ფუნქციონალური ანალიზის საფუძვლები

თავი I

მეტრიკული სივრცეები

1.1. მეტრიკული სივრცის ცნება, მაგალითები

განმარტება 1. ვიტყვით, რომ M სიმრავლეზე განსაზღვრულია მეტრიკა თუ $M \times M$ დეკარტულ ნამრავლზე განსაზღვრულია ფუნქცია $\rho : M \times M \to R$, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M;$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in M;$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$ (სამკუთხედის უტოლობა);

4) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

სიმრავლეს რომელზედაც მოცემულია რაიმე მეტრიკა მერტრიკულ სივრცეს უწოდებენ, ხოლო მის ელემენტებს მეტრიკული სივრცის წერტილებს (ელემენტებს). თუ M სიმრავლეზე მოცემულია ρ მეტრიკა, ამ ფაქტს მოკლედ $\{M, \rho\}$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ.

მაგალითი 1. არაცარიელი M სიმრავლისათვის ფუნქცია

$$\rho\ (x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 & x \neq y, \end{cases}$$

განსაზღვრავს მეტრიკას (ასეთ შემთხვევაში M -ს იზოლირებულ წერტილთა სივრცეს უწოდებენ).

მაგალითი 2. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე ფუნქცია $\rho\ (x, y) = | x - y |$ განსაზღვრავს ბუნებრივ მეტრიკას.

ერთსადაიმავე სიმრავლეზე შესაძლებელია განმარტებული იყოს სხვადასხვა მეტრიკა.

მაგალითი 3. ვთქვათ X მეტრიკული სივრცეა ρ მეტრიკით. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ $\rho_1(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ ფუნქცია X სიმრავლეზე განსაზღვრავს ახალ მეტრიკას.

მაგალითი 4. R^n სიმრავლის ნებისმიერი ორი $x=(x_1,...,x_n)$ და $y=(y_1,...,y_n)$ წერტილისათვის ფუნქცია $\rho(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^2\right)^{1/2}$ R^n -ზე განსაზღვრავს ბუნებრივ მერტრიკას (ევკლიდური მეტრიკა). შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $1\le p\le\infty$ ფიქსირებული რიცხვისათვის ფუნქცია $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p\right)^{1/p}$ R^n სიმრავლეზე განსაზღვრავს მეტრიკას, რომელსაც შემდგომში R_p^n სიმბოლოთი ავღნიშნავთ (ვგულისხმობთ, რომ $\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le j\le n}|x_j-y_j|$).

$\rho_p(x,y)$ ფუნქციისათვის მეტრიკის აქსიომების შემოწმება სამკუთხედის უტოლობის გარდა ტრივიალურია. ხოლო სამკუთხედის უტოლობა შედეგია ანალიზის კურსიდან კარგად ცნობილი მინკოვსკის უტოლობის (დისკრეტული ვარიანტი):

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\quad(1\le p\le\infty).$$

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიურად შეგვიძლია განვმარტოთ C^n სიმრავლეზე მეტრიკა (C კომპლექსურ რიცხვთა ველია).

მაგალითი 5. l_p $(1\le p\le\infty)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ ყველა იმ $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ მიმდევრობათა ერთობლიობა , რომელთათვისაც

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p<\infty .$$

l_p სიმრავლისათვის ფუნქცია

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},\quad x,y\in l_p$$

განსაზღვრავს მეტრიკას . როცა $p=\infty$ სიმრავლე l_∞ შეიცავს ყველა იმ $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ მიმდევრობათა ერთობლიობა რომელთათვისაც $\sup_k|x_k|<\infty$ (შემოსაზღვრულ მიმდევრობათა სივრცე). l_∞ სიმრავლეზე მეტრიკა განისაზღვრება ტოლობით $\rho(x,y)=\sup_k|x_k-y_k|$.

მაგალითი 6. c სიმბოლოთი ავღნიშნოთ ყველა იმ $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ მიმდევრობათა ერთობლიობა , რომელთათვისაც არსებობს ზღვარი $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c სიმრავლისათვის ფუნქცია $\rho(x,y)=\sup_k |x_k-y_k|$, $x,y\in c$ განსაზღვრავს მეტრიკას.

მაგალითი 7. $C([a;b])$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ყველა უწყვეტ ფუნქციათა ერთობლიობას. ნებისმიერი $f,g\in C([a;b])$ ფუნქციისათვის ფუნქცია

$$\rho(f,g)=\max_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|$$

განსაზღვრავს მეტრიკას.

მაგალითი 8. $L_p(R)$ $(1\le p<\infty)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ R -ზე განსაზღვრულ ყველა იმ ზომად ფუნქციათა ერთობლიობა , რომელთათვისაც

$$\int_R |f(x)|^p dx<\infty \ .$$

ფუნქცია

$$\rho(f,g)=\left(\int_R |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p} , \quad f,g\in L_p(R)$$

$L_p(R)$ სიმრავლეზე განსაზღვრავს მეტრიკას. ანალოგიურად შეგვიძლია განვმართოთ $L_p(\Omega)$ $(1\le p\le\infty)$ მეტრიკული სივრცე, სადაც Ω წარმოადგენს R^n სივრცის რაიმე ზომად სიმრავლეს დადებითი ზომით.

განმარტება 2. ვთქვათ მოცემულია მეტრიკული სივრცე $\{M,\rho\}$ და M_1 არის M სიმრავლის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლე. M_1 სიმრავლეზე ცხადია ρ ფუნქცია განსზაზღვრავს მეტრიკას. $\{M_1,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეს $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის ქვესივრცე ს უწოდებენ.

განმარტება 3. ვთქვათ x_0 $\{M,\rho\}$ რაიმე მეტრიკული სივრცის წერტილია, ხოლო $\varepsilon>0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია . ყველა იმ $x\in M$ წერტილთა ერთობლიობას,

რომელთათვისაც $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ უწოდებენ x_0 წერტილის ε მიდამოს და მას $O_\varepsilon(x_0)$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ .

ნებისმიერი $r > 0$ რიცხვისათვის $O_r(x_0)$ სიმრავლეს აგრეთვე ვუწოდებთ ღია ბირთვს ცენტრით x_0 წერტილში და r რადიუსით. მის აღსანიშნავად შემდგომში ვისარგებლებთ სიმბოლოთი $B(x_0, r)$. ჩაკეტილ ბირთვს ცენტრით x_0 წერტილში და რადიუსით r ვუწოდებთ ყველა იმ $x \in M$ წერტილთა ერთობლიობას რომელთათვისაც $\rho(x, x_0) \le \varepsilon$ და მას $B[x_0, r]$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ.

განმარტება 4. ვთქვათ $\{x_n\}$ წარმოადგენს წერტილთა მიმდევრობას M სიმრავლიდან. ვიტყვით, რომ $x_0 \in M$ არის მოცემული მიმდევრობის ზღვარი თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N : \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad x_n \in O_\varepsilon(x_0). \qquad (1)$$

ცხადია (1) პირობა ტოლფასია ტოლობის $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

თუ სრულდება (1) მაშინ ვწერთ $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ და ვიტყვით, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია. თუ მეტრიკული სივრციდან აღებული წერტილთა მიმდევრობა კრებადია , მაშინ მას ერთადერთი ზღვარი გააჩნია. მართლაც თუ $x_n \to x_0$ და $y_n \to y_0$, როცა $n \to \infty$, მაშინ

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \to 0$$

როცა $n \to \infty$, ამიტომ $\rho(x, y) = 0$, საიდანაც მივიღებთ $x = y$.

განმარტება 5. $X \subset M$ სიმრავლეს ვუწოდებთ შემოსაზღვრულს $\{M, \rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში, თუ არსებობს $x_0 \in M$ და $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $M \subset O_\varepsilon(x_0)$.

ცხადია,რომ $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრციდან აღებული $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია $x_0 \in M$ წერტილისაკენ, მაშინ ის შემოსაზღვრულია. მართლაც: რადგან $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, ამიტომ

$$\exists C > 0 : \quad \rho(x_n, x_0) < C \quad \forall n \in N.$$

განმარტება 6. ვთქვათ G $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრცის რაიმე ქვესიმრავლეა. $x_0 \in M$ წერტილს ვუწოდებთ G სიმრავლის შეხების წერტილს , თუ x_0 წერტილის ნებისმიერი ε მიდამო შეიცავს G სიმრავლის ერთ მაინც წერტილს. G სიმრავლის ყველა შეხების

წერტილთა ერთობლიობას G სიმრავლის ჩაკეტვას უწოდებენ და მას $[G]$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. სიმრავლეს უწოდებენ ჩაკეტილს თუ ის ემთხვევა თავის ჩაკეტვას $G=[G]$.

განმარტება 7. x_0 წერტილის ε მიდამოს ყველა წერტილის ერთობლიობას გარდა x_0 წერტილისა უწოდებენ x_0 წერტილის ε გაჩხვლეტილ მიდამოს და მას შემდგომში $\overset{\circ}{O}_{\varepsilon}(x_0)$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ.

განმარტება 8. $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის $x_0\in M$ წერტილს უწოდებენ G $(G\subset M)$ სიმრავლის ზღვრულ წერტილს, თუ x_0 წერტილის ნებისმიერი გაჩხვლეტილი ε მიდამო შეიცავს G სიმრავლის ერთ მაინც წერტილს.

განმარტება 9. $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის G $(G\subset M)$ ქვესიმრავლისათვის $x_0\in G$ წერტილს უწოდებენ G სიმრავლის იზოლირებულ წერტილს თუ არსებობს x_0 წერტილის ε მიდამო , რომელიც არ შეიცავს G სიმრავლის არცერთ წერტილს გარდა x_0 წერტილისა.

მარტივია ჩვენება იმ ფაქტისა, რომ G სიმრავლის შეხების წერტილი ან მისი ზღვრული წერტილა ან იზოლირებული წერტილი. მაშასადამე G სიმრავლის ჩაკეტვა $[G]$ შედგება შემდეგი სამი ტიპის წერტილებისაგან: 1) G სიმრავლის იზოლირებული წერტილები, 2) G სიმრავლის ზღვრული წერტილები, რომლებიც G სიმრავლეს ეკუთვნიან, 3) G სიმრავლის ზღვრული წერტილები, რომლებიც G სიმრავლეს არ ეკუთვნიან.

თეორემა 1. იმისათვის, რომ x წერტილი იყოს G სიმრავლის შეხების წერტილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს G სიმრავლის წერტილებისაგან შემდგარი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ.

დამტკიცება. აუცილებლობა. თუ x წერტილი G სიმრავლის შეხების წერტილია , მაშინ x წერტილის ყოველი $O_{1/n}(x)$ მიდამო შეიცავს ერთ მაინც $x_n\in G$ წერტილს . ეს წერტილები ადგენენ მიმდევრობას, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ. საკმარისობა ცხადი დებულებაა. შევნიშნოთ, რომ თუ x წერტილი G სიმრავლის ზღვრული წერტილია , მაშინ $x_n\in O_{1/n}(x)\cap G$ წერტილები შეგვიძლია ავირჩიოთ წყვილწყვილად არატოლი. ანუ იმისათვის, რომ x წერტილი იყოს G სიმრავლის ზღვრული წერტილი აუცილებელია და საკმარისი , რომ რომ არსებობდეს G სიმრავლის წყვილწყვილად არატოლი წერტილებისაგან შემდგარი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ.

თეორემა 2. ჩაკეტვის ოპერაციას გააჩნია თვისებები:

1) $G\subset[G]$,

2) $[[G]]=[G]$,

3) თუ $G_1 \subset G_2$, მაშინ $[G_1]\subset[G_2]$,

4) $[G_1 \cup G_2]=[G_1]\cup[G_2]$.

დამტკიცება. 1) თვისება ცხადია, ვინაიდან სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი არის აგრეთვე მისი დაგროვების წერტილი.

ვთქვათ $x\in[[G]]$. მაშინ x წერტილის ნებისმიერ $O_\varepsilon(x)$ მიდამოში მოიძებნება წერტილი $x_1\in[G]$. ავღნიშნოთ $\varepsilon-\rho(x,x_1)=\varepsilon_1$ და განვიხილოთ $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ ბირთვი. ეს ბირთვი მთლიანად შედის $O_\varepsilon(x)$ ბირთვში. მართლაც თუ $z\in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, მაშინ $\rho(z,x_1)<\varepsilon_1$ და ვინაიდან $\rho(x,x_1)=\varepsilon-\varepsilon_1$, სამკუთხედის აქსიომის ძალით $\rho(z,x\ )<\varepsilon_1+(\varepsilon-\varepsilon_1)=\varepsilon$, ე.ი $z\in O_\varepsilon(x)$. ვინაიდან $x_1\in[G]$, ამიტომ $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ ნიდამოში მოიძებნება წერტილი $x_2\in G$. მაგრამ მაშინ $x_2\in O_\varepsilon(x)$. ვინაიდან $O_\varepsilon(x)$ არის x წერტილის წებისმიერი მიდამო, ამიტომ $x\ \in[G]$. დებულება 2) დამტკიცებულია. 3) დებულება ტრივიალურია. დავამტკიცოთ 4). თუ $x\in[G_1\cup G_2]$, მაშინ x ეკუთვნის ერთერთმათგანს $[G_1]$, $[G_2]$ სიმრავლეებიდან. ე.ი $[G_1\cup G_2]\subset[G_1]\cup[G_2]$. ვინაიდან $G_1\subset G_1\cup G_2$ და $G_2\subset G_1\cup G_2$ ამიტომ $[G_1\cup G_2]\supset[G_1]\cup[G_2]$ ჩართვა სამართლიანია 3) თვისების გამო.

განმარტება 10. M მეტრიკული სივრცის $x_0\in M$ წერტილს უწოდებენ G ($G\subset M$) სიმრავლის საზღვრის წერტილს თუ x_0 წერტილის ნებისმიერი ε მიდამო შეიცავს ერთ წერტილს მაინც G სიმრავლიდან და ერთ წერტილს მაინც $M\setminus G$ სიმრავლიდან.

G სიმრავლის ყველა საზღვრის წერტილს უწოდებენ G სიმრავლის საზღვარს და მას ∂G სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ნებისმიერი $G\subset M$ სიმრავლისათვის სამართლიანია $[G]=G\cup\partial G$ ტოლობა.

განმარტება 11. G სიმრავლის x_0 წერტილს უწოდებენ G ($G\subset M$) სიმრავლის შიგა წერტილს თუ არსებობს x_0 წერტილის $O_\varepsilon(x_0)$ მიდამო ისეთი, რომ $O_\varepsilon(x_0)\subset G$.

G სიმრავლეს ვუწოდებთ ღიას თუ მისი ნებისმიერი წერტილი მისი შიგა წერტილია.

ცხადია ჩვენი განმარტების მიხედვით ნებისმიერი $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი წერტილი M სიმრავლის შიგა წერტილია. M სიმრავლე ერთდროულად ღიაცაა და ჩაკეტილიც.

მაგალითი 9. ვთქვათ $\Delta=(-1,2)$. განვიხილოთ მეტრიკული სივრცე $\{\Delta,\rho\}$, სადაც $\rho(x.y)=|x-y|, x,y\in\Delta$. ცხადია Δ ერთდროულად ღიაცაა და ჩაკეტილიც $\{\Delta,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში, თუმცა $\{R,\rho\},(\rho(x,y)=|x-y|)$ მეტრიკულ სივრცეში Δ ღიაა მაგრამ არ არის ჩაკეტილი). $(0;1)$ ინტერვალი $\{\Delta;\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში ღიაა, მისი ჩაკეტვა $[0;1]$ სიმრავლეა. $(0,2)$ სიმრავლე აგრეთვე ღიაა $\{\Delta;\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში, ხოლო მისი ჩაკეტვა $[0;2)$ სიმრავლეა.

თეორემა 3. ვთქვათ $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცია. G ($G\subset M$) სიმრავლე ღიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $M\setminus G$ ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ G ღიაა და $x_0\in G$. მაშინ $\exists\varepsilon>0: \quad O_\varepsilon(x_0)\subset G,$ ამიტომ $x_0\in G$ წერტილი ვერ იქნება $F=M\setminus G$ სიმრავლის შეხების წერტილი. მაშასადამე F სიმრავლის ნებისმიერი შეხების წერტილი ეკუთვნის F სიმრავლეს., ე.ი F ჩაკეტილია.

ვთქვათ $F=M\setminus G$ ჩაკეტილია და $x_0\in G$. მაშინ x_0 არ შეიძლება იყოს F სიმრავლის ზღვრული წერტილი, ამიტომ

$$\exists\varepsilon>0: \quad \forall x\in O_\varepsilon(x_0) \quad x\notin F,$$

მაშასადამე $O_\varepsilon(x_0)\subset G$.

თეორემა 4. ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი ერთობლიობის გაერთიანება ღია სიმრავლეა. . ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი ერთობლიობის თანაკვეთა ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $G_\alpha\subset M$ ღია სიმრავლეთა რაიმე ერთობლიობა (სასრული ან უსასრულო). თუ $x_0\in G=\bigcup_\alpha G_\alpha$, მაშინ $\exists\alpha: \quad x\in G_\alpha$. ვინაიდან G_α ღიაა, ამიტომ $\exists\varepsilon>0; \quad O_\varepsilon(x_0)\subset G_\alpha$ და მაშასადემე $O_\varepsilon(x_0)\subset G$; ე.ი G ღიაა.

მეორე დებულება შედეგია უკვე დამტკიცებულის. მართლაც ვთქვათ მოცემულია ჩაკეტილ სიმრავლეთა $F_\alpha\subset M$ რაიმე ერთობლიობა და $F=\bigcap_\alpha F_\alpha$. სიმრავლეები $G_\alpha=M\setminus F_\alpha$ ღია სიმრავლეებია და ამიტომ $G=\bigcup_\alpha G_\alpha$ ღია სიმრავლეა. ვინაიდან $F=M\setminus G$, ამიტომ F ჩაკეტილია.

თეორემა 5. სასრული რაოდენობა ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა ღია სიმრავლეა. სასრული რაოდენობა ჩაკტილ სიმრავლეთა გაერთიანება ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ G არის ღია $G_1,...,G_n$ სიმრავლეთა თანაკვეთა. თუ G ცარიელია ის ღიაა. ვთქვათ $x_0 \in G$. მაშინ $x_0 \in G_j$ $j=1,...,n$. ვინაიდან G_j ღია სიმრავლეებია ამიტომ $\forall j \quad \exists r_j > 0: \quad O_{r_j}(x_0) \subset G_j$. ცხადია, თუ $r = \min_j r_j$, მაშინ $O_r(x_0) \subset G$, ე.ი. G ღია სიმრავლეა. თეორემის მეორე დებულება შედეგია უკვე დამტკიცებული პირველი დებულების (როგორც თეორემა 4-ში).

განმარტება 12. ვთქვათ A და B სიმრავლეები M მეტრიკული სივრცის რაიმე ქვესიმრავლეებია. A სიმრავლეს უწოდებენ ყველგან მკვრივს B სიმრავლეში თუ $B \subset [A]$. კერძოდ A სიმრავლე ყველგან მკვრივია M მეტრიკულ სივრცეში, თუ მისი ჩაკეტვა $[A]$ ემთხვევა M სიმრავლეს. A სიმრავლეს უწოდებენ არსად მკვრივს M სიმრავლეში , თუ ის არ არის მკვრივი M მეტრიკული სივრცის არცერთ ბირთვში. ეს უკანასკნელი ტოლფასია შემდეგის : ნებისმიერი $B(x,r) \subset M$ ბირთვისათვის არსებობდეს მეორე ბირთვი $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$, რომელიც არ შეიცავს A სიმრავლის არცერთ წერტილს.

განმარტება 13. M მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ სეპარაბელურს თუ არსებობს თვლადი სიმრავლე რომელიც ყველგან მკვრივია M -ში.

ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. მაშასადამე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე ბუნებრივი მეტრიკით სეპარაბელური სივრცეა. ანალოგიურად R^n მეტრიკულ სივრცეში (ბუნებრივი მეტრიკით) წერტილთა ერთობლიობა, რომელთა ყველა კორდინატი რაციონალურია ყველგან მკვრივია R^n -ში. მაშასადამე R^n სეპარაბელურია.

განვიხილოთ დისკრეტული სივრცე (მაგალითი 1) შევნიშნოთ, რომ დისკრეტული სივრციდან აღებული ნებისმიერი არაცარიელი A სიმრავლისათვის $[A]=A$. მაშასადამე დისკრეტული სივრცე სეპარაბელურია მხოლოდ მაშინ როცა ის თვლადია.

მაგალითი 10. $l_p,\ 1 \le p < \infty$ სივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. ავაგოთ თვლადი $G \subset l_p$ სიმრავლე ისეთი, რომ $[G]=l_p$.

ნებისმიერ $x \in l_p;\ x=(x_1,x_2,...)$ წერტილს შევუსაბამოთ l_p სივრცის წერტილებისგან შემდგარი $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრომა შემდეგნაირად:

$$x^{(1)} = (x_1, 0, 0, ..., 0, ...)$$
$$x^{(2)} = (x_1, x_2, 0, ..., 0, ...)$$
$$.......................................$$
$$.......................................$$
$$x^{(n)} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..)$$
$$......................................$$

ვინაიდან $\lim_{n\to\infty}\rho(x, x^{(n)}) = 0$, ამიტომ მანძილი

$$\rho(x, x^{(n)}) = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^p \right\}^{1/p}$$

შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე , როცა n მცირეა. $\{x^{(n)}\}$ მიმდევრობასთან ერთად განვიხილოთ ახალი $\{x_*^{(n)}\}$ მიმდევრობა, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$x_*^{(1)} = (r_1, 0, 0, ...)$$
$$x_*^{(2)} = (r_1, r_2, 0, ...)$$
$$.......................................$$
$$.......................................$$
$$x_*^{(n)} = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0, ..)$$
$$......................................$$

სადაც, $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ რაციონალური რიცხვები განვსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$| x_j - r_j | \le \frac{\varepsilon}{2^{1+j/p}}, \quad \forall j \in N \, .$$

გვექნება

$$\rho(x^{(n)}, x_*^{(n)}) = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i|^p\right\}^{1/p} < \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{2^{p+i}}\right\}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მეორე მხრივ თუ n-ს ავიღებთ საკმაოდ დიდს გვექნება

$$\rho(x^{(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

G სიმრავლის როლში ავიღოთ ყველა $(r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0, ...)$ სახის რაციონალურწევრებიანი მიმდევრობების ერთობლიობა, რომელიც ქმნის თვლად სიმრავლეს. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის მიხედვით დავასკვნით, რომ $x \in l_p$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $x_*^{(n)} \in G$ წერტილი ისეთი, რომ

$$\rho(x, x_*^{(n)}) \le \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, x_*^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

მაშასადამე G საძიებელი სიმრავლეა.

მაგალითი 11. l_∞ არასეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ l_∞ სიმრავლის ერთი სპეციპიკური G ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა იმ $x \in l_\infty$; $x = (x_1, x_2, ...)$ წერტილებისაგან რომელთათვისაც x_i კორდინატები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას 0 და 1-ს. G სიმრავლე არათვლადია (ვინაიდან ნებისმიერი ასეთი ტიპის მიმდევრობა შეგვიძლია გავაიგივეოთ $[0;1]$ სეგმენტის რომელიღაც რიცხვის ორობით გაშლასთან) . G სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი ორი განსხვავებული x, y წერტილისათვის $\rho(x, y) = 1$. G სიმრავლის თითოეულ წერტილისათვის ავაგოთ ბირთვი ცენტრით ამ წერტილში და 1/3 რადიუსით. ეს ბირთვები ცხადია არათანამკვეთია. თუ l_∞ სიმრავლეში არსებობს თვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლე, მაშინ ბირთვებში უნდა აღმოჩნდეს ამ სიმრავლის თითო ელემენტიც მაინც, რაც ვერ მოხდება ვინაიდან ბირთვების რაოდენობა არათვლადია.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის

1.იპოვეთ $C([0,1])$ მეტრიკულ სივრცეში მანძილი f და g ფუნქციებს შორის $\rho(f,g)$ მანძილი (ρ ბუნებრივი მეტრიკაა $C([0,1])$-ში) თუ :

ა) $f(x)=2x$. $g(x)=x^2-4x+1$;

ბ) $f(x)=\sin x$. $g(x)=\cos x$;

გ) $f(x)=\sin^2 x$. $g(x)=\cos^2 x$.

2. იპოვეთ $L^p([0;1]),(1\le p<\infty)$ მეტრიკულ მეტრიკულ სივრცეში f და g ფუნქციებს შორის $\rho(f,g)$ მანძილი (ρ ბუნებრივი მეტრიკაა $L^p([0;1]),(1\le p<\infty)$-ში) თუ :

ა) $f(x)=2x^5+1$. $g(x)=1$;

ბ) $f(x)=\sin^{1/p}(x)+4$. $g(x)=4$;

გ) $f(x)=\exp^{1/p}(x)+8$. $g(x)=8$.

3. იპოვეთ l_2 მეტრიკულ სივრცეში მანძილი x და y მიმდევრობებს შორის $\rho(x,y)$ მანძილი (ρ ბუნებრივი მეტრიკაა l_2-ში) თუ :

ა) $x=(1,0,0,....)$, $y=(0,1,0,....)$;

ბ) $x=(1,1/2,1/3,...,1/n,...)$, $y=(0,0,1/3,...,1/n,...)$;

გ) $x=(1,1/2^2,1/3^2,...,1/n^2,...)$, $y=(1,1,1/3^2,...,1/n^2,...)$.

4. იკვეთებიან თუ არა $C([0,1])$ სივრცეში ბირთვები $B(f,1/3)$ და $B(g,1/6)$ თუ $f(x)=x^2$ და $g(x)=x^2-\frac{3}{4}x$.

5. იკვეთებიან თუ არა l_∞ სივრცეში ბირთვები $B(x,1/2)$ და $B(y,1/4)$ თუ $x=(1,1/2,1/3,...,1/n,...)$ და $x=(0,0,1/3,...,1/n,...)$.

6.დაამტკიცეთ, რომ $R_+=\{x\in R; x>0\}$ სიმრავლეზე ფუნქცია $\rho(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ განსაზღვრავს მეტრიკას.

7.შემდეგი ფუნქციებიდან ა) $\rho(x,y)=(x-y)^2$ ბ) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ გ) $\rho(x,y)=\min\{x,|1-y|\}$ რომელი განმარტავს მეტრიკას R-ზე.

8. აჩვენეთ, რომ $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}$ ფუნქცია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრავს მეტრიკას.

9. ვთქათ $X=(-\pi/2,\pi/2)$. აჩვენეთ, რომ ფუნქციები $\rho(x,y)=|x-y|$ და $\rho(x,y)=|tgx-tgy|$ განსაზღვრავს X -ზე ეკვივალენტურ მეტრიკებს. (რაიმე X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ორ მეტრიკას უწოდებენ ექვივალენტურს თუ ამ სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი მიმდევრობა ერთდროულად კრებადია ან განშლადი მოცემული მეტრიკების მიმართ).

10.ვთქვათ X მეტრიკული სივრცეა ρ მეტრიკით. დაამტკიცეთ, რომ $\rho_1=\dfrac{\rho}{1+\rho}$ X სიმრავლეზე განსაზღვრავს მეტრიკას.

11. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერ მეტრიკულ სივრცეში $B(x,r)$ ბირთვი ღია სიმრავლეა.

12. მოიყვანეთ მეტრიკული სივრცის მაგალითი, რომელშიც ინტერვალი $(0;1)$ არის:

ა) ღია ბ) ჩაკეტილი გ) ღია და ჩაკეტილი: ზ) არც ჩაკეტილია და არც ღია.

13. დაამტკიცეთ, რომ დისკრეტულ სივრცეში ნებისმიერი სიმრავლე ერთდროულად ჩაკეტილიცაა და ღიაც.

14. მოიყვანეთ მეტრიკული სივრცის მაგალითი, რომელშიც ა) არსებობს ღია ბირთვი რომელიც აგრეთვე ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაგრამ არა ჩაკეტილი ბირთვი; ბ) არსებობს ჩაკეტილი ბირთვი, რომელიც აგრეთვე ღია სიმრავლეა, მაგრამ არა ღია ბირთვი.

15. შეიძლება თუ არა, რომ რაიმე მეტრიკული სივრცის ბირთვი დიდი რადიუსით იყოს ქვესიმრავლე ბირთვისა უფრო მცირე რადიუსით ?

16. მოიყვანეთ მეტრიკული სივრცის მაგალითი რომლის იზოლირებულ წერტილთა სიმრავლე არათვლადია.

17. ვთქვათ A და B სიმრავლეები M მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლეებია. ცნობილია, რომ $[A]\subset[B]$. გამომდინარეობს თუ არა აღნიშნული პირობიდან $A\subset B$?

18. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ მეტრიკულ სივრცეში $[B(x,r)]\subset B[x,r]$. შეიძლება თუ არა, რომ $[B(x,r)]\not\subset B[x,r]$?

19. ვთქვათ f ფუნქცია $[0,\infty)$ სიმრავლეზე უწყვეტად წარმოებადია და აკმაყოფილებს პირობებს ა) $f(0)=0$ და $f(x)>0$, როცა $x>0$; ბ) f არაა კლებადი , როცა $x\geq 0$; გ) $f(x)/x$ არაა ზრდადი $x>0$ სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ $\rho(x,y)=f(|x-y|)$ განსაზღვრავს მეტრიკას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

20. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განვმარტოთ მეტრიკა $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$. აჩვენეთ, რომ სიმრავლეები $F_n=[n,\infty),\ n=1,2,...$ ჩაკეტილი და შემოსაზღვრულია და $\cap_{n=1}^{\infty}F_n=\varnothing$.

21. ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე განვმარტოთ მეტრიკა

$$\rho(n,m)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}, & n\neq m,\\ 0, & n=m.\end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ (N,ρ) სივრცე სრულია და ჩაკეტილი $B\,[n,1+1/2n]$ $n=1,2,....$ ბირთვებს თანაკვეთა ცარიელია.

22. აჩვენეთ, რომ $L^p(E),\quad (0<p<1)$ სიმრავლეზე ფუნქცია $\rho(f,g)=\int\limits_E|\,f(x)=g(x)|^p dx$ განსაზღვრავს მეტრიკას.

23. ვთქვათ s ყველა რიცხვით მიმდევრობათა სიმრავლეა. განვიხილოთ s სიმრავლეზე ორი მეტრიკა $\rho_1(x,y)=\sup\limits_n\dfrac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ და $\rho_2(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$. აჩვენეთ, რომ პირველი მეტრიკის მიმართ s არასეპარაბელურია ხოლო მეორე მეტრიკის მიმართ კი სეპარაბელური.

24.ვთქვათ $S([a,b])$ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ზომად ფუნქციათა სიმრავლეა (ერთმანეთის ექვივალენტური ფუნქციები გაიგივებულია). აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $\rho(f,g)=\int\limits_a^b\dfrac{|\,f(x)-g(x)|}{1+|\,f(x)_g(x)|}dx$ $S([a,b])$ -ზე განსაზღვრავს მეტრიკას და ამ მეტრიკით კრებადობა ტოლფასია ფუნქციათა მიმდევრობის ზომით კრებადობის.

25. ვთქვათ $g(t)$ $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული რაიმე ფიქსირებული უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ სიმრავლე, რომელიც $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა იმ უწყვეტი $f(t)$ ფუნქციებისა, რომელთათვისაც $f(t)<g(t),\ \forall t\in[a,b]$. აჩვენეთ, რომ ეს სიმრავლე ღიაა $C([a;b])$ მეტრიკულ სივრცეში.

26. ვთქვათ $M\subset R$ რაიმე ფიქსირებული სიმრავლეა. ვთქვათ $A_M=\{x(t)\in C([a,b]):x(t)\in M\ \ \forall x\in[a,b]\}$. აჩვენეთ, რომ A_M ჩაკეტილი სიმრავლეა $C([a,b])$-ში , თუ M ჩაკეტილია და A_M ღიაა თუ M ღიაა.

27. ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად ნებისმიერი $f\in C([a;b])$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ალგებრული პოლინომი p ისეთი,რომ

$\rho_C(f,p)<\varepsilon$. ისარგებლეთ ამ დებულებით და დაამტკიცეთ, რომ $C([a;b])$ სივრცე სეპარაბელურია.

28. დაამტკიცეთ, რომ $L^p([a;b]),(1\le p<\infty)$ სეპარაბელური სივრცეა.

29.გამოიკვლიეთ $C([0,1])$ სივრცეში მოცემული მიმდევრობების კრებადობის საკითხი

ა) $x_n(t)=t^n-t^2$;

ბ) $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$;

გ) $x_n(t)=t^n-t^2$;

დ) $x_n(t)=e^{-nt}$.

