# მათემატიკა ელექტრონიკისათვის II
# (ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები)

სავალდებულო ლექციების კურსი

**რომან კოპლატაძე**

# შინაარსი

# 1. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

დიფერენციალური განტოლება ეწოდება თანაფარდობას, რომელიც ამყარებს დამოკიდებულებას დამოუკიდებელ ცვლადებს, მათ ფუნქციებსა და ამ ფუნქციების სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს შორის. სხვანაირად დიფერენციალური განტოლება ისეთი განტოლებაა, სადაც უცნობია ფუნქციები, ამასთან განტოლებაში შედის არა მარტო თვითონ ფუნქციები, არამედ მათი წარმოებულებიც.

შევისწავლით მხოლოდ ე.წ. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს. ე.ი. ისეთ დიფერენციალურ განტოლებებს, სადაც უცნობი ფუნქციები ერთი ცვლადის ფუნქციებია, განსხვავებით ე.წ. კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისაგან, სადაც საძიებელია მრავალი ცვლადის ფუნქციები მათ კერძო წარმოებულებს შორის მოცემულ თანაფარდობის მიხედვით.

უმარტივესი სახის დიფ. განტოლებებს ჩვენ უკვე შევხვედრივართ ინტეგრალური აღრიცხვის კურსში. ეს არის შემდეგი სახის განტოლება:

$$\frac{dx}{dt} = a(t), \tag{1.1}$$

სადაც $t \in I \in \mathbb{R}$ და $a \in C(I)$. $I$ არის ნამდვილ რიცხვთა რაღაც შუალედი - ღია, ჩაკეტილი, სასრული ან უსასრულო, ხოლო $a \in C(I)$ ნიშნავს, რომ $a$ ფუნქცია უწყვეტია $I$ შუალედზე.

ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ $I$-ზე უწყვეტად წარმოებადი $x(t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას.

როგორც ინტეგრალური აღრიცხვის კურსიდანაა ცნობილი, (1.1) განტოლების ერთერთი ამოხსნაა $x(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$, სადაც $t_0 \in I$ ნებისმიერია, ხოლო ყველა სხვა დანარჩენი მისგან განსხვავდება მუდმივი შესაკრებით. ამრიგად, (1.1) განტოლების ყველა ამოხსნა მოიცემა

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau, \quad t \in I$$

ფორმულით. ეს არის ე.წ. (1.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამოხსნათა ამ ოჯახიდან რომ ამოვარჩიოთ რომელიმე ამოხსნა, საკმარისია წანასწარ დავაფიქსიროთ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა რომელიმე წერტილში. ე.ი. დავსვათ ასეთი ამოცანა:

ვიპოვოთ (1.1) განტოლების ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

საწყის პირობებს. ამისათვის საკმარისია ზოგად ამოხსნაში შევიტანოთ $t = t_0$. ამით ცალსახად განისაზღვრება მუდმივი $c : c = x(t_0) = x_0$. ამრიგად (1.1), (1.2) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

ფორმულით. ამოცანა (1.1), (1.2) ამის შემდეგ ასე აღინიშნება: ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს (1.1) განტოლების იმ $x(t)$ ამონახსნის პოვნაში, რომელიც (1.2) პირობებს აკმაყოფილებს. ეს ამოცანა ცნობილია კოშის ამოცანის სახელწოდებით. უხეშად რომ ვთქვათ, კოშის ამოცანა არის ამოცანა დიფ. განტოლების ამონახსნის პოვნის შესახებ მოცემულ საწყის პირობებში.

განვიხილოთ

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \tag{1.4}$$

განტოლება, სადაც $t \in I$, $a \in C(I)$, $b \in C(I)$. (1.4) განტოლების ამოხსნა $I$ შუალედში ეწოდება მასზე განსაზღვრულ უწყვეტად წარმოებად $x = x(t)$ ფუნქციას, რომელიც ამ შუალედის ყოველ წერტილში აკმაყოფილებს (1.4) განტოლებას. (1.4) განტოლებას ეწოდება პირველი რიგის წრფივი დიფ. განტოლება.

პირველი რიგის ეწოდება იმიტომ, რომ მასში არ შედის უცნობი ფუნქციის პირველზე მაღალი რიგის წარმოებული, ხოლო წრფივია იმიტომ, რომ საძიებელი ფუნქცია და მისი წარმოებულები (ამ შემთხვევაში წარმოებული) პირველ ხარისხშია.

(1.4) განტოლებისთვის დავსვათ კოშის ამოცანა: ვთქვათ $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$. ვიპოვოთ (1.4) განტოლების ისეთი ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს (1.2) საწყის პირობას.

როცა $a(t) \equiv 0$, მაშინ (1.4) განტოლება გადაიქცევა (1.1) განტოლებად. მოვახდინოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\, y(t). \tag{1.5}$$

ე.ი. შემოვიღოთ $t$ ცვლადის ახალი $y(t)$ ფუნქცია, რომელიც $x(t)$-თან დაკავშირებულია (1.5) ტოლობით. თუ $x(t)$ არის (1.4)-ის ამონახსნი, მაშინ (1.5)-ს თუ შევიტანთ (1.4)-ში, მივიღებთ

$$a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau} y(t) + e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\, \frac{dy(t)}{dt} = a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\, y(t) + b(t).$$

ანუ

$$\frac{dy}{dt} = b(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}. \tag{1.6}$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ $x(t)$ წარმოადგენდეს (1.4)-ის ამოხსნას, აუცილებელია და როგორც ადვილი შესამჩნევია, საკმარისიცაა, რომ (1.5) ტოლობით განსაზღვრული $y(t)$ ფუნქცია იყოს (1.6)-ის ამოხსნა. ვნახოთ რა მოუვა საწყის პირობებს

(1.2). თუ (1.5)-ში $t$-ს მაგივრად შევიტანთ $t_0$-ს მივიღებთ

$$y(t_0) = x_0. \tag{1.2'}$$

ამგვარად ჩვენს მიერ დასმული (1.4), (1.2) ამოცანა დავიდა (1.6), $(1.2')$ ამოცანაზე. დამაკავშირებელი ფორმულაა (1.5). (1.6), $(1.2')$ ამოცანა კი იგივეა, რაც (1.1), (1.2) ამოცანა და ამიტომ (1.3) ფორმულით მოიცემა მისი ამოხსნა

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau} ds.$$

მაშასადამე (1.4), (1.2) ამოცანის ამოხსნა მოიცემა

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau} ds\right] \tag{1.7}$$

ფორმულით. რადგან (1.1), (1.2) ამოცანის (1.3) ამოხსნა ერთადერთია, ეს ამოხსნაც იქნება ერთადერთი. (1.7) ფორმულას ზოგჯერ ასეთი სახით იყენებენ:

$$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds. \tag{1.7'}$$

ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი

**თეორემა 1.1.** თუ $a \in C(I)$ და $b \in C(I)$, მაშინ (1.4), (1.2) ამოცანას გააჩნია მთლიანად $I$ შუალედში განსაზღვრული ერთადერთი ამოხსნა და ეს ამოხსნა წარმოდგება (1.7) ან $(1.7')$ ფორმულით.

ახლა განვიხილოთ ასეთი მაგალითი:

**მაგალითი.** ვთქვათ $a \in C((0,1])$, $b \in C([0,1])$, $a(t) \le 0$ როცა $t \in (0,1]$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში არსებობს (1.4) განტოლების ერთადერთი ამოხსნა

$$x(0) = 0 \tag{1.8}$$

საწყის პირობებში და ამოხსნა მოიცემა

$$x(t) = \int_{0}^{t} b(s)\, e^{\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds \tag{1.9}$$

ფორმულით. ფორმალურად ეს ფორმულა მიიღება $(1.7')$ ფორმულიდან თუ იქ ჩავსვამთ $x_0 = 0$, $t_0 = 0$, მაგრამ აქ 1.1 თეორემის პირობები არ სრულდება. შეიძლება მოხდეს, რომ $\int_0^t a(\tau)\,d\tau$ სასრული არ იყოს.

რაც შეეხება (1.9) ფორმულას, იგი ყოველთვის განსაზღვრულია. მართლაც, თუ $a(t)$ შემოსაზღვრულია, $\varphi(s) = e^{\int_s^t a(\tau)\,d\tau} b(s)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი $s$-თვის $[0,1]$-ში, ხოლო თუ $a(t)$ შემოუსაზღვრელია როცა $s \to 0$, გვაქვს

$$\int_s^t a(\tau)\,d\tau \to -\infty \quad \text{რადგან} \quad a(\tau) \le 0, \quad \text{და} \quad \varphi(s) \to 0 \quad \text{როცა} \quad \varphi(0) = 0.$$

ამიტომ 0 წერტილში $\varphi(s)$-ს მნიშვნელობა შეიძლება მივიღოთ 0-ის ტოლად და $x(t)$ განსაზღვრულია ნებისმიერ $t \in [0,1]$-ში.

შევამოწმოთ, რომ (1.9) არის (1.4), (1.8) ამოცანის ამონახსნი. (1.8) პირობა რომ სრულდება ცხადია. ახლა ვთქვათ $a(t)$ შემოსაზღვრულია $(0,1]$-ზე, მაშინ. $\int_0^t a(t)\,dt$ კრებადია. ერთი სიტყვით არსებობს ეს ინტეგრალი საკუთრივი ან არასაკუთრივი. როგორც ცნობილია ამ შემთხვევაში ყველა ის თვისება, რომელიც ზემოთ მსჯელობაში გამოვიყენეთ ძალაში რჩება. ასე რომ თუ ამ მსჯელობას გავიმეორებთ მივალთ $(1.7')$ ფორმულამდე. იქ კი თუ შევიტანთ $t_0 = 0$ და $x_0 = 0$ მივიღებთ (1.9) ფორმულას. ერთადერთობაც აქედან გამომდინარეობს. განვიხილოთ განტოლება როცა $a(t)$ შემოუსაზღვრელია

$$\int_0^1 a(t)\,dt = -\infty.$$

ჯერ შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ვეძებთ $x(t)$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია $[0,1]$-ზე, წარმოებადია $(0,1]$-ზე და აკმაყოფილებს (1.4)-ს $(0,1]$-ზე.

(1.9) ფუნქცია ამ პირობებს აკმაყოფილებს. მართლაც უწყვეტობა ცხადია. ავიღოთ $t_0 \in (0,1]$ და $x(t)$ ასე გადავწეროთ

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} \cdot \int_0^t b(s)\, e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} ds, \quad \text{ე.ი.}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)\, e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} \int_0^t b(s)\, e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} ds + e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} b(t)\, e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} = \\ &= a(t)\,x(t) + b(t). \end{aligned}$$

აქედან ჩანს, რომ ჯერ ერთი $x(t)$ წარმოებადია $(0,1]$-ზე და მერეც იგი აკმაყოფილებს (1.4)-ს $(0,1]$-ზე.

ერთადერთობის დასამტკიცებლად ისევ ავიღოთ რაიმე $t_0 \in (0,1]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ და დავწეროთ (1.4) განტოლების ამოხსნა $(0,1]$-ზე $x(t_0) = x_0$ საწყის პირობებში

$$x^*(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} \left[ x_0 + \int_{t_0}^t b(s)\, e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} ds \right]. \tag{1.10}$$

ვთქვათ $x^*(t)$ არის ჩვენი ამოცანის ამოხსნა. მაშინ $x^*(t)$ $(0,1]$-ზე უნდა მოიცემოდეს (1.10) ფორმულით, რომელიღაც $t_0$ და $x_0$-თვის.

განვიხილოთ მისი ზღვარი, როცა $t \to 0$. იგი უნდა იყოს ნულის ტოლი, რადგან $x^*(t)$ უწყვეტია $(0,1]$-ზე და $x^*(0) = 0$, $e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} \to e^{+\infty} = +\infty$.

$$\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-\int_{t,0}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds \to \int\limits_{t_0}^{0} b(s)\, e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau} = -\int\limits_{0}^{t_0} b(s)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds = -x(t_0).$$

ე.ი. იმისათვის, რომ $x^*(t)$-ს ჰქონდეს სასრულო ზღვარი, აუცილებელია, რომ $x_0$ და $t_0$ აკმაყოფილებდეს $x(t_0) = x_0$ პირობას. მაგრამ ყველა ასეთი $x_0$ და $t_0$-ის შესაბამისი ფუნქცია არის ჩვენი $x(t)$ ფუნქცია

$$x(t) = \int\limits_{0}^{t} b(s)\, e^{\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau} ds.$$

ეხლა განვიხილოთ კოშის ამოცანა წრფივ დიფ. განტოლებათა სისტემისათვის. ავიღოთ დიფ. განტოლებათა

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_k + b_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.11}$$

სისტემა. ეს არის $n$-განზომილებიანი წრფივ ნორმალურ განტოლებათა სისტემა. ნორმალური ეწოდება იმიტომ, რომ განტოლებები ამოხსნილია წარმოებულების მიმართ. (1.11) სისტემის ამოხსნა რაიმე $I$ შუალედში ეწოდება ამ შუალედში უწყვეტად წარმოებად $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ფუნქციათა ერთობლიობას, რომლებიც ამ შუალედის ყოველ წერტილში აკმაყოფილებს (1.11) სისტემის თითოეულ განტოლებას.

კოშის ამოცანა (1.11) სისტემისათვის ისმის ასე. ვთქვათ $a_{i_k} \in C(I)$, $b_i \in C(I)$, $t_0 \in I$,

$$x_{i_0} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n).$$

საძიებელია $I$-ში განსაზღვრული (1.11) სისტემის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$x_i(t_0) = x_{i_0} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.12}$$

პირობებს.

გადავიდეთ ვექტორულ-მატრიცულ აღნიშვნებზე. შევთანხმდეთ შემდეგ აღნიშვნებზე:

$\overline{x} = \big(x_i\big)_{i=1}^{n}$ არის სვეტი ვექტორი $x_i$ კომპონენტებით.

$A = \big(a_{i_k}\big)_{i,k=1}^{n}$ არის $n \times n$ კვადრატული მატრიცი.

თუ $A$ არის ფუნქცია მატრიცი, მაშინ

$$\int\limits_{a}^{b} A(t)\,dt = \Big(\int\limits_{a}^{b} a_{i_k}(t)\,dt\Big)_{i,k=1}^{n}.$$

ასევე

$$A'(t) = \big(a'_{i_k}(t)\big)^n_{i,k=1}, \quad \int\limits_a^b \overline{x}(t)\,dt = \bigg(\int\limits_a^b x_i(t)\,dt\bigg)^n_{i=1}, \quad \overline{x}\,'(t) = \big(x'_i\big)^n_{i=1}.$$

განვმარტოთ ვექტორისა და მატრიცის ნორმა:

$$\|\overline{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|A\| = \sum_{i,k=1}^n |a_{i_k}|.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნორმას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$\|A\overline{x}\| \le \|A\|\cdot\|\overline{x}\|, \qquad \|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|,$$
$$\|\overline{x}+\overline{y}\| \le \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|, \quad \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|.$$

ახლა თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას (იხ. (1.11))

$$A(t) = \big(a_{i_k}(t)\big)^n_{i,k=1}, \quad \overline{x}(t) = \big(x_i(t)\big)^n_{i=1},$$
$$\overline{b}(t) = \big(b_i(t)\big)^n_{i=1}, \qquad \overline{x}_0 = \big(x_{i0}\big)^n_{i=1},$$

მაშინ (1.11) და (1.12) ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x} + \overline{b}(t), \tag{1.11$'$}$$
$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{1.12$'$}$$

## 2. n-რი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

განხილული იყო ე.წ. $n$-განზომილებიანი წრფივ ნორმალურ განტოლებათა სისტემა, რომლის ზოგადი სახე იყო

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{i_k}(t)x_k + b_i(t) \quad (i=1,\dots,n) \tag{2.1}$$

და ამ სისტემისათვის დავსვით კოშის ამოცანა საწყისი პირობებით:

$$x_i(t_0) = x_{i_0} \quad (i=1,\dots,n). \tag{2.2}$$

შემდეგ აღვნიშნეთ, რომ ვექტორულ-მატრიცული აღნიშვნებში ეს ამოცანა ე.ი. (2.1), (2.1) ამოცანა ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x} + \overline{b}(t), \tag{2.1$'$}$$
$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{2.2$'$}$$

შევთანხმდეთ ასეთ აღნიშვნებზე:

$C(I)$ აღნიშნავს $I$-ში უწყვეტ ფუნქციათა სიმტავლეს, ხოლო $C^{(k)}(I)$ კი $k$-ჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სიმრავლეს $I$-ში. $C_n(I)$ არის $I$-ში უწყვეტად წარმოებადი $n$ განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციათა სიმრავლე, ხოლო $C^{(k)}(I)$ კი $I$-ში

$k$-ჯერ უწყვეტად წარმოებად ვექტორ-ფუნქციათა სიმრავლე. $C_{n\times n}(I)$ იყოს $I$-ში უწყვეტად წარმოებადი $n\times n$ განზომილებიან მატრიცთა სიმრავლე.

ამრიგად $(2.1')$ სისტემის ამოხსნა $I$ შუალედში არის $\overline{x}\in C'_n(I)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $(2.1')$ სისტემას. თუ იგი აკმაყოფილებს $(2.2')$-ს, მას უწოდებენ $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანის ამოხსნას $I$ შუალედში.

ჩვენს მთავარ მიზანს შეადგენს დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 2.1.** თუ $A\in C_{n\times n}(I)$, $\overline{b}\in C_n(I)$, მაშინ ყოველ $\overline{x}_0\in\mathbb{R}^n$ და ყოველ $t_0\in I$-თვის $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანას გააჩნია $I$ შუალედში ერთადერთი ამონახსნი.

როცა $n=1$ ეს დებულება ჩვენ დავასაბუთეთ პირველ ლექციაზე. უფრო მეტიც, ჩვენ შევძელით ცხადი სახით გამოგვეხატა ეს ამოხსნა განტოლების კოეფიციენტებისა და საწყის პირობებში შემავალი რიცხვების საშუალებით. როცა $n\geq 2$, ამოცანის მოცემა კვადრატებში არ ხერხდება. ჩვენ დავამტკიცებთ მხოლოდ ამოცანის არსებობას და ერთადერთობას, მაგრამ ამავე დროს დამტკიცების პროცესი მიგვითითებს ამ ამოცანის მიახლოებით პოვნის გზაზე.

ამ თეორემის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება ორი ლემა.

**ლემა 2.2.** ვთქვათ $I$-ში დაცულია

$$0\leq v_0(t)\leq c_0,\quad 0\leq v_k(t)\leq c_k+\left|\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,v_{k-1}(\tau)\,d\tau\right| \tag{2.3}$$

პირობები $t\in I$-თვის $(k=1,2,\dots)$. აქ $v_k\in C(I)$ $(k=0,1,\dots)$, $a\in C(I)$ და $a(t)\geq 0$, $t\in I$. ამას გარდა, $t_0\in I$ და $c_k=\mathrm{const}\geq 0$ $(k=1,2,\dots)$. მაშინ ადგილი აქვს

$$v_k(t)\leq\sum_{i=0}^{k}\frac{c_{k-i}}{i!}\left|\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau\right|^i$$

უტოლობებს. აქ რომ ადგილი არ ჰქონდეს გაუგებრობას (ინტეგრალი შეიძლება ზოგი $t$-თვის ნული იყოს და როცა $i=0$ გვექნება $0^0$), $i=0$-ის შესაბამის შესაკრებს ცალკე გამოყოფენ და წერენ:

$$v_k(t)\leq c_k+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_{k-i}}{i!}\left|\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau\right|^i\quad(k=1,2,\dots),\quad t\in I. \tag{2.4}$$

**დამტკიცება.** თვით ლემის სტრუქტურა გვიჩვენებს, რომ იგი დამტკიცებული უნდა იყოს ინდუქციით $k$-ს მიმართ.

როცა $k=1$ (2.4) ცხადია სრულდება. მართლაც (2.3) გვაძლევს, რომ

$$v_1(t)\leq c_1+\left|\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,v_0(\tau)\,d\tau\right|.$$

მაგრამ $0 \le v_0(\tau) \le c_0$, $a(\tau) \ge 0$, ამიტომ $v_0(\tau)$-ს მაგივრად შეგვიძლია ჩავწეროთ $c_0$ და გვექნება

$$v_1(t) \le c_1 + c_0 \left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right|$$

რაც სწორედ (2.4)-ს წარმოადგენს, როცა $k = 1$.

ახლა ვთქვათ (2.4) სამართლიანია რაიმე $k$-თვის. მაშინ უნდა ვაჩვენოთ, რომ (ინდუქციის წესი)

$$v_{k+1}(t) \le c_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{c_{k+1-i}}{i!} \left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right|^i.$$

მაგრამ დაშვების თანახმად გვაქვს

$$v_k(t) \le c_k + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_{k-i}}{i!} \left| \int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds \right|^i.$$

ამიტომ, რადგან $a(\tau) \ge 0$,

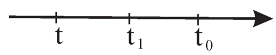
$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, v_k(\tau)\, d\tau \right| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau) \left[ c_k + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_{k-i}}{i!} \left| \int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds \right|^i \right] d\tau \right| =$$

$$= \left| c_k \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right| + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_{k-i}}{i!} \left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau) \left| \int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds \right|^i d\tau \right| =$$

$$= c_k \left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right| + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_{k-i}}{i!} \left| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau) \left[ \int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds \right]^i d\tau \right|$$

ტოლობას ადგილი აქვს იმიტომ, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი ყველა შესაკრებს ერთი და იგივე “დადებითი ნიშანი” აქვთ.

აქ მე-2 ინტეგრალში შიდა აბსოლუტური მნიშვნელობა მოვხსენით, რადგან $a(\tau)$ ნიშანმუდმივია, ხოლო $\tau$ იცვლება $t_0$-სა და $t$-ს შორის ისევე, როგორც $s$. თუ მაგალითად, $t$ არის $t_0$-ის მარჯვნივ, $\tau$ ყოველთვის იქნება $t_0$-ის მარჯვნივ. ამიტომ შიგა ინტეგრალი ნიშანმუდმივია და აბსოლუტური მნიშვნელობის მოხსნა შეიძლება. ასევე, თუ $t$ არის $t_0$-ის მარცხნივ. შიგა ინტეგრალს რომ ჰქონდეს ქვედა საზღვარი, მაგ. $t_1 < t_0$, მაშინ $t_1$, $t_0$ და $t$-ს ასეთი განლაგებისას:




$\tau$ თავისი ცვლილებისას შეიძლება აღმოჩნდეს როგორც $t_1$-ს მარჯვნივ, ისე მარცხნივ, ასე რომ $s$ აღმოჩნდება როგორც $t_1$-ს მარჯვნივ ისე მარცხნივ და ნიშანმუდმივობა დაირღვევა.

