|u_i\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

16.14. თეორემა (ორთონორმირებული ბაზისის შესახებ). თუკი $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემაა n განზომილებიან ჰილბერტის H სივრცეში, $\dim(H) = n$, მაშინ ნებისმიერი $\mathbf{x}$-თვის H-დან

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k\rangle \cdot \mathbf{u}_k\,. \tag{16.4}$$

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ვექტორები $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, თუკი

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

მაშინ ყოველი j-თვის, $j = 1, 2, \ldots, n$, გვექნება

$$0 = \langle \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \mathbf{u}_k \ , \mathbf{u}_j\rangle = \alpha_j$$

რაც გულისხმობს წრფივად დამოუკიდებლობას.

ვიდიდან H არის n განზომილებიანი წრფივი სივრცე, ყოველი n ცალი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი წარმოადგენს H-ის ბაზისს. მაშასადამე, ყოველი $\mathbf{x} \in H$ შეიძლება წარმოდგეს როგორც $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია,

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \mathbf{u}_k \, .$$

კიდევ ერთხელ თუ გამოვიყენებთ ორთონორმირებულობას, მივიღებთ

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k\rangle = \left\langle \sum\nolimits_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \mathbf{u}_j \ , \mathbf{u}_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \langle \mathbf{u}_j \ , \mathbf{u}_k\rangle = \beta_k$$

რაც ამტკიცებს (4)-ს.

16.15. თეორემა (ბესელის უტოლობა). ვთქვათ $\{u_1, u_2, \ldots, \}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემაა H ჰილბერტის სივრცეში და $x \in H$. მაშინ

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i\rangle|^2. \tag{16.5}$$

დამტკიცება: ნებისმიერი სასრული n-ისთვის, ორთონორმირებულობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$0 \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle u_j \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle u_j, \ x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle u_j \right\rangle =$$

$$\langle x, x\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle\langle x, u_j\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle\langle u_j, x\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle\langle x, u_j\rangle = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle^2$$

მაშასადამე შესრულდება (5) უტოლობა.

16.16. თეორემა (საუკეთესო მიახლოების შესახებ). ვთქვათ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემაა H ჰილბერტის სივრცეში და $x \in H$. მაშინ

$$\inf_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\| \tag{16.6}$$

მიიღწევა მაშინ როცა $\alpha_j = c_j := \langle x, u_j\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

დამტკიცება: $\|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\|^2 = \left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \ , x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\rangle = \langle x, x\rangle -$ $2\left\langle x, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \ , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\rangle = \|x\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x \ , u_j\rangle + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 =$ $\|x\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - c_j)^2.$

ცხადია, უკანასკნელი გამოსახულება მინიმუმს აღწევს როცა $\alpha_j = c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

შევნიშნოთ, რომ $\|x - \sum_{j=1}^n c_j u_j\| = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2$. ამასთანავე $x - \sum_{j=1}^n c_j u_j$ ორთოგონალურია თითოეული u_j-ის, რადგან $\langle x - \sum_{i=1}^n c_i u_i, u_j\rangle = \langle x, u_j\rangle - c_j = 0$, ანუ $x - \sum_{j=1}^n c_j u_j$ ორთოგონალურია $\mathrm{Span}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$-ის და $\sum_{j=1}^n c_j u_j$ არის x-ის ორთოგონალური პროექცია $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ვექტორებზე მოჭიმულ სივრცეზე.

16.17. $L_2[0, 2\pi]$ სივრცეში კლასიკურ ორთონორმირებულ სისტემას ($\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ მუდმივის სიზუსტით) წარმოადგენს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა, ანუ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cos 3x, \quad \sin 3x, \quad \ldots \tag{16.7}$$

(აჩვენეთ, რომ ეს სისტემა ორთონორმირებულია (3) სკალარული ნამრავლის მიმართ!). თუ $f \in L_2[0, 2\pi]$, მაშინ ინტეგრალებს (სკალარულ ნამრავლებს)

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f\, dm, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dm, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dm$$

ჰქვიათ f-ის ფურიეს კოეფიციენტები (6) სისტემის მიმართ და შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

L_2 ნორმით კრებადობის აზრით.