30.გამოიკვლიეთ l_2 სივრცეში მოცემული მიმდევრობების კრებადობის საკითხი

ა) $x_n=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},....,\frac{1}{\sqrt{n}},0,0,.....\right)$;

ბ) $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}}_{n},0,0,....\right)$;

გ) $x_n=(0,0,....,0,n,0,0,.....)$;

31.გამოიკვლიეთ $L_2([0;1])$ სივრცეში მოცემული მიმდევრობების კრებადობის საკითხი

ა) $x_n(t)=t^n$;

ბ) $x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}, & t\in[0;1/n)\\ 0 & t\in[1/n,1]\end{cases}$;

32. მოიყვანეთ მიმდევრობის მაგალითი, რომელიც

ა) კრებადია l^∞-ში მაგრამ არაა კრებადი l^1 სივრცეში ;

ბ) კრებადია l^2-ში მაგრამ არაა კრებადი l^1 სივრცეში;

გ) კრებადია l^∞-ში მაგრამ არაა კრებადი l^2 სივრცეში.

1.2. სრული და არასრული მეტრიკული სივრცეები. სივრცის გასრულება.

განმარტება 1. $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის წერტილებისაგან შემდგარ $\{x_n\}$ მიმდევრობას უწოდებენ ფუნდამენტურს (კოშის მიმდევრობას) თუ

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon\in N:\quad \forall n,m\ge N_\varepsilon\quad \rho(x_n,x_m)<\varepsilon,\quad \text{(კოშის პირობა)}\ . \tag{1}$$

ცხადია,რომ თუ M მეტრიკული სივრციდან აღებული $\{x_n\}$ წერტილთა მიმდევრობა კრებადია, მაშინ ის ფუნდამენტალურია. ე.ი. თუ

$$\exists x_0\in M:\quad \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0\,, \tag{2}$$

მაშინ მიმდევრობა კოშის პირობას აკმაყოფილებს. მართლაც თუ (2) შესრულებულია , მაშინ

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_\varepsilon:\quad \forall n\ge N_\varepsilon\qquad \rho(x_n,x_0)<\varepsilon/2\ ,$$

ამიტომ

$$\forall n,m\ge N_\varepsilon\quad \rho(x_n,x_m)\le\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,x_m)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\,.$$

შესაძლებელია, რომ რაიმე მეტრიკულ სივრცეში მიმდევრობის ფუნდამენტალურობიდან არ გამომდინარეობდეს მიმდევრობის კრებადობა .(როგორც კლასიკური ანალიზიდან ვიცით ნამდვილრიცხვთა მეტრიკულ სივრცეში ბუნებრივი მეტრიკით ეს ორი ცნება ერთმანეთის ტოლფასია).

მაგალითი 1. განვიხილოთ

$$M=\left\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\} \tag{3}$$

სიმრავლეზე ბუნებრივი მეტრიკა ($\rho(x,y)=|x-y|,\ x,y\in M$). ამ სიმრავლიდან აღებული მიმდევრობა

$$x_n=\frac{1}{n};\quad n\in N\,, \tag{4}$$

ცხადია ფუნდამენტურია, მაგრამ მას M სიმრავლეში ზღვარი არ გააჩნია. ცხადია თუ (3) სიმრავლეში ჩავრთავთ $x_0=0$, მაშინ (4) მიმდევრობა კრებადი იქნება.

განმარტება 2. მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ სრულს თუ ამ სიმრავლიდან აღებულ ნებისმიერ ფუნდამენტალურ მიმდევრობას ზღვარი გააჩნია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ არასრულს.

როგორც კლასიკური ანალიზიდანაა ცნობილი R, R^n სივრცეები სრული მეტრიკული სივრცეებია. მაგალით 1-ში მოყვანილი მეტრიკული სივრცე არასრულია.

მაგალითი 2. $C([a;b])$ სიმრავლე $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ მეტრიკით სრული მეტრიკული სივრცეა.

დამტკიცება. ვთქვათ $f_n(x), n\in N$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა $C([a;b])$ სივრცეში. მაშინ ნებისმიერად ფიქსირებული $x\in[a,b]$ წერტილისათვის რიცხვითი მიმდევრობა $f_n(x), n\in N$ ფუნდამენტალურია ,და ამიტომ გააჩნია ზღვარი, რომელიც ავღნიშნოთ $f(x)$ -ით. ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0$. მართლაც მიმდევრობის ფუნდამენტალურობის გამო

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_\varepsilon:\quad \forall n,m\geq N_\varepsilon\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

ნებისმიერი $x\in[a,b]$ წერტილისათვის . თუ x -ს გავაჩერებთ და გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$ ყოველი ფიქსირებული $n\geq N_\varepsilon$ ინდექსისათვის მივიღებთ

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon\quad \forall x\in[a;b].$$

მაშასადამე $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციათა $f_n(x), n\in N$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ. ანალიზის ცნობილი თეორემის ძალით $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და ის ეკუთვნის $C([a;b])$ სივრცეს, ამასთანავე $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0$. მაშასადამე $C([a;b])$ სრულია.

შევნიშნოთ, რომ $C([a;b])$ სივრცეში კრებადობა ტოლფასია ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კრებადობის.

მაგალითი 3. $C([-1;1])$ სიმრავლე ინტეგრალური

$$\rho(f,g)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx \tag{5}$$

მეტრიკით არასრული მეტრიკული სივრცეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x)=\begin{cases}-1 & x\in[-1;-1/n],\\ nx & x\in[-1/n;1/n],\\ & x\in[1/n;1].\end{cases} \qquad (6)$$

ნებისმიერი n და p ნატურალური რიცხვებისათვის გვაქვს

$$\int_{-1}^{1}|f_{n+p}(x)-f_n(x)|dx\le\int_{-1}^{1}|f_{n+p}(x)-sgn(x)|dx+$$
$$+\int_{-1}^{1}|sgn(x)-f_n(x)|dx=\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n},$$

ამიტომ (6) მიმდევრობა ფუნდამენტალურია (5) მეტრიკის მიმართ. ადვილია ჩვენება, რომ ამ მეტრიკით (6) მიმდევრობა კრებადია წყვეტილი ფუნქციისაკენ $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$ $x\in[-1;1]$. ვაჩვენოთ, რომ (6) მიმდევრობას $C([a;b])$ სივრცეში ზღვარი არ გააჩნია. დაუშვათ წინააღმდეგი . ვთქვათ (6) მიმდევრობა (5) მეტრიკით კრებადია უწყვეტი

$g(x)$ $x\in[-1;1]$ ფუნქციისაკენ. მაშინ $\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=0$, ამასთანავე ფუნქცია $F(x)=f(x)-g(x)$ უწყვეტია $[-1;1]$ სეგმენტის ყველა წერტილში გარდა $x=0$ წერტილისა. მაშასადამე $g(x)=f(x)$, როცა $x\in[-1;1]-\{0\}$, რაც ეწინააღმდეგება იმას, რომ $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშასადამე $C([-1;1])$ არასრულია (5) მეტრიკით.

შენიშვნა. ზემოთ დამტიცების პროცესში ჩვენ გამოვიენეთ შემდეგი დებულება: თუ რაიმე $f(x)$ ფუნქციისათვის რაიმე Δ შუალედზე $\int_{\Delta}|f(x)|dx=0$, მაშინ $f(x)=0$ ყველა იმ $x\in\Delta$ წერტილში სადაც f უწყვეტია.

მართლაც, თუ f უწყვეტია $x_0\in\Delta$ წერტილში და $f(x_0)\ne 0$, მაშინ არსებობს $O(x_0)$ მიდამო რომელზედაც $|f(x)|>0$. მაშინ მივიღებთ წინააღმდეგობას

$$\int_{\Delta}|f(x)|dx\ge\int_{O(x_0)\cap\Delta}|f(x)|dx>0.$$

მაგალითი 4. c სრული მეტრიკული სივრცეა.

c სიმრავლე შეიცავს ყველა იმ $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$ მიმდევრობას რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty}\xi_n$ არსებობს. ფუნქცია

$$\rho(\xi,\zeta)=\sup_k|\xi_k-\zeta_k|\ ,\ \xi,\zeta\in c \qquad (7)$$

განსაზღვრავს მეტრიკას c სიმრავლეზე. ვაჩვენოთ c სივრცის სისრულე. ვთქვათ $\{x_n\}$ ამ სივრცის რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. ამ მიმდევრობის თითოეული წევრი არის $x_n = \{\xi_n^k\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim_{k\to\infty} \xi_n^k$ არსებობს. (7) - დან $\{x_n\}$ მიმდევრობის ფუნდამენტალურობის გამო გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon \quad | \xi_n^k - \xi_m^k | < \varepsilon \quad \forall k . \tag{8}$$

(8)- დან დავასკვნით, რომ ყოველი ფიქსირებული k ნომრისათვის რიცხვითი $\{\xi_n^k\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და მაშასადამე კრებადი. ვთქვათ

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n^k = \xi^k .$$

(8) პირობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$; გვექნება

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad | \xi_n^k - \xi^k | \leq \varepsilon \quad \forall k,$$

ე.ი.

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad \sup_k | \xi_n^k - \xi^k | \leq \varepsilon \quad \forall k.$$

მაშასადამე გვაქვს $x_n \to x = \{\xi^k\}$ როცა $n \to \infty$.

დაგვრჩა დასამტკიცებელი, რომ $\{\xi^k\}$ მიმდევრობა კრებადია (ანუ $\{\xi^k\} \in c$).

ნებისმიერი k, p n ინდექსებისათვის გვაქვს

$$| \xi^k - \xi^{k+p} | \leq | \xi^k - \xi_n^k | + | \xi_n^k - \xi_n^{k+p} | + | \xi_n^{k+p} - \xi^{k+p} | \leq \leq 2\rho(x, x_n) + | \xi_n^{k+p} - \xi^{k+p} | . \tag{9}$$

ვინაიდან $x_n \to x$, ამიტომ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad \rho(x, x_{n_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

ხოლო $x_{n_\varepsilon} = \{\xi_{n_\varepsilon}^k\}$ მიმდევრობის კრებადობის გამო

$$\exists K_\varepsilon : \quad \forall k \geq K_\varepsilon, \forall p \quad | \xi_{n_\varepsilon}^k - \xi_{n_\varepsilon}^{k+p} | < \varepsilon / 3 ,$$

ამიტომ $\forall k \geq N_\varepsilon, \forall p \quad | \xi^k - \xi^{k+p} | < \varepsilon$. მაშასადამე $x = \{\xi^k\}$ კრებადია.

მაგალითი 5. l_p, $(1 \leq p < \infty)$ სიმრავლე $\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | x_k - y_k |^p \right)^{1/p}$, $x, y \in l_p$ მეტრიკით სრული მეტრიკული სივრცეს წარმოადგენს.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n, ...)$, $k \in N$ მიმდევრობა l_p სივრცეში ფუნდამენტალურია. ვაჩვენოთ, რომ ის კრებადია. გვაქვს

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \qquad \rho(x_k, x_l) < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq N_\varepsilon,$$

ანუ გვაქვს

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} | x_k^i - x_l^i |^p \right\}^{1/p} < \varepsilon . \tag{10}$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან დავასკვნით, რომ ნებისმიერი i ნომრისათვის და $\forall k, l \geq N_\varepsilon$ $| x_k^i - x_l^i |^p < \varepsilon^p$. მაშასადამე $\forall i \in N$ ნომრისათვის მიმდევრობა $\{x_k^i\}$ ფუნდამენტალურია. ავღნიშნოთ $\lim_{k \to \infty} x_k^i = x_0^i$. ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობა $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, ...)$ ეკუთვნის l_p სივრცეს.

(10)- დან გვექნება $\sum_{i=1}^{\infty} | x_k^i - x_l^i |^p < \varepsilon^p$. საიდანაც გვექნება, რომ

$$\sum_{i=1}^{m} | x_k^i - x_l^i |^p < \varepsilon^p , \tag{11}$$

ნებისმიერი m ინდექსისათვის.

(11)-ში გადავიდეთ ზღვარზე $l \to \infty$ (m ფიქსირებულია). მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m} | x_k^i - x_0^i |^p \leq \varepsilon^p \ . \tag{12}$$

(12) უტოლობა სრულდება ნებისმიერი ფიქსირებული m ინდექსისათვის, ამიტომ გვექნება

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x_k^i - x_0^i |^p \leq \varepsilon^p . \tag{13}$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან და $\sum_{i=1}^{\infty} | x_k^i |^p$ მწკრივის კრებადობიდან დავასკვნით, რომ $\sum_{i=1}^{\infty} | x_0^i |^p < \infty$. ე. ი. $x_0 \in l_p$. (13) უტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

კლასიკური ანალიზის ერთ-ერთ ფუნდამენტალურ თეორემას წარმოადგენს ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპი, რომლის მიხედვითაც ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას თუ მათი სიგრძეები ნულისკენ მიდის ერთადერთი საერთო წერტილი გააჩნია. მეტრიკულ სივრცეთა თეორიაში ანალოგიურ როლს თამაშობს ერთმანეთში ჩალაგებულ ბირთვთა პრინციპი.

თეორემა 1. *(თეორემა ჩალაგებული ბირთვების შესახებ)* იმისათვის, რომ მეტრიკული სივრცე სრული იყოს აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სივრციდან აღებულ ნებისმიერ ერთმანეთში ჩალაგებულ ჩაკეტილ ბირთვებს, რომელთა რადიუსები ნულისკენ მიდის გააჩნდეს არაცარიელი თანაკვეთა.

დამტკიცება. *აუცილებლობა.* თქვათ M სრული მეტრიკული სივრცეა და მოცემულია ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილი ბირთვების მიმდევრობა

$$B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset .... \supset B[x_n, r_n] \supset ...$$

სადაც $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. ბირთვების ცენტრთა მიმდევრობა $\{x_n\}$ ფუნდამენტალურია, ვინაიდან , როცა $m > n$ $\rho(x_n, x_m) < r_n$, ხოლო $r_n \to 0$, როცა $n \to \infty$. M სრული მეტრიკული სივრცეა, ამიტომ არსებობს ზღვარი $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. მაშინ $x = \bigcap_n B[x_n, r_n]$. მართლაც, $B[x_n, r_n]$ ბირთვი შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წევრს გარდა შესაძლოა $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ წერტილებისა. ამიტომ x წერტილი წარმოადგენს ნებისმიერი $B[x_n, r_n]$ ბირთვის შეხების წერტილს. ვინაიდან $B[x_n, r_n]$ ბირთვები ჩაკეტილია, ამიტომ x ყველა ბირთვის საერთო წერტილია.

საკმარისობა. ვთქვათ $\{x_n\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. ვაჩვენოთ, რომ მას ზღვარი გააჩნია. ფუნდამენტალურობის გამო შეგვიძლია ვიპოვოთ ნომერი n_1 ისეთი,რომ როცა $n \ge n_1$, მაშინ $\rho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$. ავაგოთ $B[x_{n_1}, 1]$ ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით x_{n_1} და რადიუსით 1. ავირჩიოთ x_{n_2} წერტილი $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან ისე, რომ $n_2 > n_1$ და $\rho(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ ყოველი $n \ge n_2$. ავაგოთ $B[x_{n_2}, 1/2]$ ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით x_{n_2} და რადიუსით ½. გავაგრძელოთ პროცესი ინდუქციურად. თუ უკვე არჩეული გვაქვს $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}$ წერტილები $(n_1 < n_2 < .... < n_k)$ ავირჩიოთ $x_{n_{k+1}}$ ისე,რომ $n_{k+1} > n_k$ და $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < 1/2^k$, როცა $n \ge n_{k+1}$. ავაგოთ ჩაკეტილი ბირთვი $B[x_{n_{k+1}}, 1/2^k]$. აღნიშნული პროცესის შედეგად აგებული გვაქვს ერთმანეთში ჩალაგებული $B[x_{n_k}, 1/2^{k-1}]$ ბირთვების მიმდევრობა. ამ ბირთვებს გააჩნიათ საერთო წერტილი; ავღნიშნოთ ის x -ით. ცხადია ეს წერტილი არის $\{x_{n_k}\}$ მიმდევრობის ზღვარი. მაგრამ თუ ფუნდამენტალურ მიმდევრობას გააჩნია კრებადი ქვემიმდევრობა, მაშინ მიმდევრობაც კრებადია იმავე x წერტილისაკენ. ანუ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.თეორემა დამტკიცებულია.

სრული მეტრიკული სივრცეების თეორიაში ფუნდამენტალური ადგილი უჭირავს ბერის თეორემას.

თეორემა 2. *(ბერის თეორემა)* **სრული მეტრიკული სივრცე არ შეიძლება იქნეს წარმოდგენილი როგორც გაერთიანება თვლადი რაოდენობა არსად მკვრივი სიმრავლეებისა.**

დამტკიცება. დაუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ სრული M მეტრიკული სივრცისათვის მოიძებნა წარმოდგენა. $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, სადაც M_n სიმრავლეები არსად მკვრივი სიმრავლეებია (M მეტრიკულ სივრცეში). ვთქვათ B_0 რაიმე ჩაკეტილი ბირთვია რადიუსით 1. ვინაიდან M_1 არსად მკვრივია, ამიტომ არსებობს ჩაკეტილი ბირთვი B_1, რომლის რადიუსი ½-ია ისეთი, რომ $B_0 \supset B_1$ და $B_1 \cap M_1 = \varnothing$. ვინაიდან M_2 არსად მკვრივია, ამიტომ B_1 ბირთვი შეიცავს ჩაკეტილ ბირთვს B_2 ისეთ, რომ მისი რადიუსი ნაკლებია 1/3-ზე და $B_2 \cap M_2 = \varnothing$. აღნიშნული პროცესი გავაგრძელოთ. ჩვენ ავაგეთ ერთმანეთში ჩალაგებულ ჩაკეტილ ბირთვთა $\{B_n\}$ მიმდევრობას რომელთა რადიუსები ნულისაკენ კრებადია, ამასთანავე ყოველი n-ისათვის $B_n \cap M_n = \varnothing$. თეორემა 1-ის ძალით სიმრავლე $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ არაცარიელია. ვთქვათ x აღნიშნული თანაკვეთის რაიმე წერტილია. ჩვენი აგების მიხედვით ეს წერტილი არ ეკუთვნის არცერთ M_n სიმრავლეს , ე.ი $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. მაშასადამე $M \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. მივიღეთ წინააღმდეგობა ჩვენს დაშვებასთან. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ნებისმიერი სრული მეტრიკული სივრცე იზოლირებული წერტილების გარეშე არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ სივრცეში მოცემული თვისებებით ნებისმიერი წერტილი არსად მკვრივია.

განმარტება 3. M მეტრიკული სივრცის რაიმე არაცარიელ ქვესიმრავლეს უწოდებენ პირველი კატეგორიის სიმრავლეს მოცემულ მეტრიკულ სივრცეში თუ ის შეიძლება წარმოიდგენილი იქნეს , როგორც თვლადი გაერთიანება არსადმკვრივი სიმრავლეებისა. თუ სიმრავლე არაა პირველი კატეგორიის, მაშინ მას მეორე კატეგორიის სიმრავლეს უწოდებენ.

მაშასადამე ბერის თეორემის ძალით ნებისმიერი სრული მეტრიკული სივრცე მეორე კატეგორიისა.

განმარტება 4. $\{M,\rho\}$ და $\{M',\rho'\}$ მეტრიკულ სივრცეებს უწოდებენ იზომეტრულს თუ არსებობს ბიექცია $f: M \to M'$ ისეთი, რომ $\rho(x,y) = \rho'(f(x), f(y))$ $\forall x, y \in M$.

ცხადია იზომეტრიულ სივრცეებს ყველა ის თვისება რაც მეტრიკასთანაა დაკავშირებული საერთო აქვთ. თუ $\{M,\rho\}$ მერტიკული სივრცე იზომერტიულია $\{M^*,\rho^*\}$ მეტრიკული სივრცის რაიმე ქვესივრცის ასეთ შემთხვევაში ამბობენ ,რომ $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცე შედის $\{M^*,\rho^*\}$ მეტრიკულ სივრცეში, როგორც ქვესივრცე (ან$\{M,\rho\}$ ცადგმულია იზომეტრიულად $\{M^*,\rho^*\}$ სივრცეში).

განმარტება 5. სრულ მეტრიკულ M^* სივრცეს უწოდებენ M სივრცის გასრულებას თუ M მეტრიკული სივრცე შედის M^* სივრცეში როგორც ქვესივრცე და ამავე დროს M ყველგან მკვრივია M^* -ში.

თეორემა 2. ***(თეორემა არასრული სივრცის გასრულების შესახებ)*** ნებისმიერ არასრულ M მეტრიკულ სივრცისათვის არსებობს M^* სივრცე , რომელიც მის გასრულებას წარმოადგენს.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $\{M,\rho\}$ არასრული მეტრიკული სივრცე. ავაგოთ ახალი მეტრიკული სივრცე $\{M^*,\rho^*\}$, რომელიც შეიცავს $\{M,\rho\}$ სივრცეს. M სიმრავლიდან აღებულ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობას ვუწოდოთ ეკვივალენტური (და ეს ფაქტი ავღნიშნოთ ასე$\{x_n\} \sim \{y_n\}$) თუ $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. ცხადია: თუ 1) $\{x_n\} \sim \{x_n\}$; 2) $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ მაშინ $\{y_n\} \sim \{x_n\}$; 3) თუ $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ და $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, მაშინ $\{x_n\} \sim \{z_n\}$. მაშასადამე $\sim$ მიმართება ექვივალენტობის მიმართებაა, რომელიც M სიმრავლიდან აღებულ ყველა მიმდევრობათა სიმრავლეს დაყოფს ექვივალენტობის კლასებად. შემდგომში ჩვენ გვაინტერესებს ის კლასები, რომლებიც ფუნდამენტალურ მიმდევრობებს შეიცავნ. M^* -ით ავღნიშნოთ ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა შესაბამისი ექვივალენტობის კლასები. შემდგომში თუ ფუნდამენტალური მიმდევრობა $\{x_n\}$ ეკუთვნის ეკვივალენტობის x^* კლასს, მაშინ ეს ფაქტსი ავღნიშნიშნოთ ასე $\{x_n\} \in x^*$. M^* სიმრავლეში შემოვიღოთ მეტრიკა. შევნიშნოთ, რომ

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

ნებისმიერი $n, m \in N$ რიცხვისათვის, საიდანაც გვექნება

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n).$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან დავასკვნით, რომ თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები ფუნდამენტალურია, მაშინ რიცხვითი $\rho(x_n, y_n), n \in N$ მიმდევრობაც ფუნდამეტალურია და მაშასადამე გააჩნია ზღვარი.

ვთქვათ $\{x_n\} \in x^*$ და $\{y_n\} \in y^*$. განსაზღვროთ მანძილი x^* და y^* ელემენტებს შორის ასე

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) .$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება არაა დამოკიდებული x^* და y^* კლასებიდან წარმომადგენლების არჩევაზე. ვთქვათ $\{x'_n\} \in x^*$ და $\{y'_n\} \in y^*$. მაშინ ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის

$$\rho(x'_n, y'_n) \le \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_m, y'_n) ,$$

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y'_n, y_n) ,$$

და ამიტომ

$$| \rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n) | \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) .$$

საიდანაც გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) .$$

ფუნქცია $\rho(x^*, y^*)$ აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა თვისებას. მართლაც $\rho(x^*, y^*) \ge 0$ და $\rho(x^*, y^*) = \rho(y^*, x^*) \quad \forall x^*, y^* \in M^*$. გარდა ამისა თუ $\rho(x^*, y^*) = 0$, მაშინ x^* და y^* ერთმანეთს ემთხვევან, რადგან ამ შემთხვევაში, თუ $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, მასინ გვაქვს $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. და ბოლოს თუ $\{x_n\} \in x^*$ $\{y_n\} \in y^*$ $\{z_n\} \in z^*$, მაშინ უტოლობიდან

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$$

ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\rho(x^*, y^*) \le \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*) .$$

მაშასადამე ავაგეთ ახალი $\{M^*, \rho^*\}$ მეტრიკული სივრცე, რომლის ელემენტებია M სივრცის ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა ეკვივალენტობის კლასები. ვაჩვენოთ, რომ $\{M^*, \rho^*\}$ სივრცე შეიცავს ქვესივრცეს, რომელიც იზომეტრიულია $\{M, \rho\}$ სივრცის.

თითოეულ $x \in M$ წერტილს შეუსაბამოთ $x^* \in M^*$ ელემენტი, რომელიც შეიცავს სტაციონალურ მიმდევრობას $x_n = x, n \in N$. ცხადია ეს შესაბამისობა განსაზღვრავს ურთიერთცალსახა ასახვას M სიმრავლეს და M^* სივრცის რომელიღაც M' ქვესივრცეს

შორის . ეს ასახვა იზომეტრიაა, ვინაიდან თუ x^* და y^* არის M' სივრცის რაიმე ელემენტები, მაშინ არსებობს M სივრცის x და y წერტილები ისეთი, რომ $\{x\ \} \in x^*$ $\{y\ \} \in y^*$ და ამიტომ $\rho(x^*, y^*) = \rho(x\ , y\ )$.

ვაჩვენოთ, რომ M' სიმრავლე ყველგან მკვრივია M^*-ში; ანუ M^* სიმრავლის ნებისმიერი $x^* \in M^*$ ელემენტი წარმოდგენს M' სიმრავლიდან აღებული რომელიღაც მიმდევრობის ზღვარს.

ვთქვათ $\{x_n\} \in x^*$. ავღნიშნოთ x_k^*-ით M' სივრცის ის ელემენტი, რომელიც შეესაბამება $x_k \in M$ ელემენტს. განმარტების ძალით

$$\rho(x^*, x_k^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_k).$$

ვინაიდან $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია , გვექნება

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n, k \geq N_\varepsilon \quad \rho(x_n, x_k) < \varepsilon / 2,$$

ამიტომ

$$\forall k \geq N_\varepsilon \quad \rho^*(x^*, x_k^*) \leq \varepsilon / 2 < \varepsilon.$$

მაშასადამე $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_k^*) = 0$.

დაგვრჩა დასამტკიცებელი, რომ $\{M^*, \rho^*\}$ სრული სივრცეა.

ვთქვათ $\{x_n^*\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა M^*-ში. ყოველი $n \in N$ ნომრისთვის არსებობს $y_n \in M$ ისეთი, რომ $\rho(x_n^*, y_n^*) < 1/n$,სადაც y_n^* ელემენტია M' სიმრავლის, რომელიც შეესაბამება $y_n \in M$ ელემენტს. $\{y_n^*\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, ვინაიდან

$$\rho^*(y_n^*, y_m^*) \leq \rho^*(y_n^*, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, y_m^*) < 1/n + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + 1/m$$

და $\{x_n^*\}$ ფუნდამენტალურია. ვინაიდან $\rho^*(y_n^*, y_m^*) = \rho\ (y_n, y_m)$, ამიტომ ფუნდამენტალური იქნება $\{y_n\}$ მიმდევრობაც. y^* -ით ავღნიშნოთ ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა კლასი რომელიც შეიცავს $\{y_n\}$ მიმდევრობას. მაშინ

$$\rho^*(y^*, x_n^*) \leq \rho^*(y^*, y_n^*) + \rho^*(y_n^*, x_n^*) < \rho^*(y^*, y_n^*) + 1/n = \lim_{k\to\infty} \rho^*(y_k, y_n) + 1/n$$

ვინაიდან

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall k, n \geq N_\varepsilon \quad \rho(x_k, y_n) + 1/n < \varepsilon/2,$$

ამიტომ

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad \rho^*(y^*, x_n^*) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

და ამიტომ გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(y^*, x_n^*) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 6. როგორც ავღნიშნეთ $C([0;1])$ სიმრავლე ინტეგრალური

$$\rho(f,g) = \int_0^1 | f(x) - g(x) | dx$$

მეტრიკით არასრული მეტრიკული სივრცეა.

თუ გამოვიყენებთ თეორემას არასრული მეტრიკული სივრცის გასრულების შესახებ დავასკვნით, რომ არსებობს მისი გასრულება. შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ეს გასრულება ემთხვევა ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა $L([0;1])$ სივრცეს, რომელიც ასეა ანსაზღვრული:

განვიხილოთ სიმრავლე $[0;1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა იმ ფუნქციებისა, რომელთათვისაც არსებობს $\int_0^1 | f(x) | dx$ ლებეგის ინტეგრალი. როგორც ვიცით ფუნქციათა თეორიიდან ნებისმიერი ორი $f(x)$ და $g(x)$ ზომადი ფუნქციებისათვის თუ $f(x) = g(x)$ თითქმის ყველგან, მაშინ $\int_0^1 | f(x) | dx$ და $\int_0^1 | g(x) | dx$ ინტეგრალები თუ ისინი სასრული რიცხვებია ერთმანეთს ემთხვევა. ასეთ შემთხვევაში $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს ერთმანეთის ეკვივალენტური (ან ერთმანეთის ტოლი თითქმის ყველგან) ვუწოდოთ და შეგვიძლია ისინი ერთმანეთთან გავაიგივეოთ. ავღნიშნოთ

$$L([0;1]) = \left\{ f : \int_0^1 | f(x) | \, dx < \infty \right\}.$$

$L([0;1])$ სიმრავლეში შემოვიღოთ მეტრიკა $\rho(f,g) = \int_0^1 | f(x) - g(x) | dx$, სადაც ინტეგრალი აღებულია ლებეგის აზრით. $L([0;1])$ მეტრიკული სივრცე წარმოადგენს $C([0;1])$ სივრცის

(რომელშიც მეტრიკა მოცემულია $\rho(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$ ფორმულით და ინტეგრალი აღებულია რიმანის აზრით) გასრულებას. შევნიშნოთ, რომ $C([0;1])\subset L([0;1])$, თუმცა $L([0;1])$ სივრცეში შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ ისეთი ფუნქციებიც, რომლებიც $[0;1]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში წყვეტას განიცდიან ან კიდევ ისეთი ფუნქციები, რომლებიც $[0;1]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილის არცერთ მიდამოში შემოსაზღვრული არ არიან. მიუხედავად ამისა როგორი რთული f ფუნქციაც არ უნდა ავიღოთ $L([0;1])$ სივრციდან ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ უწყვეტ ფუნქციათა $f_n\in C([0;1])$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $\rho(f_n,f)=\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|dx\to 0$, როცა $n\to\infty$.

მაგალითი 7. ვთქვათ p რაიმე მარტივი რიცხვია. ნებისმიერი რაციონალური $x\in Q$ რიცხვისათვის განვმარტოთ მოდული (ნორმა) შემდეგნაირად: $|x|_p=p^{-k}$ სადაც მთელი k რიცხვი განიმარტება წარმოდგენიდან $x=p^k\frac{m}{n}$. ამ უკანასკნელ წარმოდგენაში მოითხოვება, რომ m და n მთელი რიცხვები p რიცხვთან თანამარტივი რიცხვები იყვნენ. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე შემოღებულ მოდულს აქვს ჩვეულებრივ ბუნებრივ მოდულთან შედარებით მთელი რიგი არასტანდარტული თვისებები. მაგალითად რომ ნებისმიერი $r_1,r_2\in Q$ რაციონალური რიცხვებისათვის სრულდება მოდულის თვისება $|r_1\cdot r_2|_p=|r_1|_p\cdot|r_2|_p$, ამასთანავე ბ) $|r_1+r_2|_p\le\max(|r_1|_p,|r_2|_p)$ და გ) თუ $|r_1|_p<|r_2|_p$, მაშინ $|r_1+r_2|_p=|r_2|_p$.

რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლეზე შემოვიღოთ მეტრიკა $d_p(r_1,r_2)=|r_1-r_2|_p$. (Q,d_p) მეტრიკული სივრცე არასრული მეტრიკული სივრცეა. ამ სივრცის გასრულების შედეგად მიღებულ სივრცეს უწოდებენ p-ადიკურ რიცხვთა ველს და მას Q_p სიმბოლოთი აღნიშნავენ. მტკიცდება, რომ Q სიმრავლეზე სტანდარტული შეკრების და გამრავლების ოპერაციები უწყვეტად გრძელდება მთელს Q_p ველზე. ნებისმიერი $x\in Q_p$ ელემენტისათვის არსებობს წარმოდგენა უსასრულო ათწილადის სახით

$$.....,a_2,a_1,a_0,a_{-1},a_{-2},...,a_k$$

სადაც $0\le a_i\le p-1,\ \forall i$. ანუ ნებისმიერი $x\in Q_p$ ელემენტი არის მწკრივის ჯამი $x=\sum_{i=-k}^{\infty}a_ip^i$.