თუ აღვნიშნავთ

$$F(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds,$$

მაშინ $a(\tau)\,d\tau = dF(\tau)$ და

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)\Big[\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\Big]^i d\tau = \frac{[F(\tau)]^{i+1}}{i+1}\bigg|_{t_0}^{t} = \frac{1}{i+1}\Big(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\Big)^{i+1},$$

ე.ი. საბოლოოდ გვაქვს:

$$v_{k+1}(t) \le c_{k+1} + c_k\bigg|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\bigg| + \sum_{i=2}^{k+1} \frac{c_{k+1-j}}{j!}\,\bigg|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\bigg|^j =$$

$$c_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{c_{k+1-i}}{i!}\,\bigg|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\bigg|^i.$$

ეს კი სწორედ არის (2.4), როცა $k$-ს მაგივრად არის $k+1$. ლემა დამტკიცებულია. □

ამ ლემაზე დაყრდნობით დავამტკიცოთ

**ლემა 2.3 (გრონუოლ-ბელმანის ლემა).** ვთქვათ

$$0 \le v(t) \le c + \bigg|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,v(\tau)\,d\tau\bigg|, \tag{2.5}$$

$t \in I$, სადაც $v \in C(I)$, $a \in C(I)$, $a(t) \ge 0$, $t \in I$, $c = \text{const} \ge 0$, $t_0 \in I$. მაშინ ადგილი აქვს ასეთ შეფასებას:

$$v(t) \le c\,e^{\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right|}, \quad t \in I. \tag{2.6}$$

**დამტკიცება.** ცხადია (2.6) დამტკიცებული იქნება მთელ $I$-ში თუ მას დავამტკიცებთ ყოველ სასრულ დახურულ $I^*$ შუალედისთვის, რომელიც შედის $I$-ში და რომელიც შეიცავს $t_0$-ს.

რადგან $v \in C(I^*)$, არსებობს

$$c_0 = \max\big\{v(t) :\, t \in I^*\big\}. \tag{2.7}$$

$v_k(t)$ იყოს $v(t)$ ყოველი $k = 0, 1, \ldots$-თვის და $c_k$ იყოს ტოლი $c$ ყოველი $k = 1, 2, \ldots$-თვის. მაშინ როგორც ადვილი შესამჩნევია (2.5) და (2.7)-ის გამო ლემა 1-ის (2.3)

პირობები სრულდება. ამიტომ ადგილი ექნება (2.4) უტოლობას, რომელიც ჩვენ შემთხვევაში მიიღებს სახეს:

$$v(t) \le c + c\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right|^{i} + \frac{c_0}{k!}\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right|^{k}.$$

თუ გავიხსენებთ $e^x$ ფუნქციის გაშლას ხარისხოვან მწკრივად, დავინახავთ, რომ პირველი ორი შესაკრები წარმოადგენს ამ მწკრივის კერძო ჯამს, გამრავლებულს $c$-ზე, როცა $x = \left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right|$.

რადგან უკუგდებული წევრები დადებითია, გვაქვს

$$v(t) \le c\, e^{\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right|} + \frac{c_0}{k!}\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right|^{k}.$$

ეს უტოლობა სრულდება ნებისმიერი $t \in I^*$ და $k = 1, 2, \dots$-თვის. თუ დავაფიქსირებთ $t$-ს და ზღვარზე გადავალთ, როცა $k \to +\infty$, მივიღებთ სწორედ (2.6) უტოლობას, რადგან მე-2 შესაკრების ზღვარი ნულია. $\square$

ახლა გადავიდეთ თეორემის დამტკიცებაზე.

თუ $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანას გააჩნია $\overline{x}(t)$ ამონახსნი $I$-ში, მაშინ ცხადია დააკმაყოფილებს ტოლობას

$$\overline{x}(t) = \overline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(\tau)\,\overline{x}(\tau) + \overline{b}(\tau)\right] d\tau. \tag{2.8}$$

ეს ტოლობა მიიღება $(2.1')$-გან $t_0$-დან $t$-მდე ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$. ამრიგად $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანის ყოველი ამოხსნა წარმოადგენს (2.8) განტოლების ამოხსნასაც. ეს ცხადია ინტ. განტოლებათა სისტემაა. მას ეწოდება ვოლტერის ტიპის ინტ. განტოლებათა სისტება.

ამ სისტემის ამოხსნის ქვეშ ჩვენ გვესმის ისეთი $\overline{x} \in C_n(I)$ ფუნქცია, რომელიც ყველგან $I$-ში დააკმაყოფილებს ამ განტოლებათა სისტემას.

ვაჩვენოთ, რომ (2.8)-ის ყველა ამოხსნა ამავე დროს $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანის ამოხსნაცაა. მართლაც, ვთქვათ $\overline{x}$ არის (2.8)-ის ამოხსნა. ე.ი. $\overline{x} \in C_n(I)$ და (2.8)-ში მარჯვნივ მდგომი ინტეგრალი არის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $t$-სი, რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია. ამიტომ (2.8)-ის გამო $\overline{x}$ გამოდის უწყვეტად წარმოებადი, ე.ი. $\overline{x} \in C_n'(I)$.

ამის შემდეგ თუ გავაწარმოებთ (2.8)-ის ორივე მხარეს, მივიღებთ რომ $\overline{x}$ აკმაყოფილებს $(2.1')$-ს, ხოლო თუ (2.8)-ში ჩავსვამთ $t$-ს ნაცვლად $t_0$-ს, მივიღებთ, რომ კმაყოფილდება $(2.2')$-ც.

ამრიგად, (2.8) ინტ. განტოლებათა სისტემა ეკვივალენტურია $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანის (და არა მხოლოდ $(2.1')$). ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ რომ (2.8) სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

## 3. ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლებები

როგორც ვნახეთ $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანა ეკვივალენტურია (2.8) ინტ. განტოლებისა, ამიტომ საკმარისია არსებობა და ერთადერთობა ვაჩვენოთ (2.8)-თვის.

ჯერ ვაჩვენოთ ამოხსნის არსებობა. ამისთვის ვისარგებლოთ ე.წ. მიმდევრობითი მიახლოების (პიკერის) მეთოდით. ამისათვის შემოვიღოთ ვექტორ-ფუნქციები:

$$\begin{aligned} &\overline{x}_0(t)=\overline{x}_0,\\ &\overline{x}_k(t)=\overline{x}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\big[A(\tau)\,\overline{x}_{k-1}(\tau)+\bar{b}(\tau)\big]d\tau,\quad (k=1,2,\dots). \end{aligned} \tag{3.1}$$

ცხადია ამ მიმდევრობის ყოველი ფუნქცია უწყვეტია $I$-ზე. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ (3.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია ყოველ $I^* \subset I$ სეგმენტზე (თუ $I$ თვითონ წარმოადგენს სასრულ სეგმანტს, ეს ცხადია აღარ დაგჭირდება).

(3.1) მიმდევრობის თანაბრადკრებადობა ეკვივალენტურია

$$\overline{x}_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\big[\overline{x}_k(t)-\overline{x}_{k-1}(t)\big] \tag{3.2}$$

მწკრივის თანაბრადკრებადობისა. აქ გვაქვს ვექტორ-ფუნქციათა მიმდევრობა (3.1) და ვექტორ-ფუნქციათა მწკრივი (3.2). ცხადია, როცა ჩვენ ვამბობთ, რომ (3.2) მწკრივი თანაბრადკრებადია, ჩვენ ვგულისხმობთ თანაბრადკრებადი ვექტორების კომპონენტებისგან შემდგარ მწკრივს. ცხადია, თუ მოვძებნეთ მაჟორანტული მწკრივი $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\big\|\overline{x}_k(t)-\overline{x}_{k-1}(t)\big\|$ რიცხვითი მწკრივისთვის, იგი იქნება მაჟორანტული თითოეული კომპონენტისათვის (3.2) მწკრივისა, რადგან ვექტორის კომპონენტების აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება მის ნორმას. საერთოდ, ვექტორულ მიმდევრობაში და მწკრივებში აბსოლუტური მნიშვნელობის როლს ასრულებს ნორმა.

სანამ მაჟორანტულ მწკრივს ვიპოვნიდეთ, მოვიყვანოთ ნორმის ერთი თვისება:

თუ $\overline{g}(t)$ ინტეგრებადი ვექტორ-ფუნქციაა, ადგილი აქვს

$$\Big\|\int\limits_a^b\overline{g}(t)\,dt\Big\|\le\Big|\int\limits_a^b\|\overline{g}(t)\|\,dt\Big| \tag{3.3}$$

უტოლობას.

მართლაც, ვთქვათ $\overline{g}(t) = \big(g_i(t)\big)_{i=1}^n$. მაშინ

$$\Big\| \int\limits_a^b \overline{g}(t)\, dt \Big\| = \sum_{i=1}^n \Big| \int\limits_a^b g(t)\, dt \Big| \le \sum_{i=1}^n \Big| \int\limits_a^b |g_i(t)|\, dt \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{i=1}^n \int\limits_a^b |g_i(t)|\, dt \Big| = \Big| \int\limits_a^b \|\overline{g}(t)\|\, dt \Big|$$

(რადგან ყველა შესაკრები ერთი ნიშნისაა).

(3.1)-ის ძალით გვაქვს

$$\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}(t) = \int\limits_{t_0}^t A(\tau)\big[\overline{x}_{k-1}(\tau) - \overline{x}_{k-2}(\tau)\big]\, d\tau \quad (k = 2, 3, \dots),$$

ამიტომ (3.3)-ის გამო გვექნება

$$\big\|\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}(t)\big\| \le \Big| \int\limits_{t_0}^t \big\|A(\tau)\big\| \cdot \big\|\overline{x}_{k-1}(\tau) - \overline{x}_{k-2}(\tau)\big\|\, d\tau \Big|. \tag{3.4}$$

რადგან $I^*$ სასრული სეგმენტია, არსებობს $c_0 = \max\big\{\|\overline{x}_1(t) - \overline{x}_0\|,\ t \in I^*\big\}$, და ე.ი. გვაქვს

$$\big\|\overline{x}_1(t) - \overline{x}_0(t)\big\| \le c_0. \tag{3.5}$$

თუ აღვნიშნავთ $v_k(t) = \big\|\overline{x}_{k+1}(t) - \overline{x}_k(t)\big\|$ $(k = 0, 1, \dots)$ მაშინ (3.4) და (3.5) უტოლობები გვიჩვენებენ, რომ $v_k(t)$ ფუნქციებისათვის $I^*$-ში შესრულებულია წინა ლექციაზე დამტკიცებული პირველი ლემის პირობები. რადგან ამ შემთხვევაში $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$.

ამ ლემის თანახმად გვექნება

$$\big\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\big\| = v_{k-1}(t) \le \frac{c_0}{(k-1)!} \Big| \int\limits_{t_0}^t \|A(\tau)\|\, d\tau \Big|^{k-1}.$$

თუ აღვნიშნავთ $r = \int\limits_{I^*} \|A(\tau)\|\, d\tau$, ცხადია

$$\big\|\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}(t)\big\| \le c_0\, \frac{r^{k-1}}{(k-1)!}\,.$$

ამრიგად (3.2) მწკრივის მაჟორანტული იქნება

$$\|\overline{x}_0\| + c_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^{k-1}}{(k-1)!} = \|\overline{x}_0\| + c_0\, e^r$$

მწკრივი.

ამიტომ ვაიერშტრასის თეორემის გამო (3.2) მწკრივი და მასთან ერთად (3.1) მიმდევრობაც თანაბრადკრებადია $I^*$-ში. რადგან $I^*$ ნებისმიერი იყო, (3.1) მიმდევრობა კრებადია (საზოგადოდ თანაბრად) მთელ $I$-ში.

აღვნიშნოთ $\overline{x}(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} \overline{x}_k(t)$, $t \in I$.

გადავიდეთ ზღვარზე (3.1) ტოლობაში. უკვე დამტკიცებულის თანახმად $\big(\overline{x}_k(t)\big)_{k\geq1}$ მიმდევრობა თანაბრადკრებადია $[t_0, t]$ შუალედში,

ამიტომ მარჯვენა მხარის ინტეგრალის შიგნით შეიძლება ზღვარზე გადასვლა

$$\overline{x}(t) = \overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \big[A(\tau)\,\overline{x}(\tau) + \overline{b}(\tau)\big]\,d\tau. \tag{3.6}$$

ამრიგად ჩვენს მიერ აგებული $\overline{x}(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.8) განტოლებას. ამიტომ ამოხსნის არსებობა დამტკიცდა.

ერთადერთობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ (2.8)-ს აქვს კიდევ ერთი ამოხსნა $\overline{y}(t)$. მაშინ (3.6) ტოლობასთან ერთად გვექნება

$$\overline{y}(t) = \overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \big[A(\tau)\,\overline{y}(\tau) + \overline{b}(\tau)\big]\,d\tau. \tag{3.7}$$

თუ (3.6)-ს გამოვაკლებთ (3.7)-ს და გადავალთ ნორმებზე, გვექნება

$$\big\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\big\| \leq \left|\int\limits_{t_0}^{t} \big\|A(\tau)\big\| \cdot \big\|\overline{x}(\tau) - \overline{y}(\tau)\big\|\,d\tau\right|. \tag{3.8}$$

(3.8) უტოლობა გვიჩვენებს, რომ $v(t) = \big\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\big\|$ ფუნქციისათვის სრულდება გრონუოლ-ბელმანის ლემის პირობები და რადგან აქ $c = 0$, ლემის თანახმად გვექნება

$$0 \leq \big\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\big\| \leq 0, \quad t \in I, \quad \text{და ე.ი.} \quad \big\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\big\| \equiv 0, \quad t \in I.$$

რადგან ვექტორის ნორმა ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორი ნულია, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{x}(t) = \overline{y}(t)$. ამით თეორემა დამტკიცდა. □

ამ თეორემასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ასეთი

**ამოცანა.** ვთქვათ $A \in C_{n\times n}(]a;b[)$, $\overline{b} \in C_n(]a;b[)$ ($a$ ან $b$ შეიძლება $\infty$-ც კი იყოს), ამასთან არსებობს საკუთრივი ან არასაკუთრივი

$$\int\limits_{a}^{b} \big\|A(t)\big\|\,dt = K < +\infty, \qquad \int\limits_{a}^{b} \big\|\overline{b}(t)\big\|\,dt = L < +\infty$$

ინტეგრალები. მაშინ $(2.1')$ სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს გააჩნია სასრული ზღვრები

$$\lim_{t\to+a} \overline{x}(t) \quad \text{და} \quad \lim_{t\to b-} \overline{x}(t).$$

ცხადია $(2.1')$ სისტემის ნებისმიერი $\overline{x}$ ამოხსნა აკმაყოფილებს (3.6)-ს რომელიღაც $t_0$-თვის $]a,b[$-დან და $\overline{x_0}$-თვის $\mathbb{R}^n$-დან.

(3.6)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned}\|\overline{x}(t)\| &\le \|\overline{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\,\overline{x}(\tau) + \overline{b}(\tau)\|\,d\tau\right| \le \\ &\le \|\overline{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\,\overline{x}(\tau)\|\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \|\overline{b}(\tau)\|\,d\tau\right| = \\ &= \|\overline{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|\overline{b}(\tau)\|\,d\tau\right| + \left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\,\overline{x}(\tau)\|\,d\tau\right| \le \\ &\le \|\overline{x}_0\| + L + \left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| \cdot \|\overline{x}(\tau)\|\,d\tau\right|.\end{aligned}$$

ამიტომ გრონუოლ-ბელმანის ლემის ძალით

$$\|\overline{x}(t)\| \le \big(\|\overline{x}_0\| + L\big)\, e^{\left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\,d\tau\right|} \le \big(\|\overline{x}_0\| + L\big)e^{k}.$$

ამრიგად $\overline{x}(t)$ ნორმით შემოსაზღვრულია $]a,b[$-ზე, და ცხადია მისი კომპონენტები შემოსაზღვრული იქნება $]a,b[$-ზე.

თუ რაღაც $f(t)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]a,b[$-ზე საკუთრივ ან არასაკუთრივ აზრით და მას გავამრავლებთ შემოსაზღვრულ ინტეგრებად $\varphi(t)$ ფუნქციაზე, მიღებული $f(t)\,\varphi(t)$ ფუნქციაც აბსოლუტურად ინტეგრებადი იქნება $]a,b[$-ზე.

რადგან $A(t)$ მატრიცი ნორმით ინტეგრებადია მისი ყოველი კომპონენტი აბსოლუტურად ინტეგრებადია, ამიტომ ცხადია $A(\tau)\,\overline{x}(\tau)$ ვექტორის ყოველი კომპონენტი ანუ თვით ვექტორი აბსოლუტურად ინტეგრებადია $]a,b[$-ზე. ასევე $\overline{b}(t)$ ვექტორიც ინტეგრებადია $]a,b[$-ზე, ამიტომ (3.6) ტოლობის მარჯვენა მხარეს სასრული ზღვარი აქვს, როცა $t \to a+$ ან $t \to b-$. ე.ი. ჩვენ $\overline{x}(t)$ ფუნქციასაც სასრული ზღვარი აქვს როცა $t \to a+$ ან $t \to b-$.

ახლა ჩვენ განვიხილოთ $n$-რი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი სახე ასეთია:

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,u^{(k-1)} + b(t). \tag{3.9}$$

კოეფიციენტები განსაზღვრული არიან რაღაც $I$ შუალედში. (3.9) განტოლების ამოხსნა ეწოდება $u \in C^n(I)$ ფუნქციას, რომელიც მას აკმაყოფილებს $I$ შუალედის ყოველ წერტილზე.

კოშის ამოცანა (3.9) განტოლებისათვის ისმის შემდეგნაირად: ვთქვათ $t_0 \in I$ და $x_{10}, \dots, x_{n0} \in \mathbb{R}$. უნდა ვიპოვოთ (3.9) განტოლების ისეთი ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს:

$$u^{(i-1)}(t_0) = x_{i_0} \quad (i = 1, \dots, n). \tag{3.10}$$

აქაც ადგილი აქვს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემას.

**თეორემა 3.1.** თუ $a_k \in C(I)$ $(k = 1, \dots, n)$ და $b \in C(I)$, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $t_0 \in I$ და $x_{i_0} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$, (3.9), (3.10) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა.

**დამტკიცება.** ეს თეორემა წარმოადგენს 2.1 თეორემის შედეგს. ვთქვათ $u$ არის (3.9) განტოლების ამოხსნა. შემოვიღოთ $x_1, \dots, x_n$ ფუნქციები შემდეგნაირად:

$$x_1 = u, \ x_2 = u', \dots, x_n = u^{(n-1)}. \tag{3.11}$$

მაშინ ცხადია

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, x_k + b(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

ამრიგად, თუ $u$ არის (3.9) განტოლების ამოხსნა, (3.11) ტოლობით განსაზღვრული $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ვექტორი წარმოადგენს (3.12) სისტემის ამოხსნას და პირიქით, თუ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ვექტორი წარმოადგენს (3.12)-ის ამოხსნას, მისი პირველი $x_1$ კომპონენტი იქნება (3.9) განტოლების ამოხსნა.

(3.11) გარდაქმნების შედეგად, (3.10) საწყისი პირობები ასე გარდაიქმნება

$$x_i(t_0) = x_{i_0} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{3.13}$$

ამრიგად, (3.9), (3.10) ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ამოვხსნათ (3.13), (3.13) ამოცანა. ეს ამოცანა კი $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანის კერძო შემთხვევაა.

მართლაც, თუ შემოვიღებთ

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \cdots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \end{pmatrix}$$

მატრიცას და აგრეთვე

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$$

ვექტორებს,

(3.12), (3.13) ამოცანა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x} + \overline{b}(t), \tag{3.12$'$}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{3.13$'$}$$

ეს კი $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანაა.

$A(t)$ და $\overline{b}(t)$ კოეფიციენტები ცხადია აკმაყოფილებენ 2.1 თეორემის პირობებს. ამიტომ $(3.12')$, $(3.13')$ ამოცანას ე.ი. (3.9), (3.10) ამოცანასაც აქვს ერთადერთი ამოხსნა, განსაზღვრული $I$ შუალედში. □

## 4. კოშის ამოცანის კორექტულობა

განიხილება კოშის ამოცანის კორექტულობის საკითხი. ეს საკითხი წარმოიშვა იმასთან დაკავშირებით, რომ დიფ. განტოლებები გამოიყენება ბუნებაში მიმდინარე ფიზიკური პროცესების აღსადგენად და ამიტომ დიფ. განტოლებების კოეფიციენტები, აგრეთვე კოშის ამოცანის საწყისი პირობები ხშირად მოიძებნება ექსპერიმენტის საშუალებით და ე.ი. შეიცავს გარკვეულ ცდომილებას. სწორედ ამიტომ ისმის საკითხი განტოლებების კოეფიციენტებისა და საწყისი მნიშვნელობების მცირე გადახრები გამოიწვევს თუ არა კოშის ამოცანის ამოხსნის დიდ ცვლილებას. ამ საკითხს უდიდესი მნიშვნელობა აქვს, რადგან მასზეა დამოკიდებული, თუ რამდენად გონივრულად, კორექტულად არის დასმული კოშის ამოცანა. მართლაც, ეს რომ ასე არ იყოს გამოვა, რომ ის მცირე ცდომილება, რომელიც შეიძლება ექსპერიმენტის დროს დავუშვათ, გამოიწვევს ამონახსნის დიდ ცვლილებას და მივიღებთ ამოხსნას, რომელიც სრულიად არ აღწერს საძიებელ ფიზიკურ პროცესს.

კოშის ამოცანის კორექტულობის საკითხი განიხილება ჩვეულებრივი წრფივი სისტემისათვის. ადგილი აქვს ასეთ

**თეორემა 4.1.** ვთქვათ გვაქვს კოშის ამოცანა:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x} + \overline{b}(t), \tag{4.1}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \tag{4.2}$$

სადაც $A \in C_{n\times n}(I)$, $\overline{b} \in C_n(I)$, $t_0 \in I$, $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ($I$ სასრული სეგმენტია). მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $t^* \in I$,

$\overline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P} \in C_{n\times n}(I)$, $\overline{q} \in C_n(I)$ თუ დაცულია პირობა

$$\left|t^* - t_0\right| + \left\|\overline{x}^* - \overline{x}_0\right\| + \int\limits_I \Big[\left\|A(\tau) - \mathcal{P}(\tau)\right\| + \left\|\overline{b}(\tau) - \overline{q}(\tau)\right\|\Big] d\tau < \delta, \tag{4.3}$$

მაშინ

$$\left\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\right\| < \varepsilon, \quad t \in I, \tag{4.4}$$

სადაც $\overline{x}(t)$ არის (4.1), (4.2) ამოცანის ამოხსნა, ხოლო $\overline{y}(t)$ კი

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \mathcal{P}(t)\,\overline{y} + \overline{q}(t), \tag{4.1$^*$}$$

$$\overline{y}(t^*) = \overline{x}^*, \tag{4.2$^*$}$$

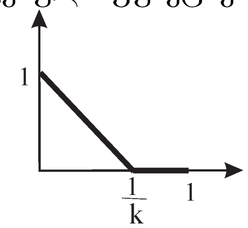
ამოცანის ამოხსნა.

უხეშად რომ ვთქვათ, ეს თეორემა გვეუბნება, რომ თუ კოშის ამოცანის ორი მონაცემი საკმარისად ახლოა ერთმანეთთან, შესაბამისი ამოხსნებიც საკმარისად მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. შევნიშნოთ, რომ (4.3) პირობაში ჩვენ მოვითხოვეთ ფუნქციების ინტეგრალური სიახლოვე. შეგვეძლო მოგვეთხოვა სიახლოვე მაქსიმუმის მიხედვით. ე.ი.

$$\max\left\|A(\tau) - \mathcal{P}(\tau)\right\| + \max\left\|\overline{b}(\tau) - \overline{q}(\tau)\right\| < \delta.$$

ცხადია, თუ ფუნქციები ერთმანეთთან ახლოა მაქსიმუმის მიხედვით, ისინი ინტეგრალურადაც ახლოს იქნებიან ერთმანეთთან. მაგრამ პირიქით, ეს ასე არ არის. ამას გვიჩვენებს

**მაგალითი.** ვთქვათ $x_k(t)$ მოცემული ფუნქციებია $[0,1]$-ზე ასეთი გრაფიკით




ხოლო $x_0(t) \equiv 0$, $x_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{როცა } \dfrac{1}{k} \le t \le 1, \\ 1 - kt & \text{როცა } 0 \le t < \dfrac{1}{k}\,. \end{cases}$ $k = 1, 2, \dots$

მაშინ ცხადია $\int\limits_0^1 \left|x_0(t) - x_k(t)\right| dt = \dfrac{1}{2k}$ . ე.ი. ინტეგრალურად $x_k(t)$ რაგინდ ახლოს მივა $x_0(t)$-თან, მაგრამ $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|x_k(t) - x_0(t)\right| = 1$. ამრიგად ჩვენი მოთხოვნა უფრო სუსტია და ე.ი. უფრო ზუსტიც.