17. ბანახის სივრცეები

17.1. წრფივი ნორმირებული სივრცე ეწოდება წრფივ სივრცეს V რომელშიც ყოველი x ვექტორისთვის, $x \in V$, განმარტებული გვაქვს ნორმა $\|x\|$, შემდეგი თვისებებით:

ა) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $x = 0$;

ბ) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$; გ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

17.2. თუ წრფივ ნორმირებულ სივრცეში მანძილს განვმარტავთ ტოლობით

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{17.1}$$

მაშინ ρ დააკმაყოფილებს 14.1 (1-3) პირობებს, ანუ წრფივი ნორმირებული სივრცე იქნება მეტრიკული სივრცეც. მართლაც, (1-2) პირობები მეტად იოლად მოწმდება და სამკუთხედის უტოლობაც შესრულდება რადგან: $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

17.3. წრფივ ნორმირებულ სივრცეს B, რომელიც არის სრული (1) მეტრიკის მიმართ ეწოდება ბანახის სივრცე.

17.4. ბანახის სივრცეების კლასიკური მაგალითებია:

ა) $[a, b]$-ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $C[a, b]$, ნორმით $\|f\|_c = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

ბ) ლებეგის სივრცეები $L_p[a, b]$, $p \geq 1$, (იხ.12.2) ნორმით $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\, dm\right)^{\frac{1}{p}}$. სამკუთხედის უტოლობა შესრულებულია ამ სივცეში მინკოვსკის უტოლობის გამო (იხ. 2.4).

გ) ყოველი ჰილბერტის სივრცე ასევე არის ბანახის სივრცეც.

17.5. ბანახის სივრცის M ქვესიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი სიმრავლე თუკი

$$x, y \in M \Longrightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in M, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

17.6. თუ M ამოზნექილი სიმრავლეა, მაშინ მისი ტრანსლიაცია $a+M=\{a+x : x\in M\}$ ასევე ამოზნექილია.

დამტკიცება. თუ $x_1, y_1 \in a+M$, ანუ $x_1=a+x$ და $y_1=a+y$ სადაც $x, y\in M$, მაშინ $\lambda x_1+(1-\lambda)y_1=\lambda(a+x)+(1-\lambda)(a+y)=\lambda a+\lambda x+(1-\lambda)a+(1-\lambda)y=a+\lambda x+(1-\lambda)y$ და რადგან $\lambda x+(1-\lambda)y\in M$, ამიტომ $\lambda x_1+(1-\lambda)y_1\in a+M$. რ.დ.გ.

17.7. თეორემა. თუ $B_r=\{x\in B : \|x\|\le r\}$, მაშინ B_r ამოზნექილია.

დამტკიცება. $x, y\in B_r \Longrightarrow \|x\|\le r$ და $\|y\|\le r \Longrightarrow \|\lambda x+(1-\lambda)y\|\le\|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\|=\lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|\le\lambda r+(1-\lambda)r=r$, ანუ $\lambda x+(1-\lambda)y\in B_r$. რ.დ.გ.

17.8. შეგახსენებთ, რომ წრფივ (იხ. 15.8) უწყვეტ ასახვას B ბანახის სივრციდან $\mathbb{R}$-ში ჰქვია ფუნქციონალი. ყველა ფუნქციონალების სიმრავლეს ჰქვია B-ს შეუღლებული სივრცე და აღინიშნება B^*-ით.

17.9. თეორემა. ასახვა $\mathcal{L} : C[a,b]\to\mathbb{R}$ განსაზღვრული ტოლობით

$$\mathcal{L}(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

არის ფუნქციონალი.

დამტკიცება. ინტეგრალის თვისებების გამო, ცხადია $\mathcal{L}$ წრფივი ასახვაა. უნდა ვაჩვენოთ უწყვეტობა. მართლაც თუ $\|f_n-f\|_c\to 0$ მაშინ $|\mathcal{L}(f_n)-\mathcal{L}(f)|=|\mathcal{L}\big(f_n-f\big)|=$
$|\int_a^b(f_n-f)(x)\,dx|\le\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\cdot(b-a)=\|f_n-f\|_C\cdot(b-a)\to 0$ ანუ $\mathcal{L}(f_n)\to\mathcal{L}(f)$ და $\mathcal{L}$ უწყვეტია.