შევნიშნოთ, რომ მთელ რიგ გამოყენებებში (ფიზიკა, გამოთვლითი მათემატიკა) ფართო გამოყენება ჰპოვა ანალიზმა რომელიც აგებულია Q_p ველზე (R ნამდვილ რიცხვთა ველის ნაცვლად). ასეთ ანალიზს ლიტერატურაში უწოდებენ, როგორც არაარქიმედულ ანალიზს.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის

1. იქნება თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სრული შემდეგი მეტრიკით ა) $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$ ბ) $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|$.

2. არის თუ არა $[-1,1]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე სრული მეტრიკული სივრცე თუ მეტრიკა განმარტებულია შემდეგი წესით

$$\rho(x,y)=\max_{-1\le x\le 1}|x(t)-y(t)|;$$

და დამატებით ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას

ა) $x(-1)=x(1)$; ბ) $x(0)=0$; გ) $\int_{-1}^{1}x(t)dt=0$.

3. არის თუ არა ფინიტურ მიმდევრობათა სიმრავლე სრული მეტრიკული სივრცე თუ ა) $\rho(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$; ბ) $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|$.

4. ვთქვათ X არის $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ n რიგის ალგებრულ პოლინომთა სიმრავლე. ვთქვათ $P(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k$, $Q(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k t^k$. ვთქვათ $\rho_1(P,Q)=\max_{t\in[0,1]}|P(t)-Q(t)|$ და $\rho_2(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k-\beta_k|$. აჩვენეთ, რომ ეს ფუნქციები X სიმრავლეზე განსაზღვრავენ ექვივალენტურ მეტრიკებს.

5. არის თუ არა $[0,1]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სიმრავლე სრული მეტრიკული სივრცე თუ ნორმა განმარტებულია შემდეგი წესით

$$\rho(x,y)=\max_{-1\le x\le 1}|x(t)-y(t)| .$$

1.3 კომპაქტურობა მეტრიკულ სივრცეებში

როგორც კლასიკური ანალიზის კურსიდანაა ცნობილი , თუ სეგმენტი დაფრულია რაიმე ღია ინტერვალების ერთობლიობით, მაშინ მოცემული დაფარვიდან შესაძლებელია გამოიყოს სასრული რაოდენობა ინტერვალებისა, რომელიც ფარავს მოცემულ სეგმენტს (ბორელ-ლებეგის თეორემა). აღნიშნული თეორემა კლასიკური ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თეორემაა. ეს თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა ინტერვალების ნაცვლად ავიღებთ ნებისმიერი ღია სიმრავლეების ერთობლიობას, რომელიც მოცემულ სეგმენტს ფარავს.

განმარტება 1. ვთქვათ $\{M,\rho\}$ რაიმე მეტრიკული სივრცეა. ვიტყვით, რომ სიმრავლეთა $X_\alpha,\ \alpha\in A$ ერთობლოიბა $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრციდან წარმოადგენს $X\subset M$ სიმრავლის დამფარავ სიმრავლეთა ერთობლიობას თუ $X\subset\cup_\alpha X_\alpha$. თუ დამფარავი ერთობლიობა ღია სიმრავლეებისაგან შედგება, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია X სიმრავლის ღია დაფარვა.

განმარტება 2. ვთქვათ $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცია. $X\subset M$ სიმრავლეს უწოდებენ კომპაქტურს (მოკლედ X სიმრავლეს ვუწოდებთ კომპაქტს) თუ X სიმრავლის ნებისმიერი ღია დაფარვიდან შესაძლებელია გამოვყოთ სასრული რაოდენობა ღია სიმრავლეებისა სიმრავლეებისა, რომელიც ფარავს X სიმრავლეს.

კლასიკურ ანალიზში ნაჩვენები იყო, რომ R^n ევკლიდური სივრცის რაიმე სიმრავლე არის კომპაქტური მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა ის შემოსაზღვრულია და ჩაკეტილი. როგორც შემდგომში დავრწმუნდებით აღნიშნული დებულება საზოგადოდ არაა სამართლიანი ნებისმიერი მეტრიკული სივრცისათვის. ზოგადი მერტრიკული სივრცეებისათვის კომპაქტური სიმრავლის დასახასიათებლად გვჭირდება არსებითად შემოაზღვრულობის ცნება, რომელიც R^n სიმრავლის ქვესიმრავლეებისათვის ემთხვევა შემოსაზღვრულობის ცნებას.

განმარტება 3. ვთქვათ $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცია და $X\subset M$. $B\subset M$ სიმრავლეს უწოდებენ X სიმრავლისათვის ε - ბადეს ($\varepsilon>0$) თუ

$$\forall x\in X\quad \exists a\in B:\quad \rho(x,a)\le\varepsilon .$$

შენიშვნა 1. B სიმრავლის (ε - ბადეის წერტილები) წერტილები შესაძლოა არ შედიოდნენ X სიმრავლეში, თუმცა თუ აგებული გვაქვს X სიმრავლისათვის რაიმე ε - ბადე , შეგვიძლია ავაგოთ X სიმრავლისათვის 2ε - ბადე B ისეთი, რომ $B\subset X$.

განმარტება 4. . ვთქვათ $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცია და $X\subset M$. X სიმრავლეს უწოდებენ არსებითად შემოსაზღვრულს , თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის M

სიმრავლეში არსებობს X სიმრავლის ε - ბადე, რომელიც სასრული რაოდენობა წერტილებისაგან შედგება (მოკლედ სასრული ε - ბადე) .

შენიშვნა. 2. შევნიშნოთ, რომ თუ სიმრავლე არსებითად შემოსაზღვრულია, ის აგრეთვე შემოსაზღვრულია. მართლაც თუ ავაგებთ ε რადიუსის ჩაკეტილ ბირთვებს ცენტრით ε - ბადეის წერილებში , მაშინ X სიმრავლე წარმოიდგინება, როგორც ქვესიმრავლე სიმრავლისა, რომელიც სასრული რაოდენობა ბირთვების გაერთიანებაა.

შენიშვნა 3. შევნიშნოთ, რომ R^n მეტრიკულ სივრცის ქვესიმრავლეებისათვის შემოსაზღვრულობა და არსებითი შემოსაზღვრულობის ცნება ერთმანეთს ემთხვევა. მართლაც თუ სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ ის შეიძლება მოვათავსოდ საკმაოდ დიდ კუბში. თუ ამ კუბს დავყოფთ პატარა კუბებად(სასრული რაოდენობის) რომელთა წიბოების სიგრძე ε -ის ტოლია , მაშინ ამ კუბის წვეროები დიდი კუბისათვის (და მაშასადამე მოცემული სიმრავლისათვის) შექმნის $\frac{\sqrt{n}}{2}\varepsilon$ ბადეს.

მაგალითი 1. l_2 მეტრიკულ სივრცეში სფერო S არის შემოსაზღვრული , მაგრამ არ არის არსებითად შემოსაზღვრული სიმრავლე. მართლაც განვიხილოთ S სიმრავლეში შემდეგი სახის წერტილები

$$
\begin{aligned}
&e_1 = (1,0,0,...,0,...)\\
&e_2 = (0,1,0,...,0,...)\\
&...........................\\
&...........................\\
&e_n = (0,0,0,...,1,...)\\
&...........................
\end{aligned}
$$

ცხადია e_m და e_n წერტილებს შორის მანძილისათვის გვაქვს $\rho(e_m,e_n)=\sqrt{2},\ (n \neq m)$. მაშასადამე S სიმრავლისათვის არ იარსებებს ε - ბადე თუ $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

მაგალითი 2. l_2 მეტრიკულ სივრცეში განვიხილოთ სიმრავლე Π ყველა იმ $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ წერტილებისა , რომელთათვისაც $|x_1|\leq 1, |x_2|\leq 1/2,...,|x_n|\leq 1/n,...$ (ამ სიმრავლეს უწოდებენ l_2 -ში ძირითად პარალელეპიპედს). ეს სიმრავლე წარმოადგენს უსასრულოგანზომილებიან არსებითად შემოსაზღვრულ სიმრავლეს. მართლაც;

ვთქვათ $\varepsilon > 0$ ფიქსირებულია. ავირჩოთ n ისე, რომ $1/2^{n-1} < \varepsilon/2$. Π -ს ნებისმიერ $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ წერტილს შეუსაბამოდ $x^* = (x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$ წერტილი იგივე სიმრავლიდან. ყველა ასეთი წერტილის სიმრავლე ავღნიშნოთ Π^* -ით . გვაქვს

$$\rho(x,x^*)=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k^2}\le\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}}<\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Π^* სიმრავლე შეგვიძლია გავაიგივეოთ R^n სივრცის სიმრავლესთან, რომელიც შემოსაზღვრული იქნება და ამიტომ არსებითად შემოსაზღვრულიც იქნება. Π^* სიმრავლეში ავირჩიოთ რაიმე $\varepsilon/2$ ბადე, ცხადია ის Π სიმრავლისათვის იქნება ε ბადე.

შევნიშნოთ, რომ 2,4 განმარტებაში შგვიძლია განვიხილოთ $X=M$ შემთხვევაც.

განმარტება 5. $\{M,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეს ვუწოდებთ კომპაქტურს (არსებითად შემოსაზღვრულს) თუ M სიმრავლე კომპაქტურია (არსებითად შემოსაზღვრულია).

თეორემა 1. ვთქვათ X არის $\{M,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის წერტილთა რაიმე სიმრავლე. X სიმრავლე კომპაქტურია (არსებითად შემოსაზღვრული) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კომპაქტურია (არსებითად შემოსაზღვრულია) $\{X,\rho\}$ მეტრიკული სივრცე.

დამტკიცება. *აუცილებლობა.* ვთქვათ $X\subset M$ კომპაქტური სიმრავლეა $\{M,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში. ვაჩვენოთ, რომ $\{X,\rho\}$ კომპაქტური მეტრიკული სივრცეა. ვთქვათ $\{X,\rho\}$ მეტრიკული სივრცის ღია სიმრავლეთა X_α, $\alpha\in A$ ერთობლიობა ფარავს X სიმრავლეს. შევნიშნოთ, რომ ეს სიმრავლეები შეიძლება არ იყვნენ ღია სიმრავლეები $\{M,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში, თუმცა ამ სიმრავლეთა δ მიდამოები ($\{M,\rho\}$-ში) იქნებიან ღია სიმრავლეები $\{M,\rho\}$ და მათი ერთობლიობა ფარავს ცხადია X სიმრავლეს. $X\subset M$ სიმრავლის კომპაქტურობის გამო არსებობს სასრული რაოდენობა X_α სიმრავლეებისა, რომელთა δ მიდამოები ფარავენ X სიმრავლეს. ცხადია არჩეული სასრული რაოდენობა X_α სიმრავლეებისა ფარავს X სიმრავლეს $\{X,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში.

საკმარისობა. ვთქვათ ახლა $\{X,\rho\}$ მეტრიკული სივრცე კომპაქტია. ვაჩვენოთ, რომ $X\subset M$ სიმრავლე კომპაქტია $\{M,\rho\}$ მეტრიკულ სივრცეში. ვთქვათ $\{M,\rho\}$ სივრცის ღია სიმრავლეთა $G_\alpha\subset M,\alpha\in A$ ერთობლიობა ფარავს M სიმრავლეს. ცხადია სიმრავლეები

$$X_\alpha=G_\alpha\cap X,\qquad \alpha\in A$$

არიან $\{X,\rho\}$ სივრცის ღია სიმრავლეები და ფარავენ X სიმრავლეს. $\{X,\rho\}$ სივრცის კომპაქტურობის გამო არსებობს სასრული რაოდენობა G_α სიმრავლებისა, რომელთა თანაკვეთები X სიმრავლესთან ფარავს X სიმრავლეს.

თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. მეორე ნაწილი (არსებითად შემოსაზღვრულობა) ანალოგიური მსჯელობეტით გაცილებით მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს.

თეორემა 2. თუ მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია მაშინ ის სრული და არსებითად შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. პირველად ვაჩვენოთ, რომ თუ მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია მაშინ ის სრულია. დაუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ რომელიმე კომპაქტური M სივრცე სრული არაა. M^* -ით ავღნიშნოთ მისი გასრულება. მაშინ M^* -ში არსებობს ელემენტი x^*, რომელიც არ ეკუთვნის M სიმრავლეს. როგორც ყოველთვის $O_{1/n}(x^*)$ -ით ავღნიშნოთ x^* -ის $1/n$ მიდამო, ხოლო $[O_{1/n(x^*)}]$-ით მისი ჩაკეტვა. ღია სიმრავლეთა $G_\alpha = M \setminus [O_{1/n(x^*)}], \quad n \in N$ ერთობლიობა ფარავს M სიმრავლეს, თუმცა მისი არცერთი სასრული ერთობლიობა ვერ დაფარავს მას, ვინაიდან ნებისმიერი $O_{1/n}(x^*)$ ბირთვი შეიცავს ერთ მაინც წერტილს M -დან. მაშასადამე ჩვენი დაშვება არსწორია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ M კომპაქტურია მაშინ ის არსებითად შემოსაზღვრულია. თითოეულ $x \in M$ წერტილ ათვის განვიხილოთ $O_\varepsilon(x)$ მიდამო რადიუსით $\varepsilon > 0$. M -ის კომპაქტურობის გამო არსებობს სასრული რაოდენობა $x_1, x_2, ..., x_N$ წერტილებისა , ისეთი, რომ ბირთვების ერთობლიობა

$$O_\varepsilon(x_j), \quad j = 1, 2, ..., N$$

ფარავს M -ს. ცხადია, რომ $x_1, x_2, ..., x_N$ წერტილების ერთობლიობა იქნება M სიმრავლის ε ბადე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ მეტრიკული სივრცე სრულია და არსებითად შემოსაზღვრული, მაშინ ის კომპაქტურია.

დამტკიცება. ვთქვათ M სრული და არსებითად შემოსაზღვრული მეტრიკული სივრცეა. დაუშვათ ის არაა კომპაქტური., მაშინ არსებობს ღია სიმრავლეთა ერთობლიობა $X_\alpha, \ \alpha \in A$ რომელიც ფარავს M სიმრავლეს, მაგრამ არცერთი მისი სასრული ქვესისტემა მას არ ფარავს. ვინაიდან M არსებითად შემოსაზღვრულია ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს სასრული რაოდენობა $x_1, x_2, ..., x_N$ წერტილები ისეთი, რომ $O_\varepsilon(x_j), \quad j = 1, 2, ..., N$ ბირთვების ერთობლოობა ფარავს M სიმრავლეს. ჩვენი დაშვების თანახმა ერთი მაინც $[O(x_j)]$ ჩაკეტილი ბირთვი არ დაიფარება სასრული რაოდენობა X_α სიმრავლეების საშუალებით. ავღნიშნოთ ეს ბირთვი F_1 -ით. ის ცხადია არსებითად შემოსაზღვრულია, ამიტომ $\varepsilon = 1/2$ რიცხვისათვის არსებობს სასრული რაოდენობა წერტილები ისეთი, რომ ჩაკეტილი ბირთვები ცენტრით აღნიშნულ წერტილებში და რადიუსით ½ ფარავენ F_1 სიმრავლეს. F_2 -ით ავღნიშნოთ F_1 სიმრავლის ის ნაწილი, რომელიც ძევს აგებულ ½ რადიუსის მქონე რომელიღაც ჩაკეტილ ბირთვში და რომელიც არ

იფარება სასრული რაოდენობა X_α სიმრავლეებით. ჩავატაროთ ინდუქციურად ანალოგიური მსჯელობები. ჩვენ ავაგებთ ჩაკეტილ სიმრავლეთა $F_n, n \in N$ მიმდევრობას ისეთს, რომ

$$F_{n+1} \subset F_n, \quad d(F_n) \to 0 \text{ როცა } n \to \infty,$$

ამასთანავე არცერთი ეს სიმრავლე არ დაიფარება სასრული რაოდენობა X_α სიმრავლეებით. მეორე მხრივ M სივრცის სისრულის გამო $F_n, n \in N$ სიმრავლეებს გააჩნიათ საერთო წერტილი $x_0 \in M$. წერტილიი x_0 დაიფარება სულ მცირე ერთი F_{α_0} სიმრავლით, ამასთანავე ეს სიმრავლე დაიფარება რაიმე $O_\delta(x_0), \delta > 0$ ბირთვით. თუ $\frac{2}{n} < \delta$, მაშინ $F_n \subset O_\delta(x_0)$. მაშასადამე $F_n \subset X_{\alpha_0}$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას. თეორემა დამტკიცებულია.

მაშასადამე სამართლიანია კომპაქტურობის შემდეგი კრიტერიუმი

თეორემა 4. ***(ჰაუსდორფის თეორემა)*** იმისათვის რომ მეტრიკული სივრცე იყოს კომპაქტური აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს სრული და არსებითად შემოსაზღვრული.

თუ გავითვალისწინებთ შენიშვნა 3-ს ჰაუსდორფის თეორემიდან გვექნება

შედეგი 1. იმისათვის, რომ R^n სივრცის რაიმე ქვესიმრავლე იყოს კომპაქტური აუცილებელია და საკმარისი ის იყოს ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული.

შედეგი 2. იმისათვის, რომ კომპაქტური სიმრავლის ქვესიმრავლე იყოს კომპაქტური აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ჩაკეტილი.

თეორემა 4. იმისათვის რომ მეტრიკული სივრცე იყოს კომპაქტური აუცილებელია და საკმარისი, რომ მეტრიკული სივრციდან აღებულ ნებისმიერ მიმდევრობას გააჩნდეს კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია, მაშინ M-დან აღებულ ნებისმიერ მიმდევრობას გააჩნია კრებადი ქვემიმდევრობა. დაუშვათ წინააღმდეგი; ვთქვათ არსებობს მიმდევრობა $\{x_n\}$, რომელსაც არ გააჩნია კრებადი ქვემიმდევრობა. მაშასადამე არცერთი $x \in M$ წერტილი არ არის $\{x_n\}$ მიმდევრობის კერძო ზღვარი, ამიტომ ყოველ $x \in M$ წერტილს გააჩნია $O(x)$ მიდამო ისეთი, რომ ეს მიდამო შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის არაუმეტეს სასრულ რაოდენობა წერტილს. ეს მიდამოები ქმნიან M სიმრავლის დაფარვას, თუმცა აგების მიხედვით არცერთი სასრული რაოდენობა ამ

მიდამოებისა არ ფარავს მთლიანად $\{x_n\}$ ღმიმდევრობას, რაც წინააღმდეგობაა ვინაიდან M კომპაქტია. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. დავამტკიცოთ მეორე ნაწილი.

სახელდობრ დავამტკიცოთ, რომ თუ სივრციდან აღებულ ნებისმიერ $\{x_n\}$ მიმდევრობას გააჩნია კრებადი ქვემიმდევრობა, მაშინ სივრცე კომპაქტურია. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სივრცე სრულია. მართლაც ნებისმიერ ფუნდამენტურ მიმდევრობას პირობის ძალით გააჩნია კრებადი ქვემიმდევრობა, მაშასადამე მიმდევრობა კრებადია. ვაჩვენოთ, რომ $\{M,\rho\}$ არსებითად შემოსაზღვრულია. დაუშვათ M სიმრავლე არ არის არსებითად შემოსაზღვრული. ე.ი. არსებობს $\varepsilon > 0$, ისეთი, რომ M სიმრავლისათვის არ მოიძებნა სასრული ε ბადე. მაშინ M სიმრავლე სასრული არ არის. ავაგოთ $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემდეგნაირად. ავიღოთ $x_1 \in M$ წერტილი. დაშვების ძალით ის არ ქმნის ε ბადეს., ამიტომ არსებობს $x_2 \in M$ წერტილი ისეთი, რომ $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. x_1, x_2 წერტილები არ ქმნიან X სიმრავლის ε ბადეს, ამიტომ არსებობს x_3 წერტილი ისეთი, რომ $\rho(x_3, x_j) \geq \varepsilon$ $j = 1, 2$. x_1, x_2, x_3 წერტილები არჩეულია ისე, რომ ნებისმიერი $j \neq i$, სადაც $i, j = 1, 2, 3$ სამართლიანია უტოლობა $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. ვთქვათ X სიმრავლიდან აგებულია x_1, $x_2, ..., x_n$ წერტილები ისე, რომ , როცა $j \neq i$, მაშინ $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. ვინაიდან ეს წერტილები არ ქმნიან ε ბადეს., ამიტომ არსებობს $x_{n+1} \in X$ ისეთი, რომ $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ $\forall i = 1, 2, ..., n$. მაშასადამე ინდუქციურად აგებულია მიმდევრობა $\{x_n\}$ ისეთი, რომ $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ $\forall i \neq j$. ცხადია ეს მიმდევრობა არ შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას, მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2. (ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა) R^n სივრცის ნებისმიერ უსასრულო შემოსაზღვრულ სიმრავლეს გააჩნია ზღვარითი წერტილი.

შედეგი 3. R^n სივრცის ნებისმიერ შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

შენიშვნა 4. სასწავლო და სამეცნიერო ლიტერატურაში კომპაქტურ სიმრავლეებს (ჩვენი) განმარტებით უწოდებენ ბიკომპაქტურ სიმრავლეებს (ან ბიკომპაქტებს), ხოლო კომპაქტურს უწოდებენ სიმრავლეებს, რომელთაც აქვთ თვისება: ამ სიმრავლიდან აღებულ ნებისმიერ მიმდევრობას გააჩნია კრებადი მიმდევრობა. თეორემა 4 ამტკიცებს, რომ მეტრიკული სივრცეებისათვის ბიკომპაქტური სიმრავლის და კომპაქტური სიმრავლის ცნება ერთიდაიგივეა.

განმარტება 6. მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლეს ვუწოდოთ წინაკომპაქტური სიმრავლე, თუ მისი ჩაკეტვა კომპაქტურია.

ჰაუსდორფის თეორემიდან გამომდინარე სრულ მეტრიკულ სივრცეში სიმრავლე წინაკომპაქტურია თუ ის არსებითად შემოსაზღვრულია.

სხვადასხვა ფუნქციონალურ სივრცეში სიმრავლის კომპაქტურობის პირობების დადგენა საინტერესო ამოცანას წარმოადგენს. განვიხილოთ $C([a;b])$ სივრცე.

განმარტება 7. $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ f ფუნქციათა S ერთობლიობას ვუწოდოთ თანაბრად შემოსაზღვრული თუ

$$\exists c: \quad \forall f \in S \quad \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \le c. \qquad (1)$$

განმარტება 8. $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ f ფუნქციათა S ერთობლიობას ვუწოდოთ თანაბრადხარისხოვნად უწყვეტს თუ

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \quad \forall f \in S, \;\; \forall x, x' \in [a,b]: \\ &|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \end{aligned}. \qquad (2)$$

თეორემა 5. (არცელას თეორემა) $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ f ფუნქციათა S ერთობლიობა წინაკომპაქტურია $C([a;b])$ სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა S ერთობლიობა ერთობლივ შემოსაზღვრული და თანაბრადხარისხოვნად უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ S წინაკომპაქტურია. განმარტების ძალით $[S]$ კომპაქტურია. ამიტომ სიმრავლე $[S]$ და მითუმეტეს S შემოსაზღვრულიცაა და არსებითად შემოსაზღვრულიც. შევნიშნოთ, რომ $C([a;b])$ სივრცეში ფუნქციათა ერთობლიობის (სიმრავლის) შემოსაზღვრულბა ტოლფასია ამ ერთობლოიბის თანაბრად შემოსაზღვრულობის. S ერთობლიობის არსებითად შემოსაზღვრულობის გამო $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $C([a;b])$ სივრცეში არსებობს S სიმრავლის ε ბადე. ვთქვათ არჩეული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ε ბადე შედგება

$$f_1(x),\; f_2(x), \dots, f_N(x)$$

ფუნქციებისაგან, სადაც $f_j(x)$ ფუნქციები უწყვეტი და მაშასადამე თანაბრად უწყვეტი ფუნქციებია. ამიტომ

$$\exists \delta > 0: \quad \forall j, \forall x_1, x_2 \in [a,b]: \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f_j(x_2) - f_j(x_1)| < \varepsilon.$$

ვთქვათ $f \in S$. ε ბადის განმარტების ძალით

$$\exists j: \quad \max_x |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

ამიტომ თუ $|x_1 - x_2| < \delta$, მაშინ

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f_j(x_1)| + |f_j(x_1) - f_j(x_2)| + |f_j(x_2) - f(x_2)| < 3\varepsilon .$$

ვინაიდან უკანასკნელი უტოლობა სრულდება ნებისმიერი $f \in S$ ფუნქციისათვის, ამიტომ S ერთობლიობა თანაბრადხარისხოვნად უწყვეტია.

დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება: თუ ფუნქცითა S ერთობლიობა თანაბრად შემოსაზღვრულია და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტია , მაშინ ის წინაკომპაქტურია. ვინაიდან $C([a;b])$ სრული სივრცეა, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ S არსებითად შემოსაზღვრულია $C([a;b])$ სივრცეში.

ვთქვათ $\varepsilon > 0$ ფიქსირებული რიცხვია. დაუშვათ S ერთობლიობიდან აღებული $f \in C([a;b])$ ფუნქციისათვის სრულდება (1), (2) პირობა. $[a;b]$ სეგმენტიდან ავირჩიოთ $x_1, x_2, ..., x_n$ წერტილები ისე, რომ

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} < \delta \quad \forall i,$$

ხოლო $[-c;c]$ სეგმენტიდან დავაფიქსიროთ $y_1, y_2, ..., y_m$ წერტილები ისე, რომ

$$-c = y_1 < y_2 < ... < y_m = c, \quad y_j - y_{j-1} < \varepsilon \quad \forall j .$$

A სიმბოლოთი ავღნიშნოთ $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა იმ უწყვეტი ფუნქციების ერთობლიობა , რომელთა გრაფიკები უბანუბან წრფივი ფუნქციებია წვეროებით (x_i, y_j) წერტილებში. ცხადია A სასრული სიმრავლეა. ავიღოთ $f \in S$ ფუნქცია. ყოველი x_i რიცხვისათვის (x_i, y_{j_i}) -ით ავღნიშნოთ (x_i, y_j) ტიპის წერტილი, რომელიც ყველაზე ახლოსაა $(x_i, f(x_i))$ წერტილთან. ცხადია

$$|f(x_i) - y_{j_i}| < \varepsilon .$$

φ -ით ავღნიშნოთ უბანუბან წრფივი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის წვეროებია წერტილები

$$(x_1, y_{j_1}), ..., (x_n, y_{j_n}) .$$

ცხადია ყოველი i ინდექსისათვის

$$|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \le |\varphi(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})| < 3\varepsilon .$$

გარდა ამისა ყოველი $x \in [x_{i-1}; x_i]$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_{i-1})| \le |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| < 3\varepsilon .$$

$C([a;b])$ სივრცეში $\rho(f,\varphi)$ სიდიდის შესაფასებლად შევნიშნოთ, რომ $x\in[a;b]$ წერტილისათვის , რომელიც $[x_{i-1};x_i]$ სეგმენტს ეკუთვნის გვაქვს

$$|f(x)-\varphi(x)|\le|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+|\varphi(x_{i-1})-\varphi(x_i)|<$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+3\varepsilon=5\varepsilon.$$

მაშასადამე $\rho(f,\varphi)<5\varepsilon$. მაშასადამე S არსებითად შემოსაზღვრულია.

თეორემა 6. იმისათვის, რომ შემოსაზღვრული M სიმრავლე l_p $(1\le p<\infty)$ სივრციდან იყოს წინაკომპაქტური აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობდეს $N_\varepsilon\in N$ ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in M$ წერტილისათვის სამართლიანი იყოს უტოლობა

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}<\varepsilon \qquad (3)$$

როცა $n\ge N_\varepsilon$.

დამტკიცება. *აუცილებლობა.* ვთქვათ M წინაკომპაქტურია. დავაფიქსიროთ $\varepsilon>0$ რიცხვი. ავაგოთ M სიმრავლისათვის $\varepsilon\ /3$ სასრული ბადე $x^1,x^2,...,x^n$, სადაც ($x^i=(x_1^i,x_2^i,....)$) .

ყოველი $x\in M$ წერტილისათვის ვიპოვოთ ბადის $x^l=(x_1^l,x_2^l,....)$ წერტილი ისეთი, რომ $\rho(x,x^l)<\varepsilon\ /3$ ანუ $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-x_i^l|^p\right)^{1/p}<\varepsilon/3$, (ცხადია მწკრივი $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^l|^p$ კრებადია ყოველი $l=1,2,...,n$ ნომრისათვის).

ნებისმიერი N ნომრისათვის გვაქვს

$$(0,0,...0,x_N,x_{N+1},....)=(x_1-x_1^i,x_2-x_2^i,...x_{N-1}-x_{N-1}^i,x_N-x_N^i,x_{N+1}-x_{N+1}^i,....)+$$
$$(x_1^i-x_1,x_2^i-x_2,...x_{N-1}^i-x_{N-1},x_N^i-x_N,0,0,....)+(0,0,...,0,x_{N+1}^i,x_{N+2}^i,...).$$

ამიტომ, ჩვენთვის საინტერესო ჯამებისათვის გვექნება

$$\left(\sum_{i=N+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-x_i^l|^p\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i^l-x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=N+1}^{\infty}|x_i^l|^p\right)^{1/p}. \qquad (4)$$

ვინაიდან $\sum_{i=N}^{\infty} |x_i^l|^p$ ჯამები ბადის ყველა $x^1, x^2, ..., x^n$ წერტილისათვის (მათი რაოდენობა სასრულია) შეგვიძლია გავხადოთ $(\varepsilon/3)^p$ -ზე ნაკლები როცა N მეტია გარკვეულ N_ε -ზე, ამიტომ (4)-ის ძალით გვექნება $\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$.

საკმარისობა. ვთქვათ M სიმრავლის ელემენტებისათვის სრულდება (3). ავაგოთ ამ სიმრავლისათვის სასრული ε ბადე. M სიმრავლის თითოეულ $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ წერტილს შევუსაბამოთ $x^* = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$ წერტილი, თანაც n ავირჩიოთ ისეთი დიდი, რომ

$$\rho(x, x^*) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon/2 .$$

თეორემის პირობის გამო ასეთი n -ის შერჩევა შესაძლებელია. ყველა ასეთი x^* წერტილის ერთობლიობა ავღნიშნოთ M^*-ით. ცხადია M^* სიმრავლე შეგვიძლია გავაიგივეოთ R^n სივრცის შემოსაზღვრულ სიმრავლესთან, რომელიც წინაკომპაქტურია, ამიტომ მისთვის არსებობს სასრული $\varepsilon/2$ ბადე. შევნიშნოთ, რომ ამ ბადის წერტილთა ერთობლიობა იქნება M სიმრავლის სასრული ε ბადე. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის

1.დაამტკიცეთ, რომ მეტრიკული სივრცის კომპაქტურ სიმრავლეთა ნებისმიერი ერთობლიობის თანაკვეთა კომპაქტია.

2.აჩვენეთ, რომ რომ მეტრიკული სივრცის ორი კომპაქტური სიმრავლის გაერთიანება კომპაქტურია.

3.დაამტკიცეთ, რომ $C([0;1])$ სივრცეში სიმრავლე $M = \{x(t) : x(t) = e^{-\alpha t}, \alpha \in [1;2]\}$ თანაბრად შემოსაზღვრულია და თანაბრადხარისხოვნად უწყვეტია.

4.არის თუ არა სიმრავლე $M = \{x(t) : x(t) = e^{-\alpha t}, \alpha \in N\}$ არსებითად შემოსაზღვრული.

5. არის თუ არა $C([0,1])$ სივრცეში არსებითად შემოსაზღვრული სიმრავლეები:

ა); $x_n(t) = 1 - t^n$

ბ) $x_n(t)=\sin nt$;

გ) $x_n(t)=\sin(t+n)$?

6.იქნება თუ არა $M=\{y(t)\in C([0,1])\}$ სიმრავლე კომპაქტი $C([0,1])$ სივრცეში თუ :

ა) $y(t)=kx^2+b, 0\le k\le 2, 1\le b\le 3$;

ბ) $y(t)=\cos\alpha x, \quad \alpha\in[1,4]$;

გ) $y(t)=\int_0^1 e^{x+y}x(t)dt, \ x(t)\in C([0,1])$.

7.ვთქვათ M არის რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე $C([0,1])$ სივრცეში . დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი სახის $y(t)=\int_a^t x(u)du$ ფუნქციათა ერთობლიობა, სადაც $x(t)\in C([0,1])$ არსებითად შემოსაზღვრულია $C([0,1])$ -ში.

8. აჩვენეთ, რომ ფუნქციათა ერთობლიობა ა) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\cdot e^{-nx}$, ბ) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x+n^2}$ სადაც $|a_n|<1, n=1,2,...$ $C([0;1])$ სივრცეში წინაკომპაქტურია.