ეხლა დავამტკიცოთ თეორემა.

**დამტკიცება.** როგორც ლექცია 2-ში ვნახეთ, გვაქვს

$$\overline{x}(t)=\overline{x}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\big[A(\tau)\,\overline{x}(\tau)+\overline{b}(\tau)\big]d\tau,$$

$$\overline{y}(t)=\overline{x}\,_0^*+\int\limits_{t^*}^{t}\big[\mathcal{P}(\tau)\,\overline{y}(\tau)+\overline{q}(\tau)\big]d\tau$$

და

$$\overline{x}(t)-\overline{y}(t)=\big(\overline{x}_0-\overline{x}\,^*\big)+\int\limits_{t_0}^{t^*}\big[A(\tau)\,\overline{x}(\tau)+\overline{b}(\tau)\big]d\tau+$$

$$+\int\limits_{t^*}^{t}\big[\overline{b}(\tau)-\overline{q}(\tau)\big]d\tau+$$

$$+\int\limits_{t^*}^{t}\big[A(\tau)-\mathcal{P}(\tau)\big]\overline{x}(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t^*}^{t}\mathcal{P}(\tau)\big[\overline{x}(\tau)-\overline{y}(\tau)\big]\,d\tau.$$

თუ აღვნიშნავთ $c_0=\max\big\{\|\overline{x}(t)\|,\,t\in I\big\}$, რომელიც არსებობს, რადგან $I$ ჩაკეტილია, მივიღებთ

$$\big\|\overline{x}(t)-\overline{y}(t)\big\|\le\|\overline{x}_0-\overline{x}\,^*\|+\Bigg|\int\limits_{t_0}^{t^*}\big[c_0\|A(\tau)\|+\|b(\tau)\|\big]d\tau\Bigg|+$$

$$+\int\limits_{I}\big\|\overline{b}(\tau)-\overline{q}(\tau)\big\|d\tau++c_0\int\limits_{I}\big\|A(\tau)-\mathcal{P}(\tau)\big\|\,d\tau+$$

$$+\Bigg|\int\limits_{t^*}^{t}\|\mathcal{P}(\tau)\|\cdot\big\|\overline{x}(\tau)-\overline{y}(\tau)\big\|\,d\tau\Bigg|. \tag{4.5}$$

აღვნიშნოთ $c^*=\max\big\{c_0\|A(t)\|+\|\overline{b}(t)\|\;:\;t\in I\big\}$, რომელიც არსებობს $I$-ის ჩაკეტილობის და შემოსაზღვრულობის გამო. ცხადია (4.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\Bigg|\int\limits_{t_0}^{t^*}\big[c_0\|A(\tau)\|+\|\overline{b}(\tau)\|\big]d\tau\Bigg|\le c^*\Bigg|\int\limits_{t_0}^{t^*}d\tau\Bigg|=c^*|t_0-t^*|\le c^*\,\delta. \tag{4.6}$$

ამიტომ (4.5)-დან კვლავ (4.3)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\big\|\overline{x}(t)-\overline{y}(t)\big\|\le(1+C_0+c^*)\delta+\Bigg|\int\limits_{t^*}^{t}\big\|\mathcal{P}(\tau)\big\|\cdot\big\|\overline{x}(\tau)-\overline{y}(\tau)\big\|\,d\tau\Bigg|,$$

სადაც $C_0 = \max\{c_0, 1\}$.

(4.6)-დან გრონუოლ-ბელმანის ლემის გამოყენებით (იხ. ლემა 2.3) გვაქვს

$$\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\| \le (1 + C_0 + c^*)\delta\, e^{\int_I \|\mathcal{P}(\tau)\| d\tau}. \tag{4.7}$$

(4.3) პირობის გამო

$$\int\limits_I \|\mathcal{P}(\tau)\|\, d\tau \le \int\limits_I \|\mathcal{P}(\tau) - A(\tau)\|\, d\tau + \int\limits_I \|A(\tau)\|\, d\tau \le \delta +$$
$$+ \int\limits_I \|A(\tau)\|\, d\tau \le 1 + \int\limits_I \|A(\tau)\|\, d\tau. \tag{4.8}$$

რადგან თავიდანვე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\delta \le 1$.

თუ აღვნიშნავთ $\widetilde{c} = (1 + C_0 + c^*)\delta\, e^{1 + \int_I \|A(\tau)\| d\tau}$, (4.7) მოგვცემს

$$\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\| \le \widetilde{c}\, \delta. \tag{4.9}$$

თუ შევარჩევთ $\delta$-ს ისე, რომ $\delta \le 1$ და $\widetilde{c}\,\delta < \varepsilon$, (4.9)-დან გამოდის (4.4). $\square$

ვაჩვენოთ, რომ თეორემა 4.1 სამართლიანი დარჩება იგივე პირობებში თუ $I$-ს ვიგულისხმებთ ნებისმიერ შუალედად მხოლოდ დამატებით ვიგულისხმებთ, რომ $A$ და $\overline{b}$ ფუნქციები აბსოლუტურად ინტეგრებადია $I$ შუალედში. ლექცია 3-ში განხილულ ამოცანაში ვაჩვენოთ, რომ ამ პირობებში $\overline{x}(t)$ ნორმით შემოსაზღვრულია. ასე რომ $\|\overline{x}(t)\| \le c_0$, $t \in I$. ამიტომ (4.5) უტოლობა კვლავ ძალაში დარჩება, თუ სწორედ ამ $c_0$-ს ვიგულისხმებთ. (4.8) უტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\mathcal{P}(t)$-ც აბსოლუტურად ინტეგრებადია $I$-ზე. ამიტომ ინტეგრებადი იქნება $\|A(t) - \mathcal{P}(t)\|$ და $\|\overline{b}(t) - \overline{q}(t)\|$-ც. (4.5) უტოლობაში

$$\|\overline{x}_0 - \overline{x}^{\,*}\| + \int\limits_I \|\overline{b}(\tau) - \overline{q}(\tau)\| d\tau + c_0 \int\limits_I \|A(\tau) - \mathcal{P}(\tau)\|\, d\tau$$

ისევ შეფასდება $(1 + c_0)\delta$. აღვნიშნოთ

$$w(\delta) = \max\left\{ \left| \int\limits_{t_0}^{t} \left[c_0\|A(\tau)\| + \|\overline{b}(\tau)\|\right] d\tau \right| : t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap I \right\}.$$

ეს რიცხვი არსებობს, რადგან $\delta$-ს შემცირების ხარჯზე ყოველთვის შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ ეს თანაკვეთა სეგმენტი იყოს. ცხადია $\lim\limits_{\delta \to 0} w(\delta) = 0$, რადგან ინტეგრალის მნიშვნელობა $t_0$-ზე ნულია. ამიტომ რადგან $|t_0 - t^*| < \delta$,

გვაქვს

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t^*} \left[c_0\|A(\tau)\| + \|\overline{b}(\tau)\|\right] d\tau \right| \le w(\delta)$$

ასე რომ საბოლოოდ გვექნება

$$\left\|\overline{x}(t)-\overline{y}(t)\right\| \leq \left[(1+c_0)\delta+w(\delta)\right] e^{1+\int_I \|A(\tau)\| d\tau}.$$

მარჯვენა მხარე კი $\delta$-ს შერჩევის ხარჯზე რაგინდ მცირე გახდება. $A$ და $\overline{b}$ ფუნქციებს აბსოლუტურ ინტეგრებადობის პირობას თუ მოვხსნით თეორემა უკვე არ იქნება სწორი. მოვიყვანოთ ამის ორი მაგალითი.

**მაგალითი.** 1) ვთქვათ $I=(0,+\infty)$ და გვაქვს $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}\,x$ განტოლება $x(t_0)=x_0$ საწყისი პირობით. $(1.7')$-ის ძალით ამ ამოცანის ამოხსნა არის

$$x(t)=x_0\,e^{\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\tau}}=x_0\,e^{\ln\frac{t}{t_0}}=\frac{x_0}{t_0}\,t.$$

თუ შევუცვლით საწყის პირობებს $y(t^*)=x^*$, მივიღებთ $y(t)=\dfrac{x^*}{t^*}\,t$ ამოხსნას. ასე, რომ $|x(t)-y(t)|=\left|\dfrac{x^*}{t^*}-\dfrac{x_0}{t_0}\right|t$. როგორიც არ უნდა იყოს $x_0, t_0, x^*, t^*$, $t$-ს გაზრდის ხარჯზე ამას ნებისმიერად დიდს გავხდით. ამრიგად მხოლოდ საწყისი პირობების შეცვლამაც კი გამოიწვია ამონახსნის დიდი ცვლილება. ყოველივე ეს კი იმის გამო მოხდა, რომ $\dfrac{1}{t}$ არ არის ინტეგრალი $(0,+\infty)$-ზე.

2) ვთქვათ $I$ სასრულია. ვთქვათ $I=(0,1)$ და გვაქვს კოშის ამოცანა

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}x, \quad x(t_0)=x_0.$$

ისევ $(1.7')$-ის ძალით

$$x(t)=x_0\,e^{\int_{t_0}^{t}-\frac{d\tau}{\tau^2}}=x_0\,e^{\frac{1}{t}-\frac{1}{t_0}}.$$

ასევე $y(t)=x^*\,e^{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^*}}$, ასე, რომ

$$|y(t)-x(t)|=\left|x_0\,e^{-\frac{1}{t_0}}-x^*\,e^{-\frac{1}{t^*}}\right|e^{\frac{1}{t}}.$$

$t$-ს ნულთან მიახლოებისას ეს გამოსახულება რაგინდ დიდი შეიძლება გავხადოთ.

განვიხილოთ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა

$$\overline{x}(t)=\overline{f}(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\,\overline{x}(\tau)\,d\tau. \tag{$*$}$$

მას უწოდებენ ვოლტერას ტიპის წრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას. (2.8) სისტემა მიიღება, როგორც მისი კერძო შემთხვევა. ამ სისტემისათვის ადგილი აქვს არსებობისა და ერთადერთობის

**თეორემა.** ვთქვათ $K\in C_{n\times n}(I\times I)$ და $\overline{f}\in C_n(I)$, სადაც $I$ ნებისმიერი შუალედია, $(*)$ სისტემას აქვს ერთადერთი უწყვეტი ამონახსნი.

ისევე როგორც თეორემა 2.1-ის დამტკიცებისას განვიხილოთ ვექტორ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$\overline{x}_0(t) \equiv \overline{f}(t), \quad \overline{x}_k(t) = \overline{f}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,\overline{x}_{k-1}(\tau)\,d\tau.$$

გვექნება

$$\big\|\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}(t)\big\| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t} \big\|K(t,\tau)\big\| \cdot \big\|\overline{x}_{k-1}(\tau) - \overline{x}_{k-2}(\tau)\big\|\,d\tau\right|.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $I^* \subset I$ სეგმენტი. რადგან $k$ უწყვეტია, $\|k(t,\tau)\| \le M$, სადაც $t \in I^*$, $\tau \in I^*$ ე.ი.

$$\big\|\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}(t)\big\| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t} M\big\|\overline{x}_{k-1}(\tau) - \overline{x}_{k-2}(\tau)\big\|\,d\tau\right|.$$

ამიტომ ლემა 2.2-ის თანახმად გვაქვს

$$\big\|\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}(t)\big\| \le \frac{c_0}{(k-1)!}\,r^{k-1},$$

სადაც $r = \int\limits_{I^*} M\,d\tau$. დანარჩენი მსჯელობა იგივე იქნება, რაც თეორემა 2.1-ში. ასევე დამტკიცდება ერთადერთობაც.

(*) სისტემისათვის ადგილი აქვს თეორემას კორექტულობის შესახებ: თუ $K \in C_{n\times n}(I\times I)$ და $\overline{f} \in C_n(I)$, სადაც $I$ სასრული სეგმენტია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის არსებობს $\delta > 0$, რომ როცა $|t_0 - t^*| < \varepsilon$ და

$$\max\left\{\big\|f(t) - \overline{f}^{\,*}(t)\big\| + \int\limits_{I} \big\|K(t,\tau) - K^*(t,\tau)\big\|d\tau \,:\, t \in I\right\} \le \delta,$$

მაშინ $\big\|\overline{x}(t) - \overline{y}(t)\big\| < \varepsilon$ როცა $t \in I$, სადაც $\overline{y}(t)$ არის

$$\overline{y}(t) = \overline{f}^{\,*}(t) + \int\limits_{t^*}^{t} K^*(t,\tau)\,\overline{y}(\tau)\,d\tau, \qquad (**)$$

განტოლების ამოხსნა.

ისევე როგორც თეორემა 4.1-ში, აქაც გვაქვს $c_0 = \max\big\{\|\overline{x}\| : t \in I\big\}$, $\|K(t,\tau)\| \le M$, ასე რომ

$$\big\|x(t) - y(t)\big\| \le \big\|\overline{f}(t) - \overline{f}^{\,*}(t)\big\| + \left|\int\limits_{t_0}^{t^*} \|K(t,\tau)\| \cdot \|x(\tau)\|\,d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_{t^*}^{t}\big\|K(t,\tau)-K^*(t,\tau)\big\|\cdot\|x(\tau)\|\,d\tau\right|+$$

$$+\left|\int_{t^*}^{t}\|K^*(t,\tau)\|\cdot\big\|\overline{x}(\tau)-\overline{y}(\tau)\big\|\,d\tau\right|\le$$

$$\le\delta+Mc_0\|t_0-t^*|+c_0\delta+\left|\int_{t^*}^{t}\|K^*(t,\tau)\|\cdot\big\|\overline{x}(\tau)-\overline{y}(\tau)\big\|\,d\tau\right|,$$

$$\|K^*(t,\tau)\|\le\big\|K^*(t,\tau)-K(t,\tau)\big\|+\|K(t,\tau)\|\le\delta+M<1+M.$$

რადგან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\delta\le 1$. ე.ი. გრონუოლ-ბელმანის ლემით $\|x(t)-y(t)\|\le\delta(1+Mc_0+c_0)e^{\int_I(1_M)d\tau}$ ეს კი ნებისმიერად მცირე გახდება როცა $\delta\to 0$.

## 4.1. წრფივად დამოუკიდებელი და დამოკიდებული ფუნქციები

განვიხილოთ წრფივ ერთგვაროვან დიფ. განტოლებათა სისტემა

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=A(t)\,\overline{x}. \tag{4.10}$$

ამ სისტემას ეწოდება ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა. სახელწოდება "ერთგვაროვანი" გამოწვეულია იმით, რომ მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $\overline{x}$-ის მიმართ წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციას. ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $A\in C_{n\times n}(I)$.

**თეორემა 4.2.** (4.10) სისტემის ამოხსნათა ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია კვლავ წარმოადგენს (4.10) სისტემის ამოხსნას.

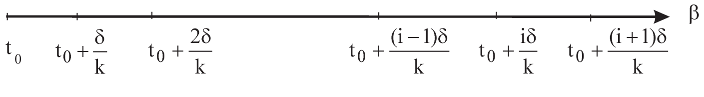
ეს ნიშნავს, რომ (4.10)-ის ამოხსნათა სიმრავლე არის წრფივი სივრცე.

**განსაზღვრება.** ვთქვათ მოცემული $\overline{x}_i$ $(i=1,\dots,k)$ არის $n$-განზომილებიანი ვექტორ ფუნქციები, რომლებიც $I$-ს ასახავენ $\mathbb{R}^n$-ში. ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს ფუნქციები არიან წრფივად დამოუკიდებელი $I$-ში, თუ $\sum_{i=1}^{k}c_i\,\overline{x}_i(t)=\overline{0}$ ტოლობას ნებისმიერი $t\in I$-თვის ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $c_i=0$ $(i=1,\dots,k)$.

ცხადია, რომ თუ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია $I$-ში, იგი წრფივად დამოკიდებული იქნება ნებისმიერ უფრო მცირე შუალედშიც.

პირიქით კი ასე არ არის. ამას მოწმობს:

**მაგალითი.**




ვთქვათ $x_1(t)$ და $x_2(t)$ მოცემულია გრაფიკით ([0,1]-ზე ორივე ნულია). ცხადია [0,2]-ზე ისინი წრფივად დამოუკიდებელია. მაგრამ [0,1]-ზე არა.

ზემოთ ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ფუნქციათა $k$ რაოდენობა და მათი $n$ განზომილება სხვადასხვა რიცხვებია. თუ ისინი ტოლია, შეიძლება შევადგინოთ დეტერმინანტი, რომლის სვეტებია $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ ვექტორ-ფუნქციები. ამას ეწდება მოცემული სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი.

**თეორემა 4.3.** იმისათვის, რომ ფუნქციათა სისტემა იყოს წრფივად დამოუკიდებელი $I$-ში, საკმარისია მისი ვრონსკის დეტერმინანტი $I$ შუალედის ერთ წერტილზე მაინც იყოს ნულისაგან განსხვავებული.

**დამტკიცება.** ვთქვათ ეს ხდება $t_0 \in I$ წერტილზე. თუ $t_0$-ს შევიტანთ ვრონსკის დეტერმინანტში, მივიღებთ რიცხვით დეტერმინანტს, რომელიც ნული არ არის. ამიტომ მისი სვეტები წრფივად დამოუკიდებელი იქნება. ე.ი. ჩვენი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია $\{t_0\}$ სიმრავლეზე. ამიტომ იგი წრფივად დამოუკიდებელი იქნება მის მომცველ $I$ შუალედზეც. □

ზემოთ დასახელებული პირობა არ არის აუცილებელი. მართლაც, $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} \equiv 0$ მაგრამ მისი სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია.

## 5. ზოგადი დებულებები

წინა ლექციაზე განხილული იყო წრფივ ერდგვაროვან დიფ. განტოლებათა სისტემა

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x}. \tag{5.1}$$

თეორემა 4.3-ში ვაჩვენეთ, რომ ვრონსკის დეტერმინანტის ნულთან იგივურად არატოლობა საკმარისია, მაგრამ აუცილებელი არ არის ფუნქციათა წრფივ დამოუკიდებლობისათვის. მდგომარეობა იცვლება თუ ფუნქციათა სისტემა შედგება (5.1) სისტემის ამონახსნებისაგან.

**თეორემა 5.1.** თუ

$$\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t) \tag{5.2}$$

ფუნქციები წარმოადგენენ $(5.1)$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს, მაშინ მათი წრფივად დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი $I$ შუალედის ნებისმიერ წერტილში იწოს ნულისაგან განსხვავებული

$$w(t) \not\equiv 0, \quad t \in I. \tag{5.3}$$

**დამტკიცება.** ამ პირობის საკმარისობა გამოდის თეორემა 4.3-დან.

აუცილებლობა. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ ვრონსკის დეტერმონანტი ერთ წერტილში მაინც ნულია, (5.2) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ვთქვათ $W(t_0) = 0$ რომელიღაც $t_0 \in I$-თვის. განვიხილოთ წრფივ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\,\overline{x}_k(t_0) = \overline{o}. \tag{5.4}$$

მისი დეტერმინანტი იქნება is $W(t_0) = 0$, ამიტომ (5.4) სისტემას აქვს არატრივიალური ამოხსნა $c_1, \dots, c_n$. განვიხილოთ ასეთი ფუნქცია

$$\overline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \overline{x}_k(t).$$

(5.4)-ის თანახმად გვაქვს

$$\overline{x}(t_0) = \overline{o}. \tag{5.5}$$

მეორეს მხრივ თეორემა 4.2-ის ძალით $\overline{x}(t)$ არის (5.1) სისტემის ამონახსნი და ე.ი. $\overline{x}(t)$ არის (5.1.), (5.5) ამოცანის ამოხსნა. მეორეს მხრივ, ამავე ამოცანის ამოხსნა იგივურად ნულია $I$-ზე. ამიტომ ერთადერთობის მეორემა 2.1-ის ძალით გვაქვს $\overline{x}(t) \equiv 0$ $I$-ზე, ე.ი. $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \, \overline{x}_k(t) = 0$ $I$-ზე და სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

$\square$

ამ თეორემიდან შეგვიძლია გავაკეთოთ

**დასკვნა.** თუ (5.2) სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი ერთ წერტილში უდრის ნულს, მაშინ იგი იგივურად ნული იქნება. მართლაც, რადგან ვრონსკის დეტერმინანტი ერთ წერტილში ნულია, სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და სხვა რომელიმე წერტილში რომ ნულისაგან განსხვავებული იყოს ვრონსკის დეტერმინანტი თეორემა 4.3-ის გამო სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი გამოვიდოდა. ამრიგად, წრფივი ერთგვაროვანი დიფ. განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი ფუნქციათა სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი ან იგივურად ნულია $I$-ზე, ან $I$-ის ყველა წერტილში ნულისაგან განსხვავებულია.

**განმარტება.** (5.1) სისტემის ამოხსნათა (5.2) სისტემას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ იგი წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო მატრიცას, რომლის სვეტები არიან ფუნდამენტალური სისტემის ამონახსნები ეწოდება (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი.

**თეორემა 5.2.** (5.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა და ე.ი. ფუნდამენტური მარტიცაც არსებობს.

**დამტკიცება.** $\overline{e}_i$-ით აღვნიშნოთ $n$-განზომილებიანი ვექტორი, რომლის $i$-რი კომპონენტი 1-ის ტოლია, ხოლო დანარჩენები 0-ია. $\overline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$. ავიღოთ ნებისმიერი $t_0 \in I$ და განვიხილოთ კოშის ამოცანა (5.1),

$$\overline{x}(t_0) = \overline{e}_i. \tag{5.6}$$

ყოველი ფიქსირებული $i$-თვის, თეორემა 2.1-ის ძალით ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამოხსნა $\overline{x}_i(t)$. თუ $i$ გაირბენს მნიშვნელობებს 1-დან $n$-მდე, მივიღებთ (5.1)

სისტემის ამოხსნათა
$$\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \tag{5.7}$$
სისტემას. ამ სისტემისთვის ცხადია $w(t_0) = 1 \neq 0$. ამიტომ თეორემა 4.3-ის ძალით (5.7) სისტემა წარმოადგენს (5.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. □

შევნიშნოთ, რომ (5.1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა განსაზღვრულია მუდმივ გადაუგვარებელ მატრიცულ მამრავლამდე სიზუსტით. უფრო ზუსტად ეს ნიშნავს შემდეგს:

**თეორემა 5.3.** ვთქვათ $X(t)$ არის (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. მაშინ $Y(t)$ იქნება (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა
$$Y(t) = X(t)\,C, \tag{5.8}$$
სადაც $C$ მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცაა.

**დამტკიცება.** მართლაც, თუ ადგილი აქვს (5.8) ტოლობას, $\det[Y(t)] = \det[X(t)] \times \det[C] \neq 0$ ასე რომ $Y(t)$ ფუნდამენტური მატრიცაა, რადგან როგორც ადვილი შესამჩნევია $Y(t)$ მატრიცის სვეტები $X(t)$-ის სვეტების წრფივი კომბინაციაა.