17.10. თეორემა. ვთქვათ $p>1$ და ასახვა $\mathcal{L} : L_p[a,b]\to\mathbb{R}$ განსაზღვრულია ტოლობით

$$\mathcal{L}(f)=\int_a^b fg\,dm$$

სადაც g რაიმე ფუნქციაა $L_q[a,b]$-დან, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. მაშინ $\mathcal{L}$ ფუნქციონალია. (მაშასადამე, (2) ტოლობის გათვალისწინებით $L_q\subset(L_p)^*$. შეიძლება იმის ჩვენებაც, რომ $(L_p)^*=L_q$)

დამტკიცება. ლებეგის ინტეგრალის თვისებების გამო წრფივობა აქაც ცხადია. უწყვეტობა გამომდინარეობს ჰელდერის უტოლობიდან (იხ. 2.1): თუ $\|f_n-f\|_p\to 0$ მაშინ $|\mathcal{L}(f_n)-\mathcal{L}(f)|=|\mathcal{L}\big(f_n-f\big)|=|\int_a^b(f_n-f)g\,dm|\le\|f_n-f\|_p\|g\|_q\to 0$ ანუ $\mathcal{L}(f_n)\to\mathcal{L}(f)$ და $\mathcal{L}$ უწყვეტია.

17.11. წრფივ ასახვას $F : B_1\to B_2$ ერთი ბანახის სივრციდან მეორეში ეწოდება შემოსაზღვრული, თუკი არსებობს $C<\infty$ ისეთი, რომ $\forall x$-თვის B_1-დან სამართლიანია უტოლობა $\|F(x)\|_{B_2}\le C\|x\|_{B_1}$.

17.12. წრფივ უწყვეტ ასახვას $F : B_1\to B_2$ ერთი ბანახის სივრციდან მეორეში ეწოდება ოპერატორი.

17.13. თეორემა. ყოველი შემოსაზღვრული წრფივი ასახვა $F : B_1\to B_2$ არის უწყვეტი ანუ არის ოპერატორი.

დამტკიცება. თუ $\|x_n-x\|_{B_1}\to 0$ მაშინ $\|F(x_n)-F(x)\|_{B_2}=\|F(x_n-x)\|_{B_2}\le$
$C\cdot\|x_n-x\|_{B_1}\to 0$ ანუ $x_n\to x\Longrightarrow F(x_n)\to F(x)$ და F უწყვეტია.

17.14. თეორემა. თუ $F : B_1\to B_2$ წრფივი ასახვა უწყვეტია 0-ში, მაშინ ის უწყვეტია მთელ სივრცეზე, ანუ ოპერატორია.

დამტკიცება. თუ $x_n\to x$ მაშინ $\|x_n-x\|\to 0$. მაშასადამე F-ის 0-ში უწყვეტობის გამო $F(x_n-x)\to 0$. ე.ი. $F(x_n)-F(x)\to 0$ და $F(x_n)\to F(x)$. მაშასადამე F უწყვეტია თითოეულ x წერტილში.

17.15. $F : B_1 \to B_2$ ოპერატორიის ნორმა განიმარტება ტოლობით:

$$\|F\| = \sup_{x \in B_1} \frac{\|F(x)\|_{B_2}}{\|x\|_{B_1}}. \tag{17.2}$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ ყველა ოპერატორების სიმრავლე (2) ნორმით თვითონ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს.

17.16. $x_n, n = 1, 2, \ldots, B$ ბანახის სივრცის ელემენტთა მიმდევრობას ეწოდება სუსტად კრებადი თუკი $F(x_n) \to F(x)$ ყოველი F-ისთვის B^*-დან.

17.17. თეორემა. თუ x_n კრებადია x-ისკენ, მაშინ ის სუსტად კრებადიცაა.

დამტკიცება. ვინაიდან F B^*-დან არის უწყვეტი, ამიტომ (3) უტოლობის გამოყენებით

$$\|F(x_n) - F(x)\| = \|(F(x_n - x)\| \leq \|F\| \cdot \|x_n - x\| \to 0.$$

მაშასადამე x_n სუსტად კრებადია x-ისკენ.

17.1.8 არსებობენ სუსტად კრებადი მიმდევრობები, რომლებიც არ არიან ძლიერად კრებადნი. მაგალითად $L_2[0; 2\pi]$ ჰილბერტის სივრცეში $f_n(x) = \cos nx$ მიმდევრობა არის სუსტად კრებადი (რახან ყოველი ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები მიისწრაფიან ნულისკენ), მაგრამ არ არის ძლიერად კრებადი (რაგან $\int_0^{2\pi} (\cos nx - \cos mx)^2 \, dx = 4\pi$).