9.დაამტკიცეთ, რომ $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}\subset L^2(-\pi,\pi)$ ჩაკეტილია , შემოსაზღვრულია მაგრამ არ არის კომპაქტი $L^2(-\pi,\pi)$ სივრცეში.

10. ვთქვათ M წარმოადგენს თანაბრად შემოსაზღვრულ სიმრავლეს $C([0,1])$ სივრციდან. განვიხილოთ სიმრავლე

$$N=\left\{g:g(t)=\int_0^t f(x)dx, \ f\in M\right\}.$$

აჩვენეთ, რომ N წინაკომპაქტური სიმრავლეა $C([0,1])$ სივრცეში.

11. აჩვენეთ, რომ $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი $f(t)$ ფუნქციათა ერთობლიობა , რომელთათვისაც სრულდება პირობა

$$1)\,|f(a)|\le m, \quad \int_a^b |f'(t)|^2\,dt\le M\ ,$$

სადაც n,M რაიმე მუდმივებია წინაკომპაქტურია $C([0,1])$ სივრცეში.

12. წინაკომპაქტურია თუ არა ფუნქციათა სიმრავლე $\{\sin nx, n \in N\}$ $C([0,1])$ სივრცეში.

13. არის თუ არა კომპაქტური შემდეგი სიმრავლე $\{x : x = (x_1, x_2, ...) \in l_2, |x_i| \leq 1/i, i \in N\}$ l_2-ში.

14. მოცემულია l_2 -ში სიმრავლე $\{x : x = (x_1, x_2, ...) \in l_2, |x_i| \leq \lambda_i, i \in N\}$. $\lambda_i, i \in N$ რიცხვების როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება მოცემული სიმრავლე კომპაქტი.

6.ვთქვათ $\{M, \rho\}$ სრული მეტრიკული სივრცეა, ხოლო $X \subset M$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ $\{X, \rho\}$ სრული მეტრიკული სივრცეა.

7. ვთქვათ $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრცეა. $X \subset M$ სიმრავლე ისეთია, რომ $\{X, \rho\}$ სრულია. აჩვენეთ, რომ X ჩაკეტილია.

8. $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრცის E ქვესიმრავლისათვის სიდიდეს $\sup\limits_{x,y \in E} \rho(x, y)$ ვუწოდოთ E სიმრავლის დიამეტრი და ის $d(E)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ. აჩვენეთ, რომ თუ $\{E_n\}$ ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილ სიმრავლეთა მიმდევრობაა ისეთი, რომ $\lim\limits_{n \to \infty} d(E_n) = 0$, მაშინ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ არაცარიელია. დაასაბუთეთ, რომ $\lim\limits_{n \to \infty} d(E_n) = 0$ პირობის გარეშე $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ თანაკვეთა შეიძლება ცარიელი აღმოჩნდეს.

9. აჩვენეთ, რომ l_∞ სრული მეტრიკული სივრცეა.

10. აჩვენეთ, რომ $L_p, (1 \leq p \leq \infty)$ სრული მეტრიკული სივრცეა.

თავი II

ასახვები მეტრიკულ სივრცეებში

2.1. უწყვეტი ასახვები

განმარტება1. ვთქვათ მოცემულია ორი $\{X,\rho_X\}$ და $\{Y,\rho_Y\}$ მეტრიკული სივრცე და რაიმე $G\subset X$ სიმრავლე. ვიტყვით, რომ მოცემულია ასახვა G მეტრიკულ სივრცისა Y მეტრიკულ სივრცეში, თუ მოცემულია f წესი, რომელიც ყოველ $x\in G$ ელემენტს შეუსაბამებს ერთადერთ $y\in Y$ ელემენტს .

ვინაიდან $G\subset X$ სიმრავლე ρ_X მეტრიკის მიმართ თვითონ არის მეტრიკული სივრცე , ამიტომ ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $G=X$. ამიტომ შემდგომში განვიხილავთ მეტრიკულ სივრცეებს შორის ასახვებს.

თუ მოცემულია $f:X\to Y$ ასახვა, მაშინ $y\in Y$ წერტილს, რომელიც $x\in X$ წერტილს შეესაბამება, ვუწოდებთ x წერტილის სახეს f ასახვის დროს და $f(x)$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ, ამასთანავე ნებისმიერ $x\in X$ წერტილს, რომელიც $y\in Y$ წერტილს შეესაბამება, უწოდებენ y წერტილის წინარე სახეს. $y\in Y$ წერტილის ყველა წინარესახის ერთობლიობას უწოდებენ y წერტილის სრულ წინარესახეს და აღნიშნავენ $f^{-1}(y)$ -ით.

ნებისმიერი $A\subset X$ სიმრავლისათვის ყველა $y=f(x), x\in A$ წერტილთა ერთობლიობას უწოდებენ A სიმრავლის სახეს და $f(A)$ -ით აღნიშნავენ.

ვთქვათ $B\subset Y$. ყველა იმ $x\in X$ წერტილთა ერთობლიობას, რომელთათვისაც $f(x)\in B$ უწოდებენ B სიმრავლის წინარე სახეს და $f^{-1}(B)$ -ით აღნიშნავენ.

განმარტება 2. ასახვას $f:X\to Y$ უწოდებენ უწყვეტს $x_0\in X$ წერტილში, თუ

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\quad\forall x\in O_\delta(x_0),\quad f(x)\in O_\varepsilon(y_0)\,,\qquad(1)$$

სადაც $y_0=f(x_0)$.

გავიხსენოთ, რომ x_0 წერილის შემცველ ნებისმიერ ღია სიმრავლეს ვუწოდებთ x_0 წერტილის მიდამოს. პირობა (1) ჩაწერის დროს შეგვიძლია $\varepsilon-\delta$ მიდამოების ნაცვლად გამოვიყენოთ ზოგადად მიდამოები. ადვილია ჩვენება, რომ (1) პირობა ტოლფასია პირობის

$$\forall O(y_0)\quad\exists O(x_0):\quad f(O(x_0))\subset O(y_0)\,.\qquad(2)$$

როგორც კლასიკურ ანალიზში , ანალოგიურად აქაც ზოგად მეტრიკულ სივრცეებში ზემოთ მოყვანილი განმარტების ტოლფასი განმარტება მოვიყვანოთ მიმდევრობების გამოყენებით (ჰაინეს განმარტება).

განმარტება 3. $f:X\to Y$ ასახვას უწოდებენ $x_0\in X$ წერტილში უწყვეტს , თუ X სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის , რომელიც კრებადია x_0

წერტილისაკენ გვაქვს , რომ მიმდევრობა $y_n = f(x_n), \quad n \in N$ კრებადია $y_0 = f(x_0)$ წერტილისაკენ.

დამტკიცება ანალოგიურია როგორც რიცხვით ღერძზე. ანალოგიურად (როგორც რიცხვით ღერძზე) შეგვიძლია დავამტკიცოთ თეორემა უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ.

თეორემა 1. თუ ასახვა $f: X \to Y$ უწყვეტია $x_0 \in X$ წერტილში, ხოლო $g: Y \to Z$ ასახვა უწყვეტია $y_0 = f(x_0)$ წერტილში, მაშინ მათი კომპოზიცია $g \circ f$ უწყვეტია $x_0 \in X$ წერტილში.

განმარტება 4. $f: X \to Y$ ასახვას X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეში უწოდებენ უწყვეტს თუ ის ნებისმიერ $x \in X$ წერტილში უწყვეტია.

თეორემა 2. ასახვა $f: X \to Y$ X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეში უწყვეტია ,მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y სიმრავლის ნებისმიერი ღია ქვესიმრავლის წინარე სახე X -ში ღია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ f უწყვეტია და G არის Y სივრცის რაიმე ღია სიმრავლე. მაშინ თუ $x_0 \in f^{-1}(G)$, მაშინ G იქნება $y_0 = f(x_0)$ წერტილის მიდამო. წერტილში უწყვეტობის განმარტების საფუძველზე (იხ.(2) პირობა) არსებობს x_0 წერტილის $O(x_0)$ მიდამო ისეთი, რომ $f(O(x_0)) \subset G$ და ამიტომ $O(x_0) \subset f^{-1}(G)$. მაშასადამე $f^{-1}(G)$ სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი მისი შიგა წერტილია და $f^{-1}(G)$ ღია სიმრავლეა.

ვთქვათ f ასახვა ისეთია, რომ ნებისმიერი G ღია სიმრავლისათვის $f^{-1}(G)$ ღიაა. მაშინ ნებისმიერი $x_0 \in X$ წერტილისათვის სრულდება პირობა: $y_0 = f(x_0)$ წერტილის ნებისმიერი $O(y_0)$ მიდამოსათვის სიმრავლე $U = f^{-1}(O(y_0))$ ღიაა და ვინაიდან $x_0 \in U$, ამიტომ U არის x_0 წერტილის მიდამო. მაშასადამე y_0 წერტილის ნებისმიერი $O(y_0)$ მიდამოსათვის არსებობს x_0 წერტილის U მიდამო ისეთი, რომ $f(U) \subset O(y_0)$. მაშასადამე f ასახვა x_0 წერტილში უწყვეტია.

შედეგი 1. ასახვა $f: X \to Y$ X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეში უწყვეტია ,მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y სიმრავლის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვესიმრავლის წინარე სახე X -ში ჩაკეტილი სიმრავლეა.

2.2. კომპაქტზე განსაზღვრული უწყვეტი ასახვები.

თეორემა 1. (ვაიერშტრასის თეორემა) ვთქვათ ასახვა $f: X \to Y$ X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეში უწყვეტია. თუ X მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია, მაშინ $f(X)$ სიმრავლეც კომპაქტურია . (მოკლეთ კომპაქტის უწყვეტი ანასახი კომპაქტია).

დამტკიცება. ვთქვათ $Y_\alpha,\ \alpha \in A$ წარმოადგენს $f(X)$ სიმრავლის რაიმე ღია დაფარვას (Y სივრცეში). f -ის უწყვეტობის გამო სიმრავლეთა ერთობლიობა $X_\alpha = f^{-1}(Y_\alpha),\ \alpha \in A$ წარმოადგენს ღია სიმრავლეთა ერთობლიობას (X -ში), რომელიც ფარავს X კომპაქტს. ცხადია ამიტომ არსებობს სასრული რაოდენობა $X_\alpha, \alpha \in A'$ ღია სიმრავლეებისა, რომლებიც ფარავენ X სიმრავლეს. მაშინ სასრული რაოდენობა $Y_\alpha,\ \alpha \in A'$ ღია სიმრავლეებისა დაფარავს $f(X)$ სიმრავლეს. მაშასადამე $f(X)$ კომპაქტია.

შედეგი 1. (ვაიერშტრასის თეორემა). ვ თქვათ $f: X \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა, სადაც $X \subset R^n$ კომპაქტია. მაშინ f ფუნქცია შემოსაზღვრულია და ის ღებულობს მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს.

დამტკიცება. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $f(X)$ სიმრავლე კომპაქტია (R -ში), ამიტომ ის შემოსაზღვრული და ჩაკეტილია.

განმარტება 1. f ასახვას $\{X, \rho_X\}$ მეტრიკული სივრციდან $\{Y, \rho_Y\}$ მეტრიკულ სივრცეში უწოდებენ თანაბრად უწყვეტს თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, x' \in X: \quad \rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x)') < \varepsilon .$$

თეორემა 2. (კანტორის თეორემა) .ვთქვათ ასახვა $f: X \to Y$ X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეში უწყვეტია. თუ X მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია, მაშინ f თანაბრად უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ X მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია და ასახვა $f: X \to Y$ უწყვეტია მაგრამ ის არ არის თანაბრად უწყვეტი. მაშინ რომელიღაც $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $n > 0$ ნატურალური რიცხვისათვის მოიძებნება X კომპაქტის x_n, y_n ელემენტები, ისთი, რომ $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$, მაგრამ $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. X -ის კომპაქტურობის გამო $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ , რომელიღაც $x \in X$ ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$ (შევნიშნოთ, რომ $\{y_{n_k}\}$ მიმდევრობის ზღვარიც იქნება x). თუ გავითვალისწინებთ $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ უტოლობას დავასკვნით, რომ ნებისმიერი k ნომრისათვის უნდა შესრულდეს შემდეგი ორი უტოლობიდან

$$\rho_Y(f(x\ ), f(x_{n_k})) \geq \varepsilon/2, \quad \rho_Y(f(x\ ), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon/2$$

ერთი მაინც. ეს კი ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ მოცემული ასახვა უწყვეტია.

შედეგი 2. (კანტორის თეორემა). ვთქვათ $f: X \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა, სადაც $X \subset R^n$ კომპაქტია. მაშინ f თანაბრად უწყვეტია.

განმარტება 2. ვთქვათ არსებობს f ბიექციური ასახვა $\{X, \rho_X\}$ მეტრიკული სივრციდან $\{Y, \rho_Y\}$ მეტრიკულ სივრცეზე ისეთი, რომ f და შექცეული ასახვა f^{-1} უწყვეტია, მაშინ ამბობენ, რომ X და Y მეტრიკული სივრცეები ჰომეომორფული სივრცეებია.

თეორემა 3. ვთქვათ f ასხვა X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეზე ბიექციურია და უწყვეტია. თუ X კომპაქტია , მაშინ შექცეული ასახვაც უწყვეტია (მაშასადამე X და Y ჰომეომორფულებია).

დამტკიცება. ვინაიდან კომპაქტური სიმრავლე ჩაკეტილია, ხოლო კომპაქტის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეც კომპაქტია, ამიტომ კომპაქტის უწყვეტი ასახვის დროს ამ კომპაქტის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვესიმრავლის სახეც ჩაკეტილია. ამიტომ ნებისმიერი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისათვის $f(F)$ ჩაკეტილია. f^{-1} ასახვისათვის $f(F)$ არის F სიმრავლის წინარე სახე. ასე, რომ f^{-1} ასახვისათვის ნებისმიერი F ჩაკეტილი სიმრავლის წინარე სახე ჩაკეტილია. ე.ი. f^{-1} უწყვეტია.

2.3. ბმულ სიმრავლეზე განსაზღვრული ასახვები.

განმარტება 1. $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრცეს უწოდებენ ბმულს , თუ M სიმრავლე არ შეიძლება წარმოდგეს ორი არაცარიელი M_1 და M_2 არათანამკვეთი ღია სიმრავლეების გაერთიანების სახით.

განმარტება 2. $\{M, \rho\}$ მეტრიკული სივრცის E სიმრავლეს უწოდებენ ბმულს თუ $\{E, \rho\}$ მეტრიკული სივრცე ბმულია.

თეორემა 1. ვთქვათ ასახვა $f: X \to Y$ X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეზე უწყვეტია. თუ X სივრცე ბმულია, მაშინ Y ბმული სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(X) = Y$ არაბმული სიმრავლეა. მაშინ Y სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ორი Y_1 და Y_2 არათანამკვეთი, არაცარიელი ღია სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ვინაიდან f უწყვეტია ამიტომ Y_1 და Y_2 სიმრავლეების წინარე X_1

და X_2 სახეებიც ღია , არათანამკვეთი არაცარიელი სიმრავლეებია, ამასთან $X = X_1 \cup X_2$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე Y ბმულია.

შედეგი 1. ვთქვათ ასახვა $f : X \to Y$ X მეტრიკული სივრციდან Y მეტრიკულ სივრცეში უწყვეტია. თუ X სივრცე ბმულია, მაშინ $f(Y)$ ბმული სიმრავლეა Y მეტრიკულ სივრცეში . .

2.4. კუმშვითი ასახვები და უძრავი წერტილები.

განმარტება 1. $f : \{X, \rho\} \to \{X, \rho\}$ ასახვას უწოდებენ კუმშვით ასახვას, თუ

$$\exists q \in (0;1): \quad \forall x, y \in X \quad \rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x, y). \tag{1}$$

(1)პირობიდან მარტივია ჩვენება იმისა, რომ $f : \{X, \rho\} \to \{X, \rho\}$ ასახვა უწყვეტია, უფრო მეტიც თანაბრად უწყვეტია.

განმარტება 2. $x \in X$ წერტილს ვუწოდებთ $f : X \to X$ ასახვის უძრავ წერტილს თუ

$$f(x) = x$$

თეორემა 1. ყოველ კუმშვით ასახვას სრული მეტრიკული სივრციდან თავის თავში გააჩნია ერთადერთი უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to X$ ასახვა აკმაყოფილებს (1) პირობას. ავირჩიოთ რაიმე $x_0 \in X$ წერტილი. და განვმარტოთ მიმდევრობა $\{x_n\}$ შემდეგი წესით

$$x_n = f(x_{n+1}), \quad n \in N . \tag{2}$$

აგებული მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, მართლაც

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \le q\rho(x_n, x_{n-1})$$

და მაშასადამე

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le q^n \rho(x_1, x_0) \quad \forall n \in N .$$

ამიტომ

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$$
$$\le (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+p-1})\rho(x_1, x_0).$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1) \qquad (3)$$

ნებისმიერი n და p ნატურალური რიცხვებისათვის. მაშასადამე $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ვინაიდან X სრულია, ამიტომ არსებობს $a \in X$ წერტილი რომლისკენაც აგებული მიმდევრობა კრებადია. თუ (2)- ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე , როცა $n \to \infty$, მივიღებთ $a = f(a)$. ე.ი $a \in X$ წერტილი არის f ასახვის უძრავი წერტილი. ვაჩვენოთ, რომ ის ერთადერთია. ვთქვათ არსებობს მეორე $b \in X$ წერტილი ისეთი, რომ $f(b) = b$. მაშინ

$$\rho(a,b) = \rho(f(a), f(b)) \le q\rho(a,b),$$

და ვინაიდან $q < 1$ გვექნება $\rho(a,b) = 0$, ანყუ $a = b$.

თეორემა დამტკიცებულია.

$\{x_n\}$ მიმდევრობის აგების ზემოთ მოყვანილ სქემას უწოდებენ მიმდევრობით მიახლოების მეთოდს. დამტკიცებული თეორემის ძალით თუ X სრული მეტრიკული სივრცეა და $f : X \to X$ კუმშვითი ასახვაა, მაშინ $f(x) = x$ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რომელიც (2) ტოლობით განსაზღვრული მიმდევრობის ზღვარია ნებისმიერი x_0 საწყისი მნიშვნელობისათვის. (3) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით $p \to \infty$ მივიღებთ

$$\rho(x_n, a) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)),$$

რომელიც გვაძლევს a წერტილისკენ $\{x_n\}$ მიმდევრობის კრებადობის რიგს.

შენიშვნა 1. თუ თეორემა 1-ში (1) უტოობას შევცვლით პირობით

$$\forall x, y \in X \quad \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \qquad (4)$$

მაშინ თეორემა საოგადოდ სამართლიანი არ არის. მართლაც განვიხილოთ

$$f : R \to R; \quad f(x) = |x| + \frac{1}{1+|x|}$$

ასახვა, (R -ში $\rho(x, y) = |x = y|$ მეტრიკით). გვაქვს

$$|f(x) - f(y)| = (1 - (1+|x|)^{-1}(1+|y|)^{-1})\| x| - |y\| < \| x| - |y\|,$$

მაგრამ f ასახვას უძრავი წერტილი არ გააჩნია.

მიუხედავად ამისა სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 2. (შაუდერის თეორემა) ვთქვათ X კომპაქტია და $f:\{X,\rho\}\to\{X,\rho\}$ ასახვა აკმაყოფილებს (4) პირობას. მაშინ f ასახვას ერთადერთი უძრავი წერტილი გააჩნია.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ f ასახვა უწყვეტია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ X კომპაქტზე განსაზღვრული $\rho(x, f(x))$ ფუნქცია (რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს R -ში) უწყვეტია. ამიტომ $\rho(x,\rho(x))$ ფუნქცია ღებულობს X კომპაქტის რაღაც $x_0\in X$ წერტილში თავის უმცირეს მნიშვნელობას. შევნიშნოთ, რომ ეს მნიშვნელობა აუცილებლად ნულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში გვაქვს

$$\rho(f(x_0), f(f(x_0)))<\rho(x_0, f(x_0))=\min_{x\in X}\rho(x\ , f(x\ ))\ ,$$

რაც შეუძლებელია. ცხადია $x_0\in X$ f ასახვას უძრავი წერტილია (ვინაიდან $\rho(x_0, f(x_0))=0$). ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ $x_0\in X$ წერტილი f ასახვას ერთადერთი უძრავი წერტილი იქნება. წინააღმდეგ შემთხვეაში თუ $x_1\in X$ მეორე უძრავიწერტილია, მაშინ

$$\rho(x_0,y_0)=\rho(f(x_0), f(y_0))<\rho(x_0,y_0)\ ,$$

რაც წინააღმდეგობაა. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვთქვათ R^n სიმრავლეზე მოცემულია მეტრიკა შემდეგი წესით

$$\rho(x,y)=\max_i|\xi_i-\eta_i|\quad x=(\xi_1,...,\xi_n),\ y=(\eta_1,...,\eta_n)\ .$$

ასეთნაირად განსაზღვრული მეტრიკა R^n ზე სრულია. განვიხილოთ $f:R^n\to R^n$ ასახვა შემდეგი წესით

$$f(x)=Ax+b\ ,\qquad (4)$$

სადაც A არის n რიგის მატრიცი, ხოლო $b=(b_1,...,b_n)$ სვეტ სტრიქონი.

ვთქვათ $A=(a_{ij})$ $x=(\xi_1,...,\xi_n),\ x'=(\xi_1^{'},...,\xi_n^{'})$.

გვაქვს

$$\rho(f(x), f(x'))=\rho(Ax,Ax')=\max_i\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(\xi_j-\xi_j^{'})\right|\le$$

$$\le\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\cdot\max_j|\xi_j-\xi_j^{'}|=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\cdot\rho(x,x').$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ თუ

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1, \qquad (5)$$

მაშინ (4) კუმშვითი ასახვაა.

თეორემა 3. თუ A მატრიცი აკმაყოფილებს (5) უტოლობას, მაშინ $x - Ax = b$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ნებისზიერი b ვექტორისათვის. ეს ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობისათვის.

როგორც ვხედავთ (5) პირობა იტერაციული პროცესის კრებადობისათვის საკმარისი პირობაა. შევნიშნოთ, რომ თუ R^n -ზე შემოვიღებთ სხვა სრულ მეტრიკას, მაშინ შეგვიძლია მივიღოთ ახალი საკმარისი პირობა იტერაციული მეთოდის კრებადობისა.

მაგალითი 2. ვთქვათ R^n სიმრავლეზე მოცემულია მეტრიკა შემდეგი წესით

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} | \xi_i - \eta_i |^2 \right)^{1/2} \quad x = (\xi_1, ..., \xi_n), \ y = (\eta_1, ..., \eta_n).$$

(4) ფორმულით განსაზღვრული ასახვისათვის გვაქვს

$$\rho(f(x), f(x')) = \rho(Ax, Ax') = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_j - \xi_j^{'}) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1, j=1}^{n,n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \cdot \rho(x, x').$$

მაშასაამე ანალოგიურად როგორც თეორემა 3-ში თუ

$$\alpha = \left(\sum_{i=1, j=1}^{n,n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} < 1,$$

მაშინ $x - Ax = b$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ნებისზიერი b ვექტორისათვის და ამონახსნი შეგვიძლია ვიპოვოთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობისათვის.

ზემოთ მოყვანილი 1-2 მაგალითის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ შესაძლოა რაიმე მეტრიკის მიმართ ასახვა არ იყოს კუმშვითი, ხოლო მეორე მეტრიკის მიმართ იყოს კუმშვითი. ასეთი მეტრიკის აგება (თუ ის არსებობს) კონკრეტულ ამოცანებში საკმაოდ რთული ამოცანაა. აღნიშნულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანა

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad x \in [0, x_1] . \qquad (6)$$

(6) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt \quad . \tag{7}$$

ვთქვათ ფუნქცია $f(x, y)$ $\forall y$ და $x \in [0, x_1]$ უწყვეტი და შემოსაზღვრულია. ამასთანავე დაუშვათ, რომ $f(x, y)$ y ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \le L | y_1 - y_2 |, \quad x \in [0, x_1].$$

განვმარტოთ მეტრიკა ფორმულით

$$\rho(y_2(x), y_1(x)) = \max_{x \in [0, x_1]} \exp(-L_1 x) | y_2(x) - y_1(x) |,$$

სადაც $L_1 > 0$. მაშინ

$$u^{k+1}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, u^k(t))dt$$

იტერაციული პროცესისათვის გვექნება

$$\rho(u^k, u^{k+1}) = \max_{x \in [0, x_1]} \exp(-L_1 x) \left| \int_0^x (f(u^k(t), t) - f(u^{k-1}(t), t))dt \right| \le$$

$$\le L \max_{x \in [0, x_1]} \int_0^x \exp(-L_1(x-t)) \exp(-L_1 t) | (u^k(t) - u^{k-1}(t) | dt \le$$

$$\le L \max_{x \in [0, x_1]} \int_0^x \exp(-L_1(x-t)) \rho(u^k, u^{k-1}) dt = q\rho(u^k, u^{k-1}),$$

სადაც $q = (1 - \exp(-L_1 x_1))L / L_1$. მაშასადამე თუ $L_1 > L$, მაშინ $q < 1$ და სრულდება კუმშვითი ასახვის თეორემაში მოცემული პირობები. (ჩვენ დავამტკიცეთ დიფერენციალური განტოლებებიდან კარგად ცნობილი ცნობილი პიკარის თეორემა).

შევნიშნოთ, რომ თუ x_0 წარმოადგენს $f : X \to X$ ასახვის უძრავ წერტილს , მაშინ ის უძრავი წერტილი იქნება ამ ასახვის ნებისმიერი n -ური ხარისხისათვის.

თეორემა 4. თუ სრული მეტრიკული სივრცის თავის თავში ასახვის რომელიმე რიგის ხარისხი არის კუმშვითი, მაშინ თვით ასახვას გააჩნია ერთადერთი კუმშვითი წერტილი.

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to X$ ასახვის n რიგის ხარისხი ანუ ასახვა

$$f^n = f \circ f \circ ... \circ f, \quad n \geq 1,$$

არის კუმშვითი. მაშინ f^n ასახვას გააჩნია უძრავი წერტილი, ე.ი.

$$\exists a \in X: \quad f^n(a) = a.$$

მაშინ $f(a) = f(f^n(a)) = f^n(f(a))$, ე.ი. $f(a)$ არის f^n ასახვის უძრავი წერტილი. ვინაიდან f^n ასახვას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი უძრავი წერტილი, ამიტომ $f(a) = a$. მაშასადამე f ასახვას გააჩნია უძრავი წერტილი. მისი ერთადერთობა გამოდის იქედან, რომ თუ f გააჩნია უძრავი წერილი, მაშინ ის უძრავი იქნება f^n ასახვისათვისაც.

მაგალითი 4. განვიხილოთ ინტეგრალური განტოლება

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t),$$

სადაც λ რაიმე რიცხვია, f $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა ,ხოლო $K(t,\tau)$ $\Delta = [a;b]\times[a;b]$ კვადრატზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა , $x(t)$ კი საძიებელი ფუნქცია.

ცხადია ფუნქცია(ოპერატორი)

$$A(x)(t) = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t)$$

წარმოადგენს უწყვეტ ასახვას $C([a;b])$ სივრცისა თავის თავში. გვაქვს

$$|A(x)(t) - A(y)t = \left|\lambda \int_a^t K(t,\tau)(x(\tau) - y(\tau))d\tau\right| \leq$$
$$\leq |\lambda| \cdot q \cdot \rho(x,y)\cdot(t-a)$$

სადაც $q = \max\limits_{(t,\tau)\in\Delta} |K(t,\tau)|$. ამასთანავე

$$|A^2(x)(t) - A^2(y)(t)| \leq |\lambda|^2 \cdot q^2 \cdot \rho(x,y)\cdot(t-a)^2/2.$$

A ასახვის n -ური ხარისხისათვის გვაქვს

$$|A^n(x)(t) - A^n(y)(t)| \leq |\lambda|^n \cdot q^n \cdot \rho(x,y)\cdot\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

ცხადია ნებისმიერი λ, q რიცხვებისათვის არსებობს n ისეთი, რომ

$$|\lambda|^n \cdot q^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} < 1,$$

ამ შემთხვევაში A^n იქნება კუმშვითი. მაშასადამე ვოლტერას განტოლებას ნებისმიერი λ რიხცვისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის

1.ვთქვათ M მეტრიკული სივრცეა. აჩვენეთ, აჩვენეთ, რომ $f: M \to R$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი a ნამდვილი რიცხვისათვის სიმრავლეები

$\{x \in X;\ f(x) < a\}$ და $\{x \in X;\ f(x) > a\}$ იყოს ღია.

2.არის თუ არა ჰომეომორფული შემდეგი სიმრავლეები (ბუნებრივი მეტრიკით)

ა) $(a;b)$ ინტერვალი და R ;

ბ) $(1;3) \cup (5;7)$ და R;

გ) $[a;b]$ და R;

დ) $[a;b]$ და $(a;b)$.

3.განვიხილოთ ასახვა $f:[0;2\pi) \to S: \quad f(t) = (\cos t; \sin t)$, სადაც S ერთეულოვანი წრეწირია. აჩვენეთ,რომ ასახვა ბიექციაა, უწყვეტია მაგრამ მისი შექცეული არაა უწყვეტი.

4. ვთქვათ $f: X \to Y$ და $g: X \to Y$ უწყვეტი ფუნქციებია. აჩვენეთ, რომ $\{x: f(x) = g(x)\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია.

5. აჩვენეთ, რომ ასახვა $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ არის კუმშვითი $[1;2]$ სეგმენტზე.

6. აჩვენეთ, რომ ჯაჭვურ წილადთა მიმდევრობას $2,\ 2+\dfrac{1}{2},\ 2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}},\ldots$ გააჩნია ზღვარი.

7. განვიხილოთ უსასრულოგანზომილებიან წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$x_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i \quad (i = 1, 2, ...)$$

ა) აჩვენეთ, რომ თუ $\alpha = \sup_m \sum_{i=1}^{\infty} | \alpha_{im} | < 1$ და $\sum_{i=1}^{\infty} | a_i | < \infty$, მაშინ არსებობს ერთადერთი $x = (x_1, x_2, ...)$, რომლელიც აკმაყოფილებს მოცემულ სისტემას და $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i | < \infty$.

ბ) აჩვენეთ, რომ თუ $\beta = \sup \sum_{m=1}^{\infty} | \alpha_{im} | < 1$ და $\sup_i | a_i | < \infty$, მაშინ არსებობს ერთადერთი $x = (x_1, x_2, ...)$, რომლელიც აკმაყოფილებს მოცემულ სისტემას და $\sup_i | x_i | < \infty$.

აჩვენეთ, რომ $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ ასახვას მოცემულს წესით $Af(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$ გააჩნია უძრავი წერტილი და იპოვეთ ის.

8. აჩვენეთ, რომ განტოლებას $\int_0^t \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)dt = \varphi(x)$ ყოველი ნატურალური n-იათვის $C([0,1])$ სივრცეში გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

თავი III

წრფივი ნორმირებული სივრცეები

3.0. წრფივი სივრცეები.

შემდგომში ჩვენ ვისარგებლებთ ალგებრის კურსიდან ცნობილი წრფივ სივრცეთა თეოორიის მთელი რიგი ცნებებით და დებულებებით.

განმარტება 1. ვთქვათ K არის ნამდვილ რიცხვთა ან კომპლექსურ რიცხვთა ველი (სკალართა ველი). X სიმრავლეს უწოდებენ ვექტორულ (წრფივ) სივრცეს სკალართა K ველის მიმართ თუ X სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი x და y ელემენტებისათვის განსაზღვრულია მათი ჯამი $x+y$ ამავე სიმრავლის ელემენტი(ერთადერთი) და K ველის ნებისმიერი ელემენტისათვის $\lambda \in K$ და X სივრცის ნებისმიერი ელემენტისათვის $x \in X$ განსაზღვრულია მათი ნამრავლი λx -ამავე სივრცის ელემენტი (ერთადერთი) ისე, რომ სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1) $x+y=y+x, \quad \forall x,y \in X$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z), \quad \forall x,y,z \in X$;

3) X სივრცეში არსებობს ნულოვანი ელემენტი (ვექტორი) 0 ისეთი, რომ $0x=0, \quad \forall x \in X$;

4) $\lambda(x+y)=\lambda y+\lambda x, \quad \forall x,y \in X, \forall \lambda \in K$;

5) $(\lambda+\eta)x=\lambda x+\eta x, \quad \forall x \in X, \forall \lambda,\eta \in K$;

6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x), \quad \forall x \in X, \forall \lambda,\mu \in K$;

7) $1x=x, \quad \forall x \in X$.