პირიქით, რადგან $X(t)$ ფუნდამენტური მატრიცაა, როგორც ქვემოთ თეორემა 5.4-ში ვნახავთ, (5.1) სისტემის ყოველი ამოხსნა არის მისი სვეტების წრფივი კომბინაცია. ამიტომ არსებობს $C$ მატრიცი, ისეთი, რომ ადგილი აქვს (5.8) ტოლობას. $C$-ს გადაუგვარებლოვბა კი გამომდინარეობს იქიდან, რომ $Y(t)$-ც ფუნდამენტური მატრიცაა. □

**თეორემა 5.4.** თუ (5.2) წარმოადგენს (5.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას, მაშინ (5.1) სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა წარმოიდგინება როგორც (5.2) სისტემის წრფივი კომბინაცია. კერძოდ, თუ $X(t)$ არის (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი, მაშინ (5.1) სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა $\overline{x}(t)$ წარმოიდგინება შემდეგი სახით
$$\overline{x}(t) = X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\overline{x}(t_0) \tag{5.9}$$
(რადგან $X$ ფუნდამენტური მატრიცია, იგი შებრუნებადია ყოველ წერტილში), სადაც $t_0$ არის $I$ შუალედის ნებისმიერი წერტილი.

**დამტკიცება.** თეორემა 4.2-ის ძალით ცხადია, რომ ფუნქცია $\overline{y}(t) = X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\overline{x}(t_0)$ წარმოადგენს (5.1) სისტემის ამოხსნას, რადგან იგი არის ფუნდამენტური ამოხსნების წრფივი კომბინაცია. ამასთან,
$$\overline{y}(t_0) = \overline{x}(t_0). \tag{5.10}$$
ამიტომ $\overline{y}(t)$ არის (5.1), (5.10) ამოცანის ამოხსნა. ამავე ამოცანის ამოხსნაა $\overline{x}(t)$. ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 2.1-ის თანახმად, გვაქვს $\overline{x}(t) \equiv \overline{y}(t)$ და ადგილი აქვს (5.9) ტოლობას. □

**განმარტება.** ვთქვათ $X(t)$ არის (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. მაშინ
$$C(t,t_0)=X(t)\,X^{-1}(t_0)$$
მატრიცს, რომელიც განსაზღვრულია $I\times I$ სიმრავლეზე ეწოდება (5.1) სისტემის კოშის მატრიცი.

ისმის საკითხი: დამოკიდებულია თუ არა სისტემის კოშის მატრიცი ფუნდამენტური მატრიცის არჩევაზე. თურმე არა. მართლაც, ვთქვათ $Y(t)$ არის (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. მაშინ თეორემა 5.3-ის ძალით ადგილი აქვს (5.8) ტოლობას და
$$\widetilde{C}(t,t_0)=Y(t)\,Y^{-1}(t_0)=X(t)\,C\,C^{-1}\,X^{-1}(t_0)=X(t)\,X^{-1}(t_0)=C(t,t_0).$$
ამრიგად (5.1) სისტემას აქვს ერთადერთი კოშის მატრიცი.

**განმარტება.** ვთქვათ გვაქვს $A=\big(a_{ik}\big)_{i,k=1}^{k}$ მატრიცი. მაშინ ამ მატრიცის კვალი ეწოდება მისი დიაგონალური ელემენტების ჯამს და აღინიშნება
$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\quad(\mathrm{Trace}-\text{ტრეის}).$$

**თეორემა 5.5 (ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა).** თუ $X(t)$ არის (5.1) სისტემის ამოხსნათა ფუნდამენტური მატრიცი, მაშინ
$$\det[X(t)]=\det[X(t_0)]\,e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}(A(\tau))d\tau}. \tag{5.11}$$

**დამტკიცება.** თუ $X(t)$ არ არის ამოხსნათა ფუნდამენტური მატრიცი, (5.11) ტრივიალურია, რადგან ორივე მხარე ნულია, ამიტომ ვიგულისხმოთ რომ $X(t)$ ფუნდამენტური მატრიცია. გვაქვს
$$X(t+\Delta t)=X(t)+Z(t,\Delta t)\Delta t,$$
სადაც
$$\lim_{\Delta t\to 0}Z(t,\Delta t)=X'(t). \tag{5.12}$$
ეს ასე ჩავწეროთ $X(t+\Delta t)=\big[E+\Delta t\,Z(t,\Delta t)\,X^{-1}(t)\big]\,X(t)$. აქ ვსარგებლობთ იმით, რომ $X$ ფუნდამენტურია და ე.ი. გადაუგვარებელია. თუ აღვნიშნავთ
$$\det[X(t)]=W(t) \tag{5.13}$$
მივიებთ
$$\begin{aligned}W(t+\Delta t)&=W(t)\det\big[E+\Delta t\,Z(t,\Delta t)\,X^{-1}(t)\big]=\\&=W(t)\big[1+\Delta t\ \mathrm{Tr}(z(t,\Delta t)\,X^{-1}(t))+(\Delta t)^2\,\eta(t,\Delta t)\big],\end{aligned}$$
სადაც $\eta(t,\Delta t)$ შემოსაზღვრულია როცა $\Delta t\to 0$.აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ დეტერმინანტში $\Delta t$-ის პირველ ხარისხს იძლევა მხოლოდ დიაგონალური ელემენტების

ნამრავლი. აქედან

$$\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}=\mathrm{Tr}\left(z(t,\Delta t)\,X^{-1}(t)\right)W(t)+\Delta t\,\eta(t,\Delta t)W(t).$$

აქ თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta t\to 0$, (5.12)-ის გამო გვაქვს

$$W'(t)=\mathrm{Tr}\left(X'(t)\,X^{-1}(t)\right)W(t). \tag{5.14}$$

რადგან $X(t)$ შედგება (5.1) სისტემის ამონახსნებისაგან, იგი აკმაყოფილებს მატრიცულ დიფ. განტოლებას $X'(t)=A(t)\,X(t)$ $X'(t)\,X^{-1}(t)=A(t)$.

აქედან $X'(t)\,X^{-1}(t)=A(t)$. ამიტომ (5.4) ასე გადავწეროთ

$$W'(t)=\mathrm{Tr}(A(t))W(t).$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი განტოლება $W(t)$-ს მიმართ, ამიტომ $(1.7')$ ფორმულით გვაქვს

$$W(t)=W(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}(A(\tau))d\tau}. \tag{5.15}$$

თუ გავითვალისწინებთ (5.13) აღნიშვნებს, დავინახავთ, რომ (5.15) იგივეა, რაც (5.11). □

## 6. მატრიცული სისტემები

ვთქვათ $X(t)$ არის მატრიცი, რომლის სვეტებიც წარმოადგენენ დიფ. განტოლებათა (5.1) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნებს. მაშინ, როგორც უკვე შევნიშნეთ $X(t)$ იქნება მატრიცულ დიფ. განტოლების ამოხსნა

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)\,X(t), \tag{6.1}$$

და პირიქით, თუ $X(t)$ წარმოადგენს (6.1)-ის ამოხსნას, მისი სვეტები იქნება (5.1) სისტემის ამონახსნები. მართლაც, $\dfrac{dX(t)}{dt}=A(t)\,X(t)$ ტოლობას, რომელიც ჩაწერილია მატრიცულად, თუ ჩავწერთ მატრიცულად სვეტების მიხედვით, მივიღებთ $\dfrac{d\overline{x}_i}{dt}=A(t)\,\overline{x}_i(t)$, ასე რომ $X(t)$ მატრიცის სვეტები წარმოადგენენ (5.1)-ის ამოხსნებს. ყოველივე ზემოთქმულის თანახმად, არსებობისაა და ერთადერთობის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს მუდმივი მატრიცი $C$ და $t_0\in I$ (6.1) მატრიცულ დიფ.

განტოლებას ექნება ერთადერთი ამოხსნა ასეთ საწყის პირობებში

$$X(t_0)=C. \tag{6.2}$$

მართლაც, (6.1), (6.2) ამოცანა ფაქტიურად არის $n$ ცალი $(2.1')$, $(2.2')$ ამოცანის ტიპის ამოცანების ერთობლიობა, სადაც დიფ. განტოლებები ერთი და იგივეა, ოღონდ საწყისი პირობები სხვადასხვაა. თითოეულ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამოხსნა და ეს ამოხსნები, როგორც სვეტები, შეადგენენ სწორედ (6.1), (6.2) ამოცანის საძიებელ ერთადერთ ამოხსნას. კერძოდ, (5.1) სისტემის ყოველი ფუნდამენტური მატრიცი წარმოადგენს (6.1), (6.2) ამოცანის ამოხსნას, სადაც $C$ რაიმე მუდმივი

გადაუგვარებელი მატრიცია და პირიქით. თუ $C$ გადაუგვარებელი მატრიცია, მაშინ (6.1), (6.2) ამოცანის ამოხსნა იქნება (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი.

ლექცია 5-ში ჩვენ განვმარტეთ (5.1) სისტემის კოშის მატრიცი ყოველი ფიქსირებული $t_0$-თვის. კოშის მატრიცი წარმოადგენს (6.1)-ის ამონახსნს ასეთ საწყის პირობებში

$$X(t_0) = E. \tag{6.3}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში $X^{-1}(t_0)$ მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცია და როგორც თეორემა 5.3-ის დამტკიცებისას ვნახეთ, $X(t)\,X^{-1}(t_0)$-იც იქნება (5.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი და ე.ი. (6.1)-ის ამოხსნა, ხოლო $C(t_0, t_0) = X(t_0)\,X^{-1}(t_0) = E$. კოშის მატრიცის ეს თვისება შეიძლება მივკელო კოშის მატრიცის განმარტებად. კერძოდ $C(t, t_0)$ მატრიცს, რომელიც ყოველი ფიქსირებულ $t_0$-თვის წარმოადგენს (6.1), (6.3) ამოცანის ამოხსნას, ეწოდება კოშის მატრიცი. აქედან ერთადერთობის თეორემის ძალით გამოვიდოდა კოშის მატრიცის ერთადერთობა.

ვაჩვენოთ, რომ ამ განმარტებიდან გამოდის ძველი განმარტება. ავიღოთ (5.1) სისტემის ნებისმიერი ფუნდამენტური ამოხსნა $X(t)$. ცხადია $C(t, t_0) = X(t)\,U(t_0)$ რადგან $C(t, t_0)$ არის (6.1)-ის ამონახსნი.

მეორეს მხრივ, $C(t_0, t_0) = X(t_0)\,U(t_0) = E$ ყოველი $t_0 \in I$-თვის, ამიტომ $U(t_0) = X^{-1}(t_0)$ და $C(t, t_0) = X(t)\,X^{-1}(t_0) = E$, რის ჩვენებაც გვინდოდა.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, გვქონდა: თუ $X(t)$ არის (5.1)-ის ფუნდამენტური მატრიცი, მაშინ

$$\det(X(t)) \neq 0, \quad t \in I. \tag{6.4}$$

დავსვათ ამოცანა შებრუნებით. ვთქვათ $X \in C'_{n\times n}(0)$. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს იგი დამატებით, რომ წარმოადგენდეს რაიმე უწყვეტ კოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი დიფ. განტოლების ფუნდამენტურ მატრიცს. ამოსათვის ცხადია აუცილებელია (6.4) პირობა. ვაჩვენოთ, რომ იგი საკმარისიცაა. მართლაც განვიხილოთ

$$A(t) = X'(t)\,X^{-1}(t). \tag{6.5}$$

ცხადია $A(t) \in C_{n\times n}(I)$. განვიხილოთ (5.1) სისტემა, სადაც $A$ განსაზღვრულია (6.5) ფორმულით. (6.5)-დან ცხადია, რომ $X$ წარმოადგენს (6.1)-ის ამოხსნას და რადგან ის არაგადაგვარებულია, იგი იქნება (5.1)-ის ფუნდამენტური მატრიცი.

ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი

**თეორემა 6.1.** იმისათვის, რომ $X \in C_{n\times n}(I)$ მატრიცი წარმოადგენდეს რაიმე უწყვეტკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფ. განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტურ მატრიცს აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს (6.4) პირობა. ამასთან საძიებელი სისტემის კოეფიციენტები განისაზღვრება ცალსახად (6.5) ფორმულით.

## 6.1. ზოგადი დებულებანი $n$-რი რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებების შესახებ

ლექცია 3-ში ჩვენ განვიხილეთ $n$-რი რიგის წრფივი დიფ. განტოლებები (იხ. (3.9)). ერთგვაროვან დიფ. განტოლებებს ექნება ასეთი სახე

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, u^{(k-1)}, \tag{6.6}$$

სადაც $p_k \in C(I)$. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ (6.6) ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x}, \tag{6.6$'$}$$

სადაც $A(t)$ არის შემდეგი მატრიცი

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & \cdots & p_n(t) \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

ეკვივალენტობა გვესმის შემდეგი აზრით: (6.6')-ის ყოველი ამოხსნის პირველი კომპონენტი წარმოადგენს (6.6)-ის ამოხსნას, ხოლო თუ $u$ არის (6.6)-ის ამოხსნა, მაშინ $\overline{x} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$ იქნება (6.6')-ის ამოხსნა. განვიხილოთ ფუნქციათა სისტემა

$$u_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.8}$$

ამ სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი ვუწოდოთ დეტერმონანტს

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ u_1^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

როგორც ადვილი შესამჩნევია $u_i$ სკალარული ფუნქციათა სისტემის დეტერმინანტი ეს იგივეა რაც $\overline{x}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i' \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ვექტორ ფუნქციათა სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი. ცხადია, თუ $\overline{x}_i$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, წრფივად დამოუკიდებელი იქნება (6.8) სისტემაც. პირიქით, თუ წრფივად დამოუკიდებელია (6.8) სისტემა, წრფივად დამოუკიდებელი იქნება $\overline{x}_i$ სისტემაც. ამიტომ (6.8) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისათვის $I$-ში საკმარისია $I$ შუალედის ერთ $t_0$

წერტილში მაინც $W(t_0) \neq 0$ (თეორემა 4.3). მაგრამ აქაც ეს პირობა არ არის აუცილებელი. მაგ. ავიღოთ $u_1(t) = t^2$ როცა $t \geq 0$ და $u_1(t) = 0$ როცა $t < 0$, ხოლო $u_2(t) = 0$ როცა $t \geq 0$ და $u_2(t) = t^2$ როცა $t < 0$

$$u_1(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ t^2, & t < 0. \end{cases}$$

ცხადია

$$u_1'(t) = \begin{cases} 2t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad u_2'(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ 2t, & t < 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია. მაგრამ ვრონსკის დეტერმინანტი იგივურად ნულია. (6.6)-ის ამოხსნათა სისტემას

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{6.9}$$

ვუწოდოთ ფუნდამენტური, თუ იგი წრფივად დამოუკიდებელია $I$-ში. ცხადია, რომ თუ (6.8) არის (6.6)-ის ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ

$$\overline{x}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i' \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.10}$$

იქნება $(6.6')$ სისტემის ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა და პირიქით.

(6.6')-ის ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემის პირველი კომპონენტების ერთობლიობა ქმნის (6.6)-ის ამოხსნათა ფუნდამენტურ სისტემას.

ამიტომ ერთგვაროვან წრფივ დიფ. განტოლებათა სისტემებისათვის დამტკიცებული თეორემებიდან უშუალოდ გამოდის შემდეგი თეორემები:

**თეორემა 6.2.** (6.6) დიფ. განტოლების ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა არსებობს (იხ. თეორემა 5.2).

**თეორემა 6.3.** იმისათვის, რომ (6.6) განტოლების ამოხსნათა ერთობლიობა წარმოადგენდეს ფუნდამენტური სისტემას, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ვრონსკის დეტერმინანტი $I$ შუალედის თუნდაც ერთ წერტილში განსხვავდებოდეს ნულისაგან (იხ. თეორემა 5.1).

**თეორემა 6.4.** (6.6) განტოლების ყველა ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს, რომლის ბაზისია ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა.

ეს არის სხვა სიტყვებით გამოთქმული ის ფაქტი, რომ ფუნდამენტური ამოხსნათა წრფივი კომბინაცია კვლავ ამოხსნაა და ყოველი ამოხსნა წარმოიდგინება ფუნდამენტური სისტემის ამოხსნათა წრფივი კომბინაციის სახით (იხ. თეორემა 4.2 და 5.4).

**თეორემა 6.5.** თუ $u_1, u_2, \dots, u_n$ წარმოადგენს (6.6) განტოლების ამოხსნებს, ხოლო $W(t)$ არის მათი ვრონსკის დეტერმინანტი, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} p_n(\tau)\, d\tau}. \tag{6.11}$$

ეს ფორმულა პირდაპირ გამოდის (5.15) ფორმულიდან, რადგან ამ შემთხვევაში $\mathrm{Tr}(A(t)) = p_n(t)$.

**თეორემა 6.6.** იმისათვის, რომ $I$ შუალედში $n$-ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა ერთობლიობა წარმოადგენდეს რაიმე უწყვეტ კოეფიციენტებიანი $n$-რი რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფ. განტოლებათა ამოხსნათა ერთობლიობას, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ვრონსკის დეტერმინანტი $I$ შუალედში განსხვავებული იყოს ნულისაგან (იხ. თეორემა 6.1).

შემოვიღოთ კოშის ფუნქციათა ცნება.

$C$ ფუნქციას, რომელიც $I \times I$ სიმრავლეს გადასახავს $\mathbb{R}$-ში ეწოდება (6.6) განტოლების კოშის ფუნქცია, თუ ყოველი ფიქსირებული $t_0$-თვის $I$-დან $C(t, t_0)$ არის (6.6) განტოლების ამოხსნა საწყის პირობებში

$$\begin{aligned} u(t_0) &= 0 \\ u'(t_0) &= 0 \\ \cdots&\cdots \\ u^{(n-1)}(t_0) &= 1. \end{aligned}$$

განვიხილოთ ასეთი მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფ. განტოლება

$$u'' = p_1(t)\, u + p_2(t)\, u'. \tag{6.12}$$

ვთქვათ ჩვენ ვიპოვეთ ამ განტოლების ერთადერთი ამოხსნა $u_1(t)$, რომელიც არსად რაღაც $I_0 \subset I$ შუალედში არ ხდება ნული. მაშინ $I_0$ შუალედში შეგვიძლია ავაგოთ (6.12) განტოლების $u_2(t)$ ამოხსნა, რომელიც წრფივად დამოუკიდებელია $u_1(t)$-თან და ე.ი. შეგვიძლია ცხადი სახით ავაგოთ (6.12)-ის ნებისმიერი ამოხსნა. ასეთი $u_2(t)$ არსებობს. აღვნიშნოთ $W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}$. (6.11)-ის ძალით გვაქვს

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} p_2(\tau)\, d\tau}, \quad t_0 \in I.$$

გვაქვს

$$\frac{u_2'(t)\, u_1(t) - u_2'(t)\, u_2(t)}{u_1^2(t)} = \frac{W(t_0)}{u_1^2(t)}\, e^{\int_{t_0}^{t} p_2(\tau)\, d\tau}$$

ანუ,

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{u_2(t)}{u_1(t)}\Big) = \frac{W(t_0)}{u_1^2(t)}\, e^{\int_{t_0}^{t} p_2(\tau)\, d\tau}$$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე $t_0$-დან $t$-მდე და გავამრავლოთ $u_1(t)$-ზე. მივიღებთ

$$u_2(t) = \frac{u_2(t_0)}{u_1(t_0)} u_1(t) + W(t_0)\, u_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1^2(\tau)}\, e^{\int_{t_0}^{\tau} p_2(s)\, ds} d\tau.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $u_2(t_0) = 0$ და $u_2'(t_0) = \dfrac{1}{u_1(t_0)}$ (ასეთი $u_2$ არსებობს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ძალით), მივიღებთ, რომ $W(t_0) = 1$, ე.ი.

$$u_2(t) = u_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1^2(\tau)}\, e^{\int_{t_0}^{\tau} p_2(s)\, ds}\, d\tau.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $u_1(t)$ და $u_2(t)$ წრფივად დამოუკიდებლებია $I_0$-ზე, მართლაც, რომ იყოს

$$c_1\, u_1(t) + c_2\, u_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1^2(t)}\, e^{\int_{t_0}^{t} p_2(s)\, ds}\, d\tau \equiv 0,$$

სადაც $c_1$ და $c_2$ ერთდროულად ნული არ არის, ცხადია უნდა იყოს $c_2 \neq 0$ რადგან $u_1(t) \not\equiv 0$ $I_0$-ზე, ე.ი.

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1^2(t)}\, e^{\int_{t_0}^{t} p_2(s)\, ds}\, d\tau \equiv -\frac{c_1}{c_2}\,.$$

ეს კი შეუძლებელია. ამრიგად გვაქვს ასეთი

**თეორემა 6.7.** თუ $u_1(t)$ არის (6.12) განტოლების ამოხსნა, რომელიც განსხვავებულია ნულისგან $I_0$-ის ნებისმიერ წერტილში, მაშინ ამ განტოლების ნებისმიერი ამოხსნა აღნიშნულ შუალედში მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$u(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{u_1^2(t)}\, e^{\int_{t_0}^{t} p_2(s)\, ds}\, d\tau. \tag{6.13}$$

## 7. არაერთგვაროვან სისტემების ამოხსნა მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით. კოშის ამოცანა

განვიხილოთ დიფ. განტოლებათა წრფივი არაერთგვაროვანი სისტემა

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x} + \overline{b}(t) \tag{7.1}$$

და დავსვათ კოშის ამოცანა

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{7.2}$$

როგორც ყოველთვის ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $A \in C_{n\times n}(I)$, $\overline{b} \in C_n(I)$, $t_0 \in I$, $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა 2.1-ის ძალით, (7.1), (7.2) ამოცანას ყოველთვის გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა.

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ იგი. როცა $n = 1$, გვაქვს პირველი რიგის წრფივი დიფ. განტოლება. $A(t)$ და $\overline{b}(t)$ ამ დროს ჩვეულებრივი ფუნქციებია. როგორც $(1.7')$ ფორმულა გვიჩვენებს (7.1), (7.2) ამოცანას აქვს შემდეგი ამოხსნა

$$\overline{x}(t) = \overline{x}_0 \, e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau} + \int\limits_{t_0}^{t} \overline{b}(\tau)\, e^{\int_{\tau}^{t} A(s)\, ds} d\tau. \tag{7.3}$$

დავუკვირდეთ $e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau}$ გამოსახულებას. როგორც ადვილი შესამჩნევია ნებისმიერი ფიქსირებული $t_0$-თვის იგი წარმოადგენს (7.1)-ის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის (ჩვენს შემთხვევაში განტოლების)

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A(t)\, \overline{y}. \tag{$7.1_0$}$$

ამოხსნას საწყისი პირობით $\overline{y}(t_0) = 1$.