X სიმრავლეს ზემოთ ოყვანილი თვისებებით უწოდებენ ვექტორულ სივრცეს K ველის მიმართ. (ვექტორულ სივრცეს R ველის მიმართ ნამდვილ ვექტორულ სივრცეს,ხოლო C ველის მიმართ კომპლექსური წრფივი სივრცეს უწოდებენ). ადვილია ცვენება იმისა, რომ უკვე ცნობილი მეტრიკული სივრცეები $R^n, C^n, s, m, c, l_p^n, l_p, C([a,b]), L^p(R)$ თუ ამ სიმრავლეებში ბუნებრივად განვსაზღვრავთ ვექტორთა შეკრებისა და სკალარზე ვექტორის ნამრავლის ოპერაციას აკმაყოფილებენ წრფივი სივრცის ზემოთ მოყვანილ აქსიომებს.

განმარტება 2. ვთქვათ X და Y წრფივი სივრცეებია K ველის მიმართ. ვიტყვით, რომ ეს სივრცეები იზომორფულია თუ არსებობს ბიექცია $F: X \to Y$ ისეთი, რომ

$$F(\lambda x+\eta y)=\lambda F(x)+\eta F(y) \quad \forall x,y \in X, \forall \lambda,\mu \in K .$$

განმარტება 3. ვთქვათ X წრფივი სივრცეა K ველის მიმართ. სიმრავლეს $X_0 \subset X$ უწოდწებენ X წრფივი სივრცის ქვესივრცეს (ან X წრფივი სივრცის წრფივ ქვესიმრავლეს) თუ X_0 არის X -ში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ წრფივი სივრცე.

შევნიშნოთ, რომ წრფივი X სივრცის ქვესივრცეთა ნებისმიერი ერთობლიობის თანაკვეთაც წრფივი ქვესივრცეა.თუ E რაიმე ქვესიმრავლეა X სივრცის (არა აუცილებლად წრფივი), მაშინ ცხადია იარსებებს მინიმალური წრფივი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს E სიმრავლეს.

ამ სიმრავლეს E სიმრავლეზე მოჭიმულ წრფივ გარსს (წრფივ მრავალსახეობას) უწოდებენ. ადვილი დასადგენია, რომ E სიმრავლეზე მოჭიმული წრფივი გარსი არის

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

სახის ელემენტების ერთობლიობა X სიმრავლიდან , სადაც $x_1, x_2, ..., x_n$ ნებისმიერად აღებული ელემენტებია E სიმრავლიდან, ხოლო $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ნებისმიერად აღებული სკალართა ერთობლიობაა.

განმარტება 4. ვთქვათ X წრფივი სივრცეა K ველის მიმართ. ელემენტთა ერთობლიობას $x_1, x_2, ..., x_n$ X სიმრავლიდან უწოდებენ წრფივად დამოუკიდებელს, თუ $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. X სივრციდან აღებულ უსასრულო რაოდენობა ელემენტების ერთობლიობას უწოდებენ წრფივად დამოუკიდებელს თუ ამ ერთობლიობიდან აღებული ნებისმიერი სასრული ერთობლიობა ვექტორებისა წრფივად დამოუკიდებელია. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას $\{x_\alpha\}$ უწოდებენ X სივრცის ალგებრულ ბაზისს თუ ამ სისტემის წრფივი გარსი ემთხვევა X სივრცეს.

განმარტება 5. ვთქვათ X წრფივი სივრცეა K ველის მიმართ. დაუშვვათ X_1 და X_2 არიან X სივრცის ქვესივრცეები. ვიტვით, რომ X სივრცე წარმოიდგინება X_1 და X_2 წრფივი ქვესივრცეების ალგებრულ ჯამად თუ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის სამართლიანია ერთადერთი წარმოდგენა $x = x_1 + x_2$, სადაც $x_1 \in X_1$ და $x_2 \in X_2$.

3.1. წრფივი ნორმირებული სივრცეები

განმარტება 1. წრფივი სივრცეს X ნამდვილ რიცხვთა (კომპლექსურ რიცხვთა ველის) მიმართ უწოდებენ წრფივ ნორმირებულ სივრცეს თუ X სიმრავლეზე განმარტებულია ფუნქცია $\|\|: X \to R$ შემდეგი თვისებებით:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall \alpha \in R \ (\alpha \in C)$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$;
4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$

აღნიშნულ ფუნქციას უწოდებენ ნორმას X სიმრავლეზე, ხოლო $\|x\|$ რიცხვს x ელემენტის (ვექტორის) ნორმას. 1)-4) აქსიომებს ნორმის აქსიომებს უწოდებენ. სახელდობრ

2) თვისებას უწოდებენ ნორმის ერთგვაროვნების თვისებას, ხოლო 3) თვისებას სამკუთხედის უტოლობას.

მაგალითი 1. R^n სიმრავლეში ყოველი $x=(x_1,...,x_n)$ ვექტორისათვის განსაზღვრული სიდიდე $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$ აკმაყოფილებს ნორმის ყველა თვისებას.

მაგალითი 2. C^n სიმრავლეში ყოველი $z=(z_1,...,z_n)$ ვექტორისათვის განსაზღვრული სიდიდე $\|z\|=\sqrt{|z_1|^2+...+|z_1|^2}$ აკმაყოფილებს ნორმის ყველა თვისებას.

განმარტება 2. თუ $\|\|: X\to R$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ნორმის 1) 2) 3) თვისებას, მაგრამ არ აკმაყოფილებს 4) თვისებას, მაშინ მას უწოდებენ ნახევარნორმას, ხოლო X წრფივ სივრცეს ნახევრად ნორმირებულს.

მაგალითი 3. ვთქვათ $C^1([a;b])$ სიმრავლე წარმოადგენს $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ყველა უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა ერთობლიობას. ფუნქცია

$$\|f\|=\max_{x\in[a;b]}|f'(x)|$$

$C^1([a;b])$ სიმრავლეზე განსაზღვრავს ნახევარნორმას.(ნებისმიერი მუდმივი f ფუნქციისათვის $\|f\|=0$).

შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ წრფივ ნორმირებულ სივრცეებს. შევნიშნოთ, რომ თუ X ნორმირებული სივრცეა, მაშინ ფუნქცია

$$\rho(x;y)=\|x-y\|,\quad x,y\in X,$$

X სიმრავლეზე განსაზღვრავს მეტრიკას, ამიტომ წრფივ ნორმირებულ სივრცეში ავტომატურად განმარტებულია ყველა ის ცნება, რაც შემოღებული იყო მეტრიკული სივრცეებისათვის.

მაგალითად, E სიმრავლეს X ნორმირებული სივრციდან უწოდებენ შემოსაzღვრულს, თუ

$$\exists M>0:\quad \forall x\in E\ \ \|x\|\le M.$$

X ნორმირებული სივრციდან აღებულ $\{x_n\}$ მიმდევრობას უწოდებენ კრებადს x_0 წერტილისაკენ, თუ

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N:\quad \forall n\ge N\quad \|x_n-x_0\|<\varepsilon.$$

X ნორმირებული სივრციდან აღებულ $\{x_n\}$ მიმდევრობას უწოდებენ ფუნდამენტალურს, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n,m \geq N \quad \| x_n - x_m \| < \varepsilon .$$

ნორმირებული სივრცეს უწოდებენ სრულს, თუ ამ სივრცის წებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია.

განმარტება 3. სრულ ნორმირებულ სივრცეს ბანახის სივრცეს უწოდებენ.

პრაქტიკულ სიტუაციებში სივრცის სისრულის დასამტკიცებლად ეფექტურია შემდეგი თეორემა

თეორემა 1. ვთქვათ X ნორმირებული სივრცეა. იმისათვის, რომ X იყოს სრული აუცილებელია და საკმარისი, რომ X-დან აღებული ნებისმიერი $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობიათვის, რომლისთვისაც $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი იყოს კრებადი.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ X სრულია. და $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ და $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. მაშინ როცა $n > m$ გვაქვს

$$\| y_m - y_n \| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| x_k \| < \varepsilon$$

საკმაოდ დიდი n და m ნომრებისათვის, ვინაიდან $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$. ვინაიდან სივრცე სრულია და $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ როგორც ვნახეთ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ კრებადია.

საკმარისობა. ვთქვათ ნებისმიერი $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი კრებადია X-ში, როცა $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$. ვაჩვენოთ, რომ სივრცე სრულია. დაუშვათ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ რაიმე ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. მაშინ შეგვიძლია მოვძიოთ $n_1 \in N$ ისეთი, რომ $\| y_{n_1} - y_m \| < 1/2$, როცა $m > n_1$. ანალოგიურად არსებობს $n_2 > n_1$ ისეთი, რომ $\| y_{n_2} - y_m \| < 1/2^2$, როცა $m > n_2$. ინდუქციურად შეგვიძლია

ავაგოთ $n_1 < n_2 < n_3 ...$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $\| y_{n_{k+1}} - y_m \| < 1/2^k$, როცა $m > n_k$. კერძოდ გვექნება $\| y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \| < 1/2^k$ ყოველი $k \in N$. ავღნიშნოთ $x_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$. გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} \| x_k \| = \sum_{k=1}^{n} \| y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} ,$$

საიდანაც გვექნება, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| < \infty$. დაშვების თანახმად არსებობს $x \in X$, ისეთი, რომ $\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$, როცა $n \to \infty$. გვაქვს $\sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = y_{m_{k+1}} - y_{m_k} \to x$. საიდანაც დავასკვნით, რომ $y_{n_k} \to x + y_{n_1}$ X -ში, როცა $k \to \infty$. მაშასადამე ფუნდამენტალურ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას გააჩნია კრებადი ქვემიმდევრობა და ამიტომ ის კრებადი იქნება.

განმარტებ 4. X_1 და X_2 წრფივ ნორმირებულ სივრცეებს უწოდებენ იზომორფულს, თუ არსებობს იზომორფიზმი f წრფივ ვექტორულ X_1 და X_2 სივრცეებს შორის ისეთი, რომ $\| f(x) \|_2 = \| x \|_1 \quad \forall x \in X_1$.

განმარტება 5. ვთქვათ წრფივ ნორმირებულ X სივრცეზე განმარტებულია ორი $\| \|$ და $\| \|_*$ ნორმა. ვიტყვით, რომ ეს ნორმები ეკვივალენტურია თუ არსებობს $c_1, c_2 > 0$ მუდმივები ისეთი, რომ

$$c_1 \| x \| \leq \| x \|_* \leq c_2 \| x \| \quad \forall x \in X .$$

თეორემა 1. სასრულგანზომილებიან წრფივ ნორმირებულ სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ორი ნორმა ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ვთქვათ X არის n განზომილებიანი წრფივი სივრცე ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. ვთქვათ $\| \|$ არის X -ზე განსაზღვრული რაიმე ნორმა. ავირჩიოთ წრფივ X სივრცეში რაიმე ბაზისი $e_1, ..., e_n$. მაშინ ნებისმიერი x ვექტორისთვის გვაქვს ერთადერთი წარმოდგენა $x = x_1 e_1 + ..., + x_n e_n$. განვმარტოთ X სიმრავლეზე ახალი ნორმა შემდეგნაირად

$$\| x \|_* = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} .$$

ვაჩვენოთ, რომ $\| \|_*$ და $\| \|$ საწყისი ნორმა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. გვაქვს

$$\| x \| \le \sum_{j=1}^{n} | x_j | \cdot \| e_j \| \le | x \|_* \left(\sum_{j=1}^{n} \| e_j \|^2 \right)^{1/2},$$

ამიტომ გვაქვს $\| x \| \le c_2 \| x \|_*, \quad \forall x \in X$, სადაც $c_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \| e_j \|^2 \right)^{1/2}$.

ქვემოდან $\| x \|$ -ის შეფასებისათვის განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \| x \|$. ეს ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც R^n -ზე განსაზღვრული n ცვლადის ფუნქცია (X სივრცის $x = x_1 e_1 + ..., + x_n e_n$ ელემენტი და $(x_1, ..., x_n) \in R^n$ ვექტორი გავაიგივეოთ). გვაქვს

$$| f(x) - f(y) | = \big| \| x \| - \| y \| \big| \le \| x - y \| \le c_2 \| x - y \|_* .$$

მაშასადამე აგებული ფუნქცია R^n -ზე უწყვეტია, ამიტომ ის უწყვეტი იქნება ერთეულოვან $S_1 \subset R^n$ სფეროზე, ამასთანავე თუ $\| x \|_* = 1$, მაშინ $f(x) > 0$. ვინაიდან S_1 კომპაქტია, ამიტომ

$$\exists x_0 \in S_1 : \inf_{x \in S_1} f(x) = f(x_0) > 0$$

და ამიტომ $\forall x \in S_1 \quad \| x \| \ge c_1$, სადაც $c_1 = f(x_0)$. მაშინ

$$\forall x \ne 0 \quad \| x \| = \| x \|_* \left\| \frac{x}{\| x \|_*} \right\| \ge c_1 \| x \|_* .$$

თუ $\| x \| = 0$, მაშინ უტოლობა $\| x \| \ge c_1 \| x \|_*$ ცხადია სამართლიანია. მაშასადამე X სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ნორმა ეკვივალენტურია $\| \|_*$ ნორმის.

მაგალითი 4. $C([a;b])$ სივრცეზე განსაზღვრული $\| f \| = \max_{x \in [a;b]} | f(x) |$ და $\| f \| = \int_a^b | f(x) | dx$ ერთმანეთის ეკვივალენტური არ არის.

დამტკიცება. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე ვიგულისხმოთ, რომ $a = 0, \; b = \pi$. განვიხილოთ ფუნქციები $f_n(x) = \sin nx$ თუ $0 \le nx \le \pi$ და $f_n(x) = 0$ დანარჩენ შემთხვევაში. გვაქვს

$$\max_{x \in [a,b]} | f_n(x) | = 1, \quad \int_0^{\pi} | f_n(x) | dx = 2/n$$

ამიტომ $C([a;b])$ -ზე მოცემული ნორმები ეკვივალენტური არ არის.

ვთქვათ, წრფივ ნორმირებულ X სივრციდან აღებულია ელემენტთა რაიმე x_α, $\alpha \in A$ სისტემა. A ინდექსთა სიმრავლეა.

განმარტება 6. ვიტყვით, რომ ელემენტთა x_α, $\alpha \in A$ სისტემა აღებული წრფივ ნორმირებულ X სივრციდან სრულია X -ში თუ ამ სისტემის წრფივი გარსი ყველგან მკვრივია X სივრცეში. ანუ $\forall x \in X$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ ელემენტები x_α, $\alpha \in A$ ერთობლიობიდან და $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ სკალარები ისეთი, რომ

$$\| x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots, + \lambda_n x_{\alpha_n}) \| < \varepsilon .$$

განმარტება 7. წრფივ ნორმირებულ სივრცეს უწოდებენ სეპარაბელურს, თუ ამ სივრცეში არსებობს თვლადი სისტემა ელემენტებისა, რომელთა წრფივი გარსი ყველგან მკვრივია მოცემულ სივრცეში.

მაგალითი 5. $C([a;b])$ სივრცში სტანდარტული ნორმით $(\| f \| = \max\limits_{x \in [a;b]} | f(x) |)$ $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ სისტემა სრულია (საკმარისია გამოვიყენოთ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებისათვის პოლინომებით თანაბრად მიახლოების ვაიერშტრასის თეორემით).

განმარტება 7. წრფივი ნორმირებული X სივრცის ელემენტთა $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ მიმდევრობას უწოდებენ X სივრცის ბაზის, თუ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის არსებობს სკალართა ერთადერთი λ_n, $n \in N$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n + ...$$

მოცემული მწკრივის კრებადობაში ვგულისხმობთ, რომ მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა X სივრცის ნორმით კრებადია x ელემენტისაკენ. ანუ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \| x - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) \| < \varepsilon$$

მაგალითი 6. $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ სისტემა არ წარმოადგენს $C([-1,1])$ სივრცის ბაზისს (თუმცა ეს სისტემა სრულია $C([-1,1])$ სივრცეში). მართლაც ბაზისობის შემთხვევაში $[-1,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია ანალიზური იქნებოდა $(-1,1)$ ინტერვალზე, რაც არასწორია.

3.2. ნორმირებულ სივრცეთა გასრულება

განმარტება 1. სრული ნორმირებული X_* სივრცეს (ანუ ბანახის სივრცეს) უწოდებენ არასრული X ნორმირებული სივრცის გასრულებას , თუ X_* სივრცეს გააჩნია ქვესივრცე X' ისეთი, რომ ის ყველგან მკვრივია X_*ში და იზომორფულია X ნორმირებული სივრცის.

გავიხსენოთ, რომ X' არის ყველგან მკვრივი X_*-ში თუ ნებისმიერი $x_* \in X_*$ ელემენტისათვის და $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists x' \in X': \quad \| x_* - x' \|_* < \varepsilon .$$

($\| \cdot \|_*$ აღნიშნავს X_*-ის ნორმას).

თეორემა 1. ნებისმიერ არასრულ ნორმირებულ სივრცისათვის გააჩნია გასრულება.

დამტკიცება. ნებისმიერი X ნორმირებული სივრცე არის მეტრიკული სივრცე მეტრიკით $\rho(x,y) = \| x - y \|$. თუ X -ს განვიხილავთ როგორც მეტრიკულ სივრცეს, როგორც უკვე დავამტკიცეთ წინა თავეში მისთვის არსებობს გასრულება. სახელდობრ არსებობს სრული მეტრიკული სივრცე X_* რომლის ელემენტებია X სიმრავლიდან აღებული ფინდამენტალურ მიმდევრობათა კლასები და ამ სივრცეში არსებობს საწყისი X სივრცისიზომორფული X' ქვესივრცე. X' სივრცე შეიცავს იმ ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა კლასებს, რომელთაგან თითოეული შეიცავს სტაციონალურ მიმდევრობებს. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია X_* სივრცეში შემოვიღოთ წრფივი ოპერაციები და ნორმა ისე, რომ X' იყოს X_* -ის ქვესივრცე და ვაჩვენოთ შემდგეგ , რომ X' და X იზომორფულია.

ვთქვათ $x_* \in X_*$ და $y_* \in X_*$. მაშინ თუ $\{x_n\} \in x_*$ და $\{y_n\} \in y_*$, მაშინ $x_* + y_*$-ით ავღნიშნოთ ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა კლასი, რომელიც შეიცავს $\{x_n + y_n\}$ მიმდევრობას. λx_* -ით ავღნიშნოთ (λ -სკალარია) ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა კლასი, რომელიც შეიცავს $\{\lambda x_n\}$ მიმდევრობას. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ X_*-წრფივი სივრცეა, ხოლო X' მისი ქვესივრცე (X' ჩაკეტილია შემოღებული ოპერაციების მიმართ).

X_* სივრცეში ნორმის შემოღებისათვის შევნიშნოთ პირველ რიგში, რომ თუ $\{x_n\}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა, მაშინ $\{\| x_n \|\}$ აგრეთვე ფუნდამენტალური რიცხვითი მიმდევრობაა. მართლაც

$$\big| \| x_n \| - \| y_n \| \big| \le \| x_n - y_n \| \quad \forall n, m .$$

განვმარტოთ $\| x_* \|_* = \lim\limits_{n \to \infty} \| x_n \|$.

შევნიშნოთ, რომ ეს ზღვარი არაა დამოკიდებული $\{x_n\} \in X_*$ მიმდევრობის არჩევაზე. გარდა ამისა თუ $x_* \in X'$ და $\{x_n\} \in x_*$, მაშინ $\| x_* \|_* = \| x \|$.

ფუნქცია $| x_* \|_*$ X_* სიმრავლეზე განმარტავს ნორმას. მართლაც:

$$\| \lambda x_* \|_* = \lim_{n\to\infty} \| \lambda x_n \| = | \lambda | \cdot \| x_* \|_*$$

$$\| x_* + y_* \|_* = \lim_{n\to\infty} \| x_n + y_n \| \le \lim_{n\to\infty} | (| x_n \| + \| y_n \|) = \| x_* \|_* + \| y_* \|_*$$

თეორემა დამტკიცებულია.

3.3. *ფაქტორსივრცე*

ვთქვათ X რაიმე ვექტორული სივრცეა, ხოლო M მისი რაიმე წრფივი ქვესივრცე. X სიმრავლეზე შემოვიღოთ ექვივალენტობის $\sim$ მიმართება შემდეგნაირად $x \sim y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $x - y \in M$. ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის $[x]$-ით ავღნიშნოთ ექვივალენტობის კლასი, რომელიც შეიცავს x ელემენტს, ხოლო ექვივალენტობის კლასების სიმრავლე ავღნიშნოთ X / M -ით. X / M სივრცეს ფაქტორსივრცეს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ X / M წრფივი სივრცეა თუ შემოვიღებთ ოპერაციებს შემდეგნაირად

$$[x+y]=[x]+[y]\ ,\ [\alpha x]=\alpha[x]\ ,\ \alpha \in R\ (\alpha \in C) \quad \forall x, y \in X\ .$$

(ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ეს ოპერაციები კორექტულადაა განსაზღვრული). ვთქვათ დამატებით X რაიმე ნორმირებული სივრცეა და M მისი რაიმე ქვესივრცეა (არააუცილებლად სრული). ბუნებრივია დაისვას საკითხი X / M სივრცის ნორმირების შესახებ. ყოველი $[x] \in X / M$ ელემენტისათვის განვიხილოთ სიდიდე $\| [x] \|_{X/M} = \inf \{ \| y \| : y \in [x] \}$. შევნიშნოთ, რომ თუ $y \in [x]$, მაშინ $y \sim x$ და $y - x \in M$ და ამიტომ $y = x + m$ რაიმე $m \in M$ ელემენტისათვის. ამიტომ გვექნება

$$\| [x] \|_{X/M} = \inf \{ \| y \| : y \in [x] \} = \inf \{ \| x + m \| : m \in M \} = \inf \{ \| x - m \| : m \in M \}\ ,$$

ვინაიდან M ქვესივრცეა. X / M სივრცის ნულოვანი ელემემტისათვის გვაქვს $[0] = M$. გავარკვიოთ ზემოთ შემოტანილი სიდიდე განსაზღვრავს თუ არა ნორმას X / M -ზე. ვთქვათ $\alpha \ne 0$. გვაქვს

$$
\begin{aligned}
\|\alpha[x]\|_{X/M} &= \|[\alpha x]\|_{X/M} = \inf_{m\in M}\|\alpha x+m\| \\
&= \inf_{m\in M}\|\alpha x+\alpha m\| = |\alpha|\inf_{m\in M}\|x+m\| = |\alpha|\cdot\|[x]\|_{X/M}
\end{aligned}
$$

თუ $\alpha=0$ ზემოთ დამტკიცებული ტოლობა ძალაში დარჩება ვინაიდან $[0]=M$ და $\inf\limits_{m\in M}\|m\|=0$. გვაქვს სამკუთხედის უტოლობისაც

$$
\begin{aligned}
\|[x+y]\|_{X/M} &= \inf_{m\in M}\|x+y+m\| \\
&= \inf_{m,m'\in M}\|x+m+y+m'\| \le \inf_{m,m'\in M}(\|x+m\|+\|y+m'\|) = \|[x]\|_{X/M}+\|[y]\|_{X/M}
\end{aligned}.
$$

შევნიშნოთ, რომ $\|[x]\|_{X/M}\ge 0$ და $\|[0]\|_{X/M}=0$. ასე, რომ $\|[x]\|_{X/M}$ ნახევარნორმაა. ბუნებრივია დაისვას კითხვა $\|[x]\|_{X/M}=0 \Rightarrow [x]=0$? ქვემოთ ვნახავთ , რომ ეს გამომდინარეობა საზოგადოდ არაა სწორი, თუმცა, როცა M სრულია, მაშინ $\|[x]\|_{X/M}$ ნორმას წარმოადგენს.

თეორემა 1. ვთქვათ M არის X ნორმირებული სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. მაშინ $\|[x]\|_{X/M}$ X/M წრფივ ქვესივრცეზე განმარტავს ნორმას.

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $\|[x]\|_{X/M}=0$, მაშინ $[x]=0$ ანუ $x\in M$. ვინაიდან $\|[x]\|_{X/M}=0$, ამიტომ $\inf\{\|x+m\|: m\in M\}=0$ და $\forall n\in N$ არსებობს $z_n\in M$ ისეთი, რომ $\|x+z_n\|<1/n$. საიდანაც გვექნება $z_n\to -x$ $n\to\infty$. ვინაიდან M ცაკეტილი ქვესივრცეა, ამიტომ $x\in M$ და $[x]=0$ X/M -ში.

თეორემა 2. ვთქვათ M არის X ნორმირებული სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე და $\pi: X\to X/M$ არის კანონიკური ასახვა მოცემული წესით $\pi(x)=[x], \quad \forall x\in X$. $\pi: X\to X/M$ ასახვა უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_n\to x$ X -ში. მაშინ

$$
\begin{aligned}
\|\pi(x_n)-\pi(x)\|_{X/M} &= \|[x_n]-[x]\|_{X/M} = \|[x_n-x]\|_{X/M} \\
&= \inf_{m\in M}\|x_n-x+m\| \le \|x_n-x\| \to 0
\end{aligned}
$$

როცა $n\to\infty$ (ვინაიდან $0\in M$).

თეორემა 3. ვთქვათ M არის X ბანახის სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე, მაშინ X/M ფაქტორ სივრცე $\|[x]\|_{X/M}=\inf\{\|y\|: y\in[x]\}$ ნორმის მიმართ ბანახის სივრცეა.

დამტკიცება. როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ X/M ნორმირებული სივრცეა. ვაჩვენოთ, რომ ის სრულია. ვთქვათ $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ წარმოადგენს მიმდევრობას X/M დან ისეთს, რომ

$\sum_{n=1}^{\infty}\| x_n \|_{X/M} < \infty$. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $[y]\in X/M$ ისეთი, რომ $\sum_{k=1}^{n}\| x_k \|_{X/M} \to [y]$, როცა $n\to\infty$. ყოველი n ნომრისათვის გვაქვს $\|[x_n]\|_{X/M} = \inf_{m\in M}\| x_n + m_n \|$, ამიტომ არსებობს $m_n \in M$ ისეთი, რომ $\| x_n + m_n \| \leq \| x_n \|_{X/M} + 1/2^n$. გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| x_n + m_n \| \leq \sum \| x_n \|_{X/M} + 1/2^n < \infty$$

ვინაიდან $\{x_n + m_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობაა ბანახის X სივრციდან ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + m_n$ არსებობს X -ში. ავღნიშნოთ ის y -ით. გვაქვს

$$\| \sum_{n=1}^{k}[x_n] - [y] \|_{X/M} = \| \sum_{n=1}^{k}[x_n - y] \|_{X/M} = \inf_{m\in M} \| \sum_{n=1}^{k} x_n - y + m \|$$
$$\leq \| \sum_{n=1}^{k} x_n - y + \sum_{n=1}^{k} m_n \| = \| \sum_{n=1}^{k}(x_n + m_n) - y \| \to 0$$

როცა $k\to\infty$. მაშასადამე $\sum_{n=1}^{k}[x_n] \to [y]$, როცა $k\to\infty$ და მაშასადამე X/M სრულია.

მაგალითი 1. ვთქვათ $X = C([0,1])$ და M წარმოადგენს ყველა იმ უწყვეტ ფუნქციათა ერთობლიობას, რომლებიც ნულდებიან 0 წერტილში. ცახადია M წრფივი ქვესივრცეა და X/M ფაქტორ სივრცე. განვიხილოთ ასახვა

$$\phi : X/M \to R \quad (C) \qquad \phi : [f] = f(0) \quad \forall [f] \in X/M .$$

ცხადია ეს ასახვა კორექტულადაა განსაზღვრული(როცა $f \sim g$, მაშინ $f(0) = g(0)$) და გვაქვს

$$\phi(\alpha[f] + \beta[g]) = \phi([\alpha f + \beta g]) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha\phi([f]) + \beta\phi([g])$$

$\forall \alpha, \beta \in R$ და $\forall f, g \in C([0,1])$. მაშასადამე $\phi : X/M \to R$ წრფივია. გარდა ამისა

$$\phi([f]) = \phi([g]) \Leftrightarrow f(0) = g(0) \Leftrightarrow f \sim g \Leftrightarrow [f] = [g]$$

და ამიტომ და ამიტომ ϕ ურთიერცალსახაა.

ვთქვათ $\beta \in R$. ცხადია არსებობს $f \in C([0,1])$ ისეთი, რომ $f(0) = \beta$ და ამიტომ $\phi([f]) = \beta$.მაშასადამე ϕ ურთიერთცალსახაა. მაშასადამე X/M და R როგორც ვექტორული სივრცეები იზომორფულია $X/M \cong R$.

ვინაიდან M სრულია ამიტომ $X/M = C([0,1])/M$ ბანახის სივრცეა და გვაქვს

$$\|[f]\|_{X/M} = \inf\left\{\|g\|_{C([0,1])}:\ g \in [f]\right\} = \inf\left\{\|g\|_{C([0,1])}:\ g(0) = f(0)\right\}$$
$$= |f(0)|$$

(საკმარისია ავიღოთ ფუნქცია $g(s) = f(0)\ \ \forall s \in [0,1]$). მაშასადამე $\|[f]\|_{X/M} = |\phi([f])|$, ყოველი $[f] \in X/M$ და ϕ ნორმას ინახავს და ამიტომ $C([0,1])/M \cong R$ როგორც ბანახის სივრცეები.

მაგალითი 2. განვიხილოთ $X = C([0,1])$ სივრცე ნორმით $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. M უკვე არაა სრული ქვესივრცე. მართლაც საკმარისია განვიხილოთ მიმდევრობა

$$g_n(s) = \begin{cases} ns, & 0 \le s \le 1/n \\ 1, & 1/n < s \le 1. \end{cases}$$

ცხადია $g_n \in M$.ამავე დროს $g_n \to g$ $\|\|_1$ ნორმით , სადაც $g\ (s) = 1\ \ 0 \le s \le 1$ და $g \notin M$. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში ფაქტორნორმა არაა ნორმა. მართლაც შევნიშნოთ, რომ $\inf\left\{\|g\|_1:\ g \in [f]\right\} = 0$, როცა $[f] \in X/M$. ეს უკანასკნელი ასე შეიძლება დავამტკიცოთ> ვთქვათ $f \in X$ და ყოველი $n \in N$ განვსაზღვროთ ფუნქცია $h_n(s) = f(0)(1 - g_n(x))$, სადაც g_n ზემოთ გვქონდა განსაზღვრული. გვაქვს $h_n(0) = f(0)$ და $\|h_n\|_1 = |f(0)|/2n$.

$\inf\left\{\|g\|_1:\ g(0) = f(0)\right\} \le \|h_n\|_1 \le |f(0)|/2n$, საიდანაც $\inf\left\{\|g\|_1:\ g \in [f]\right\} = 0$.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის

1.განსაზღვრავს თუ არა ფუნქცია $x \to |arctgx|$ ნორმას R -ზე?

2. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $(x, y) \to |x| + |y|$ განსაზღვრავს ნორმას R^2 . რა ფიგურაა ერთეულოვანი ბირთვი და სფერო R^2 -ში არნიშნული ნორმის მიმართ.

3. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $(x_1, x_2, ..., x_n) \to \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$, $n \ge 2, 0 < p < 1$ არ განსაზღვრავს ნორმას R^n-ში.

4. იქნება თუ არა l_1 სივრცე სრული თუ ნორმას განვსაზღვრავთ ასე
$\|x\| = \sup_k |x_k|$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_1$.

5. კრებადია თუ არა ნორმირებულ X სივრცეში ვექტორთა მიმდევრობა თუ

ა) $X = l_1, \quad x_n = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{(n+1)^\alpha}, ... \right), \sigma > 1;$

ბ) $X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, ..., 0}_{n}, 1, 0, 0, ... \right);$

გ) $X = C^1([0,1]), \quad x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$

6. აჩვენეთ, რომ თუ $p \ge q \ge 1$ მაშინ $L^p([a,b]) \subset L^q([a,b])$ და $l_p \subset l_q$

აჩვენეთ, რომ თუ $p \ne q$ მაშინ $L^p(0,\infty)$ არ არის $L^q(0,\infty)$ სიმრავლის ქვესიმრავლე.

7. ვთქვათ $0 < \alpha \le \beta < \infty$ p-ს რა მნიშვნელობისათვის ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ ეკუთვნის $L^p(0,\infty)$ სივრცეს

8.აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ ვექტორისათვის

$\lim_{p \to +\infty} \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p \right)^{1/p} = \max_j |x_j|.$

9.დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ბანახის სივრცეში $[B(x,r)] = B[x,r]$.

10.დაამტკიცეთ, რომ ბანახის სივრციდან აღებული ნებისმიერი ბირთვისათვის
$\dim(B(x,r)) = 2r$.

11.დაამტკიცეთ, რომ ნორმირებულ სივრცეში $\| x \| \leq \max\{\| x+y \|, \| x-y \|\}$.

12.ვთქვათ $A=(a_{ij})$ $(i, j=1,...,n)$ სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა. დაამტკიცეთ, რომ n -რიგის სვეტთა $x=(x_1,...,x_n)^T$ $(x \in_i R)$ სივრცეში შეგვიძლია შემოვიღოთ ნორმა

$$\| x \| = \left[\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \right]^{1/2} .$$

13.აჩვენეთ, რომ $x=(1, 1/\ln 2, 1/\ln 3, ..., 1/\ln n, ...)$ არ ეკუთვნის l_p არცერთი $1 \leq p < \infty$ რიცხვისათვის.

14.წარმოადგენს თუ არა $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სიმრავლეზე ნორმებს შემდეგი ფუნქციონალები

ა) $x \to |x(b)-x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$; ბ) $x \to |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.

15.დაამტკიცეთ, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტად ფუნქციათა სივრცეში ნორმები $\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ და $\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt$ ეკვივალენტური არ არიან .

16.ქმნიან თუ არა ქვემოთ მოცემული სიმრავლეები $C([-1,1])$ სივრცის ქვესივრცეს

ა) უწყვეტი ლუწი ფუნქციების ერთობლიობა; ბ) უწყვეტი მონოტონურ ფუნქციათა ერთობლიობა; გ) უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა ერთობლოიბა; დ) იმ $x(t)$ ფუნქციათა ერთობლიობა რომელთათვისაც $\int_{-1}^{1} x(t)dt = 0$.

17.წარმოადგენს თუ არა სიმრავლე $M = \left\{ x : x=(x_1, x_2, ..., x_n, ...), \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \right\}$ ქვესივრცეს ა) l_p ;

ბ) l_∞ სივრცეებში.

18. აჩვენეთ, რომ $l_1 \subset l_2 \subset l_\infty$.

თავი I V

სივრცეები სკალარული ნამრავლით

4.1. ევკლიდური სივრცეები

განმარტება 1. ვთქვათ E წრფივი სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა R ველის მიმართ. ვთქვათ ფუნქცია $(\,,\,): E\times E \to R$ ნებისმიერ $(x\,,y)$ წყვილს $E\times E$ დეკარტული ნამრავლიდან შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს ისე, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $(x\,,x)\geq 0 \quad \forall x\in E;$

2) $(\alpha x, y)=\alpha(x,y) \quad \forall x,y\in E, \forall\alpha\in R;$

3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \quad \forall x,y,z\in E;$

4) $(x,y)=(y,x) \quad \forall x,y\in E$;

5) $(x\,,x)=0 \Leftrightarrow \; x=0$.

$(\,,\,): E\times E\to R$ ფუნქციას უწოდებენ E სივრცის ორი ელემენტის სკალარული ნამრავლის ფუნქციას. (x,y) რიცხვს x და y ვექტორების სკალარულ ნამრავლს უწოდებენ. წრფივ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, რომელზედაც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი ევკლიდურ სივრცეს უწოდებენ.

(2) და (4) თვისებებიდან გვექნება, რომ

$$(x,\beta y)=\beta(x,y) \quad \forall x,y\in E, \forall\beta\in R,$$

ხოლო (3)- დან, როცა $x=y=0$ გვექნება $(0,z)=0, \quad \forall z\in E$.

თეორემა 1. თუ წრფივ ვექტორულ E სივრცეზე მოცემულია სკალარული ნამრავლი, მაშინ , ფუნქცია

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}, \qquad x\in E, \tag{1}$$

E სივრცეზე განმარტავს ნორმას.

დამტკიცება. ცხადია გვაქვს

$$\|x\|\geq 0 \qquad \forall x\in E,\ \|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\| \quad \forall x\in E, \alpha\in R.$$

დასამტკიცებელია მხოლოდ სამკუთხედის უტოლობა

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|. \tag{2}$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი x და y ვექტორებისათვის

$$|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\| \tag{3}$$

ამ უტოლობას კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას უწოდებენ.

ცხადია გვაქვს

$$0\leq(\alpha x-y,\alpha x-y)=\alpha^2\|x\|^2-2\alpha(x,y)+\|y\|^2 \quad \forall\alpha\in R.$$

თუ $\|x\|=0$, მაშინ $x=0$, $(x,y)=0$ და ამ შემთხვევაში (3) სამართლიანია. ვთქვათ $\|x\|>0$. შევარჩიოთ $\alpha=\dfrac{(x,y)}{\|x\|^2}$, მაშინ გვექნება

$$0\leq\alpha=-\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2}+\|y\|^2,$$

რომელიც (3)-ის ტოლფასია. (2) უტოლობა ადვილად მიიღება (3) უტოლობიდან. მართლაც

$$\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან დავასკვნით, რომ ნებისმიერი წრფივი სივრცე სკალარული ნამრავლით ავტომატურად ხდება ნორმირებული სივრცე თუ ნორმას განვმარტავთ სკალარული ნამრავლის საშუალებით (1) ფორმულით. (1) ნორმას ვუწოდოთ ნორმა განმარტებული სკალარული ნამრავლით. შევნიშნოთ, რომ სკალარული ნამრავლი არის (1) ნორმის მიმართ უწყვეტი ფუნქცია. მართლაც თუ

$$x_n\to x,\ y_n\to y; \quad n\to\infty,$$

მაშინ

$$\begin{aligned}&|(x_n,y_n)-(x,y)|\leq|(x_n,y_n)-(x\ ,y_n)|+|(x\ ,y_n)-(x\ ,y\ )| \quad \leq\\ &\leq\|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|y_n-y\|\cdot\|x\|\to 0,\end{aligned}$$

მაშასადამე $(x_n,y_n)\to(x,y).$ როცა $n\to\infty.$

განმარტება 2. სრულ ევკლიდურ სივრცეს ჰილბერტის სივრცეს უწოდებენ.

შენიშვნა 1: ა) ლიტერატურაში ძირითადად ჰილბერტის სივრცეს უწოდებენ უსასრულოგანზომილებიან სრულ ევკლიდურ სივრცეს (ჩვენ ამ მიდგომით ვისარგებლებთ).

ბ) როდესაც ევკლიდური სივრცის სისრულეზეა საუბარი სისრულე იგულისხმება (1) ნორმის მიმართ, რომელსაც სკალარული ნამრავლი განსაზღვრავს.

მაგალითი 1. არითმეტიკული n განზომილებიანი ვექტორული R^n სივრცე წარმოადგენს ევკლიდურ სივრცეს თუ სკალარულ ნამრავლს განვმარტავთ ასე

$$(x,y)=x_1y_1+...+x_ny_n,$$

სადაც $x=(x_1,...,x_n)$ და $y=(y_1,...,y_n)$.

მაგალითი 2. l_2 წრფივ სივრცეში ფუნქცია $(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty} x_jy_j$, სადაც $x=(x_1,...,x_n,...)$ და $y=(y_1,...,y_n,...)$ l_2 სივრცის ელემენტებია განსაზღვრავს სკალარულ ნამრავლს., როგორც ვიცით უკვე ნორმა l_2 სივრცეში განიმარტება ასე

$$\|x\|_{l_2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\right)^{1/2}$$

და ის ემთხვევა სკალარული ნამრავლით განსაზღვრულ ნორმას. ჩვენს მიერ ნაჩვენები იყო, რომ l_2 სრული სივრცეა. მაშასადამე l_2 ჰილბერტის სივრცეა.

მაგალითი 3. განვიხილოთ $\Delta=[a;b]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა იმ ზომად ფუნქციათა ერთობლიობა $L_2(\Delta)$, რომელთათვისაც $\int_\Delta |f(x)|^2\,dx<\infty$. $L_2(\Delta)$ წრფივი სივრცეა, რომელშიც შეგვიძლია განვსაზღვროთ სკალარული ნამრავლი ასე

$$(f,g)=\int_\Delta f(x)g(x)dx,$$

შესაბამის ნორმას აქვს სახე $\|f\|_2=\left(\int_\Delta |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. $L_2(\Delta)$ ჰილბერტის სივრცეა.

ანალოგიურად განისაზღვრება $L_2(R)$ სივრცე.

განმარტება 3. ვთქვათ E წრფივი სივრცეა კომპლექსურ რიცხვთა C ველის მიმართ. ვთქვათ ფუნქცია $(\,,\,):E\times E\to C$, ნებისმიერ (x,y) წყვილს $E\times E$ დეკარტული ნამრავლიდან შეუსაბამებს კომპლექსურ რიცხვს ისე, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $(x\,,x)\geq 0 \quad \forall x\in E;$

2) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y) \quad \forall x,y\in E, \forall \alpha\in C;$

3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \quad \forall x,y,z\in E;$

4) $(x,y)=\overline{(y,x)} \quad \forall x,y\in E$;

5) $(x\,,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$(\,,\,):E\times E\to C$ ფუნქციას უწოდებენ E სივრცის ორი ელემენტის სკალარული ნამრავლის ფუნქციას. (x,y) რიცხვს x და y ვექტორების სკალარულ ნამრავლს უწოდებენ. წრფივ სივრცეს კომპლექსურ ველის მიმართ, რომელზედაც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი უნიტარულ (ერმიტულს ან კომპლექსურ ევკლიდურ) სივრცეს უწოდებენ.

2) და 4)-დან გვექნება

$$(x,\beta y)=\overline{\beta}(x,y) \quad \forall x,y\in E, \forall \beta\in C\ .$$

მარტივია ჩვენება იმისა, რომ

$$(z,x+y)=(z,x)+(z,y) \quad \forall x,y,z\in E.$$

თეორემა 2. თუ წრფივ ვექტორულ E სივრცეზე კომპლექსური ველის მიმართ მოცემულია სკალარული ნამრავლი, მაშინ , ფუნქცია

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}, \qquad x\in E\,, \tag{4}$$

E სივრცეზე განმარტავს ნორმას.

დამტკიცება. როგორც ნამდვილი რიცხვთა ველის შემთხვევაში ნორმის აქსიომები ელემენტარული შესამოწმებელია, გარდა სამკუთხედის უტოლობის, რომლის დამტკიცება ეყრდნობა კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას, რომელიც კომპლექსური ველის შემთხვევაშიც სამართლიანია. მის დასამტკიცებლად ანალოგიურად როგორც ნამდვილ შემთხვევაშიშევნიშნოთ, რ ომ

$$0\leq(\alpha x-y,\alpha x-y)=\alpha^2\|x\|^2-\alpha(x,y)-\overline{\alpha}(x,y)+\|y\|^2 \quad \forall \alpha\in C\,.$$

ამ უკანასნელ უტოლობაში შევარჩიოთ $\alpha=\dfrac{(y,x)}{\|x\|^2}$, მივიღებთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას.

განმარტება 4. სრულ უნიტარულ სივრცეს ჰილბერტის სივრცეს უწოდებენ (კომპლექსური ველის მიმართ).

ანალოგიურად როგორც ნამდვილი ველის შემთხვევაში შეგვიძლია განვმარტოთ კომპლექსური ანალოგები ზემოთ მოყვანილი ევკლიდური სივრცეების .

მაგალითი 4. C^n წრფივ სივრცეში ფუნქცია

$$(x,y)=x_1\overline{y_1}+...+x_n\overline{y_n}\,,$$

სადაც $x=(x_1,...,x_n)$ და $y=(y_1,...,y_n)$ C^n სივრცის ელემენტებია განსაზღვრავს სკალარულ ნამრავლს.

მაგალითი 5. l_2 წრფივ სივრცეში (კომპლექსური ველის მიმართ) ფუნქცია

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_j}\,,$$

სადაც $x=(x_1,...,x_n,...)$ და $y=(y_1,...,y_n,...)$ l_2 სივრცის ელემენტებია განსაზღვრავს სკალარულ ნამრავლს.

მაგალითი 6. განვიხილოთ $\Delta=[a;b]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა იმ ზომად კომპლექსური მნიშვნელობებით ფუნქციათა ერთობლიობა $L_2(\Delta)$, რომელთათვისაც $\int_\Delta |f(x)|^2\,dx<\infty$. $L_2(\Delta)$ წრფივი სივრცეა, რომელშიც შეგვიძლია განვსაზღვროთ სკალარული ნამრავლი ასე

$$(f,g)=\int_\Delta f(x)\overline{g(x)}dx\,,$$

შესაბამის ნორმას აქვს სახე $\|f\|_2=\left(\int_\Delta |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. $L_2(\Delta)$ ჰილბერტის სივრცეა.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ძირითადად ევკლიდურ სივრცეებს ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ.

განმარტება 5. ევკლიდური სივრცის ორ ვექტორს უწოდებენ ორთოგონალურს თუ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

განმარტება 6. ევკლიდური სივრცის ელემენტთა სისტემას უწოდებენ ორთოგონალურს, თუ ამ სისტემის ნებისმიერი ორი ვექტორი ორთოგონალურია.

თეორემა 3. (თეორემა ორთოგონალიზაციის შესახებ). ვთქვათ ევკლიდურ E სივრცეში მოცემულია წრფივად ამოუკიდებელ ვექტორთა $x_n, n\in N$ მიმდევრობა. E სივრცეში შეგვიძლია ავაგოთ ორთოგონალური $y_n, n\in N$ სისტემა ისეთი, რომ ნებისმიერი $n\in N$ ნომრისათვის y_n ვექტორი $x_1, \ldots, x_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

დამტკიცება. ავღნიშნოთ $y_1 = x_1$. ვექტორი y_2 მოვძიოთ $y_2 = \alpha_2^1 y_1 - x_2$ სახის ისე, რომ $(y_2, y_1) = 0$. α_2^1 რიცხვი უნდა ავირჩიოთ $\alpha_2^1 \| y_1 \|^2 = (x_2, y_1)$ ტოლობით. ვინაიდან $x_n, n\in N$ წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $\| y_1 \| \neq 0$ და α_2^1 რიცხვი განიმარტება ცალსახად

$$\alpha_2^1 = \frac{(x_2, y_1)}{\| y_1 \|^2}.$$

ვექტორი y_3 მოვძიოთ $y_3 = \alpha_3^1 y_1 + \alpha_3^2 y_2 - x_3$ ფორმის ისე, რომ $(y_3, y_2) = (y_3, y_1) = 0$. გვექნება

$$\alpha_3^1 = \frac{(x_3, y_1)}{\| y_1 \|^2} \text{ და } \alpha_3^2 = \frac{(x_3, y_2)}{\| y_2 \|^2}.$$

ვთქვათ უკვე აგებულია $y_k, \quad k = 1, 2, ..., n$ ვექტორები ისე, რომ ყოველი y_k ვექტორი არის $x_1, ..., x_k$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია. ავღნიშნოთ

$$y_{n+1} = \alpha_{n+1}^1 y_1 + \alpha_{n+1}^2 y_2 + ... + \alpha_{n+1}^n y_n - x_{n+1}$$

და შევარჩიოთ y_{n+1} ისე, რომ $(y_{n+1}, y_k) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n$. მაშინ

$$\alpha_{n+1}^k = \frac{(x_{n+1}, y_k)}{\| y_k \|^2}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

ცხადია ზემოთ აღწერილი პროცესით ორთოგონალურ $y_n, n\in N$ ვექტორთა სისტემა აგებული იქნება. თეორემა დამტკიცებულია.

4.2. ჰილბერტის სივრცეები

როგორ უკვე განვმარტეთ წრფივი ვექტორული სივრცე, რომელშიც განმარტებულია სკალარული ნამრავლი და სკალარული ნამრავლით განსაზღვრული ნორმის მიმართ ეს სივრცე სრულია უწოდებენ ჰილბრტის სივრცეს. ჰილბერტის სივრცე შეიძლება იყოს როგორც ნამდვილ ასევე კომპლექსური . ნებისმიერი სასრულგანზომილებიანი წრფივი სივრცე, რომელშიც სკალარული ნამრავლია განსაზღვრული ცხადია სრულია. მათ ევკლიდურ სივრცეს უწოდებენ. ხოლო თუ გვაქვს უსასრულოგანზომილებიანი სრული

ევკლიდურ სივრცე მათ ჰილბერტის სივრცეს ვუწოდებთ. ქვემოთ ჰილბერტის სივრცეს H სიმბოლოთი ავღნიშნავთ.

განმარტება 1. ორი E_1 და E_2 ევკლიდურ სივრცეს ვუწოდებთ იზომორფულს, თუ არსებობს E_1 და E_2 წრფივი სივრცეების იზომორფიზმი $f: E_1 \to E_2$ ისეთი, რომ

$$(f(x), f(y))_2 = (x, y)_1 \quad \forall x, y \in E_1,$$

სადაც $(\,,\,)_1$ და $(\,,\,)_2$ სკალარული ნამრავლებია შესაბამისად E_1 და E_2 სივრცეებში.

განმარტება 2. ჰილბერტის H სივრცეს უწოდებენ არასრული ევკლიდური E სივრცის გასრულებას თუ არსებობს H სივრცის ქვესივრცე E' რომელიც E სივრცის იზომორფულია და ყველგან მკვრივია H სივრცეში.

თეორემა 1. ნებისმიერ არასრულ ევკლიდურ სივრცეს გააჩნია გასრულება.

დამტკიცება. E ევკლიდური სივრცე არის ნორმირებული, ამიტომ მას გააჩნია გასრულება E_*, რომელიც ბანახის სივრცეა. მისი ელემენტები E სივრცის ფუნდამენტალურ მიმდევრობათა კლასებია. E' -ით ავღნიშნოთ იმ კლასების ერთობლიობა, რომლებიც სტაციონალურ მიმდევრობებს შეიცავს. მაშინ ყოველ $x \in E$ შეუსაბამოთ კლასი $x' \in E'$,რომელიც შეიცავს $x, x, ..., x, ...$ სტაციონალურ მიმდევრობას. განმარტებით $\| x' \|_* = \| x \|$. ნორმირებული სივრცის გასრულებისას ცვენს მიერ ნაჩვენები იყო, რომ E' ყველგან მკვრივია E_* სივრცეში ანუ ყოველი $x_* \in E_*$ ელემენტისათვის არსებობს მიმდევრობა $x_n^{'} \in E'$ ისეთი, რომ $x_n^{'} \to x_*, \quad n \to \infty$.

ნებისმიერი ორი $x_*, y_* \in E_*$ ელემენტებისთვის განვმარტოთ სკალარული ნამრავლი

$$(x_*, y_*) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) \ , \tag{1}$$

სადაც $\{x_n\} \in x_* \quad \{y_n\} \in y_*$.

აღნიშნული ზღვარი არსებობს, რადგან

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \le \| x_m - x_n \| \cdot \| y_m \| + \| x_n \| \cdot \| y_m - y_n \|$$

ნებისმიერი m, n ნომრებისათვის და ამიტომ რიცხვების $(x_n, y_n), \quad n \in N$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია (და ზღვარი გააჩნია).

შევნიშნოთ, რომ (1) ზღვარი არაა დამოკიდებული $\{x_n\} \in x_*$ და $\{y_n\} \in y_*$ მიმდევრობების არჩევაზე და $(x_*, y_*)_*$ ფუნქცია $E_* \times E_*$ -ზე განსაზღვრავს სკალარულ ნამრავლს. მაშასადამე E_* სრული ევკლიდური სივრცეა. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე ნორმირებული სივრცე. ბუნებრივად ისმის კითხვა: რა დამატებით თვისებას უნდა აკმაყოფილებდეს სივრცის ნორმა, რომ სივრცე იყოს ევკლიდური ანუ ნორმა განმარტებული იყოს სკალარული ნამრავლით. ასეთ დახასიათებას გვაძლევს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. იმისათვის რომ ნორმირებული E სივრცე იყოს ევკლიდური აუცილებელია და საკმარისი, რომ E სივრცის ნებისმიერი x და y ელემენტებისათვის სრულდებოდეს პარალელოგრამის თვისება

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2). \qquad (2)$$

დამტკიცება. თუ სივრცე E ევკლიდურია მაშინ მოყვანილი თვისება გამოხატავს ევკლიდური სივრცის კარგად ცნობილ თვისებას: პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეთა კვადრატების ჯამი ტოლია გვერდების სიგრძეთა კვადრატების ჯამს.

საკმრისობა. ვთქვათ E ნორმირებული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. (კომპლექსური შემთხვევა შეიძლება განხილული იქნეს ანალოგიურად). შემოვიღით ფუნქცია:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2). \qquad (3)$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ გვაქვს ნორმისათვის პარალელოგრამის თვისება მაშინ (3) განსაზღვრავს სკალარულ ნამრავლს და სივრცის საწყისი ნორმა განიმარტება სკალარული ნამრავლით.

თუ $x = y$ გვექნება $(x, x) = \frac{1}{4}(\| x+x \|^2 - \| x-x \|^2) = \| x \|^2$.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ (3) დან ავტომატურად გვექნება $(x, y) = (y, x)$, ანუ სკალარული ნამრავლის პირველი თვისება ავტომატურად სრულდება. მეორე თვისების დასამტკიცებლად შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\Phi(x, y, z) = 4[(x+y, z) - (x, z) - (y, z)],$$

ანუ

$$\Phi(x,y,z)=\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|x+z\|^2+\|x-z\|^2.$$
(4)

ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქცია იგიურად ნულია.

(3) -ის ძალით გვაქვს

$$\|x+y\pm z\|^2=2\|x\pm z\|^2+2\|y\|^2-\|x\pm z-y\|^2$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობას (4) -ში გვექნება

$$\Phi(x,y,z)=-\|x+z-y\|^2+\|x-z-y\|^2+\|x+z\|^2+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2 \quad (5)$$

(4) და (5) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\Phi(x,y,z)=\frac{1}{2}(\|y+z+x\|^2+\|y+z-x\|^2)-$$
$$\frac{1}{2}(\|y-z+x\|^2+\|y-z-x\|^2)-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.$$

(2) -ის ძალით პირველი შესაკრები ტოლია $\|y+z\|^2+\|x\|^2$ მეორე კი $-\|y-z\|^2-\|x\|^2$, მაშასადამე $\Phi(x,y,z)=0$.

დავამტკიცოთ სკალარული ნამრავლის მესამე თვისება.

შემოვიღოთ ფუნქცია $\varphi(\lambda)=(\lambda x,y)-\lambda(x,y)$.

(3)- დან გვაქვს $\varphi(0)=\frac{1}{4}(\|x\|^2-\|x\|^2)=0$ და $\varphi(-1)=0$ ვინაიდან $(-x,y)=-(x,y)$.
ნებისმიერი ნატურალური n -თვის ცხადია გვექნება

$$(nx,y)=(\mathrm{sign}\,n(x+x+...+x),y)=signn((x,y)+....+(x,y))=$$
$$|n|\,signn(f,g)=n(f,g),$$

ე.ი. $\varphi(n)=0$. ნებისმიერი მთელი p,q $(q\neq 0)$ რიცხვებისათვის

$$\left(\frac{p}{q}f,g\right)=p\left(\frac{1}{q}f,g\right)=\frac{p}{q}q\left(\frac{1}{q}f,g\right)=\frac{p}{q}(f,g),$$

ე.ი. $\varphi(c)=0$ ნებისმიერი c რაციონალური რიცხვისათვის. ვინაიდან φ უწყვეტია, ამიტომ $\varphi(c)=0$ ნებისმიერი c რიცხვისათვის. მაშასადამე (f,g) ფუნქცია სკალარული ნამრავლის სამივე თვისებას აკმაყოფილებს.

4.3. ფურიეს მწკრივები

ვთქვათ ევკლიდურ E სივრცეში მოცემულია ორთონორმირებული სისტემა (სასრული ან უსასრულო)

$$e_1, e_2, ..., e_n, ... \qquad (1)$$

სასრულგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცეები განიხილება ძირითადად ალგებრის კურსში. ჩვენ განვიხილავთ უსასრულოგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეებს. ასეთ სივრცეებში ცხადია არსებობს თვლადი რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებისა, რომელთა ორთოგონალიზაციით მივიღებთ თვლად ორთონორმირებულ სისტემას.

განმარტება 1. ვთქვათ *ევკლიდურ* E სივრცეში მოცემულია ორთონორმირებული სისტემა (1) სისტემა. მაშინ ნებისმიერი $x \in E$ ვექტორისათვის

$$\alpha_k = (x, e_k), \ k = 1, 2, ...$$

რიცხვებს x ვექტორის ფურიეს კოეფიციენტები ეწოდება (1) სისტემის მიმართ., ხოლო

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

მწკრივს x ელემენტის ფურიეს მწკრივს უწოდებენ.

თეორემა 1. თუ $\alpha_k = (x, e_k), \ k = 1, 2, ...$ არის $x \in E$ ვექტორის ფურიეს კოეფიციენტები (1) ორთონორმირებული სისტემის მიმართ, მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ კრებადია და

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \le \|x\|^2. \qquad (2)$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ

$$0 \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \qquad (3)$$

ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \le \| x \|^2, \ \forall n \in N .$$

მაშასადამე (2) სამართლიანია.

(2) უტოლობას ბესელის უტოლობას უწოდებენ. (3) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $x \in E$ ვექტორის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი კრებადია x-კენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \| x \|^2 . \qquad (4)$$

(4) ტოლობას პარსევალის ტოლობას უწოდებენ (პითაგორას თეორემის ანალოგი).

განმარტება 2. *ევკლიდურ* E სივრცის ორთონორმირებილ ვექტორთა $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ სისტემას უწოდებენ ჩაკეტილს თუ $\forall x \in E$ ვექტორისათვის სრულდება $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \| x \|^2$ ტოლობა, სადაც $\alpha_k = (x, e_k), \ k = 1, 2, ...$.

მაშასადამე იმისათვის რომ $\forall x \in E$ ვექტორისათვის $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k ; \alpha_k = (x, e_k), \ k = 1, 2, ...$ ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როცა ორთონორმირებული $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ სისტემა ჩაკეტილია.

ახლა დავამტკიცოთ ფურიეს კოეფიციენტთა მინიმალობის შესახებ ერთი მნიშვნელოვანი ტოლობა.

თეორემა 2. ვთქვათ $\alpha_k = (x, e_k), \ k = 1, 2, ...$ წარმოადგენს $x \in E$ ვექტორის ფურიეს კოეფიციენტებს $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ ორთონორმირებული სისტემის მიმართ. მაშინ ყოველი ფიქსირებული n ნომრისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\inf_{b_1, ..., b_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \quad , \qquad (5)$$

სადაც (5)-ში ინფიმუმი აღებულია $e_1, e_2, ..., e_n$ ელემენტების ყველა შესაძლო კომბინაციიდან.

დამტკიცება. (5) ტოლობის მისაღებად საკმარისია ვისარგებლოთ ერთი ტოლობით

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \right\|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - b_k|^2 ,$$

საიდანაც ადვილი დასანახია, რომ (5)-ში მინიმუმი მიიღწევა იმ დროს, როცა $b_k = \alpha_k$.

განმარტება 3. X ნორმირებული სივრცის ელემენტთა სისტემას უწოდებენ სრულს მოცემულ სივრცეში თუ ამ სისტემის წრფივი გარსი ყველგან მკვრივია X -ში.

თეორემა 3. თუ ორთონორმირებული ვექტორთა $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ სისტემა სრულია *ევკლიდურ* E სივრცეში , მაშინ $\forall x \in E$ ვექტორი იშლება ფურიეს მწკრივად, ანუ სამართლიანია წარმოდგენა $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \, ; \alpha_k = (x, e_k), \; k = 1, 2, ...$

დამტკიცება. ვინაიდან სისტემა სრულია E სივრცეში, ამიტომ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_1, .., b_{N_\varepsilon} \left\| x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} b_k e_k \right\| < \varepsilon .$$

ამ უტოლობიდან და ფურიეს კოეფიციენტთა მიიმალობის თვისებიდან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon ,$$

სადაც $\alpha_k = (x, e_k)$. თუ გამოვიყენებთ (3)-ს გვექნება

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon .$$

მაშასადამე $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ვთქვათ რიცხვითი მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ კრებადია. მაშინ ნებისმიერი $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ ორთონორმირებული სისტემისათვის რაიმე H ჰილბერტის სივრციდან მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ კრებადია და წარმოადგენს რომელიღაც $x \in H$ ვექტორის ფურიეს მწკრივს.

დამტკიცება. ტოლობიდან

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 ,$$

სადაც $n, p \in N$ დავადგენთ, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ მწკრივისათვის სრულდება კოშის კრიტერიუმი და ვინაიდან H სრულია ამიტომ მწკრივი რომელირაც $x \in H$ ვექტორისკენ კრებადია, ანუ

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k .$$

სკალარული ნამრავლის უწყვეტობიდან გვექნება $\alpha_k = (x, e_k),\ k = 1, 2, ...$, ვინაიდან

$$(x, e_k) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k , e_k \right) = \alpha_k .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. ჰილბერტის H სივრცეში ორთონორმირებული $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ სისტემა სრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა H სივრცეში მოცემული სისტემის ყველა ვექტორთან ორთოგონალური მხოლოდ ნულოვანი ვექტორია.

დამტკიცება. ცხადია, რომ თუ $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ სრულია H სივრცეში , მაშინ $x \in H$ ვექტორისათვის სრულდება პარსევალის ტოლობა. ამიტომ $(x, e_k) = 0 \quad \forall k$, მაშინ $x = 0$.

ვთქვათ ახლა სისტემა ისეთია, რომ H სივრცეში მხოლოდ ნულოვანი ვექტორია ორთოგონალური ყველა e_k ვექტორის. ავიღოთ რაიმე $x \in H$ და ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{6}$$

არის x ელემენტის ფურიეს მწკრივი, მაშინ ის x -კენ კრებადია. ბესელის უტოლობის ძალით $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ მწკრივი კრებადია და ამიტომ თეორემა 3-ის ძალით (6) მწკრივი კრებადია რომელირაც x_0 ვექტორისაკენ, რომლის ფურიეს მწკრივია (6) მწკრივია. მაშასადამე $(x - x_0, e_k) = 0 \quad \forall k$. მაშინ $x = x_0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

4.4. ჰილბერტის სივრცეთა იზომორფიზმი.

გავიხსენოთ ზოგიერთი განმარტება. X ნორმირებულ სივრცეს უწოდებენ სეპარაბელურს , თუ X -ში არსებობს ყველგან მკვრივი თვლადი სიმრავლე. ხოლო $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ მიმდევრობას X სივრციდან ეწოდება X სივრცის ბაზისი თუ ნებისმიერი $x \in X$ ვექტორისათვის არსებობს რიცხვთა ერთადერთი მიმდევრობა λ_k, $k \in N$ ისეთი, რომ

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k .$$

თეორემა 1. ნებისმიერ სეპარაბელურ ევკლიდურ E სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი.

დამტკიცება. ვინაიდან E სივრცე სეპარაბელურია, ამიტომ მაში არსებობს თვლადი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ამ სისტემიდან ავაგოთ ორთოგონალიზაციის პროცესით ახალი $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ ორთონორმირებული სისტემა, რომელიც ცხადია სრული იქნება E -ში და ამიტომ ნებისმიერი ელემენტი $x \in E$ დაიშლება ფურიეს მწკრივად $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ სისტემის მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. ნებისმიერი სეპარაბელური ჰილბერტის H სივრცე იზომორფულია მიმდევრობათა l_2 ჰილბერტის სივრცის.

დამტკიცება. თეორემა 1-ის ძალით H სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ ბაზისი. ამიტომ ნებისმიერ $x \in H$ ვექტორი დაიშლება ერთადერთი სახით ფურიეს მწკრივად $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, სადაც $\alpha_k = (x, e_k),\ k = 1, 2, ...$ ცხადია $\{\alpha_k\} \in l_2$. ყოველ $x \in H$ ელემენტს შეუსაბამოთ $\{\alpha_k\} \in l_2$ მიმდევრობა.

პირიქით უკვე ჩვენთვის ცნობილია, რომ თუ $\{\alpha_k\} \in l_2$, მაშინ $\alpha_k = (x, e_k),\ k = 1, 2, ...$ რიცხვები არიან H სივრციდან რომელიღაც ვექტორის ფურიეს კოეფიციენტები.

მაშასადამე H და l_2 სივრცეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ცხადია თუ $x \sim \{\alpha_k\}$ და $y \sim \{\beta_k\}$, მაშინ $x + y \sim \{\alpha_k + \beta_k\}$ და $\gamma x \sim \{\gamma \alpha_k\}$ ნებისმიერი γ რიცხვისათვის. ამასთანავე $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 = \|y\|^2$. სკალარული ნამრავლის უწყვეტობიდან გვექნება, რომ $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}$. თეორემა დამტკიცებულია.როგორც უკვე დამტკიცებული გვაქვს l_2 სეპარაბელურია.

თეორემა 3. ყველა სეპარაბელური უსასრულოგანზომილებიანი ჰილბერტის სივრცე ერთმანეთის იზომორფულია.