ამიტომ, როგორც ლექცია 6-ში ვნახეთ, აქედან გამოდის, რომ $e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau}$ არის $(7.1_0)$ სისტემის (ჩვენს შემთხვევაში განტოლების) კოშის მატრიცი (ჩვენს $n = 1$ შემთხვევაში ფუნქცია) $C(t, t_0)$ ასე რომ (7.3) შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\overline{x}(t) = C(t, t_0)\, \overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} C(t, \tau)\, \overline{b}(\tau)\, d\tau. \tag{7.4}$$

განსხვავებით (7.3) ფორმულისაგან (7.4) ფორმულას აზრი აქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა $n > 1$. ამიტომ ბუნებრივად ისმის კითხვა სამართლიანია თუ არა (7.4) ფორმულა ნებისმიერი $n$-ის შემთხვევაში, სადაც $C(t, t_0)$ არის $(7.1_0)$ სისტემის კოშის მატრიცი. თუ ეს ვაჩვენეთ, მაშინ ცხადია, რომ (7.1), (7.2) ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისი ყოფილა ვიპოვოთ $(7.1_0)$ სისტემის ფუნდამენტური ამონახსნები და შემდეგ პასუხი მოიცემა ერთი კვადრატურით. მთელი სიძნელე მოდის შესაბამისი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტურ სისტემის აგებაზე. (7.4) ფორმულის დამტკიცების გზა პირველად დასახულ იქნა ფრანგი მეცნიერის ლაგრანჟის მიერ.

ვთქვათ $Y(t)$ არის $(7.1_0)$-ის ნებისმიერი ფუნდამენტური მატრიცი. მაშინ თეორემა 5.4-ის ძალით $(7.1_0)$ სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა წარმოდგება ასეთი სახით: $\overline{y}(t) = Y(t)\, \overline{c}$, სადაც $\overline{c}$ რომელიღაც მუდმივი ვექტორია. ლაგრანჟის იდეა იმაში მდგომარეობდა, რომ მან $\overline{c}$ მუდმივის ნაცვლად აიღო ცვლადი ვექტორი და ამოხსნის ძებნა დაიწყო შემდეგი სახით:

$$\overline{x}(t) = Y(t)\, \overline{z}(t). \tag{7.5}$$

ფაქტიურად მოვახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა ისე, რომ მუდმივის ადგილი დაიჭირა ფუნქციამ. ამიტომ ამ მეთოდს მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი ეწოდება.

ვეძებოთ $\overline{z}$ ისე, რომ (7.5)-ით განსაზღვრულმა $\overline{x}$ ფუნქციამ დააკმაყოფილოს (7.1). გვაქვს

$$\overline{x}\,'(t) = Y'(t)\,\overline{z}(t) + Y(t)\,\overline{z}\,'(t).$$

შევიტანოთ ეს (7.1)-ში

$$Y'(t)\,\overline{z}(t) + Y(t)\,\overline{z}\,'(t) = A(t)\,Y(t)\,\overline{z}(t) + \overline{b}(t).$$

გავიხსენოთ, რომ $Y'(t) = A(t)\,Y(t)$ და შევიტანოთ ეს წინა ტოლობაში. მივიღებთ

$$Y(t)\,\overline{z}\,'(t) = \overline{b}(t) \quad \text{ანუ} \quad \overline{z}\,'(t) = Y^{-1}(t)\,\overline{b}(t). \tag{7.6}$$

ამგვარად (7.5) გარდაქმნით (7.1) სისტემა მიიყვანება (7.6) სახეზე. ვნახოთ, როგორ გარდაიქმნება საწყისი პირობები (7.2) თუ (7.5)-ში შევიტანთ $t$-ს ნაცვლად $t_0$-ს და გავითვალისწინებთ (7.2)-ს, მივიღებთ

$$\overline{z}(t_0) = Y^{-1}(t_0)\,\overline{x}_0. \tag{7.7}$$

ამრიგად, თუ $\overline{x}(t)$ არის (7.1), (7.2) ამოცანის ამოხსნა, მაშინ (7.5) ტოლობით განსაზღვრული $\overline{z}(t)$ იქნება (7.6), (7.7) ამოცანის ამოხსნა, და პირიქით.

(7.6), (7.7) ამოცანის ამოხსნა კი მოიცემა ასე

$$\overline{z}(t) = Y^{-1}(t_0)\,\overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\,\overline{b}(\tau)\,d\tau.$$

თუ ამას შევიტანთ (7.5)-ში, მივიღებთ (7.1), (7.2)-ის ამოხსნას

$$\overline{z}(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,\overline{b}(\tau)\,d\tau$$

და თუ გავითვალისწინებთ, რომ $Y(t)\,Y^{-1}(t_0) = C(t,\tau)$, მივიღებთ სწორედ (7.4)-ს.

ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა 7.1.

**თეორემა 7.1.** (7.1), (7.2) ამოცანის ამოხსნა წარმოდგება (7.4) ფორმულით, სადაც $C$ არის ($7.1_0$) სისტემის კოშის მატრიცი.

**დამტკიცება.** როგორც (7.4)-დან ჩანს, არაერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა წარმოდგება, როგორც მისივე რაიმე კონკრეტული ამოხსნისა და შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამოხსნის ჯამი.

მართლაც, ცხადია (7.1) სისტემის ყოველი ამოხსნა მიიღება თუ $t_0$-ს დავაფიქსირებთ, ხოლო $\overline{x}_0$-ს ვცვლით. მეორე შესაკრები, რომელიც მიიღება თუ $\overline{x}_0 = \overline{0}$ წარმოადგენს სწორედ (7.1) სისტემის ფიქსირებულ ამოხსნას, ხოლო პირველი შესაკრები, როგორიც არ უნდა იყოს $\overline{x}_0(t)$, წარმოადგენს ($7.1_0$) სისტემის ზოგად ამოხსნას. რადგან $C(t,t_0)$ მატრიცი ფიქსირებული $t_0$-თვის ($7.1_0$)-ის ფუნდამენტური მატრიცაა. ამრიგად, თუ ცნობილია (7.1)-ის რაიმე ამოხსნა $\overline{x}_0(t)$, მაშინ მისი ნებისმიერი ამოხსნა იქნება $\overline{x}(t) = Y(t)\,\overline{c} + \overline{x}_0(t)$, სადაც $Y(t)$ არის ($7.1_0$)-ს ფუნდამენტური

მატრიცი, ხოლო $\overline{c}$ ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$. ეს ფაქტი შეიძლება უშუალოდაც შეგვემჩნია. $\square$

დამტკიცებული თეორემა გამოვიყენოთ $n$-ური რიგის დიფ. განტოლებისთვის. განვიხილოთ $n$-ური რიგის წრფივი დიფ. განტოლება

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, u^{(k-1)} + q(t) \tag{7.8}$$

შესაბამის კოშის პირობებში

$$u^{(i-1)}(t_0) = x_{0i} \quad (i = 1, \dots, n). \tag{7.9}$$

აქ $p_k \in C(I)$, $t_0 \in J)$, $x_{0i} \in R$.

პარალელურად მოგვიხდება (7.8)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების განხილვა:

$$v^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, v^{(k-1)}. \tag{7.8$_0$}$$

როგორც აღნიშნული გვქონდა (ლექცია 3 და 6), (7.8), (7.9) ეკვივალენტურია (7.1), (7.2)-ის, სადაც

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & \dots & p_n(t) \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

$$\overline{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

ამასთან ეკვივალენტობა გვესმის გარკვეული აზრით, რომელიც უკვე განმარტებული გვქონდა. ასეთივე ეკვივალენტობას ადგილი აქვს (7.1$_0$) და (7.8$_0$)-ს შორის. ვთქვათ $u(t)$ არის (7.8), (7.9) ამოცანის ამოხსნა.

მაშინ, $\overline{x}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$-თვის სამართლიანია (7.4). გვაინტერესებს $\overline{b}$-ის პირველი კომპონენტი, ამიტომ (7.4)-ში გადავიდეთ პირველ კომპონენტებზე და გავითვალისწინოთ (7.10)-ში $\overline{b}$, მივიღებთ

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t, t_0)\, x_{0_i} + \int_{t_0}^{t} c_n(t, \tau)\, q(\tau)\, d\tau, \tag{7.11}$$

სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_n$ არიან $C$ მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები. $C(t,\tau)$ ყოველი ფიქსირებული $\tau$-თვის წარმოადგენს $(7.1_0)$-ის ფუნდამენტურ მატრიცას, ე.ი. მისი სვეტები არის $(7.1_0)$-ის ამოხსნები, ამასთან წრფივად დამოუკიდებელი. ამიტომ მათი პირველი ელემენტები $c_1(t,\tau), \ldots, c_n(t,\tau)$ ნებისმიერი ფიქსირებული $\tau$-თვის $(7.8_0)$-ს წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნებია ასეთი საწყისი პირობებით. რადგან $C(\tau,\tau) = E$,

გვაქვს

$$\left.\frac{\partial^{j-1} c_i(t,\tau)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=\tau} = \delta_{ij} \quad (i,j = \overline{1,n}), \tag{7.12}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{როცა } i \neq j \\ 1 & \text{როცა } i = j \end{cases}$ . ე.ი. გვაქვს ასეთი

**თეორემა 7.2.** (7.8), (7.9) ამოცანის ამოხსნა მოიცემა (7.11) ფორმულით, სადაც ნებისმიერი ფიქსირებული $i$-თვის $c_i$ წარმოადგენს $(7.8_0)$ განტოლების ამოხსნას (7.12) საწყის პირობებში.

როგორც ჩანს (7.11) ფორმულაში განსაკუთრებული როლი ენიჭება $C_n(\tau,\tau)$ ფუნქციას, რომელიც ინტეგრალის ქვეშ არის. როგორც (7.12) გვიჩვენებს, იგი წარმოადგენს $(7.8_0)$ განტოლების ამოხსნას შემდეგ საწყის პირობებში (ნებისმიერი ფიქსირებული $\tau$-თვის)

$$\begin{aligned} & c_n(\tau,\tau) = 0 \\ & \left.\frac{\partial c_n(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \left.\frac{\partial^{n-1} c_n(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=\tau} = 1 \end{aligned} \tag{7.13}$$

ლექცია 6-ში ამ თვისების მქონე ფუნქციას ვუწოდეთ $(7.8_0)$ განტოლების კოშის ფუნქცია. ე.ი. $c_n(t,\tau)$ ყოფილა $(7.8_0)$ განტოლების კოშის ფუნქცია. ვნახოთ თუ როგორ აიგება პრაქტიკულად კოშის ფუნქცია. ვთქვათ $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ არის $(7.8_0)$-ის ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა. მაშინ $c_n$ ნებისმიერი ფიქსირებული $\tau$-სთვის წარმოდგება როგორც მათი წრფივი კომბინაცია $c_n(t,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\, v_i(t)$. $\alpha_i$-ები ისე უნდა შეირჩეს, რომ დაკმაყოფილდეს (7.13) პირობები,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\, v_i^{(k-1)}(\tau) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1), \\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\, v_i^{(n-1)}(\tau) = 1. \end{aligned} \tag{7.14}$$

(7.14) წარმოადგენს $\alpha$-ების მიმართ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი არის $v_1, \ldots, v_n$-ების ვრონსკის დეტერმინანტი, რომელიც

არცერთ წერტილში არ არის ნული. ამიტომ კრამერის ფორმულების თანახმად $\alpha_i(\tau) = \dfrac{w_i(\tau)}{w(\tau)}$, სადაც $w_i(\tau)$ არის $w(\tau)$ დეტერმინანტში $i$-ურ სვეტსა და $n$-ურ სტრიქონში მდგომი ელემენტის ალგებრული დამატება. ამრიგად კოშის ფუნქციისათვის მივიღეთ შემდეგი ფორმულა

$$C_n(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i(\tau)}{w(\tau)}\, v_i(t). \tag{7.15}$$

## 8. მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფ. განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ ასეთი ამოცანები:

**ამოცანა 1.** განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x}, \quad A \in C_{n\times n}\big([0;+\infty)\big). \tag{1}$$

ვთქვათ ამ სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი შემოსაზღვრულია $[0,+\infty)$-ზე, ანუ რაც იგივეა (1) სისტემის ყველა ამოხსნა შემოსაზღვრულია, რადგან (1)-ის ნებისმიერი ამოხსნა არის ფუნდამენტური სისტემის წრფივი კომბინაცია. ამას გარდა $\int\limits_0^t \mathrm{Tr}(A(\tau))\,d\tau$ ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ვაჩვენოთ, რომ მაშინ ფუნდამენტური მატრიცის შებრუნებულიც იქნება შემოსაზღვრული.

ვთქვათ $X(t)$ არის (1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. ვთქვათ $X(t) = \big(x_{ik}(t)\big)_{i,k=1}^n$ და $\|X(t)\| \le L$, $L>0$. მაშინ $|x_{ik}(t)| \le L$, $X^{-1}(t) = \Big(\dfrac{x^*_{ki}(t)}{\det[X(t)]}\Big)_{k,i=1}^n$, სადაც $x^*_{ki}(t)$ არის $x_{k_i}(t)$-ის ალგებრული დამატება. ვთქვათ $\int\limits_0^t \mathrm{Tr}(A(\tau))\,d\tau \ge M$. მაშინ (5.11)-ის ძალით გვაქვს $\det[X(t)] = k\, e^{\int_0^t \mathrm{Tr}(A(\tau))\,d\tau}$, სადაც $K = \det[X(0)]$, ე.ი. $|\det[X(t)]| \ge |k| e^M$. მეორეს მხრივ, რადგან $|x_{ik}(t)| \le L$ გვაქვს $|x^*_{ik}(t)| \le (n-1)!\, L^{n-1}$ და $\Big|\dfrac{x^*_{ki}(t)}{\det[X(t)]}\Big| \le \dfrac{(n-1)!\, L^{n-1}}{|k|\, e^M}$, ხოლო $\|X^{-1}(t)\| \le \dfrac{n^2(n-1)!\, L^{n-1}}{|k|\, e^M}$, ე.ი. $X^{-1}(t)$-ც შემოსაზღვრულია.

**ამოცანა 2.** ვთქვათ დაცულია ამოცანა 1-ის პირობები. გარდა ამისა,

$$\overline{b} \in C_n\big([0;+\infty)\big) \quad \text{და} \quad \int\limits_0^{+\infty} \big\|\overline{b}(\tau)\big\|\,dt = H < +\infty.$$

ვაჩვენოთ, რომ მაშინ

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x} + \overline{b}(t) \tag{$1'$}$$

სისტემის ყოველი ამოხსნა შემოსაზღვრულია $[0,+\infty)$ შუალედში.

ვთქვათ $X(t)$ არის (1)-ის ფუნდამენტური მატრიცი. პირობის ძალით $\|X(t)\| \le L$, და ამას გარდა ამოცანა 1-ის გამო გვაქვს $\|X^{-1}(t)\| \le M$. (7.4)-ით $(1')$ სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი ასე წარმოდგება

$$\overline{x}(t) = X(t)\,X^{-1}(0)\overline{x}_0 + \int_0^t X(t)\,X^{-1}(\tau)\,\overline{b}(\tau)\,d\tau.$$

აქედან

$$\|\overline{x}(t)\| \le \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(0)\| \cdot \|\overline{x}_0\| + \int_0^t \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(\tau)\| \cdot \|\overline{b}(\tau)\|\,d\tau \le$$

$$\le ML\|x_0\| + ML\int_0^t \|\overline{b}(\tau)\|d\tau \le ML\|\overline{x}_0\| + MLH,$$

ე.ი. $\overline{x}(t)$ შემოსაზღვრულია.

**ამოცანა 3.** ვთქვათ დაცულია ამოცანა 2-ის პირობები და გარდა ამისა

$$B \in C_{n\times n}\big([0;+\infty)\big) \quad \text{და} \quad \int_0^{+\infty} \|B(t)\|\,dt = H < +\infty.$$

მაშინ

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \big(A(t) + B(t)\big)\overline{x} + \overline{b}(t) \tag{$1''$}$$

სისტემის ყოველი ამოხსნა შემოსაზღვრულია $[0,+\infty)$-ზე.

ვთქვათ $\overline{x}(t)$ არის $(1'')$-ის ამოხსნა. იგი აკმაყოფილებს პირობას

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A(t)\overline{x}(t) + B(t)\overline{x}(t) + \overline{b}(t).$$

წარმოვიდგინოთ, რომ $\overline{x}(t)$ დაფიქსირებულია. მაშინ, როგორც ბოლო ტოლობა გვიჩვენებს, იგი წარმოადგენს

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x} + \big(B(t)\overline{x}(t) + \overline{b}(t)\big)$$

სისტემის ამოხსნას. ამიტომ (7.4) კოშის ფორმულის ძალით

$$\overline{x}(t) = X(t)\,X^{-1}(0)\overline{x}_0 + \int_0^t \big[B(\tau)\,\overline{x}(\tau) + \overline{b}(\tau)\big]\,X(t)\,X^{-1}(\tau)\,d\tau,$$

$$\|\overline{x}(t)\| \le LM\|\overline{x}_0\| + \int_0^t \big(\|B(\tau)\| \cdot \|x(\tau)\| + \|b(\tau)\|\big)\,ML\,d\tau =$$

$$= LM\|\overline{x}_0\| + LM\int_0^t \|\overline{b}(\tau)\|d\tau + \int_0^t LM\|B(\tau)\|\cdot\|\overline{x}(\tau)\|\,d\tau <$$

$$< ML\|\overline{x}_0\| + LMH + \int_0^t LM\|B(\tau)\|\cdot\|\overline{x}(\tau)\|\,d\tau.$$

აქედან გრონუოლ-ბელმანის ლემის ძალით

$$\|\overline{x}(t)\| \le \big(LM\|\overline{x}_0\| + LMH\big)\,e^{LMH}$$

ე.ი. $\overline{x}(t)$ შემოსაზღვრულია.

**ამოცანა 4.** განვიხილოთ ასეთი დიფ. განტოლება

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\,u^{(k-1)}, \quad p_k \in C(I). \tag{2}$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ განტოლების ნებისმიერ არატრივიალურ ამოხსნას $I_0 \subset I$-დან აქვს ნულების არაუმეტეს სასრული რაოდენობა.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $I_0$-ის უსასრულოდ ბევრ წერტილებში (2)-ის ამოხსნა $u(t)$ ხდება ნულის ტოლი. რადგან $I_0$ კომპაქტურია $I$-ში, ამ სიმრავლიდან გამოიყოფა განსხვავებულ წერტილთა კრებადი მიმდევრობა $t_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. გვაქვს $u(t_k) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$, $t_0$ საზოგადოდ $I$-შია და $t_k \in I_0$. ამიტომ, რადგან $u$ უწყვეტია $I$-ზე, გვაქვს $u(t_0) = 0$. რადგან $u(t_k) = u(t_{k+1})$, როლის თეორემის ძალით არსებობს $\xi_k$ ისეთი, რომ $t_k < \xi_k < t_{k+1}$ და $u'(\xi_k) = 0$. ცხადია $\xi_k \to t_0$, ამიტომ $u'(t_0) = 0$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $u(t)$ ყოფილა (2) განტოლების ამოხსნა საწყის პირობებში:

$$u^{(k-1)}(t_0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \tag{3}$$

მაგრამ (2), (3) ამოცანის ამოხსნა აგრეთვე არის იგივურად ნული $I$-ზე. ამიტომ, ერთადერთობის გამო $u(t) \equiv 0$, ე.ი. $u(t)$ არ ყოფილა არატრივიალური. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

**ამოცანა 5.** განვიხილოთ განტოლება

$$u'' = p(t)\,u, \quad p \in C\big([0, +\infty)\big). \tag{4}$$

ამასთან არსებობს ისეთი $t \ge 0$ და (4) განტოლების ამონახსნი $u_0$, რომ $u_0(t) \ne 0$ როცა $t \ge t_0$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში (4) განტოლებას ექნება ისეთი ორი $u_1(t)$ და $u_2(t)$ ამონახსნი, რომ $u_i(t) \ne 0$, $t \ge t_0$ $(i = 1, 2)$ და

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{u_1^2(t)} = +\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{u_2^2(t)} < +\infty.$$

მივმართოთ (6.13) ფორმულას. რადგან აქ $p_2(t)$, (4)-ის ნებისმიერი ამოხსნისათვის გვაქვს

$$u(t) = u_0(t)\left[c_1 + c_2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{u_0^2(\tau)}\right].$$

ე.ი.

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{u^2(t)} = \int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{u_0^2(t)\left[c_1 + c_2\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{u_0^2(\tau)}\right]^2}\,.$$

აღვნიშნოთ $\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{u_0^2(\tau)} \equiv F(t)$ და მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $x = F(t)$ ($F$ მკაცრად მონოტონურია). გვექნება

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{u^2(t)} = \int\limits_{t_0}^{F(\infty)}\frac{dx}{(c_1 + c_2x)^2}\,.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ და $\dfrac{c_1}{c_2} > 0$, მიუხედავად იმისა $F(\infty)$ სასრულია თუ უსასრულო, მეორე ინტეგრალი კრებადია და ე.ი. ერთად კრებადია პირველი ინტეგრალიც. ხოლო თუ $c_1$ და $c_2$-ს ისე შევარჩევთ, რომ $\dfrac{c_1}{c_2} < 0$ და $-\dfrac{c_1}{c_2} < F(\infty)$, მაშინ $(0, F(\infty))$-ში მეორე ინტეგრალის მნიშვნელს ექნება ფესვი $-\dfrac{c_1}{c_2}$ და რადგან მის მიდამოში იგი მეორე რიგისაა, ინტეგრალი იქნება $+\infty$. ამით დებულება დამტკიცებულია.

ლექცია 7-ში დავამტკიცეთ (7.4) კოშის ფორმულა, რომლის მიხედვითაც იწერებოდა არაერთგვაროვან დიფ. განტოლებათა სისტემის ანოხსნა შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ფუნდამენტური მატრიცის საშუალებით. ამრიგად, მთელი სიძნელე გადატანილია ფუნდამენტური მატრიცის აგებაზე. ზოგად შემთხვევაში ამ მატრიცის აგება არ ხერხდება, მაგრამ ახლა ჩვენ განვიხილავთ ერთ კერძო შემთხვევას, როცა ეს ამოცანა წარმატებით წყდება. ეს არის მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემები.

მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფ. განტოლებათა სისტემას ექნება ასეთი სახე:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x}. \tag{8.1}$$

სადაც $A$ რაღაც მუდმივი მატრიცაა. დავისახოთ ამოცანად (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცის აგება. ამისათვის განვმარტოთ მატრიცის ექსპონენციალური ფუნქცია.

როგორც ცნობილია, ნამდვილი და კომპლექსური ცვლადის ექსპონენციალური ფუნქცია $e^x$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

ანალოგიურად, ვთქვათ $A$ არის $n \times n$-მატრიცი. განვმარტოთ $e^x$ ასე:

$$e^x = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,X^k. \tag{8.2}$$

მატრიცთა (8.2) მწკრივის კრებადობა ფაქტიურად ნიშნავს $n^2$ მწკრივის კომპონენტებისაგან შემდგარი მწკრივების კრებადობას. ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველ ამ მწკრივს მაჟორანტულ მწკრივად აქვს $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\|X^k\|$ მწკრივი, მაგრამ $\|X^k\| \le \|X\|^k$. ამიტომ საბოლოოდ (8.2) მწკრივისათვის მაჟორანტა ყოფილა $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!}$, რომელიც ცხადია კრებადია. ამიტომ $e^x$ განსაზღვრულია ყოველი $X$ მატრიცისთვის. უფრო მეტიც, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ყოველი $r > 0$-თვის (8.2) მწკრივი თანაბრად კრებადია $\|X\| < r$-ში. ამიტომ შეიძლება (8.2) მწკრივის წევრ-წევრა ინტეგრება. ახლა განვიხილოთ ასეთი მატრიც-ფუნქცია

$$Y(t) = e^{At}. \tag{8.3}$$

(8.2)-ის გამო გვაქვს

$$Y(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k. \tag{8.4}$$

გავაწარმოოთ წევრ-წევრად (8.4) ტოლობის ორივე მხარე. მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,A^k = A\biggl(E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,A^{k-1}\biggr) = A\biggl(E + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\,A^i\biggr) = A\,Y(t).$$

როგორც აღვნიშნეთ, წარმოებულებისაგან შედგენილი მწკრივი თანაბრად კრებადია, როცა $|t| \le r$ ნებისმიერი $r > 0$-თვის. ამიტომ (8.4) ტოლობის წევრ-წევრად გაწარმოება შეიძლება და

$$Y'(t) = A\,Y(t). \tag{8.5}$$

მეორეს მხრივ, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$Y(0) = E. \tag{8.6}$$

(8.5) და (8.6) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ

$$Y(t) = e^{At} \tag{8.7}$$

მატრიცი არის (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ ასეთი

**თეორემა 8.1.** (8.7) ფორმულით განსაზღვრული $Y(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს (8.1) სისტემის ფუნდამენტურ მატრიცს.