დამტკიცება. ვთქვათ H და H' ორი სეპარაბელური უსასრულოგანზომილებიანი ჰილბერტის სივრცეა. თეორემა 1-ის ძალით H და H'-ში არსებობენ ორთონორმირებული $\{e_k\}$ და $\{e_k^{'}\}$ ბაზისები. მაშინ ნებისმიერ $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ ელემენტს H სივრციდან შეუსაბამოთ $x'=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k^{'}$ ელემეტი H' სივრციდან. ეს შესაბამისობა ცხადია არის იზომორფიზმი H და H' სივრცეებს შორის.

შენიშვნა 1. დამტკიცებული თეორემებიდან გამოდის, რომ თუ ვექტორთა $\{e_k\}$ მიმდევრობა ბაზისია ევკლიდურ E სივრცეში, მაშინ მისი გასრულება არის ჰილბერტის სივრცე , რომლის ელემენტებია ყველა $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ სახის მწკრივები, სადაც $\{\alpha_k\}\in l_2$. ამ სივრცეში სკალარული ნამრავლი განიმარტება ტოლობით

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\overline{\beta_k},$$

სადაც $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k^{'}$ და $y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e_k$.

4. 5. ორთოგონალური პროექციები.

განმარტება 1. ვთქვათ L არის ევკლიდური E სივრცის რაიმე ქვესივრცე. $y_0\in L$ ვექტორს უწოდებენ $x_0\in E$ ვექტორის პროექციას L ქვესივრცეში, თუ

$$(x_0-y_0,y)=0 \quad \forall y\in L. \tag{1}$$

ცხადია ნებისმიერ $x\in E$ ვექტორს შესაძლებელია მხოლოდ ერთი პროექცია გააჩნდეს მოცემულ ქვესივრცეზე. მართლაც ვთქვთ

$$(x-y_1,y)=0,(x-y_2,y)=0 \quad \forall y\in L.$$

მაშინ

$$\|y_1-y_2\|^2=(y_1-y_2,y_1-x+x-y_2)=0$$

და მაშასადამე $y_1=y_2$.

თეორემა 1. იმისათვის, რომ $y_0 \in L$ ვექტორი იყოს $x_0 \in E$ ვეტორის პროექცია L ქვესივრცეში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს პირობა

$$\| x_0 - y_0 \| = \inf_{y \in L} \| x_0 - y \| . \qquad (2)$$

დამტკიცება. თუ y_0 აკმაყოფილებს (1)-ს , მაშინ

$$\| x_0 - y \|^2 = ((x_0 - y_0) + (y_0 - y), (x_0 - y_0) + (y_0 - y)) = \| x_0 - y_0 \|^2 + \| y_0 - y \|^2 ,$$

ყოველი $y \in L$ ვექტორისათვის და ამიტომ (2) პირობა სრულდება.

ვთქვათ ახლა (2) პირობა შესრულებულია. განვიხილოთ რიცხვითი ფუნქცია

$$f(t) = \| x_0 - y_0 + ty \|^2, \quad t \in R$$

სადაც y არის L ქვესივრცის ნებისმიერი ვექტორი. თუ E ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ განსაზღვრული სივრცეა , მაშინ

$$f(t) = \| x_0 - y_0 \|^2 + t^2 \| y \|^2 + 2t(x_0 - y_0, y), \quad t \in R .$$

ეს ფუნქვია უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს , როცა $t = 0$ და $f'(0) = 0$, ამიტომ $(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L$.

თუ E კომპლექსურია, მაშინ

$$f(t) = \| x_0 - y_0 \|^2 + t^2 \| y \|^2 + 2t \operatorname{Re}(x_0 - y_0, y), \quad t \in R$$

და ამიტომ $\operatorname{Re}(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L$.

ანალოგიურად თუ განვიხილავთ ფუნქციას

$$f(t) = \| x_0 - y_0 + ity \|^2, \quad t \in R ,$$

მივიღებთ $\operatorname{Im}(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L$. მაშასადამე ამ შემთხვევაშიც სრულდება (1)

ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ ევკლიდური E სივრცის L ქვესივრცე სრულია, მაშინ ნებისმიერ $x \in E$ ვექტორს გააჩნია ორთოგონალური პროექცია L ქვესივრცეზე.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 1-ს , უნდა ვაჩვენოთ, რომ რომ

$$\forall x_0 \in E \quad \exists y_0 \in L: \quad \| x_0 - y_0 \| = \inf_{y \in L} \| x_0 - y \|.$$

ავიღოთ $x_0 \in E$ და განვიხილოთ სიდიდე

$$d = \inf_{y \in L} \| x_0 - y \|^2.$$

მაშინ არსებობს $\{y_n\}$ მიმდევრბა L ქვესივრციდან ისეთი,რომ

$$\lim_{n \to \infty} \| x_0 - y_n \|^2 = d . \tag{3}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა ფუნდამენტურია.

გვაქვს

$$\| y_n - y_m \|^2 = 2 \| y_n - x_0 \|^2 + 2 \| y_m - x_0 \|^2 - 4 \left\| x_0 - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 ,$$

ნებისმიერი n, m ნომრისათვის. ვინაიდან $\frac{y_n + y_m}{2} \in L$, ამიტომ

$$\left\| x_0 - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \geq d .$$

მაშასადამე

$$\| y_n - y_m \|^2 \leq 2 \| y_n - x_0 \|^2 + 2 \| y_m - x_0 \|^2 - 4d . \tag{4}$$

(3) პირობიდან გამოდის, რომ

$$\forall \varepsilon^2 \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad \| y_n - x_0 \|^2 < d + \frac{\varepsilon^2}{4} .$$

მაშინ (4)-დან გვექნება

$$| y_n - y_m \|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall n, m \geq 0 .$$

ვინაიდან L სრულია, ამიტომ არსებობს $y_0 \in L$ ისეთი, რომ $y_n - y_0, \quad n \to \infty$. ნორმის უწყვეტობიდან მივიღებთ

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n - y_0 \| = \| x_0 - y_0 \| .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის.

1.დაამტკიცეთ, რომ $l_p\ (1\le p\le\infty,\ p\ne 2)$, $C([a,b])$ ნორმირებულ სივრცეებში ნორმა არ შეიძლება მიღებული იქნეს სკალარული ნამრავლით.

2. დაამტკიცეთ, რომ l_∞ ნორმირებულ სივრცეში ნორმა არ შეიძლება მიღებული იქნეს სკალარული ნამრავლით.

3.იქნება თუ არა $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა $C([a,b])$ სივრცე სკალარული ნამრავლით $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$ ჰილბერტის სივრცე.

4.ვთქვათ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ რაიმე მიმდევრობებია ჰილბერტის H სივრციდან. დაუშვათ, რომ $\|x_n\|=\|y_n\|=1,\ n\ge 1$. აჩვენეთ, რომ

ა) $(x_n,y_n)\to 1\Rightarrow \|x_n-y_n\|\to 0;\quad n\to\infty$;

ბ) $\|x_n+y_n\|\to 2\Rightarrow \|x_n-y_n\|\to 0;\quad n\to\infty$.

6.აჩვენეთ, რომ ჰილბერთის სივრცის (უსასრულოგანზომილებიანი) ერთეულოვანი ბირთვი შეიცავს წყვილწყვილად არათანამკვეთ უსასრულო რაოდენობა ბირთვს 1/4 ტოლი რადიუსით.

7.ვთქვათ L არის ჰილბერტის H სივრცის ერთგანზომილებიანი ქვესივრცე და $a\in L, a\ne 0$.აჩვენეთ, რომ $$\rho(x,L^{\perp})=\frac{|<x,a>|}{\|a\|}.$$

8. e^t ფუნქციისათვის იპოვეთ მეორე რიგის ალგებრული პოლინომი $p(t)$ ისეთი,რომ $L^2([-1,1])$ სივრცის ნორმით $\|e^t-p(t)\|$ სიდიდე იყოს მინიმალური.

9.პარსერვალის ტოლობის გამოყენებით, აჩვენეთ ეილერის ტოლობა $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

10. l_2 ჰილბერტის სივრცში იპოვეთ მანძილი $x=(1,0,0,...)$ წერტილიდან $$L_n=\left\{x\in l_2,\ x=(x_1,x_2,...),\ \sum_{j=1}^{n}x_j=0\right\}$$ ქვესივრცემდე (n ფიქსირებულია).

თავი IV

ოპერატორები წრფივი ნორმირებული სივრცეებში

4.1. წრფივი ოპერატორები

შემდგომში ჩვენ საქმე გვექნება ფუნქციებთან , რომლებიც რაიმე X ნორმირებული სივრცის რაიმე ქვესიმრავლეს ასახავს Y ნორმირებულ სივრცეში. ასეთი ფუნქციებისათვის ჩვენ გამოვიყენებთ ტეტმინს „ოპერატორი „ სიტყვა „ფუნქციის“ ნაცვლად . f ოპერატორის განსაზღვრის არის აღნიშვნისათვის გამოვიყენებთ $D(f)$ (ან D_f) სიმბოლოს, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლისათვის $R(f)$ (ან R_f). ფუნქციონალურ ანალიზში ხშირად ხდება ისეთი ოპერატორების შესწავლა, რომელთათვისაც $D(f)=X$ ტოლობა არ სრულდება (როცა მაგალითად ოპერატორი განსასზღვრულია, არა მთელს სივრცეზე, არამედ მის რაიმე წრფივ ქვესივრცეზე).

განმარტება 1. f ოპერატორს , რომელიც მოქმედებს X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში უწოდებენ შემოსაზღვრულს, თუ ნებისმიერი $M\subset X$ შემოსაზღვრული სიმრავლისათვის $f(M)$ სიმრავლე Y ნორმირებულ სივრცეში შემოსაზღვრულია.

მაგალითი 1. $f:R\to R;\ \ f(x)=kx+b$ შემოსაზღვრული ოპერატორია. ოპერატორი $f:R\to R;\ \ f(x)=x^2$ შემოსაზღვრულია.

განმარტება 2. ვიტყვით, რომ $f_n:X\to Y$ ოპერატორთა მიმდევრობა კრებადია $f:X\to Y$ ოპერატორისაკენ წერტილოვნად, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_Y=0\quad \forall x\in X$.

განმარტება 3. ვიტყვით, რომ $f_n:X\to Y$ ოპერატორთა მიმდევრობა კრებადია $f:X\to Y$ ოპერატორისაკენ $D\subset X$ სიმრავლეზე თანაბრად , თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\|f_n(x)-f(x)\|_Y=0\quad \forall x\in D$.

განმარტება 4. $f:X\to Y$ ოპერატორს ვუწოდებთ წრფივს თუ ნებისმიერი $x_1,x_2\in X$ და α_1,α_2 სკალარისათვის

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)\,.$$

შენიშვნა 1 . იმ შემთხვევაში , როცა წრფივი ოპერატორი f არაა განსაზღვრული მთელს X სიმრავლეზე , ვგულისხმობთ, რომ მისი $D(f)$ განსაზღვრის არე X სივრცის რაიმე წრფივი ქვესივრცეა.

როგორც წრფივ ალგებრაში წრფივ ოპერატორებს ავღნიშნავთ $A, B, \ldots$ სიმბოლოებით.

შემდგომში $L(X,Y)$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ ყველა იმ $A: X \to Y$ წრფივ ოპერატორთა ერთობლიობას, რომლებიც შემოსაზღვრული არიან.

ვთქვათ $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორია, რომელიც მოქმედებს X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ ოპერატორი A უწყვეტია ნებისმიერ წერტილში თუ ის უწყვეტია $x = 0$ წერტილში. მართლაც თუ ოპერატორი უწყვეტია $x = 0$ წერტილში, მაშინ $A(x - x_0) \to 0$, როცა $x - x_0 \to 0$. ოპერატორის წრფივობის გამო $\forall x, x_0 \in X$ გვაქვს $A(x - x_0) = A(x) - A(x_0)$. მაშასადამე გვაქვს $A(x) \to A(x_0)$, როცა $x \to x_0$.

თეორემა 1. $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორი, რომელიც X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში მოქმედებს შემოსაზღვრულია ერთეულოვან ბირთვზე, (ე.ი. არსებობს $C > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ $\| A(x) \|_Y \le C \quad \forall x \in X, \quad \| x \|_X \le 1$), მაშინ ის შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ $M \subset X$ რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლეა X ნორმირებული სივრცეში. მაშინ $\exists R > 0: \| x \|_X \le R \quad \forall x \in M$. ამიტომ

$$\forall x \in M \quad \| A(x) \|_Y = R \left\| A\left(\frac{x}{R}\right) \right\|_Y \le RC .$$

მაშასადამე ოპერატორ A-ს ნებისმიერი $M \subset X$ შემოსაზღვრულ სიმრავლე გადაყავს შემოსაზღვრულ სიმრავლეში და ამიტომ ის შემოსაზღვრულია. □

განმარტება 5. ნებისმიერი $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორისათვის , რომელიც X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში მოქმედებს სიდიდეს

$$\| A \| = \sup_{\| x \|_X \le 1} \| A(x) \|_Y$$

უწოდებენ A ოპერატორის ნორმას.

ცხადია გვექნება $\|A\|\geq 0$. კერძოდ თუ $\|A\|=0$, მაშინ A ნულოვანი ოპერატორია. თუ $\|A\|=\infty$, მაშინ A ოპერატორი არაშემოსაზღვრულია.

დამტკიცებული თეორემიდან (თეორემა 1) გამოდის , რომ ოპერატორი შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ნორმა შემოსაზღვრულია.

შედეგი 1. $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორი, რომელიც X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში მოქმედებს შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $C>0$ ისეთი, რომ

$$\|A(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X .$$

ცხადია, რომ $\sup\limits_{\|x\|_X=1}\|A(x)\|_Y \leq \|A\|$. მეორე მხრივ თუ $0<\|x\|_X\leq 1$, მაშინ

$$\|A(x)\|_Y = \|x\|_X \cdot \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leq \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leq \sup_{\|y\|=1}\|A(y)\|_Y,$$

ამიტომ $\|A\|\leq \sup\limits_{\|x\|_X=1}\|A(x)\|_Y$.

მაშასადამე ნებისმიერი წრფივი A ოპერატორისათვის

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1}\|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X\neq 0, x\in X}\frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

შედეგი 2. თუ $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორი, რომელიც X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში მოქმედებს შემოსაზღვრულია

$$\|A(x)\|_Y \leq \|A\|\cdot\|x\|_X, \quad x\in X .$$

შედეგი 3. თუ $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორი შემოსაზღვრულია, მაშინ ის უწყვეტია ნებისმიერ $x_0 \in X$ წერტილში.

მართლაც ვინაიდან

$$\|A(x)-A(x_0)\|_Y \leq \|A\|\cdot\|x-x_0\|_X, \quad x\in X ,$$

ამიტომ $A(x)\to A(x_0)$, როცა $x\to x_0$.

თეორემა 2. იმისათვის, რომ $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორი იყოს შემოსაზღვრული აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის უწყვეტი იყოს $x=0$ წერტილში.

დამტკიცება. ზემოთ ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ თეორემის ერთი ნაწილი, სახელდობრ თუ ოპერატორი შემოსაზღვრულია ის უწყვეტია. ვაჩვენოთ შებრუნებული დებულების სამართლიანობა. დაუშვათ A უწყვეტია $x = 0$ წერტილში, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული. მაშინ ყოველი $n \in N$ რიცხვისათვის არსებობს $x_n \in X$ ისეთი, რომ $\| x_n \|_X \le 1$, $\| Ax_n \|_Y \ge n$ და მაშასადამე

$$\| A(x_n / n) \|_Y \ge 1 \quad \forall n \in N .$$

მეორე მხრივ , ვინაიდან

$$\| x_n / n \|_X \le 1/n \to 0, \qquad n \to \infty$$

და ოპერატორი უწყვეტია , ამიტომ

$$\| A(x_n / n) \|_Y \to 0 \quad n \to \infty .$$

მაშასადამე ჩვენი დაშვება არასწორია. □

შესაძლებელია ოპერატორი განსაზღვრული იყოს X სივრცის რაიმე ქვესივრცეზე, რომელიც ყველგან მკვრივია X -ში. ამ დროს მნიშვნელოვანია გარკვევა იმისა, შესაძლებელია თუ არა ამ ოპერატორის გავრცობა (გაგრძელება) მთელს X სივრცეზე.

თეორემა 3. (წრფივი ოპერატორის გაგრძელების შესახებ). ვთქვათ წრფივი A ოპერატორი მოქმედებს ნორმირებული M სივრციდან ბანახის Y სივრცეში. დაუშვათ, რომ M წარმოადგენს X ნორმირებული სივრცის ქვესივრცეს, ამასთანავე M ყველგან მკვრივია X -ში. მაშინ არსებობს წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი $\overline{A} : X \to Y$ ისეთი, რომ $\overline{A}(x) = A(x), \quad \forall x \in M$ და $\| \overline{A} \| = \| A \|$.

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in X \setminus M$. ვინაიდან M ყველგან მკვრივია X -ში, ამიტომ არსებობს $x_n \in M$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $x_n^{'} \to x$, როცა $n \to \infty$. უტოლობიდან

$$\| A(x_n) - A(x_m) \|_Y \le \| A \| \cdot \| x_n - x_m \|_X \to 0$$

და A ოპერატორის შემოსზღვრულობიდან გამოდის, რომ მიმდევრობა $A(x_n), \quad n \in N$ ფუნდამენტალურია. ვინაიდან Y ბანახის სივრცეა, ამიტომ მას ზღვარი გააჩნია. ავღნიშნოთ

$$\overline{A}(x) = \lim_{n \to \infty} A(x_n)$$

და ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება კორექტულია. ვთქვათ $x_n^{'} \in M$, $x_n^{'} \to x$, როცა $n \to \infty$. ავღნიშნოთ

$$y = \lim_{n\to\infty} A(x_n) \text{ და } y' = \lim_{n\to\infty} A(x_n') .$$

მაშინ

$$\| y - y' \|_Y \le \| y - A(x_n) \|_Y + \| A(x_n) - A(x_n') \|_Y + \| A(x_n') - y' \|_Y \to 0 \quad n \to \infty$$

და ვინაიდან

$$\| A(x_n) - A(x_n') \|_Y \le \| A \| \cdot \| x_n - x_n' \|_X \to 0 ,$$

როცა $n \to \infty$ გვექნება $y = y'$. $\overline{A}$ ოპერატორის წრფივობა მარტივად გამოვა A ოპერატორის წრფივობიდან და ზღვრის ოპერაციის წრფივობიდან. აგრეთვე ცხადია, რომ $\| A \| \le \| \overline{A} \|$. მეორე მხრივ უტოლობიდან

$$\| A(x_n) \|_Y \le \| A \| \cdot \| x_n \|_X \ ,$$

როცა როცა $n \to \infty$, მივიღებთ $\| \overline{A}(x \ ) \|_Y \le \| \overline{A} \| \cdot \| x \ \|_X , \quad \forall x \in X$

და ამიტომ $\| A \| \ge \| \overline{A} \|$. მაშასადამე $\| \overline{A} \| = \| A \|$. □

4.2. წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორის მაგალითები.

ალგებრის კურსიდან კარგადაა ცნობილი, რომ ნებისმიერი წრფივი ოპერატორი R^n სივრციდან R^n სივრცეში წარმოიდგინება სახით

$$y = Ax, \quad x \in R^n , \tag{1}$$

სადაც A არის n რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო $x = (x_1, ..., x_n)^T$ და $y = (y_1, ..., y_n)^T$ n რიგის სვეტებია. თუ a_{ij} არის A მატრიცის ელემენტები, მაშინ

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \quad i = 1, 2, ..., n . \tag{2}$$

ვინაიდან R^n-ში ნორმა შეიძლება მოცემული იქნეს სხვადასხვანაირად, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობები განსაზღვრავენ სხვადასხვა წრფივ ოპერატორს.

მაგალითი 1. ვთქვათ R^n სიმრავლეზე ნორმა მოცემულია ფორმულით $\| x \|_\infty = \max_j | x_j |$.

მიღებული ნორმირებული სივრცე ავღნიშნოთ l_∞^n სიმბოლოთი. (2)- დან გვექნება

$$| y_i | \le \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \cdot | x_j |, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

ამიტომ $$\| y \|_\infty \le \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \cdot \| x \|_\infty , \quad \forall x \in R^n .$$

მაშასადამე $A : l_\infty^n \to l_\infty^n$ ოპერატორი შემოსაზღვრულია და

$$\| A \| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \quad . \tag{3}$$

ვაჩვენოთ, რომ სინამდვილეში (3) -ში გვაქვს ტოლობა. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (3)-ში მაქსიმუმი მიიღწევა როცა $i = 1$. x ვექტორისათვის კორდინატებით $x_j = \operatorname{sgn} a_{1j}$ გვაქვს

$$\| y \|_\infty = y_1 = \sum_{j=1}^{n} | a_{1j} |,$$

ამ უკანასკნელიდან და (3)-დან გვექნება $\| A \| = \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$

მაგალითი 2. R^n სიმრავლეზე განვმარტოთ ნორმა ასე $\| x \|_{l_n^p} = \left(| x_1 |^p + ... + | x_n |^p \right)^{1/p}$, სადაც $(1 \le p < \infty)$ და $x = (x_1, ..., x_n)^T$. მივიღებთ ნორმირებულ სივრცეს , რომელსაც ავღნიშნავთ სიმბოლოთი l_p^n $(1 < p < \infty)$. ვაჩვენოთ, რომ (1) ტოლობა ($y = Ax, \quad x \in R^n$) განსაზღვრავს შემოსაზღვრულ ოპერატორს l_p^n -დან l_q^n -სივრცეში, სადაც $1/p + 1/q = 1$ და ვიპოვოთ მისი ნორმა.

გვაქვს

$$\| y \|_{l_n^q} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|^q \right)^{1/q} .$$

თუ გამოვიყენებთ ჰელდერის უტოლობას

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^p \right)^{1/p} , \tag{4}$$

გვექნება

$$\| y\|_{l_n^q} \le \left(\sum_{ij=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} \cdot \| x\|_{l_n^p}.$$

მაშასადამე ოპერატორი $A: l_n^p \to l_n^q$ შემოსაზღვრულია და

$$\| A\| \le \left(\sum_{ij=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}. \qquad (5)$$

ვაჩვენოთ, რომ სინამდვილეში (5)-ში ტოლობას აქვს ადგილი.

ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $A \ne 0$. შევნიშნოთ, რომ (4) -უტოლობაში რომელიღაც $x \ne 0$ მიიღწევა ტოლობა, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (5) უტოლობას გვექნება

$$\| A\| = \left(\sum_{ij=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}.$$

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ (1) ტოლობა ($y = Ax, \quad x \in R^n$) განსაზღვრავს შემოსაზღვრულ ოპერატორს l_p^n -დან l_p^n -სივრცეში, სადაც $1 < p < \infty$ და ვიპოვოთ მისი ნორმა.

გვაქვს

$$\| y\|_{l_n^p} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|^p\right)^{1/p}$$

და (4) უტოლობიდან გვექნება

$$\| y\|_{l_n^p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p} \cdot \| y\|_{l_n^p}.$$

მაშასადამე ოპერატორი $A: l_n^p \to l_n^p \quad (1 < p < \infty)$ შემოსაზღვრულია და

$$\| A\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}.$$

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ამ უკანასკნელში საზოგადოდ გვაქვს ტოლობა.

მაგალითი 4. ვთქვათ

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n, ... \tag{6}$$

და $\gamma = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} | a_{ij} | < \infty$. მაშინ (6) განსაზღვრავს $A: l_\infty \to l_\infty$ შემოსაზღვრულ ოპერატორს.

(6)- დან გვაქვს

$$| y_i | \le \sum_{j=1}^{\infty} | a_{ij} | \cdot \| x \|_{l_\infty} \le \gamma \| x \|_{l_\infty} \quad i = 1, 2, ...,$$

ამიტომ $\| A(x) \|_{l_\infty} \le \gamma \| x) \|_{l_\infty}$. მაშასადამე ოპერატორი შემოსაზღვრულია და $\| A \| \le \gamma$.
ანალოგიურად როგორც მაგალით 1-ში შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\| A \| = \gamma$.

მაგალითი 5. (6) ფორმულები განსაზღვრავენ $A: l_p \to l_q \quad (1 < p < \infty)$ შემოსაზღვრულ ოპერატორს , თუ

$$\beta = \left(\sum_{ij=1}^{n} | a_{ij} |^q \right)^{1/q} < \infty$$

და $\| A \| = \beta$.

როგორც მაგალით 2-ში

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} | a_{ij} |^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} | x_j |^p \right)^{1/p},$$

$$\| y \|_{l_q} \le \left(\sum_{ij=1}^{\infty} | a_{ij} |^q \right)^{1/q} \cdot \| x \|_{l_p}.$$

მაშასადამე ოპერატორი $A: l_p \to l_q \quad (1 < p < \infty)$ შემოსაზღვრულია და

$$\| A \| \le \beta.$$

აჩვენეთ,რომ $\| A \| = \beta$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^q \right)^{p/q} \right)^{1/p} < \infty ,$$

მაშინ ოპერატორი $A: l_p \to l_p \quad (1 < p < \infty)$ შემოსაზღვრულია და $\| A \| = \alpha$.

4.3. წრფივ შემოსაზღვრულ ოპერატორთა სივრცე.

ვთქვათ $L(Y,Y)$ წარმოადგენს ყველა იმ წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორების ერთთობლიობას რომლებიც მოქმედებენ X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში. თუ ამ სიმრავლეში შემოვიღებთ ბუნებრივად ორი ოპერატორის შეკრების ოპერაციას და ოპერატორის სკალარზე გამრავლების ოპერაციას, მაშინ $L(Y,Y)$ წრფივი სივრცე გახდება. აღნიშნული სივრცე შეგვიძლია გავხადოთ ნორმირებული თუ ნორმად ოპერატორის ნორმას მივიღებთ.

მართლაც, თუ A , $B: X \to Y$ ორი წრფივი ოპერატორია , მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $C = \alpha A + \beta B$ ნებისმიერი α, β რიცხვებისათვის განიმარტება ასე

$$C(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) \quad \forall x \in X$$

და ის ცხადია წრფივია. თუ A და B ოპერატორი შემოსაზღვრულია, მაშინ $A+B$ და αA ოპერატორებიც შემოსაზღვრულია და

$$\| A+B \| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \| A(x) + B(x) \|_Y \le \sup_{\|x\|_X \le 1} \| A(x) \|_Y + \sup_{\|x\|_X \le 1} \| B(x) \|_Y \le \| A \| + \| B \| ,$$

$$\| \alpha A \| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \| \alpha A(x) \|_Y \le | \alpha | \sup_{\|x\|_X \le 1} \| A(x) \|_Y \le | \alpha | \cdot \| A \| .$$

მაშასადამე გვაქვს $\| A+B \| \le \| A \| + \| B \|$ და $\| \alpha A \| \le | \alpha | \cdot \| A \|$. ამასთან $\| A \| \ge 0$ $\forall A \in L(X,Y)$ და თუ $\| A \| = 0$, მაშინ $A(x) = 0 \;\; \forall x \in X$. მაშასადამე $L(X,Y)$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა.

ვთქვათ მოცემულია ოპერატორთა $A_n \in L(X,Y)$ მიმდევრობა და $A \in L(X,Y)$ ოპერატორი. ცხადია გვაქვს

$$\sup_{\|x\|_X \le 1} \| A_n x - Ax \|_Y = \| A_n - A \| ,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $A_n \in L(X,Y)$ ოპერატორთა მიმდევრობის კრებადობა $L(X,Y)$ სივრცის ნორმით $A \in L(X,Y)$ ოპერატორისაკენ ტოლფასია $A_n \in L(X,Y)$ ოპერატორების თანაბარი კრებადობის $\|x\|_X \leq 1$ ბირთვზე A ოპერატორისაკენ. ამიტომ თუ $\|A_n - A\| \to 0$, როცა $n \to \infty$ ამბობენ, რომ ოპერატორთა $\{A_n\}$ $n \in N$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია A ოპერატორისაკენ.

თეორემა 1. ვთქვათ X ნორმრებული, ხოლო Y ბანახის სივრცეა. მაშინ $L(X,Y)$ ბანახის სივრცეა.

დამტკიცება. დაუშვათ $A_n \in L(X,Y), \quad n \in N$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია $L(X,Y)$ სივრცეში. გვაქვს

$$\|A_{n+p}(x) - A_n(x)\| \leq \|A_{n+p} - A_n\| \cdot \|x\|,$$

ამიტომ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის $A_n(x)$ მიმდევრობაც ფუნდამენტალურია Y სივრცეში. ვინაიდან Y სრულია, ამიტომ $A_n(x)$ მიმდევრობას ზღვარი გააჩნია. ავღნიშნოთ $y = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$. ეს ფორმულა განსაზღვრავს წრფივ $y = A(x)$ ოპერატორს. ვაჩვენოთ, რომ ის შემოსაზღვრულია.

$\left| \|A_{n+p}\| - \|A_n\| \right| \leq \|A_{n+p} - A_n\|$ უტოლობიდან გამოდის, რომ რიცხვითი მიმდევრობა $\{\|A_n\|\}$ ფუნდამენტალურია და მაშასადამე შემოსაზღვრული. ვთქვათ $\|A_n\| \leq C \quad \forall n$. მაშინ

$$\|A_n(x)\|_Y \leq \|A_n\| \cdot \|x\|_X \leq C\|x\|_X \quad \forall n \in N,\ n \to \infty.$$

თუ გადავალთ ამ უკანასკნელ უტოლობაში ზღვარზე, როცა $n \to \infty$ მივიღებთ

$$\|A\,(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

$L(X,Y)$ სივრცეში თანაბარ კრებადობასთან ერთად შეგვიძლია განვიხილოთ წერტილოვანი კრებადობა.

განმარტება 1. ვიტყვით, რომ $A_n \in L(X,Y), \quad n \in N$ ოპერატორთა მიმდევრობა ძლიერად (ანუ წერტილოვნად) კრებადია $A \in L(X,Y)$ ოპერატორისაკენ, თუ $A_n(x) \to A(x), \quad \forall x \in X$ (ცხადია კრებადობა განიხილება Y -სივრცის ნორმით).

ცხადია თუ $A_n \to A, \quad n \to \infty$ თანაბრად , მაშინ $A_n \to A, \quad n \to \infty$ წერტილოვნადაც. შებრუნებული დებულება საზოგადოდ სამართლიანი არ არის.

მაგალითი 1. l_2 სივრცეში განვიხილოთ ოპერატორები (პროექციის ოპერატორები) $P_n : l_2 \to l_2, \quad \forall n \in N$, რომლებიც ასეა განმარტებული

$$P_n(x) = (x_1,...,x_n,0,0,...) \quad \forall x = (x_1,...,x_n,...) .$$

მაშინ

$$\| P_n(x) - x \|_{l_2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^2 \to 0, \quad n \to \infty \ \ \forall x \in l_2 .$$

მაშასადამე $P_n \to I, \quad n \to \infty$. სადაც I იგიური ოპერატორია l_2 -ში. ცხადია ეს კრებადობა არ იქნება თანაბარი. მართლაც, თუ $\| x \| = 1$ და $P_n(x) = 0$, მაშინ $\| P_n(x) - x \|_{l_2} = \| x \|_{l_2} = 1$.
მაშასადამე

$$\| P_n - I \| = \sup_{\|x\|_X \le 1} | P_n - I \|_{l_2} \ge 1, \quad \forall n \in N .$$

4.4. ბანახის სივრცის შეუღლებული სივრცე.

განმარტება 1. ვთქვათ X რაიმე ბანახის სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ხოლო $Y = R$, მაშინ $L(X,R)$ ბანახის სივრცეს უწოდებზენ X სივრცის შეუღლებულ სივრცეს და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი X^*-ით. ნებისმიერ ელემენტს $X^* = L(X,R)$ სივრციდან უწოდებენ X სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. (ანალოგიურად თუ X რაიმე ბანახის სივრცეა კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ , მაშინ $L(X,C)$ სივრცეს უწოდებენ X სივრცის კომპლექსურ შეუღლებულ სივრცეს და მას X^*-ით ავღნიშნავ)

თუ $F \in X^*$ მაშინ F ფუნქციონალის ნორმა განიმარტება ტოლობით

$$\| F \| = \sup_{x \in X, x \ne 0} \frac{| F(x) |}{\| x \|_X} = \sup_{\|x\|_X \le 1} | F(x) | = \sup_{\|x\|_X = 1} | F(x) | . \qquad (1)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $L(X,R)$ არის ბანახის სივრცე დავადგენთ, რომ ბანახის X სივრცის შეუღლებული X^* სივრცე თვითონაა ბანახის სივრცე ნორმით (1).

ქვემოთ ძირითადად განვიხილავთ ბანახის სივრცეებს ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ.