მაგრამ (8.7) ფორმულა ბევრს არაფერს გვეუბნება $Y(t)$-ის სტრუქტურის შესახებ. ჩვენი მიზანია ვნახოთ, რა სახე აქვს $e^{At}$-ს. ამისათვის დაგვჭირდება ასეთი

**ლემა 8.2.** თუ $A$ და $B$ არიან კომუტატიური $n \times n$ მარტიცები $(AB = BA)$, მაშინ ადგილი აქვს

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \tag{8.8}$$

ტოლობას.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ ასეთი მატრიცი $z(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$. გავაწარმოოთ. (8.5)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$z'(t) = A\, e^{At}\, e^{Bt} + e^{At}\, B\, e^{Bt}. \tag{8.9}$$

რადგან $AB = BA$, ამიტომ

$$B\, A^k = B \cdot A \cdot A \cdots A = A \cdot B \cdot A \cdots A = A \cdot A \cdot B \cdots A = A^k\, B.$$

ამგვარად, თუ (8.4) ტოლობას გავამრავლებთ $B$-ზე ჯერ მარჯვნიდან, ხოლო მერე მარცხნიდან, მივიღებთ, რომ $e^{At} \cdot B = B \cdot e^{At}$. ამიტომ (8.9)-დან გვაქვს

$$z'(t) = (A + B)\, z(t). \tag{8.10}$$

ამრიგად $z(t)$ წარმოადგენს (8.10) მატრიცულ დიფ. განტოლების ამოხსნას საწყის პირობებში:

$$z(0) = E. \tag{8.11}$$

მაგრამ, როგორც ზემოთ ვნახეთ (იხ. (8.5) და (8.6)) $e^{(A+B)t}$ არის ამავე (8.10), (8.11) ამოცანის ამოხსნა. ამიტომ ლექცია 6-ის დასაწყისში ნაჩვენები ერთადერთობის გამო გვაქვს (8.8) (ავიღებთ $t = 1$). $\square$

## 9. მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემების ამოხსნა

აქ ჩვენ დაგვჭირდება ალგებრის კურსიდან ცნობილი ჟორდანის თეორემის მოყვანა. ამისათვის ჯერ გავიხსენოთ ზოგიერთი ცნება.

აღვნიშნოთ

$$\mathcal{G}_1(\lambda) = \lambda, \qquad \mathcal{G}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{matrix}}_{k} \end{pmatrix}$$

მათ ეწოდებათ ჟორდანის უჯრები.

შემდეგ განვიხილოთ $A$ მატრიცის მახასიათებელი $A-\lambda E$ მატრიცი და $D_i(\lambda)$-თი აღვნიშნოთ მისი $i$-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი. ამასთან ვგულისხმობთ, რომ მისი უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია. მტკიცდება, რომ ყოველი $D_i(\lambda)$ იყოფა $D_{i-1}(\lambda)$-ზე.

აღვნიშნოთ

$$E_1(\lambda)=D_1(\lambda),\dots,E_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}\quad(i=2,\dots,n).$$

ამ პოლინომებს ეწოდებათ $A-\lambda E$-ის ინვარიანტული მამრავლები.

ვთქვათ $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ არიან

$$\det(A-\lambda E)=0 \tag{9.1}$$

განტოლების ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვები. (9.1) განტოლებას ეწოდება (8.1) სისტემის მახასიათებელი განტოლება, ხოლო ფესვებს $A$ მატრიცის მახასიათებელი რიცხვები. ადვილი შესამჩნევია, რომ $E_i(\lambda)$-ებს არ შეიძლება ჰქონდეს $\lambda_1,\dots,\lambda_m$-გან განსხვავვებული ფესვები, ამიტომ

$$E_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_{i1}}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_{im}}.$$

აქ თუ რომელიმე ფესვი არ გვაქვს, შესაბამისი ხარისხის მაჩვენებელი ნულის ტოლი იქნება. ყველა ასეთ მამრავლს ეწოდება $(A-\lambda E)$-ის ელემენტარული გამყოფები. სხვანაირად, $(A-\lambda E)$ მატრიცის ელემენტარული გამყოფი ეს არის $(\lambda-\lambda_k)^{n_{ik}}$ თუ $n_{ik}\neq 0$. ცხადია, რომ $\sum\limits_{i,k}n_{ik}=n$.

დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბებთ

**თეორემა 9.1** (ჟორდანის)**.** ვთქვათ $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\dots,(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$ არის $A-\lambda E$-ის ელემენტარული გამყოფები. მაშინ არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი მატრიცი $S$, რომ

$$S^{-1}\,A\,S=\mathcal{G}=\begin{pmatrix}\mathcal{G}_{n_1}(\lambda_1) & & & 0\\ & \mathcal{G}_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{G}_{n_m}(\lambda_m)\end{pmatrix} \tag{9.2}$$

ამასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ აქ $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ განსხვავვებული რიცხვები არც იყვნენ, ხოლო $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$. (9.2)-დან გვაქვს $A=S\,\mathcal{G}\,S^{-1}$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $A^i=S\,\mathcal{G}^i\,S^{-1}$ $(i=1,\dots)$. ამ ტოლობებიდან და (8.4)-დან ჩანს, რომ

$$e^{At}=S\,e^{\mathcal{G}t}\,S^{-1}. \tag{9.3}$$

თუ გავიხსენებთ, რას წარმოადგენს $\mathcal{G}$ ((9.2)), მაშინ (8.4)-დან ადვილად გამოდის

$$e^{\mathcal{G}t}=\begin{pmatrix}e^{t\mathcal{G}_{n_1}(\lambda_1)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\mathcal{G}_{nm}(\lambda_m)}\end{pmatrix} \tag{9.4}$$

ამგვარად $e^{\lambda}t$ მატრიცის სტრუქტურის გარკვევის საკითხი მიიყვანება $e^{G_k(\lambda)t}$ მატრიცის სტრუქტურის გარკვევაზე. ცხადია, რომ $G_k(\lambda)=\lambda\, E_k+z_k$, სადაც $E_k$ არის $k$ რიგის ერთეულოვანი მატრიცი, ხოლო $z_1=0$ და

$$z_k=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{k} \end{pmatrix}$$

რადგან $\lambda\, E_k$ ნებისმიერ მატრიცთან კომუტატიურია, ლემა 8.2-ის ძალით გვაქვს $e^{\mathcal{G}_k(\lambda)t}=e^{\lambda\, t\, E_k}\cdot e^{t\, z_k}$. (8.4)-დან ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$e^{\lambda t E_k}=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}=e^{\lambda\, t}\, E_k.$$

მეორეს მხრივ, უშუალოდ შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$z_k^i=\left(\begin{array}{c} \overbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{i} \quad \overbrace{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{k-i}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1\\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} k-i\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\} i \end{array}$$

როცა $i=1,\dots,k-1$ და $z_k^i=0$ როცა $i=k$. ამიტომ ცხადია, რომ

$$e^{t\, z_k}=E_k+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{t^i}{i!}\, z_k^i=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\\ & 1 & \dfrac{t}{1!} & \cdots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-2)!}\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ & \text{O} & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

საბოლოოდ

$$e^{\mathcal{G}_k(\lambda_k)t}=e^{\lambda_k t}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\\ & 1 & \dfrac{t}{1!} & \cdots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-2)!}\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ & \text{O} & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

ამრიგად დავამტკიცეთ ასეთი

**თეორემა 9.2.** თუ $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$ არიან $A-\lambda E$ მატრიცის ელემენტარული გამყოფები, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$e^{At}=S\begin{pmatrix} e^{\mathcal{G}_{n_1}(\lambda_1)t} & & & \mathrm{O}\\ & e^{\mathcal{G}_{n_2}(\lambda_2)t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & e^{\mathcal{G}_{n_m}(\lambda_m)t}\end{pmatrix}S^{-1}, \qquad (9.6)$$

სადაც $e^{\mathcal{G}_{n_i}(\lambda_i)t}$ მოცემულია (9.5) ფორმულით.

თეორემა 9.2-დან გამომდინარეობს

**შედეგი 9.3.** თუ $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$ არიან $(A-\lambda E)$ მატრიცის ელემენტარული გამყოფები, მაშინ (8.1) სისტემას აქვს შემდეგი სახის ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა

$$e^{\lambda_i t}\,\overline{p}_{ik}(t) \quad (k=1,\ldots,n_i;\; i=1,\ldots,m), \qquad (9.7)$$

სადაც $p_{ik}$ ნებისმიერი $i$-თვის წარმოადგენს $n_i-1$ ხარისხის ვექტორ-პოლინომებს.

**დამტკიცება.** როგორც ვიცით $e^{At}$ არის (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. თუ მას მარჯვნიდან გავამრავლებთ მუდმივ მატრიცზე, კვლავ მივიღებთ (8.1) სისტემის ფუნდამენტურ მატრიცს, ე.ი. $e^{At}$. $S$ არის აგრეთვე (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცი. თუ მივმართავთ (9.6) და (9.5) ფორმულებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ მატრიცის სვეტებს აქვთ სწორედ (9.7) სახე. □

**შენიშვნა 1.** (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცის ასაგებად უნდა ვიპოვოთ $(A-\lambda E)$-ის ყველა ელემენტარული გამყოფი. თუ ეს გამყოფებია $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$, ყოველი ფიქსირებული $i$-თვის (8.1)-ის ამოხსნას ვეძებთ $e^{\lambda_i t}\,\overline{p}(t)$ სახით, სადაც $\overline{p}(t)$ არის $n_i$ რიგის ვექტორ-პოლინომი განუსაზღვრელი კოეფიციენტებით. ეს კოეფიციენტები ისე უნდა შეირჩეს რომ ამ ვექტორ-ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს (8.1). შერჩევა შეიძლება არაერთი გზით და შეგვიძლია მივიღოთ (8.1)-ის $n_i$ ცალი წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნა. თუ ამას გავაკეთებთ ნებისმიერი $i$-თვის, მივიღებთ (8.1)-ის ამოხსნათა ფუნდამენტურ სისტემას.

კერძოდ, თუ $A$ მატრიცს აქვს განსხვავებული ფესვები $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, მაშინ ფუნდამენტური სისტემა ასეთი იქნება $e^{\lambda_i t}\,\overline{p}_i \quad (i=1,\ldots,n)$, სადაც $\overline{p}_i$ მუდმივი ვექროტებია. თუ ამას (8.1)-ში ჩავსვამთ, $e^{\lambda_i t}$-ზე შეკვეცის შედეგად, მივიღებთ განტოლებას $A\,\overline{p}_i=\lambda_i\,\overline{p}_i$. ანუ, $(A-\lambda_i\,E)\overline{p}_i=0$, საიდანაც განისაზღვრება $\overline{p}_i$-ები. $\overline{p}_i$-ს კომპონენტების განსაზღვრა შეიძლება იმიტომ, რომ დეტერმინანტი ნულია, რადგან $\lambda_i$ არის $A$-ს მახასიათებელი ფესვი.

**შენიშვნა** 2. ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობაში ჩვენ თითქოს ვგულისხმობდით, რომ ყველა $\lambda_i$ ნამდვილია. სინამდვილეში კი $\det(A-\lambda E)=0$ განტოლებას შესაძლებელია ჰქონდეს კომპლექსური ფესვებიც. ამიტომ ისმის კითხვა, რა უნდა გვესმოდეს $e^{\lambda t}$-ს

ქვეშ, როცა $\lambda$ კომპლექსურია, თუ $\lambda = \alpha + i\beta$, მაშინ $e^{\lambda t}$ განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).$$

უნდა გავარკვიოთ აგრეთვე, რა გვესმის (8.1) სისტემის კომპლექსური ამოხსნის ქვეშ. (8.1)-ის კომპლექსური ამოხსნის ქვეშ გვესმის ისეთი ნამდვილი ცვლადის კომპლექსურ ფუნქციათა ერთობლიობა, რომელთა ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები აკმაყოფილებენ მას. ასე, რომ ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა (9.7) საზოგადოდ კომპლექსურია. მაგრამ ამ სისტემიდან შეიძლება გადავიდეთ ნამდვილ ფუნდამენტურ სისტემაზე. მართლაც, რადგან $A$ ნამდვილია, თუ $\lambda_k$ მისი კომპლექსური მახასიათებელი რიცხვია, მისი შეუღლებულიც, ვთქვათ $\lambda_j$, მისი მახასათებელი რიცხვი იქნება. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\lambda_k$ და $\lambda_j$ შევლენ ერთი და იგივე რიგის ფუნდამენტურ გამყოფებში. ამიტომ მათ შეესაბამება $2n_k$ ამოხსნა. მათ ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ან $\lambda_k$ ან $\lambda_j$-ის შესაბამისი ამონახსნების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. ასე მივიღებთ $2n_k$ ნამდვილი ამონახსნისაგან შემდგარ სისტემას.

## 10. $n$-ური რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი დიფ. განტოლებები

თეორემა 9.2 და შედეგი 9.3-დან გამოვიყვანოთ ასეთი

**შედეგი 10.1.** თუ $\sigma$ არის $A$ მატრიცის მახასიათებელ რიცხვების მანდვილ რიცხვთა შორის მაწსიმალური, ხოლო $n_0$ არის $A - \lambda E$ მატრიცის ელემენტარულ გამყოფების რიგებს შორის მაქსიმალური, მაშინ, (8.1) სისტემის კოშის მატრიცისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|C(t,\tau)\| \le M_0(1+t-\tau)^{n_0-1}\,e^{\sigma(t-\tau},\tag{10.1}$$

როცა $t \ge \tau \ge 0$, სადაც $M_0$ მუდმივია.

**დამტკიცება** მართლაც გვაქვს $C(t,\tau) = Y(t)\,Y^{-1}(\tau)$, სადაც $Y(t)$ (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცაა. ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ, რომ შეიძლება ავიღოთ $Y(t) = e^{At}$. ვიპოვოთ $Y^{-1}(t)$.

ამისათვის $Z(t) \equiv e^{-At}$. რადგან როგორც ადვილი შესამჩნევია $At$ და $-At$ კომუტატიური მატრიცებია. ლემა 8.2-ის ძალით გვაქვს $Y(t)\,Z(t) = e^{At-At} = e^{\mathrm{O}} = E$, ასე რომ $z(t) = e^{-A(t)} = Y^{-1}(t)$. საბოლოოდ გვაქვს $C(t,\tau) = e^{At}\cdot e^{-A\tau} = e^{A(t-\tau)}$. ამრიგად მივიღეთ მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულა (8.1) სისტემის კოშის მატრიცისათვის

$$C(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}.\tag{10.2}$$

გავიხსენოთ $e^{At}$ მატრიცის სტრუქტურა. შედეგი 9.3-ის ძალით $e^{At}$ მატრიცის ელემენტები არიან შემდეგი სახის კომბინაციები $\sum\limits_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t}p_i(t)$, სადაც $\lambda_i$-ები არიან $A$ მატრიცის მახასიათებელი რიცხვები, ხოლო $p_i$-ები $n_i$ რიგის პოლინომები, სადაც $n_i$

წარმოადგენს $\lambda_i$-ს შესაბამისი ელემენტარული გამყოფის რიგს. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|p_i(t)| \le M(1+t)^{n_i-1}, \quad t \ge 0.$$

მის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $\dfrac{p_i(t)}{(1+t)^{n_i-1}}$ შემოსაზღვრულია. აგრეთვე $|e^{\lambda_i t}| = e^{(\mathrm{Re}\, n_i)t} \le e^{\sigma t}$. ამ შენიშვნიდან და მატრიცის ნორმის განმარტებიდან ადვილად გამოდის, რომ $\|e^{At}\| = M_0(1+t)^{n_0-1}\, e^{\sigma t}$, სადაც $M_0$ მუდმივია. ამ უტოლობიდან (10.2)-ის გამო გამომდინარეობს (10.1). □

ამ შედეგს დიდი მნიშვნელობა აქვს მდგრადობის თეორიაში. შევნიშნოთ, რომ აქედან გამომდინარეობს ასეთი ფაქტი: ვთქვათ აღმოჩნდა, რომ $A$ მატრიცის ყველა მახასიათებელი რიცხვის ნამდვილი ნაწილი უარყოფითია. მაშინ $\sigma < 0$ და (7.4)-დან პირდაპირ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (8.1) სისტემის ყოველი ამონახსნი $t$ მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $t \to +\infty$ (აქ $\bar{b}(t) = 0$).

აღნიშნული ტიპის განტოლებას აქვს სახე

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k\, u^{(k-1)}. \tag{10.3}$$

როგორც არაერთხელ აგვიღნიშნავს, ეს განტოლება ეკვივალენტურია

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\,\overline{x} \tag{10.4}$$

სისტემის, სადაც

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

შევადგინოთ $A$ მატრიცი

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

აქაც $D_i(\lambda)$ იყოს $i$-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი. გვაქვს

$$D_n(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda E) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k\, \lambda^{k-1}.$$

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ამ დეტერმინანტს დავშლით უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. ამრიგად (10.4) სისტემის მახასიათებელი იქნება

$$\lambda^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \lambda^{k-1}. \tag{10.5}$$

მას ეწოდება (10.3) განტოლების მახასიათებელი განტოლება. ვთქვათ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (10.5)-ის განსხვავებული ფესვებია $n_1, \ldots, n_m$ ჯერადობით. ცხადია $D_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$. თუ $A - \lambda E$ მატრიცში ამოვშლით პირველ სვეტს და ბოლო სტრიქონს, მივიღებთ $n-1$ რიგის მინორს რომელიც 1-ის ტოლია. ამიტომ $D_{n-1}(\lambda) = \cdots = D_1(\lambda) = 1$.

ამიტომ $A$ მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები იქნება $E_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_m)^{n_m}$, ხოლო $E_{n-1}(\lambda) = \cdots = E_1(\lambda) = 1$. აქედან ჩანს, რომ $A-\lambda E$ მატრიცის ელემენტარული გამყოფებია $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$ და მხოლოდ ისინი. ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ 9.3 შედეგს და (10.4) სისტემიდან გადავალთ (10.3) განტოლებაზე, მივიღებთ, რომ (10.3)-ის ფუნდამენტური სისტემა ასეთია

$$e^{\lambda_i t} \, p_{ik}(t) \quad (k = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, m), \tag{10.6}$$

სადაც ყოველი ფიქსირებული $i$-თვის $p_{ik}(t)$ არიან $n_i - 1$-ური რიგის პოლინომები $(k = 1, \ldots, n_i))$. აქედან კი თავის მხრივ გამოდის, რომ (10.3) განტოლებას გააჩნია შემდეგი სახის ფუნდამენტური სისტემა

$$t^{k-1} \, e^{\lambda_i t} \quad (k = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, m). \tag{10.7}$$

მართლაც, ცხადია ჯერ ერთი ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო მეორეს მხრივ, რადგან (10.3)-ის ყოველი ამონახსნი წრფივად გამოისახება (10.6) სისტემით, ცხადია იგი წრფივად გამოისახება (10.7) სისტემის საშუალებითაც.

ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ ასეთი

**თეორემა 10.2.** თუ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ არიან (10.5) განტოლების (10.3) მახასიათებელი განტოლების ფესვები $n_1, \ldots, n_m$ ჯერადობებით შესაბამისად, მაშინ (10.3) განტოლებას აქვს (10.7) სახის ამოხსნათა ფუნდამენტური სისტემა.

ლექცია 10-ის დასასრულს განხილული იყო ერთი სახის ცვალებადკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი დიფ. განტოლება, რომელიც გარკვეული გარდაქმნით დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებაზე

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \, t^{k-1-n} \, u^{(k-1)}. \tag{10.8}$$

ასეთი ტიპის განტოლებას, სადაც $a_k \, (k = 1, \ldots, n$ ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება ეილერის დიფ. განტოლება.

მოვახდინოთ ასეთი გარდაქმნა:

$$u(t) = v(s), \quad \text{სადაც} \quad s = \ln t, \tag{10.9}$$

გვაქვს

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\,\frac{dv}{ds}, \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}\,\frac{dv}{ds} + \frac{1}{t^2}\,\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\right).$$

ინდუქციით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}} = t^{1-k}\left[\frac{d^{k-1}v}{ds^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik}\frac{d^{i-1}v}{ds^{i-1}}\right]. \tag{10.10}$$

სადაც $c_{ik}$ რაღაც მუდმივია. მართლაც, დავუშვათ (10.10) მართებულია, მაშინ

$$\frac{d^ku}{dt^k} = (1-k)t^{-k}\left[\frac{d^{k-1}v}{ds^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik}\,\frac{d^{i-1}v}{ds^{i-1}}\right] + t^{-k}\left[\frac{d^kv}{ds^k} + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik}\,\frac{d^iv}{ds^i}\right] =$$

$$= t^{-k}\left[\frac{d^kv}{ds^k} + \sum_{i=1}^{k} c_{ik+1},\frac{d^{i-1}v}{ds^{i-1}}\right],$$

სადაც $c_{ik+1}$ $(i = 1, \dots, k)$ რაღაც მუდმივებია. ასე რომ (10.10) დამტკიცებულია ნებისმიერი $k$-თვის, რადგან როცა $k = 2, 3$ ზემოთ შევამოწმეთ. თუ (10.10)-ს შევიტანთ (10.8)-ში, რადგან უმაღლესი რიგის წარმოებულის კოეფიციენტი ყოველთვის 1-ია, (10.8) განტოლება დავა

$$\frac{d^nu}{dt^n} = \sum_{k=1}^{n} b_k\, v^{(k-1)} \tag{10.11}$$

სახეზე. ამრიგად ეილერის (10.8) განტოლება (10.9) გარდაქმნით დაიყვანება (10.11) მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებაზე.

## 11. წრფივი სისტემების მდგრადობა ლიაპუნოვის აზრით

განვიხილოთ სისტემა

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x} + \overline{f}(t). \tag{11.1}$$

სადაც $A \in C_{n\times n}([0;+\infty))$, $\overline{f} \in C_n([0;+\infty))$. დავსვათ კოშის ამოცანა

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \quad t_0 \in [0,+\infty), \quad \overline{x}_0 \in \mathbb{R}_n. \tag{11.2}$$

როგორც ლექცია 4-ში ვნახეთ, თუ $A$ და $\overline{f}$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[0,+\infty)$-ში, მაშინ საწყისი მნიშვნელობების მცირედ შეშფოთება იწვევს ამოხსნის მცირედ შეშფოთებას. კერძოდ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ როგორც კი $\|\overline{x}_1 - \overline{x}_0\| < \delta$, გვაქვს

$$\big\|\overline{x}_1(t) - \overline{x}_0(t)\big\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0,$$

სადაც $\overline{x}_0(t)$ არის (11.1), (11.2) ამოცანის ამოხსნა, ხოლო $\overline{x}_1(t)$ კი არის (11.1)-ის ამოხსნა ასეთი საწყისი პირობებით $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_1$.

გაცილებით რთულდება საკითხი, როცა $A$ არ არის აბსოლუტურად ინტეგრებადი $[0,+\infty)$-ზე და ამ შემთხვევაში (11.1) სისტემის ამოხსნების საწყისი მნიშვნელობებისაგან დამოკიდებულების საკითხი შეადგენს სწორედ ლიაპუნოვის მდგრადობის თეორიის საგანს.

ჯერჯერობით ვიგულისხმოთ, რომ $A$ და $\overline{f}$ მხოლოდ უწყვეტია $[0,+\infty)$-ზე.

**განსაზღვრება 11.1.** (11.1) სისტემის ამოხსნას $\overline{x}_0(t)$ ეწოდება მდგრადი ლიაპუნოვის აზრით, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და $t_0\geq 0$-თვის არსებობს ისეთი $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$, რომ როგორიც არ უნდა იყოს (11.1) სისტემის ამოხსნა $\overline{x}(t)$, თუკი $\|\overline{x}(t_0)-\overline{x}_0(t_0)\|<\delta$, გვაქვს

$$\|\overline{x}(t)-\overline{x}_0(t)\|<\varepsilon,\quad t\geq t_0.$$

**განსაზღვრება 11.2.** (11.1) სისტემის ამოხსნას $\overline{x}_0(t)$ ეწოდება თანაბრად მდგრადი, თუ ნებისმიერი $t_0\geq 0$ და $\overline{x}(t)$ ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\|\overline{x}(t_0)-\overline{x}_0(t_0)\|<\delta$, გვაქვს

$$\|\overline{x}(t)-\overline{x}_0(t)\|<\varepsilon,\quad t\geq 0.$$

ისმის საკითხი, ხომ არ არის ეს ორი განმარტება ეკვივალენტური. ყოველი თანაბრად მდგრადი სისტემა რომ მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით ეს ცხადია, მაგრამ პირიქით ეს ასე არ არის. არსებობს სისტემა, რომლის ამოხსნა მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით, მაგრამ არ არის თანაბრად მდგრადი. ჩვენ მოვიყვანთ უმარტივეს მაგალითს.

**მაგალითი.** განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dx}{dt}=\big(\sin\ln t+\cos\ln t-\lambda\big)x, \tag{$*$}$$

სადაც $\lambda$ რაღაც პარამეტრია. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ განტოლების ნებისმიერი ამოხსნა ასე მოიცემა

$$x(t)=e^{t\sin\ln t-\lambda t-t_0\sin\ln t_0+\lambda t_0}\,x(t_0).$$

როგორც აქედან ჩანს, როცა $\lambda>1$, (*) განტოლების ტრივიალური ამოხსნა მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით. მართლაც ამ შემთხვევაში $\sin\ln t-\lambda<\gamma<0$ და გვაქვს $|x(t)|<e^{\lambda t}\cdot e^{\lambda t_0-t_0\sin\ln t_0}|x(t_0)|$. რადგან $\gamma<0$, გვაქვს $e^{\gamma t}<1$ და მოცემული $\varepsilon>0$-თვის საკმარისია ავიღოთ $\delta=\varepsilon\, e^{t_0\sin\ln t_0-\lambda t_0}$, ასე რომ $|x(t_0)|\leq\delta$-დან გამოვიდეს $|x(t)|<\varepsilon$. აქ როგორც ვხედავთ, $\delta$ დამოკიდებულია $t_0$-ზე. ახლა ავიღოთ

$$t_0=e^{2k\pi}\quad \text{და}\quad t=e^{(2k+1/2)\pi}.$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$x(t)=e^{t-\lambda t+\lambda t_0}\cdot x(t_0)=e^{\left(1-\lambda+\lambda\frac{t_0}{t}\right)t}x(t_0)=e^{\left(e^{-\pi/2}\lambda+1-\lambda\right)t}x(t_0),$$

რადგან $\dfrac{t_0}{t}=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\lambda < \dfrac{1}{1-e^{-\pi/2}}$, გვექნება

$$\sigma = e^{-\frac{\pi}{2}}\lambda + 1 - \lambda > 0 \quad \text{და} \quad |x(t)| = e^{\sigma t}\,|x(t_0)|.$$

ახლა უკვე ცხადია, (*)-ის ტრივიალური ამოხსნა არაა მდგრადი თანაბრად, რადგან როგორი $\delta$-ც არ უნდა ავიღოთ, $k$-ს საკმაოდ გაზრდის ხარჯზე, არსებობს ისეთი $t_0$ და $t > t_0$, რომ $|x(t_0)| = \delta$, მაგრამ $|x(t)| > \varepsilon_0$, სადაც $\varepsilon_0$ ფიქსირებული დადებითი რიცხვია. ამგვარად, $1 < \lambda < \dfrac{1}{1-e^{-\pi/2}}$ მნიშვნელობებისათვის (*)-ის ტრივიალური ამოხსნა მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით, მაგრამ არაა თანაბრად მდგრადი.

**განსაზღვრება 11.3.** (6.1) სისტემის $\overline{x}_0(t)$ ამონახსნს ეწოდება ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ დაცულია ორი პირობა:

1. $\overline{x}_0(t)$ მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით;
2. ნებისმიერი $t_0$-თვის არსებობს ისეთი $\Delta = \Delta(t_0)$, რომ როგორიც არ უნდა იყოს (6.1)-ის $\overline{x}(t)$ ამონახსნი, თუ $\left\|\overline{x}_0(t_0) - \overline{x}(t_0)\right\| < \Delta$ გვაქვს $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|\overline{x}(t) - \overline{x}_0(t)\right\| = 0$.

როგორც წინა მაგალითიდან ჩანს, ამოხსსნა შეიძლება იყოს ასიმპტოტურად მდგრადი, მაგრამ არ იყოს თანაბრად მდგრადი. $\dfrac{dx}{dt} = 0$ განტოლების ტრივიალური ამოხსნა თანაბრად მდგრადია, მაგრამ არ არის ასიმპტოტურად მდგრადი.

სასარგებლოა გავარკვიოთ, თუ რას ნიშნავს, რომ სისტემის ამოხსნა არაა მდგრადი ლიაპუნოვის აზრით. (11.1)-ის $x_0(t)$ ამოხსნა იქნება არამდგრადი ლიაპუნოვის აზრით, თუ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ და $t_0 \geq 0$, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $\delta > 0$, ყოველთვის არსებობს(11.1) სისტემის $x(t)$ ამოხსნა ისეთი, რომ $\left\|x_0(t_0) - x(t_0)\right\| < \delta$, მაგრამ $\left\|x(t_1) - x_0(t_1)\right\| \geq \varepsilon$ რაიმე $t_1 > t_0$-თვის.

**განსაზღვრება 11.4.** (11.1) სისტემას ვუწოდოთ მდგრადი, თანაბრად მდგრადი ან ასიმპტოტურად მდგრადი, თუკი მისი ყველა ამოხსნა სათანადოდ არის მდგრადი, თანაბრად მდგრადი ან ასიმპტოტურად მდგრადი.

**თეორემა 11.5.** იმისათვის, რომ (11.1) იყოს მდგრადი, თანაბრად მდგრადი ან ასიმპტოტურად მდგრადი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\,\overline{x} \tag{11.1$_0$}$$

ტრივიალური ამოხსნა იყოს სათანადოდ მდგრადი, თანაბრად მდგრადი ან ასიმპტოტურად მდგრადი.

ამ თეორემის სამართლიანობაში დასარწმუნებლად საკმარისია აღვნიშნოთ, რომ თუ $\overline{x}_0(t)$ და $\overline{x}(t)$ არიან (11.1)-ის ამოხსნები, მაშინ $\overline{y}(t) = \overline{x}_0(t) - \overline{x}(t)$ იქნება $(11.1_0)$-ის ამოხსნა.

ამ თეორემიდან ჩანს, რომ (11.1) სისტემის მდგრადობის საკითხი მიიყვანება $(11.1_0)$ სისტემის ტრივიალური ამოხსნის მდგრადობის საკითხზე. თვით ერთგვაროვანი სისტემის მდგრადობა ტოლფასია მისი ტრივიალური ამოხსნის მდგრადობისა.

**თეორემა 11.6.** $(11.1_0)$ სისტემის მდგრადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სისტემის ყოველი ამოხსნა იყოს შემოსაზღვრული როცა $t \to +\infty$, ხოლო ასიმპტოტური მდგრადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ყოველი ამოხსნა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ როცა $t \to +\infty$.

**დამტკიცება.** საკმარისობა. ვთქვათ $(11.1_0)$-ის ყოველი ამოხსნა შემოსაზღვრულია. მაშინ $c(t,t_0)$ ყოველი ფიქსირებული $t_0$-სთვის შემოსაზღვრული იქნება: $\|C(t,t_0)\| \leq \mathcal{M}(t_0)$ როცა $t \geq t_0$. ამრიგად ყოველი $\overline{x}(t) = C(t,t_0)\overline{x}(t)$ ამოხსნისათვის გვაქვს $\|\overline{x}(t)\| \leq \mathcal{M}(t_0)\,\|\overline{x}(t_0)\|$, საიდანაც ჩანს, რომ $(11.1_0)$-ის ტრივიალური ამოხსნა მდგრადია.

აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს ერთი მაინც შემოუსაზღვრელი ამოხსნა $\overline{x}_0(t)$. რადგან ტრივიალური ამოხსნა მდგრადია, არსებობს ისეთი $\delta$, რომ როგორიც კი $\|\overline{x}(0)\| = \delta$ მაშინ $\|\overline{x}(t)\| < 1$ $(\varepsilon = 1)$ როცა $t \geq 0$. განვიხილოთ $(11.1_0)$ სისტემის ასეთი ამოხსნა

$$\overline{x}_1(t) = \frac{\delta}{\|\overline{x}_0(0)\|}\,\overline{x}_0(t).$$

ცხადია $\|\overline{x}_1(0)\| = \delta$ და ამიტომ უნდა გვქონდეს $\|\overline{x}_1(t)\| < 1$ როცა $t \geq 0$, ეს კი შეუძლებელია, რადგან $\overline{x}_0(t)$ შემოუსაზღვრელია $\overline{x}_0(t)$-თან ერთად.

საკმარისობა. ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ $(11.1_0)$-ის ყოველი ამოხსნა მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $t \to +\infty$. ისინი იქნებიან შემოსაზღვრული და პირველი ნაწილის გამო ტრივიალური ამოხსნა იქნება მდგრადი, რაც შეეხება ასიმპტოტურად მდგრადობას, ეს ცხადია.

ვთქვათ $(11.1_0)$ სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია. ავიღოთ ნებისმიერი მისი ამოხსნა $\overline{x}_0(t)$. არსებობს ისეთი $\Delta$, რომ როგორც კი $\|\overline{x}(0)\| \leq \Delta$, მაშინ $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\overline{x}(t)\| = 0$. განვიხილოთ $(11.1_0)$-ის ამოხსნა $\overline{x}_1(t) = \dfrac{\Delta}{\|\overline{x}_0(0)\|}\,\overline{x}_0(t)$ of $(11.1_0)$. ცხადია, $\|\overline{x}_1(0)\| = \Delta$ და ამიტომ $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\overline{x}_1(t)\| = 0$ და მასთან ერთად $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\overline{x}_0(t)\| = 0$. თეორემა დამტკიცდა. $\square$

**თეორემა 11.7.** იმისათვის, რომ $(11.1_0)$ სისტემა იყოს თანაბრად მდგრადი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $C(t,\tau)$ კოშის მატრიცი იყოს შემოსაზღვრული $0 \leq \tau \leq t < +\infty$.

**დამტკიცება.** საკმარისობა ცხადია. მართლაც, გვაქვს $(11.1_0)$-ის ნებისმიერი $\overline{x}(t)$ ამოხსნისათვის $\|\overline{x}(t)\| = \|C(t,t_0)\,\overline{x}(t_0)\| \leq M\|\overline{x}(t_0)\|$ როცა $t \geq t_0$. აქედან უშუალოდ ჩანს ტრივიალური ამოხსნის თანაბრად მდგრადობა.

აუცილებლობა. განვიხილოთ $C(t,t_0)$ მატრიცის ნებისმიერი სვეტი $\overline{x}_0(t,t_0)$. არსებობს ისეთი $\delta$, რომ როგორც კი $\|\overline{x}(t_0,t_0)\| \leq \delta$, მაშინ $\|x(t,t_0)\| \leq 1$ როცა $t \geq t_0$. კოშის მატრიცის თვისებების გამო $\|\overline{x}(t_0,t_0)\| = 1$, ამიტომ ცხადია, $\delta\|x_0(t,t_0)\| < 1$ როცა $t \geq t_0 \geq 0$. თეორემა დამტკიცდა. $\square$

# 12. არაწრფივი განტოლებათა სისტემები

პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფ. განტოლებათა სისტემას ზოგად შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{x}), \tag{12.1}$$

სადაც $\overline{f}$ არის უწყვეტი ასახვა $I \times D$-სა $\mathbb{R}^n$-ში, $D \subset \mathbb{R}^n$ არეა, ანუ ღია ბმული სიმრავლე, ხოლო $I$ ნამდვილი ღერძის რაიმე შუალედი. ვთქვათ $t_0 \in I$ და $\overline{x}_0 \in D$.

ისმის ამოცანა: ვიპოვოთ (12.1)-ის ამოხსნა ასეთ საწყის პირობებში

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{12.2}$$

მაგრამ ჯერ უნდა დავაზუსტოთ, რა გვესმის (12.1) სისტემის ამოხსნის ქვეშ. $I_0$ შუალედზე განსაზღვრული უწყვეტად დიფერენცირებადი $\overline{x}(t)$ ვექტორ-ფუნქციას ვუწოდებთ (12.1)-ის ამოხსნას $I_0$ შუალედში, თუ ჯერ ერთი $\overline{x}(t) \in D$ როცა $t \in I_0$ და მეორეც იგი აკმაყოფილებს (12.1) სისტემას ამ შუალედის ნებისმიერ წერტილში. კოშის ამოცანა ამ სისტემისათვის ასე ჩამოყალიბდება: მოცემულ $t_0 \in I$ და $\overline{x}_0 \in D$-თვის ვიპოვოთ ისეთი $I_0$ შუალედი, რომ $t_0 \in I_0 \subset I$ და ამ შუალედში განსაზღვრული (12.1)-ის ისეთი ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს (12.2) საწყის პირობებს.

ამრიგად, განსხვავებით წრფივი სისტემებისაგან ზოგად შემთხვევაში კოშის ამოცანის ამოხსნას ვეძებთ მხოლოდ $t_0$-ის გარკვეულ მიდამოში მთელ $I$ შუალედში, როგორც ამას ქვემოთ დავინახავთ, მას შეიძლება არც ჰქონდეს $I$ შუალედში განსაზღვრული ამოხსნაც.

ადგილი აქვს შემდეგ არსებობის თეორემებს, რომელთაც ჩვენ ჯერ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ.

**თეორემა 12.1** (კოში-პეანოს). თუ $\overline{f} \in C_n(I \times D)$, მაშინ (12.1), (12.2) ამოცანა ამოხსნადია (კოშის ამოცანის ამოხსნადიობა აქ გვესმის ზემოთმოყვანილი აზრით ე.ი. ლოკალურად).

ვიდრე ამ თეორემას დავამტკიცებდეთ, მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი, სადაც ამოხსნის არსებობა უშუალოდ შეიძლება იქნეს ნაჩვენები. ყველა მოყვანილ მაგალითში $n = 1$.

## 12.1. განცალებად ცვლადებიანი განტოლება

ასე ეწოდება შემდეგი ტიპის განტოლებას:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,\varphi(x), \tag{12.3}$$

სადაც $a \in C(I)$ და $g \in C(]\alpha, \beta[)$.

ავიღოთ $t_0 \in I$ და $x_0 \in ]\alpha, \beta[$ და დავსვათ კოშის

$$x(t_0) = x_0 \tag{12.4}$$

ამოცანა. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{როცა} \quad x \in ]\alpha, \beta[ \tag{12.5}$$

ვთქვათ (12.3), (12.4) ამოცანას გააჩნია ამოხსნა განსაზღვრული $t_0$-ის რაღაც $I_0$ მიდამოში და ამოხსნის მნიშვნელობები არ გამოდიან $]\alpha, \beta[$-დან. $I_0$-ში (12.3) და (12.5)-ის გამო გვექნება ამ ამოხსნისთვის $\dfrac{x'(t)}{\varphi(x(t))} = a(t)$. ვაინტეგროთ $t_0$-დან to $t$-მდე.

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{\varphi(x(\tau))}\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau.$$

თუ მარცხნივ მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x(t) = s$, მივიღებთ, რომ

$$\int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} = \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau, \quad t \in I_0. \tag{12.6}$$

შემოვიღოთ ფუნქცია $\Phi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{ds}{\varphi(s)}$ განსაზღვრული $]\alpha, \beta[$-ში. ეს ფუნქცია არის უწყვეტი და მკაცრად მონოტონური $]\alpha, \beta[$-ში რადგან (12.5)-ის გამო $\Phi'(x) \neq 0$. ამიტომ არსებობს ზღვრები სასრული ან უსასრულო $\Phi(\alpha+)$ და $\Phi(\beta-)$. აღვნიშნოთ

$$A = \min\big\{\Phi(\alpha+), \Phi(\beta-)\big\}, \quad B = \max\big\{\Phi(\alpha+), \Phi(\beta-)\big\}.$$

მაშინ $\Phi$-ს მნიშვნელობათა არე იქნება $]A, B[$ შუალედი. ამის შემდეგ (12.6) ასე გადავწეროთ

$$\Phi[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau, \quad t \in I_0. \tag{12.7}$$

ცხადია $A < 0 < B$ რადგან $\Phi(x_0) = 0$. (12.7) ტოლობას, რომ აზრი ჰქონდეს საჭიროა, რომ დაცული იქნას პირობები

$$A < \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau < B, \quad t \in I_0. \tag{12.8}$$

ამის შემდეგ სწორედ ვიგულისხმოთ, რომ $I_0$ შერჩეულია ისე, რომ დაცული იყოს (12.8). ასეთი $I_0$ რომ შეირჩევა ცხადია, რადგან $\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau = 0 \in [AB]$. (12.8) პირობასა და $\Phi$ ფუნქციის მკაცრად მონოტონურობის გამო გვაქვს, რომ

$$x(t) = \Phi^{-1}\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\Bigg] < B, \quad t \in I_0. \tag{12.9}$$

ამგვარად, თუ (12.3), (12.4) ამოცანას აქვს ამონახსნი, იგი ერთადერთია და გამოისახება (12.9)-ით. უკუსვლით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $x(t)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია (12.9)-ით არის სწორედ (12.3), (12.4) ამოცანის ამოხსნა. ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ

**თეორემა 12.2.** თუ $a \in C(I)$, $\varphi \in C(]\alpha, \beta[)$ და შესრულებულია (12.5) პირობა, მაშინ (12.3), (12.4) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა $I_0$ შუალედში, რომელიც მოიცემა (12.9)-ით. $I_0$ შერჩეულია ისე, რომ სრულდებოდეს (12.8).

**დამტკიცება.** ვთქვათ $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, ე.ი., $\varphi$ არის $]-\infty, +\infty[$-ში განსაზღვრული უწყვეტი და ერთადერთი (ზოგადობის დაურღვევლად) ფუნქცია. მაშინ ჩატარებული მსჯელობიდან ცხადია, რომ პირობები

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \int_{0}^{+\infty} \frac{ds}{\varphi(s)} = +\infty$$

აუცილებელი და საკმარისია, რომ (12.3), (12.4) ამოცანას ჰქონდეს ამოხსნა მთლიანად $I$-ში განსაზღვრული როგორიც არ უნდა იყოს $x_0 \in ]-\infty, +\infty[$ და $a \in C(I)$. მართლაც, ამ შემთხვევაში ცხადია $A = -\infty$ და $B = +\infty$ როგორიც არ უნდა იყოს $x_0$ და (12.8) პირობები ავტომატურად შესრულდება მთელ $I$-ში როგორიც არ უნდა იყოს $a \in C(I)$. ამით საკმარისობა დამტკიცებულია.

რაც შეეხება აუცილებლობას, თუ მაგალითად $A$ სასრულია, ადვილად შეიძლება $a$-ს შერჩევა ისე, რომ (12.8) პირობები არ სრულდებოდეს.

ბოლოს მოვიყვანოთ ერთი მარტივი მაგალითი, როცა ამოხსნა არ არის მთელ შუალედში განსაზღვრული. განვიხილოთ ასეთი განტოლება $\dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2$ საწყის პირობებში $x(0) = 0$. თუ გავყოფთ და ვაინტეგრებთ, მივიღებთ, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა $x(t) = \operatorname{tg} t$ განსაზღვრულია $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$-ში. □

## 12.2. ბერნულის განტოლება

ასე ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^n, \tag{12.10}$$

სადაც $a \in C(I)$, $b \in C(I)$, $n \neq 1$, $n \in \mathbb{R}$ (თუ $n = 1$ გვაქვს წრფივი განტოლება). თუ (12.10) -ის მარჯვენა მხარეს შევნიშნავთ, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციას, მისი განსაზღვრის არეა $I \times (0, +\infty)$. ავიღოთ $x_0 > 0$ და $t_0 \in I$ და დავსვათ კოშის ამოცანა

$$x(t_0) = x_0. \tag{12.11}$$

მოვახდინოთ გარდაქმნა

$$y(t) = x^{1-n}(t). \tag{12.12}$$

მაშინ
$$y'(t) = (1-n)x^{-n}(t)\,x'(t) = (1-n)a(t)y(t) + (1-n)b(t)$$
და ჩვენი კოშის ამოცანა მიიღებს სახეს:
$$\frac{dy}{dt} = (1-n)a(t)y + (1-n)b(t), \tag{12.10$'$}$$
$$y(t_0) = x_0^{1-n}. \tag{12.11$'$}$$
მაგრამ (12.10), (12.11) და (12.10$'$), (12.11$'$) ამოცანები არ არის ეკვივალენტური. მართლაც, მეორეს ამოხსნა განსაზღვრულია მთლიანად $I$-ში, მაშინ როცა პირველის ამოხსნა მთლიანად $I$-ში შეიძლება არ იყოს განსაზღვრული. საქმე იმაშია, რომ (12.12) გარდაქმნა არ არის შებრუნებადი მთელ $I$-ში. როგორც კურსის პირველი ლექციიდან ვიცით (12.10$'$), (12.11$'$)-ის ამოხსნა მოიცემა ფორმულით
$$y(t) = e^{(1-n)\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\left[x_0^{1-n} + (1-n)\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,e^{(n-1)\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\,ds\right].$$
შევარჩიოთ $I_0$ ისე რომ
$$x_0^{1-n} + (1-n)\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,e^{(n-1)\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\,ds > 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I_0. \tag{12.13}$$
ეს შესაძლებელია, რადგან როცა $t = t_0$, მარცხენა მხარე ტოლია $x_0^{1-n} > 0$. გვექნება
$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\left[x_0^{1-n} + (1-n)\int\limits_{t_0}^{t} s(s)e^{(n-1)\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\,ds\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{12.14}$$
ე.ი. გვაქვს ასეთი

**თეორემა 12.3.** თუ $a \in C(I)$ და $b \in C(I)$, მაშინ ყოველი $x_0 > 0$ და $t_0 \in I$-თვის (12.10), (12.11) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა $I_0$-ში, რომელიც მოიცემა (12.4) ფორმულით, ხოლო $I_0$ ისეა შერჩეული, რომ შესრულდეს (12.13).

## 12.3. განტოლებები სრულ დიფერენციალებში

განვიხილოთ ასეთი სახის განტოლება
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{q(t,x)}{p(t,x)}\,, \tag{12.15}$$
სადაც $p$ და $q$ უწყვეტი ფუნქციებია $I\times]\alpha,\beta[$ არეში და არსად აღნიშნულ არეში $p \neq 0$. ვაჩვენოთ შემდეგი წინადადების მართებულობა.

**თეორემა 12.4.** თუ დაცულია ზემოთ აღნიშნული პირობები, ამას გარდა
$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial q(t,x)}{\partial x} \tag{12.16}$$

და ორივე უწყვეტია, მაშინ როგორც არ უნდა იყოს $t_0 \in I$ და $x_0 \in ]\alpha, \beta[$, (12.15) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა საწყის პირობებში

$$x(t_0) = x_0 \tag{12.17}$$

და ეს ამოხსნა განისაზღვრება ტოლობიდან

$$\int\limits_{t_0}^{t} q(\tau, x_0)\, d\tau + \int\limits_{x_0}^{x(t)} p(t, \xi)\, d\xi = 0. \tag{12.18}$$

თუ დაცულია (12.16), მაშინ (12.15)-ს უწოდებენ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ეს სახელწოდება წარმოდგება იქიდან, რომ როგორც ანალიზიდან ცნობილია, თუ დაცულია (12.6) პირობა, მაშინ არსებობს ორი ცვლადის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია $z(t, x)$, რომ $dz(t, x) = p(t, x)dx + q(t, x)dt$. კერძოდ,

$$z(t, x) = \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau, x_0)\, d\tau + \int\limits_{x_0}^{x} p(t, \xi)\, d\xi.$$

მართლაც, $\dfrac{\partial z(t, x)}{\partial x} = p(t, x)$ ხოლო

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = q(t, x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial p(t, \xi)}{\partial t}\, d\xi = q(t, x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial q(t, \xi)}{\partial t}\, d\xi =$$
$$= q(t, x_0) + q(t, x) - q(t, x_0) = q(t, x).$$

თუ (12.15), (12.17)-ს გააჩნია ამონახსნი, მაშინ (12.15)-დან გვაქვს $p(t, x(t))dx(t) + q(t, x(t))dt \equiv 0$, $t \in I_0$, ეს კი ნიშნავს, რომ $dz(t, x(t)) \equiv 0$, $t \in I_0$. ეს იგივეა, რაც (12.18).

ამგვარად, თუ არსებობს (12.15), (12.17) ამოცანის ამოხსნა რაღაც $I_0$ შუალედში, იგი აკმაყოფილებს (12.18) ტოლობას.

ვნახოთ შეიძლება თუ არა აქედან $x(t)$-ის განსაზღვრა. (12.18) წარმოადგენს $z(t, x(t)) = 0$ ტოლობას. $z$ უწყვეტად დიფერენცირებადია $I \times ]\alpha, \beta[$-ში, $z(t_0, x_0) = 0$ და ამას გარდა

$$\frac{\partial z(t_0, x_0)}{\partial x} = p(t_0, x_0) \neq 0.$$

ამიტომ არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის ძალით $t_0$-ის გარკვეულ $I_0$ მიდამოში (12.18)-დან ის განისაზღვრება, როგორც $t$-ს ცალსახა უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია. თუ უკან დავბრუნდებით, მივიღებთ რომ $x(t)$ იქნება (12.15)-ის ამოხსნა (12.17) საწყის პირობებში.

თუ (12.15) არ არის სრულ დიფერენციალებში, მაშინ ცდილობენ იპოვონ ე.წ. მაინტეგრებელი მამრავლი, რომ ამ მამრავლზე (12.15)-ის მარჯვენა მხარის მნიშვნელისა და მრიცხველის გამრავლების შემდეგ იგი გახდეს სრულ დიფერენციალებში $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\mu(t,x)\,q(t,x)}{\mu(t,x)\,p(t,x)}$.

## 13. კოშის ამოცანის ამოხსნა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით

განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(t,\overline{x}), \tag{13.1}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0. \tag{13.2}$$

**თეორემა 13.1** (პიკარ-ლინდელოფი)**.** ვთქვათ $\overline{f} \in C_n(I \times D)$ და აკმაყოფილებს $\overline{x}$-ის მიმართ ლიფშიცის პირობას

$$\big\|\overline{f}(t,\overline{x}) - \overline{f}(t,\overline{y})\big\| \leq L\|\overline{x}-\overline{y}\|. \tag{13.3}$$

მაშინ არსებობს ისეთი $[\alpha,\beta]$ შუალედი, რომ $I \supset [\alpha,\beta] \ni t_0$ და ამ შუალედში (13.1), (13.2) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამოხსნა და ეს ამოხსნა მოიცემა როგორც შემდეგი მიმდევრობის თანაბარი ზღვარი

$$\overline{x}_0(t) \equiv \overline{x}_0, \tag{13.4}$$

$$\overline{x}_k(t) = \overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{x}_{k-1}(\tau))\,d\tau \quad (k=1,2,\dots).$$

**დამტკიცება.** რადგან $\overline{x}_0 \in D$ და $D$ ღიაა, მაშინ არსებობს ისეთი $r_0 > 0$, რომ

$$D_0 = \big\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\overline{x}-\overline{x}_0\| \leq r_0\big\| \subset D.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $I$ ჩაკეტილია და ე.ი.

$$\big\|\overline{f}(t,\overline{x}\big\| \leq M \quad \text{როცა} \quad (t,\overline{x}) \in I \times D_0. \tag{13.5}$$

შევარჩიოთ $[\alpha,\beta]$ ისე, რომ $I \supset [\alpha,\beta] \ni t_0$ და

$$\max\big\{t_0-\alpha, \beta-t_0\big\} \leq \frac{r_0}{M}\,. \tag{13.6}$$

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$-თვის (13.4) ტოლობები $\overline{x}_k$-ს განსაზღვრავს $[\alpha,\beta]$-ში როგორც უწყვეტ $n$ განზომილებიან ვექტორ-ფუნქციას და ამას გარდა ადგილი აქვს უტოლობას

$$\big\|\overline{x}_k(t) - \overline{x}_0\big\| \leq r_0 \quad (k=0,1,\dots).$$

ეს ისევე დამტკიცდება როგორც კოში-პეანოს თეორემა. (13.4) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა ეკვივალენტურია შემდეგი მწკრივის თანაბრად კრებადობისა

$$\overline{x}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big[\overline{x}_k(t) - \overline{x}_{k-1}\big] \tag{13.7}$$

გვაქვს

$$\big\|\overline{x}_k(t)-\overline{x}_{k-1}(t)\big\| \in L\left|\int\limits_{t_0}^{t}\big\|\overline{x}_{k-1}(\tau)-\overline{x}_{k-2}(\tau)\big\|\,d\tau\right| \quad \text{როცა} \quad k=2,3,\dots$$

ხოლო როცა $k=1$, გვაქვს $\big\|\overline{x}_1(t)-\overline{x}_0(t)\big\|\le r_0$. ამიტომ ლემა 2.1-ის ძალით გვაქვს

$$\big\|\overline{x}_k(t)-\overline{x}_{k-1}(t)\big\| \le r_0\,L^{k-1}\frac{|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}\,, \quad k=1,2,\dots$$

აქედან ჩანს, რომ (13.7) მწკრივის მაჟორანტი იქნება შემდეგი კრებადი მწკრივი

$$\big\|\overline{x}_0\big\|+r_0\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[L(\beta-\alpha)]^{k-1}}{(k-1)!}\,.$$

ეხლა თუ გადავალთ ზღვარზე (13.4) ტოლობაში (ინტეგრალის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა შეიძლება, რადგან $\overline{f}(\tau,\overline{x})$-ის თანაბრად უწყვეტობის და $\overline{x}_{k-1}(\tau)$-ის თანაბრად კრაბადობის გამო მიმდევრობა $f(\tau,\overline{x}_{k-1}(\tau))$ თანაბრად კრებადია) მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{k\to+\infty}\overline{x}_k(t)=\overline{x}(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს (13.1), (13.2) ამოცანის ამოხსნას. □

## 14. კოშის ამოცანის ამოხსნის გაგრძელებადობა

განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{f}(t,\overline{x}), \tag{14.1}$$

$$\overline{x}(t_0)=\overline{x}_0, \tag{14.2}$$

სადაც $f\in C_n(I\times D)$, $t_0\in I$, $\overline{x}_0\in D$, $I$ არის $R$ ღერძის ნებისმიერი შუალედი, ხოლო $D\subset R^n$ არეა. შემოვიტანოთ ასეთი მნიშვნელოვანი განსაზღვრა

**განმარტება.** $(\alpha,\beta)\subset I$ შუალედში განსაზღვრული (14.1), (14.2) ამოცანის $\overline{x}$ ამონახსნს ეწოდება გაგრძელებადი მარჯვნივ, თუ არსებობს $\beta^*>\beta$ და (14.1), (14.2) ამოცანის ამოხსნა $\overline{x}^{\,*}$ განსაზღვრული $(\alpha,\beta^*)$ ($(\alpha,\beta^*)\subset I$) ისეთი, რომ $\overline{x}^{\,*}(t)=\overline{x}(t)$ როცა $t\in(\alpha,\beta)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანას ეწოდება არაგაგრძელებადი მარჯვნივ.

ანალოგიურად განიმარტება ამონახსნის გაგრძელებადობა და არაგაგრძელებადობა მარცხნივ.

შემდეგი თეორემა იძლევა ამოხსნის მარჯვნივ არაგაგრძელებადობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

**თეორემა 14.1.** იმისათვის რომ (14.1), (14.2) ამოცანის $\overline{x}$ ამოხსნა განსაზღვრული რაიმე $(\alpha,\beta)\subset I$, იყოს არაგაგრძელებადი მარჯვნივ აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს ერთ-ერთი სამი პირობიდან:

1) $\beta=\sup I$,

2) $\lim\limits_{t\to\beta-}\|\overline{x}(t)\|=+\infty$,

3) $\lim\limits_{t\to\beta-}\rho(\overline{x}(t),\Gamma)=0$,

სადაც $\Gamma$ არის $D$ არის საზღვარი, ხოლო $\rho(\overline{x},\Gamma)=\inf\big\{\|\overline{x}-\overline{y}\|,\overline{y}\in\Gamma\big\}$ ნებისმიერი $\overline{x}\in R^n$-თვის.

**დამტკიცება.** ამ პირობებიდან ერთ-ერთის საკმარისობა ცხადია. მართლაც, თუ სრულდება 1) პირობა მარჯვნივ გაგრძელდება არამცთუ როგორც ჩვენი ამოცანის ამოხსნა, არამედ როგორც უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო თუ გვაქვს 3) ვთქვათ $\overline{x}$ გაგრძელებადია მარჯვნივ, მაშინ მისი $\overline{x}^{\,*}$ გაგრძელების მნიშვნელობა $\beta$ წერტილში უნდა მოხვდეს $D$ არის საზღვარზე $\overline{x}^{\,*}$-ის უწყვეტობისას და საზღვრის ჩაკეტილობის გამო. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $\widetilde{f}$ ფუნქცია განმარტებული არ გვაქვს.

ახლა ვაჩვენოთ აუცილებლობა. ამისათვის დავუშვათ, რომ არ სრულდება 1)-3) და დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $\overline{x}$ მარჯვნივ გაგრძელებადი გამოვა. რადგან 2) არ სრულდება, $\liminf\limits_{t\to\beta-}\|\overline{x}(t)\|<+\infty$, ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს წერტილთა მიმდევრობა $t_k\to\beta-$ რომ $\|\overline{x}(t_k)\|$ შემოსაზღვრულია. ამიტომ აქედან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა $\overline{x}(\beta_k)\to\overline{x}^{\,*}$ და რადგან 3) არ სრულდება, $t_k$ შეიძლება ისე შეირჩეს, რომ $\overline{x}^{\,*}\in D$. რადგან $\overline{x}^{\,*}\in D$, არსებობს $r^*>0$ ისეთი, რომ

$$D^*=\big\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \|\overline{x}-\overline{x}^{\,*}\|\le r^*\big\}\subset D\equiv M=\max\big\{\|\overline{f}(t,\overline{x})\|:(t,\overline{x})\in[t_0,\beta]\times D^*\big\}.$$

რადგან $\|\overline{x}(\beta_k)\|\to\overline{x}^{\,*}$, შეგვიძლია ავიღოთ იმდენად დიდი $k_0$, რომ

$$\big\|\overline{x}(\beta_{k_0})-\overline{x}^{\,*}\big\|<\frac{r^*}{2}\,, \tag{14.3}$$

$$M\cdot(\beta-\beta_{k_0})<\frac{r^*}{2}. \tag{14.4}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\overline{x}(t)\in D^*$ როცა $t\in[\beta_{k_0},\beta)$. მართლაც (14.3)-დან გამომდინარეობს, რომ $\beta_{k_0}$-ს საკმაოდ მცირე მიდამოში სრულდება პირობა $\|\overline{x}-\overline{x}^{\,*}\|<r^*$, ანუ $\overline{x}(t)\in D^*$. თუ დავუშვებთ, რომ $\overline{x}(t)\in D^*$ პირობა არ სრულდება $[\beta_{k_0},\beta)$-ში, იარსებებს წერტილი $\beta^*\in[\beta_{k_0},\beta)$ $\overline{x}(t)\in D^*$, $t\in[\beta_{k_0},\beta^*)$ და

$$\big\|\overline{x}(\beta^*)-\overline{x}^{\,*}\big\|=r^*. \tag{14.5}$$

ცხადია, რომ

$$\overline{x}(\beta^*)=\overline{x}(\beta_{k_0})+\int\limits_{\beta_{k_0}}^{\beta^*}\overline{f}(\tau,\overline{x}(\tau))\,d\tau$$

და

$$\big\|\overline{x}(\beta^*)-\overline{x}^{\,*}\big\|\le\big\|\overline{x}(\beta_{k_0})-\overline{x}^{\,*}\big\|+\int\limits_{\beta_{k_0}}^{\beta^*}\big\|\overline{f}(\tau,\overline{x}(\tau))\big\|\,d\tau<\frac{r^*}{2}+M(\beta-\beta_{k_0})<\frac{r^*}{2}+\frac{r^*}{2}=r^*$$

(14.3) და (14.4)-ის გამი, რაც ეწინააღმდეგება (14.5)-ს.

ამრიგად გვაქვს, რომ

$$\overline{x}(t) \in D^* \quad \text{როცა} \quad t \in [\beta_{k_0}, \beta) \tag{14.6}$$

საკმარისად დიდი $k$-თვის, $\beta_k > \beta_{k_0}$, ამიტომ

$$\overline{x}(t) - \overline{x}(\beta_k) = \int\limits_{\beta_k}^{t} \overline{f}(\tau, \overline{x}(\tau))\, d\tau \quad \text{როცა} \quad t \in [\beta_k, \beta).$$

აქედან (14.6)-ის გამო გვაქვს $\left\|\overline{x}(t) - \overline{x}(\beta_k)\right\| \le M(\beta - \beta_k), \quad t \in [\beta_{k_0}, \beta)$ და

$$\varlimsup_{t\to\beta-} \left\|\overline{x}(t) - \overline{x}(\beta_k)\right\| \le M(\beta - \beta_k). \tag{14.7}$$

გვაქვს

$$\left\|\overline{x}(t) - \overline{x}^{\,*}\right\| \le \left\|\overline{x}(t) - \overline{x}(\beta_k)\right\| + \left\|\overline{x}(\beta_k) - \overline{x}^{\,*}\right\|.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე როცა $k \to +\infty$, მივიღებთ, რომ $\varlimsup\limits_{t\to\beta-} \left\|\overline{x}(t) - \overline{x}^{\,*}\right\| \le 0$. ეს კი ნიშნავს რომ $\lim\limits_{t\to\beta-} \overline{x}(t) = \overline{x}^{\,*}$. რადგან 1) დარღვეულია, გვაქვს $\beta < \sup I$ and $x^* \in D$. (14.1) სისტემისათვის დავსვათ კოშის ამოცანა

$$\overline{x}(\beta) = \overline{x}^{\,*}. \tag{14.8}$$

კოში-პეანოს თეორემის თანახმად (14.1), (14.8) ამოცანას $\beta$-ს საკმარისად მცირე მარჯვენა მიდამოში $[\beta, \beta_1]$, $\beta_1 > \beta$ გააჩნია $\overline{y}$ ამოხსნა.

განვიხილოთ $(\alpha, \beta_1]$-ში განსაზღვრული ასეთი ფუნქცია

$$\overline{z}(t) = \begin{cases} \overline{x}(t) & \text{როცა} \quad t \in (\alpha, \beta), \\ \overline{y}(t) & \text{როცა} \quad t \in [\beta, \beta_1). \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\overline{z}$ იქნება (14.1), (14.2) ამოცანის ამოხსნა. ამრიგად $\overline{x}$ ამოხსნა გაგრძელებადი აღმოჩნდა მარჯვნივ. $\square$

ანალოგიურ თეორემას ადგილი აქვს მარცხნივ გაგრძელების შესახებ.

**თეორემა 14.2.** (14.1), (14.2) ამოცანას აქვს არაგაგრძელებადი ამოხსნა.

**დამტკიცება.** საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი გაგრძელებადი ამოხსნა ამ ამოხსნების გადაბმით $(t_0, \overline{x}_0)$ წერტილში მივიღებთ (14.1), (14.2)ამოცანის არაგაგრძელებად ამოხსნას.

$\Gamma$-თი აღვნიშნოთ $D$ არის საზღვარი, ხოლო $\rho(\overline{x}, \Gamma)$-თი მანძილი $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი $\overline{x}$ წერტილიდან $\Gamma$-მდე. შემოვიღოთ რიცხვი $r_0 = \min\left\{\dfrac{\rho(\overline{x}_0, \Gamma)}{2}, 1\right\}$. მინიმუმს ვიღებთ იმიტომ, რომ შესაძლოა $D$ არე მთელ $\mathbb{R}^n$ სივრცეს დაემთხვეს და ამ შემთხვევაში $\rho(\overline{x}_0, \Gamma)$ უსასრულო იქნება. განვიხილოთ ზრდადი მიმდევრობა $\{\beta_k\}_{k=0}^{+\infty}$ ნამდვილი რიცხვებისა, ისეთი, რომ

$$\beta_k > t_0, \quad \beta_k < \beta_{k+1} \quad \text{და} \quad \lim_{k\to+\infty} \beta_k = \sup I. \tag{14.9}$$

აღვნიშნოთ $D_0 = \{\overline{x} : \|\overline{x} - x_0\| \le r_0\}$. ცხადია $D_0 \subset D$. გარდა ამისა აღვნიშნოთ
$$M_0 = \max\left\{\|\overline{f}_*(t,\overline{x})\|,\, (t,\overline{x}) \in [t_0,\beta_0] \times D_0\right\} \quad \text{და} \quad \delta_0 = \min\left\{\beta_0 - t_0, \frac{r_0}{M_0}\right\}.$$
თუ გავიხსენებთ კოში-პეანოს თეორემის დამტკიცებას, მაშინ შემოღებუ;ლი აღნიშვნების თანახმას დავასკვნით, რომ (14.1), (14.2) ამოცანას გააჩნია $[t_0, t_0 + \delta_0]$ შუალედში განსაზღვრული $\overline{x}_1$ ამოხსნა ისეთი, რომ $\overline{x}_1(t) \in D_0$ როცა $t \in [t_0, t_0 + \delta_0]$. ავიღოთ $t_1 \equiv t_0 + \delta_0$ და (14.1) განტოლებისთვის დავსვათ კოშის ამოცანა
$$\overline{x}(t_1) = \overline{x}_1(t_1) \tag{14.2'}$$
საწყის პირობებში. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, ანალოგიურად ავაგებთ რიცხვთა მიმდევრობებს
$$t_k = t_{k-1} + \delta_{k-1}, \quad \overline{x}(t_k) = \overline{x}_k(t_k), \quad r_k = \min\left\{\frac{\rho(\overline{x}_k(t_k),\Gamma)}{2}, 1\right\},$$
$$D_k\{\overline{x} : \|\overline{x} - \overline{x}_k\| \le r_k\} \subset D,$$
$$M_k = \max\left\{\|\overline{f}(t,\overline{x})\| : (t,x) \in [t_k,\beta_k] \times D_k\right\},$$
$$\delta_k = \min\left\{\beta_k - t_k, \frac{r_k}{M_k}\right\}$$
და $[t_k, t_{k+1}]$ შუალედში სადაც $t_{k+1} = t_k + \delta_k$ განტოლებას გააჩნია $\overline{x}_{k+1}(t)$ ამოხსნა ასეთ საწყის პირობებში $\overline{x}(t_k) = \overline{x}_k(t_k)$. რადგან $\delta_k < \beta_k - t_k$ გვაქვს $t_{k+1} = t_k + \delta_k \le \beta_k < \sup I$, ასე რომ ზღვარი $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = t^* \in I$. $\overline{x}$ ფუნქცია $[t_0, t^*)$ შუალედში $\overline{x}(t) = \overline{x}_k(t)$ როცა $t_{k-1} \le t \le t_k$. ცხადია, რომ $\overline{x}$ იქნება (14.1), (14.2) ამოცანის ამოხსნა $[t_0, t^*)$-ში. ვაჩვენოთ, რომიგი არაგაგრძელებადია მარჯვნივ. დავუშვათ საწინააღმდეგი. მაშინ $t^* < \sup I$ და არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{t\to t^*-} \overline{x}(t) = \overline{x}^{\,*} \in D$. ხოლო $r^* \equiv \min\left\{\frac{3}{4}\,\rho(\overline{x}^{\,*},\Gamma), 2\right\}$ და $D^* \equiv \{\overline{x} : \|\overline{x} - \overline{x}^{\,*}\| \le r^*\} \subset D$. ვაჩვენოთ, რომ, გარკვეული ადგილიდან დაწყებული ყველი $D_k \subset D^*$.
$$M_k^* \equiv \max\left\{\|f(t,\overline{x})\| : (t,\overline{x}) \in [t_k,t_{k+1}] \times D_k\right\},$$
$$M^* = \max\left\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in [t_0,t^*] \times D\right\}.$$
$D_k \subset D$-ს გამო გვაქვს $M_k^* \le M^*$. გარდა ამისა, რადგან მანძილი $\overline{x}^{\,*}$-დან $D$ არის საზღვრამდე ადადებითია $\overline{x}_k \to \overline{x}^{\,*}$, ადვილი დასანახია, რომ $r_k > r_0$, სადაც $r_0$ რაღაც დადებითი რიცხვია. საბოლოოდ $\delta_k > \eta > 0$, ასე რომ $t_k > t_0 + k\eta \to +\infty$. მივიღეთ საწინააღმდეგო და თეორემა დამტკიცებულია. □

## დამხმარე ლიტერატურა

1. ა. ფ. ფილიპოვი, დიფერენციალური განტოლებების ამოცანათა კრებული. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1989.

2. გრ. ხაჟალია, დიფერენციალური განტოლებები. გამომცემლობა განათლება, თბილისი, 1983.