მაგალითი 1. ვთქვათ $X = C([0,1])$ (ბუნებრივი ნორმით) . დავაფიქსიროთ $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული რაიმე ლებეგის აზრით ინტეგრებადი b ფუნქცია. განვიხილოთ $C([0,1])$ -ზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი

$$F(f) = \int_0^1 f(t)b(t)dt, \quad f \in C([0,1]).$$

გვაქვს $|F(f)| \le \int_0^1 |f(t)||b(t)|dt \le \max_{0\le t\le 1}|f(t)| \int_0^1 |b(t)|dt = M\,\|f\|_{C([0,1])}, \quad \forall f \in C([0,1])$

სადაც $M = \int_0^1 |b(t)|dt.$ მაშასადამე F ფუნქციონალი $C([0,1])$ სივრცეზე განსაზღვრავს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს , ე.ი. $F \in (C([0,1]))^*$ და გვაქვს, რომ $\|F\| \le \int_0^1 |b(t)|dt.$

(შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელ უტოლობაში სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა).

მაგალითი 2. ვთქვათ $X = C([0,1])$ (ბუნებრივი ნორმით) . განვიხილოთ წრფივი ფუნქციონალი

$$F(f) = f(0), \quad \forall f \in C([0,1]).$$

შევნიშნოთ, რომ $|F(f)| = |f(0)| \le \max_{0\le t\le 1}|f(t)| = \|f\|_{C([0,1])}, \quad \forall f \in C([0,1])$. ამიტომ გვექნება $F \in (C([0,1]))^*$ და $\|F\| \le 1$. სინამდვილეში გვაქვს $\|F\| = 1$. მართლაც ავიღოთ კონკრეტული მუდმივი ფუნქცია $f(t) = 1$, ცხადია გვაქვს $\|f\|_{C([0,1])} = 1$ და $F(f) = f(1) = 1$.

მაგალითი 3. ვთქვათ $X = C([0,1])$ (ბუნებრივი ნორმით) . განვიხილოთ წრფივი ფუნქციონალი

$$F(f) = \frac{1}{3}f(0) - \frac{2}{7}f(1), \quad \forall f \in C([0,1]).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$|F(f)| \le \frac{1}{3}|f(0)| + \frac{2}{7}|f(1)| \le \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right)\max_{0\le t\le 1}|f(t)| = \frac{13}{21}\|f\|_{C([0,1])}, \quad \forall f \in C([0,1]).$$

ამიტომ გვექნება $F \in (C([0,1]))^*$ და $\| F \| \le \frac{13}{21}$. სინამდვილეში გვაქვს $\| F \| = \frac{13}{21}$. მართლაც ავიღოთ კონკრეტული ფუნქცია $f(t) = -2t + 1$, ცხადია გვაქვს $\| f \|_{C([0,1])} = 1$ და $F(f) = \frac{1}{3} f(0) + \frac{2}{7} f(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{13}{21}$.

მაგალითი 4. $X = l_p, \quad (1 \le p < \infty)$. დავაფიქსიროთ, რაიმე მიმდევრობა $b = (b_1, b_2, ...) \in l_q$ სადაც $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

განვსაზღვროთ l_p სივრცეზე წრფივი ფუნქციონალი

$$F(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n + ... \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$$

ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით დავასკვნით

$$| F(x) | \le | x_1 || b_1 | + | x_2 || b_2 | + ... + | x_n || b_n | + ... \le \| x \|_{l_p} \| b \|_{l_q} \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p ;$$

ამიტომ გვექნება $F \in (l_p)^*$ და $\| F \| \le \| b \|_{l_q}$. მტკიცდება, რომ ამ უკანასკნელ უტოლობაში სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა. უფრო მეტიც, თუ $F \in (l_p)^*$ რაიმე ფუნქციონალია, მაშინ არსებობს ერთადერთი $b = (b_1, b_2, ...) \in l_q$ ვექტორი ისეთი, რომ სამართლიანია წარმოდგენა

$$F(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n + ... \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$$

და $\| F \| = \| b \|_{l_q}$. ამიტომ შეგვიძლია l_p სივრცის შეუღლებული $(l_p)^*$ სივრცე გავაიგივეოთ l_q სივრცესთან, (ანუ $(l_p)^*$ იზომორფულია l_q სივრცის)სადაც $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ და ვწერთ $(l_p)^* = l_q$.

თეორემა 1. ყოველი $1 \le p \le \infty$ l_p სივრცე ბანახის სივრცეა. როცა $1 \le p < \infty$ l_p სივრცის შეუღლებული სივრცეა l_q სადაც $q = \frac{p}{p-1}$. გარდა ამისა თუ $1 < p < \infty$ l_p რეფლექსური სივრცეა.

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_p$ ვექტორისათვის

$$\| x \|_{l_p} = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_i y_i \right| : \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...), \| y \|_{l_q} = 1 \right\}.$$

ჰელდერის უტოლობის ძალით ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ტოლობის მარჯვენა მხარე არ აღემატება მარცხენას. ვაჩვენოთ პირიქით. განვსაზღვროთ $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ ვექტორი შემდეგნაირად $y_n = signx_n \mid x_n \mid^{p/q} \| x_n \|_{l_p}^{p/q}$ თუ და $1<p<\infty$ $y_n = signx_n$ თუ $p=1$. ადვილია ჩვენება, რომ $\| y \|_{l_q} = 1$ და $\sum_{n=1}^{\infty} x_i y_i = \| x \|_{l_p}$.

$p=\infty$ შემთხვევისათვის საკმარისია სუპრემუმი ავიღოთ ყველა იმ $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$, $\| y \|_{l_1} = 1$ვექტორის მიმართ , რომელთა ყველა კორდინატი ნულია გარდა ერთისა.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა. თუ $b=(b_1,b_2,....)\in l_q$, მაშინ

$$F(x) = x_1b_1 + x_2b_2 + ... + x_nb_n + ... \quad \forall x = (x_1,x_2,...,x_n,...) \in l_p \ ()$$

როგორც ავღნიშნეთ განსაზღვრავს წრფივ ფუნქციონალს l_p-ზე და ()-ის ძალით

$$\| F \| = \sup_{\|x\|_{l_p} \le 1} x_1b_1 + x_2b_2 + ... + x_nb_n + ... = \| b \|_{l_q} .$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ l_p -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს აქვს () სახე , რომელიღაც $b=(b_1,b_2,....)\in l_q$ ვექტორისათვის.

ვთქვათ $1 \le p < \infty$ და $F \in (l_p)^*$. ვთქვათ $e_n = (0,0,...,1,0,...), n=1,2,...$ ერთეულოვანი ვექტორ ბაზისებია. ავღნიშნოთ $b_n = F(e_n), \quad n=1,2,....$, მაშინ $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ვექტორისათვის გვექნება

$$F(x) = F(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n + ...) = \sum_{n=1}^{\infty} x_nb_n \ . \ ()$$

თუ x_n რიცხვებს შევცვლით $sign(x_nb_n)x_n$ რიცხვებით გვექნება

$$\sum_{n=1}^{\infty} | x_nb_n | \le \| F \| \cdot \| x \|_{l_p} .$$

ყოველი ფიქსირებული N ნატურალური რიცხვისათვის და $b' = (b_1,b_2,..b_N,0,0,..)$ ვექტორისათვის გვექნება

$$\sum_{n=1}^{N} | x_nb_n | \le \| F \| \cdot \| x \|_{l_p} .$$

თუ ამ უტოლობაში განვიხილავთ მარცხენა მხარის სუპრემუმს როცა $\| x\|_{l_p}=1$ დავასკვნით, რომ $\| b'\|_{l_q}\le\| F\|$. თუ განვიხილავთ ზღვრულ შემთხვევას როცა $N\to\infty$ გვექნება $b\in l_q$ და $\| b\|_{l_q}\le\| F\|$. თუ გავითვალისწინებთ () და ჰელდერის უტოლობას დავასკვნით $\| b\|_{l_q}=\| F\|$. მაშასადამე l_p -ს შეუღლებული სივრცე იზომორფულია l_q სივრცის.

მაგალითი 5. $X=L^p(R), \quad (1\le p<\infty)$. დავაფიქსიროთ, რაიმე ფუნქცია $b(t)\in L^q(R)$ სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

განვსაზღვროთ $L^p(R)$ სივრცეზე წრფივი ფუნქციონალი

$$F(f)=\int_R f(t)b(t)dt \quad \forall f\in L^p(R)$$

ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით დავასკვნით

$$|F(f)|\le\int_R |f(t)||b(t)|dt\le\| f\|_{L^p(R)}\| b\|_{l^{L^q(R)}}, \quad \forall f\in L^p(R);$$

ამიტომ გვექნება $F\in(L^p(R))^*$ და $\| F\|\le\| b\|_{L^q(R)}$. მტკიცდება (როგორც l_p სივრცეების შემთხვევაში), რომ ამ უკანასკნელ უტოლობაში სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა. უფრო მეტიც, თუ $F\in(L^p(R))^*$ რაიმე ფუნქციონალია, მაშინ არსებობს ერთადერთი $b(t)\in L^q(R)$ ფუნქცია ისეთი, რომ სამართლიანია წარმოდგენა

$$F(f)=\int_R f(t)b(t)dt \quad \forall f\in L^p(R)$$

და $\| F\|=\| b\|_{L^q(R)}$. ამიტომ შეგვიძლია $L^p(R)$ სივრცის შეუღლებული $(L^p(R))^*$ სივრცე გავაიგივეოთ $L^q(R)$ სივრცესთან (ანუ $(L^p(R))^*$ იზომორფულია $L^q(R)$ სივრცის), სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ და ვწერთ $(L^p(R))^*=L^q(R)$.

როგორც ვხედავთ ბანახის X სივრცის შეუღლებული X^* სივრცე თვითონაა ბანახის სივრცე, ამიტომ შესაძლებელია განვიხილოთ X^*-ის შეუღლებული სივრცე, რომელსაც ავღნიშნავთ X^{**} და უწოდებთ X სივრცის მეორე შეუუღლებულ სივრცეს.

შვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული $x_0 \in X$ ელემენტი განსაზღვრავს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს X^* სივრცეზე . მართლაც ფორმულა

$$F_{x_0}(f) = f(x_0), \quad \forall f \in X^*$$

განსაზღვრავს წრფივ ფუნქციონალს X^* სივრცეზე. მტკიცდება, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ფუნქციონალი X^* -ზე უწყვეტია და მისი ნორმა ტოლია $\| x_0 \|_X$ -ის. მაშასადამე ჩვენს მიერ აგებული იქნა მთელი X სივრცის ასახვა X^{**} სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ ეს ასახვა წრფივია. აგებულ ასახვას უწოდებენ X სივრცის ბუნებრივ ასახვას მის მეორე შეუღლებულ სივრცეში. ეს ასახვა წარმოადგენს იზომეტრიულ ასახვას X სივრცისა X^{**} სივრცის რაღაც წრფივ მრავალსახეობაზე. ზემოთ აღწერილი ასახვა ავღნიშნოთ $\pi : X \to X^{**}$.

განმარტება 2. ვთქვათ $\pi : X \to X^{**}$ წარმოადგენს X სივრცის ბუნებრივ ასახვას X^{**} სივრცეში. თუ $\pi(X) = X^{**}$, მაშინ ამბობენ, რომ X სივრცე რეფლექსურია.

თუ გავითვალისწინებთ მაგალით 4-5 დავასკვნით l_p და $L^p(R)$ სივრცეები, როცა $1 < p < \infty$ რეფლექსური სივრცეებია. არალეფლექსური სივრცის მაგალითებია $C([0,1])$, l_1, $L^1(R)$ სივრცეები.

4.5.. ფუნქციონალის სახე ჰილბერტის სივრცეში.

თეორემა 1. ვთქვათ E ევკლიდური სივრცეა (ნამდვილი ან კომპლექსური). ნებისმიერი $a \in E$ ელემენტისათვის ფუნქციონალი

$$f(x) = (x, a), \quad x \in E \tag{1}$$

წარმოადგენს წრფივ შემოსაზღვრულ ფუნქციონალს. ამასთანავე $\| f \| = \| a \|_E$.

დამტკიცება. ფუნქციონალის წრფივობა ელემენტარული დასამტკიცებელია. შემოსაზღვრულობა გვაქვს შემდეგი უტოლობიდან

$$| f(x) | \le \| x \|_E \cdot \| a \|_E, \quad \forall x \in E .$$

ვინაიდან $f(a)=(a,a)=\|a\|_E^2$, გვექნება $\|f\|=\|a\|_E$.

თეორემა 2. თუ f ფუნქციონალს აქვს (1) ტიპის წარმოდგენა, მაშინ $a\in E$ ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება.

მართლაც, ვთქვათ $f(x)=(x,a), \quad f(x)=(x,b) \quad \forall x\in E$.

მაშინ $(x,a-b)=0 \quad \forall x\in E$ და კერძოდ $(a-b,a-b)=0$, საიდანაც გვექნება $a=b$.

თეორემა 3. ნებისმიერ f ფუნქციონალს ჰილბერტის H სივრცეში აქვს (1) სახე, ანუ არსებობს ერთადერთი $a\in E$ ისეთი, რომ $f(x)=(x,a), \quad x\in E$.

დამტკიცება. ავღნიშნოთ f ფუნქციონალის ბირთვი L -ით, ანუ ყველა იმ $x\in L$ ვექტორთა ერთობლიობა, რომელთათვისაც $f(x)=0$. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ L წრფივივი მრავალსახეობაა. f ფუნქციონალის უწყვეტობიდან გამოდის, რომ L ჩაკეტილია. მართლაც თუ $x_n\in L$ და $x_n\to x$, როცა $n\to\infty$, მაშინ

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0.$$

ვინაიდან H სრულია, ამიტომ L -იც სრულია.

თუ $L=H$, მაშინ $f(x)=0 \quad \forall x\in H$ და ამიტომ $f(x)=(0,x) \quad \forall x\in H$.

ვთქვათ $L\neq H$, ე.ი.არსებობს $x_0\in H$ ისეთი, რომ $f(x_0)\neq 0$. y_0 -ით ავღნიშნოთ x_0 -ის ორთოგონალური პროექცია L ქვესივრცეზე. ავღნიშნოთ $z_0=x_0-y_0$. მაშინ $f(z_0)=f(x_0)\neq 0$ და $(z_0,x_0)=0 \quad \forall y\in L$.

ვინაიდან

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0\right)=0 \quad \forall x\in H,$$

ამიტომ

$$\forall x\in H \quad x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0\in L.$$

ე.ი. გვაქვს

$$\left(x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0, z_0\right)=0 \quad \forall x\in H.$$

მაშასაამე

$$(x, z_0) = f(x)\frac{\| z_0 \|^2}{f(z_0)} \quad . \qquad (2)$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $f(z_0) \neq 0$ ამიტომ $\| z_0 \| \neq 0$ და (2) -დან მივიღებთ

$f(x) = (x, a)$, სადაც $a = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\| z_0 \|^2} z_0$. თეორემა დამტკიცებულია.

4. 4. *თანაბრად შემოსაზღვრულობის პრინციპი. ბანახ-შტეინგაუზის თეორემა*

ლემა 1. ვთქვათ $A_n \in L(X,Y),\quad n \in N$ ოპერატორთა მიმდევრობისათვის არსებობს $c > 0$ მუდმივი და ჩაკეტილი ბირთვი $B[x_0, r]$ ისეთი, რომ $\| A_n(x) \|_Y \leq c \quad \forall x \in B[x_0, r]$ (ანუ $\{A_n(x)\}$ მიმდევრობა თანაბრად შემოსაზღვრულია $B[x_0, r]$ ბირთვზე). მაშინ $\{\| A_n \|\}$ რიცხვთა მიმდევრობა შემოსზღვრულია.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერად $x \in X$ $(x \neq 0)$. მაშინ ელემენტი $x_0 + xr / \| x \|_X \in B[x_0, r]$. ამიტომ

$$c \geq \left\| A_n\left(\frac{xr}{\| x \|_X} + x_0 \right) \right\|_Y = \left\| \frac{r}{\| x \|_X} A_n(x) + A_n(x_0) \right\|_Y \geq \frac{r}{\| x \|_X} \| A_n(x) \|_Y - c,$$

საიდანაც $\| A_n(x) \|_Y \leq 2c \| x \|_X \ / r$. მაშასადამე $\| A_n \| \leq 2c / r$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1. (თანაბრად შემოსაზღვრულობის პრინციპი). დაუშვათ X ბანახის სივრცეა და $A_n \in L(X,Y),\quad n \in N$ ოპერატორთა მიმდევრობისათვის ყოველი ფიქსირებული $x \in X$ ელემენტისათვის მიმდევრობა $\{A_n(x)\}$ შემოსაზღვრულია (Y -ში). მაშინ $\{\| A_n(x) \|_Y\}$ ნებისმიერ ჩაკეტილ ბირთვზე თანაბრად შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. დაუშვათ თეორემა არასწორია.ე.ი. $\{\| A_n(x) \|_Y\}$ არ არის შემოსაზღვრული რაიმე ჩაკეტილ ბირთვზე. მაშინ $\{\| A_n(x) \|_Y\}$ არ არის თანაბრად შემოსაზღვრული არცერთ ჩაკეტილ ბირთვზე (ლემა 1). დავაფიქსიროთ რაიმე $B[x_0, r]$ ბირთვი. ამ ბირთვზე

$\{\| A_n(x) \|_Y\}$ არაა თანაბრად შემოსაზღვრული, ამიტომ არსებობს $x_1 \in B(x_0, r_0)$ და ნომერი n_1 ისეთი, რომ $\| A_{n_1}(x_1) \|_Y > 1$. A_{n_1} ოპერატორის უწყვეტობის გამო მოიძებნება $B(x_1, r_1)$ ბირთვი $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ ისეთი, რომ $\| A_{n_1}(x) \|_Y > 1 \quad \forall x \in B[x_1, r_1]$. $B(x_1, r_1)$ ბირთვზე $\{\| A_n(x) \|_Y\}$ არაა თანაბრად შემოსაზღვრული და ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ $x_2 \in B(x_1, r_1)$ და $n_2 > n_1$ ნომერი ისეთი, რომ $\| A_{n_2}(x_2) \|_Y > 2$ და ა. შ. ანალოგიური მსჯელობებით ჩვენ ავაგებთ წერტილთა $\{x_k\}$ და ბირთვთა $B(x_k, r_k)$ მიმდევრობას ისეთს, რომ $x_k \in B(x_k, r_k)$, $B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset .... \supset B[x_k, r_k] \supset ...$ და $\| A_{n_k}(x_k) \|_Y > k \quad \forall x \in B[x_k, r_k]$. ჩალაგებულ ბირთვთა პრინციპის ძალით არსებობს საერთო წერტილი $\bar{x}$, რომელიც ყველა ბირთვს ეკუთვნის. $\bar{x} \in B(x_k, r_k) \quad \forall k$. მაშინ გვექნება $\| A_{n_k}(\bar{x}) \|_Y \geq k \quad \forall k$. მაშასადამე $A_{n_k}(\bar{x})$ არაა შემოსაზღვრული. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. (განსაკუთრებულობის ფიქსაციის პრინციპი). დაუშვათ X ბანახის სივრცეა და ვთქვათ $A_n \in L(X, Y), \quad n \in N$ ოპერატორთა მიმდევრობისათვის $\| A_n \| = \infty$. მაშინ არსებობს $\bar{x} \in X$ ისეთი, რომ $\sup_n \| A_n(\bar{x}) \|_Y = \infty$.

თეორემა 1. (ბანახ-შტენგაუზი). ვთქვათ X ბანახის სივრცეა და მოცემულია ოპერატორთა $A_n \in L(X, Y), \quad n \in N$ მიმდევრობა. იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს ძლიერი აზრით კრებადობას $A_n \to A$, როცა $n \to \infty$, სადაც $A \in L(X, Y)$ აუცილებელია და საკმარისი, რომ

1) $\{\| A_n \|\}$ რიცხვითი მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული; 2) $A_n \to A$, როცა $n \to \infty$ ძლიერი აზრით რაიმე $X' \subset X$ წრფივ მრავალსახეობაზე, რომელიც ყველგან მკვრივია X -ში.

დამტკიცება. აუცილებლობა $A_n(x) \to A(x), \quad n \to \infty, x \in X$ გამომდინარეობს, რომ $\| A_n(x) \|_Y \to \| A(x) \|_Y, \quad n \to \infty, \forall x \in X$, ამიტომ $\| A_n(x) \|_Y$ შემოსაზღვრულია ყოველი ფიქსირებული $x \in X$. თანაბრად შემოსაზღვრულობის პრინციპის თანახმად $\{\| A_n \|\}$ შემოსაზღვრულია. ცხადია 2) პუნქტიც შესრულებულია; საკმარისია ავიღოთ $X' = X$.

საკმარისობა. ვთქვათ $x \in X$, მაგრამ $x \notin X'$. ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და შევარჩიოთ $x' \in X'$ ისეთი, რომ $\| x - x' \|_X < \varepsilon$ ($X' \subset X$ წრფივ მრავალსახეობა ყველგან მკვრივია X -ში).

ვთქვათ $c = \sup_{n=0,1,...} \| A_n \|$, სადაც $A_0 = A$. ვაჩვენოთ, რომ $A_n \to A$, როცა $n \to \infty$ ძლიერი აზრით.

$$\| A_n(x) - A(x) \|_Y = \| A_n(x - x') + (A_n(x') - A(x')) - A(x' - x) \|_Y \leq$$
$$\| A_n \| \cdot \| x - x' \|_X + \| (A_n(x') - A(x')) \|_X + \| A \| \cdot \| x' - x \|_X \leq 2c\varepsilon + \| (A_n(x') - A(x')) \|_X$$

ვისარგებლოთ იმით, რომ $A_n(x') \to A(x')$ და ვიპოვოთ ნომერი N ისეთი, რომ ნებისმიერი $n > N$ გვექნება $\| A_n(x') - A(x') \|_Y < \varepsilon$. მაშინ, როცა $n > N$ გვექნება

$\| A_n(x) - A(x) \|_Y < (2c+1)\varepsilon$. საკმარისობაც დამტკიცებულია.

4.5. თეორემა ღია ასახვის შესახებ

ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან თეორემას წარმოადგენს ბანახის თეორემა ღია ასახვის შესახებ.

თეორემა 1. (ბანახის თეორემა ღია ასახვის შესახებ) ვთქვათ A წრფივი უწყვეტი ოპერატორი ასახავს ბანახის X სივრცეს ბანახის Y სივრცეზე. მაშინ X სივრცის ნებისმიერი $U \subset X$ ღია სიმრავლისათვის $A(U)$ სიმრავლე ღია სიმრავლეა Y სივრცეში.

სანამ თეორემა 2-ს დავამტკიცებდეთ დავამტკიცოთ ერთი დამხმარე დებულება, რომელიც ეყრდნობა ბერის თეორემას .

თეორემა 2. ვთქვათ X და Y ბანახის სივრცეებია. ვთქვათ $A: X \to Y$ წრფივი უწყვეტი ოპერატორია. დაუშვათ A ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე $R(A)$ არის მეორე კატეგორიის სიმრავლე Y-ში. მაშინ X სივრცის ნებისმიერ O_X ღია ბირთვსათვის ცენტრით ნულ წერილში მოიძებნება Y სივრცის O_Y ღია ბირთვი ცენტრით ნულ წერტილში ისეთი, რომ $O_Y \subset [A(O_X)]$.

დამტკიცება. ვთქვათ O_X ღია ბირთვის რადიუსია r. O -ით ავღნიშნოთ X სივრცის ღია ბირთვი ცენტრით ნულ წერტილში და რადიუსით $\frac{1}{3}r$. nO -ით ავღნიშნოთ X სივრცის ღია ბირთვი ცენტრით ნულ წერტილში და რადიუსით $\frac{n}{3}r$. ცხადია გვაქვს $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nO$. ამიტომ A ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლე $R(A)$ სიმრავლისათვის გვაქვს $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nO)$. ვინაიდან $R(A)$ არის მეორე კატეგორიის სიმრავლე Y-ში ამიტომ არსებობს n_0 ნომერი ისეთი, რომ $T(n_0O)$ -ის ჩაკეტვა $[T(n_0O)]$ შეიცავს რაიმე ღია სიმრავლეს. გვაქვს $[T(n_0O)] = n_0[T(O)]$. აგრეთვე $[T(n_0O)]$ და $[T(O)]$ სიმრავლეები ჰომოთეტიურები არიან ამიტომ $[T(O)]$ სიმრავლეც შეიცავს რაიმე ღია სიმრავლეს. ვთქვათ y_0 ამ ღია სიმრავლის რაიმე ელემენტია , ცხადია არსებობს $x_0 \in O$ ისეთი, რომ $y_0 = Tx_0$. ვინაიდან ასახვა $x \to -x_0 + x$ ჰომეომორფიზმია, არსებობს Y სივრცის ნულოვანი ელემენტის მიდამო V ისეთი, რომ $V \subset -y_0 + [T(O)]$. $-y_0 + [T(O)]$ სიმრავლის

ელემენტწზისათვის სამართლიანია წარმოდგენა $-y_0 + Tw = T(w - x_0)$, სადაც $w \in O$.
შევნიშნოთ, რომ $w - x_0 \in O_X$ (ვინაიდან $w, x_0 \in O$). აქედან გამომდინარე გვექნება
$-y_0 + T(O) \subset T(O_X)$ და თუ გადავალთ ჩაკეტვებზე $-y_0 + [T(O)] \subset [T(O_X)]$.
$V \subset -y_0 + [T(O)] \subset [T(O_X)]$.

თეორემა 1-ის დამტკიცება. ვინაიდან Y სრულია, ამიტომ ის მეორე კატეგორიისა. ამიტომ უკვე დამტკიცებული თეორემის თანახმად X სივრცის ნულოვანი წერტილის ნებისმიერი მიდამოს სახის (A ასახვის დროს) ჩაკეტვა შეიცავს Y სივრცის ნულოვანი წერტილის რაღაც მიდამოს. ავღნიშნოთ შესაბამისად X და Y სივრცის ნულოვანი წერტილის ε მიდამოები, შესაბამისად $O_X(\varepsilon)$ და $O_Y(\varepsilon)$. ვთქვათ $\varepsilon_i = \varepsilon / 2^i$ $(i = 0,1,2,...)$. მაშინ იარსებებს $\{\eta_i\}$ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0 \text{ და } O_Y(\eta_i) \subset [A(O_Y(\varepsilon_i))], \quad i = 0,1,2,... \tag{1}$$

ავიღოთ ნებისმიერად $y \in O_Y(\eta_0)$. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს წერტილი $x \in O_X(2\varepsilon_0)$ ისეთი, რომ $A(x) = y$. როცა $i = 0$ (1) პირობიდან დავასკვნით, რომ არსებობს $x_0 \in O_X(\varepsilon_0)$ ისეთი, რომ $\| y - A(x_0) \|_Y < \eta_1$. ვინაიდან $y - A(x_0) \in O_Y(\eta_1)$, ამიტომ კვლავ (1) პირობიდან როცა $i = 1$ დავასკვნით,რომ არსებობს $x_1 \in O_X(\varepsilon_1)$ ისეთი, რომ $\| y - A(x_0) - A(x_1) \|_Y < \eta_2$. გავაგრძელოთ ეს პროცესი ინდუქციურად. ჩვენ ავაგებთ მიმდევრობას $\{x_i\}$ ისეთი, რომ $\forall x_i \in O_X(\varepsilon_i)$ და

$$\| y - A(x_0 + x_1 + ... + x_n) \|_Y < \eta_{n+1} \quad (n = 0,1,...).$$

ცხადია გვაქვს

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\|_X \le \sum_{k=m+1}^{n} \| x_k \|_X \le \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \le \left(\sum_{k=m+1}^{n} 2^k \right) \varepsilon_0 ,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $\sum_{k=0}^{n} x_k$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ამიტომ არსებობს

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = x \in X$. ამასთანავე

$$\| x \|_X = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\|_X \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \| x_k \|_X \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \right) \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0.$$

ვინაიდან ოპერატორი A უწყვეტია ამიტომ $A(x) = y$. მაშასადამე ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $O_X(2\varepsilon_0)$ ბირთვი A ასახვით გადადის სიმრავლეში, რომელიც შეიცავს $O_Y(\eta_0)$ ბირთვს.

ვთქვათ $G \subset X$ რაიმე არაცარიელი ღია სიმრავლეა. და $x \in G$. ვთქვათ $O_X(\varepsilon)$ წარმოადგენს ნულოვანი ელემენტის ისეთ მიდამოს, რომ $x + O_X(\varepsilon) \subset G$. ვთქვათ $O_Y(\eta)$ არის Y სივრცის ნულოვანი ელემენტის ისეთი მიდამო, რომ $O_Y(\eta) \subset A(O_X(\varepsilon))$. მაშინ გვექნება $A(G) \supset A(x + O_X(\varepsilon)) = A(x) + A(O_X(\varepsilon)) \supset A(x) + O_Y(\eta)$. მაშასადამე $A(G)$ სიმრავლე შეიცავს მისი ყოველი წერტილის რაგაც მიდამოს. მაშასადამე A ოპერატორს ყოველი ღია სიმრავლე ღია სიმრავლეში გადაყავს.

შედეგი 1. ვთქვათ A წრფივი უწყვეტი ოპერატორი, რომელიც ასახავს ბანახის X სივრცეს ბანახის Y სივრცეზე ურთიერთცალსახაა. მაშინ A^{-1} ოპერატორიც უწყვეტია.

განვიხილოთ $L(X,Y)$ სივრცე ყველა იმ უწყვეტი წრფივი ოპერატორებისა რომლებიც ბანახის ბანახის X სივრცეს ბანახის Y სივრცეში ასახავს. როგორც ავღნიშნეთ ეს სივრცე თვითონ არის ბანახის სივრცე. $IL(X,Y)$ -ით ავღნიშნოთ ყველა იმ უწყვეტი წრფივი ოპერატორების სიმრავლე $L(X,Y)$ -დან რომელთაც გააჩნიათ შექცეული (ბანახის თეორემის თანახმად შექცეული ოპერატორიც უწყვეტი იქნება). $IL(X,Y)$ სიმრავლე $L(X,Y)$ სივრცის ღია სიმრავლეს წარმოადგენს. სახელდობრ სამართლიანია თეორემა.

თეორემა 2. ვთქვათ მოცემულია ოპერატორი $A \in IL(X,Y)$. დაუშვათ ΔA ნებისმიერი ოპერატორია $L(X,Y)$ სივრციდან ისეთი, რომ $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. მაშინ $A + \Delta A \in IL(X,Y)$.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ რაიმე ელემენტი $y \in Y$ და განვიხილოთ ოპერატორი $B : X \to X$ მოცემული შემდეგი წესით $Bx = A^{-1}y - A^{-1}\Delta Ax$. პირობიდან $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$ გამოდის რომ B კუმშვადია. ვინაიდან X ბანახის სივრცეა ამიტომ ამ ასახვას გააჩნია ერთადერთი უძრავი წერტილი x:

$$x = A^{-1}y - A^{-1}\Delta Ax,$$

საიდანაც $Ax + \Delta Ax = y$. თუ რაიმე სხვა x' წერტილისათვის $Ax' + \Delta Ax' = y$, მაშინ ეს x' წერტილი იქნება კვლავ B ოპერატორის უძრავი წერტილი; ამიტომ $x' = x$. მაშასადამე ნებისმიერი $y \in Y$ ელემენტისათვის $Ax + \Delta Ax = y$ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი გააჩნია. ე.ი. $A + \Delta A \in IL(X,Y)$.

თეორემა 3. ვთქვათ X ბანახის სივრცეა , $I : X \to X$ იგიური ოპერატორი. დაუშვათ $A \in L(X,X)$ და $\|A\| < 1$. მაშინ $I - A \in L(X,X)$ და სამართლიანია წარმოდგენა

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k .$$

დამტკიცება. ვინაიდან $\|A\|<1$ ამიტომ $\sum_{k=0}^{n}\|A^k\|\le\sum_{k=0}^{n}\|A\|^k<\infty$. ვინაიდან X ბანახის სივრცეა , ამიტომ $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ მწკრივი წარმოადგენს რომელიღაც შერმოსაზღვრულ ოპერატორს $L(X,X)$ დან. ნებისმიერი ნატურალური n -თვის

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n}A^k=\sum_{k=0}^{n}A^k(I-A)=I-A^{n+1}.$$

ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ (თუ გავითვალისწინებთ $\|A^{n+1}\|\le\|A\|^n\to 0, n\to\infty$)

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(I-A)=I ,$$

საიდანაც მივიღებთ $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$.

4.6 *თეორემა ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ.*

ვთქვათ X და Y რაიმე ნორმირებული სივრცეებია, ხოლო $T:X\to Y$ წრფივი ოპერატორია რომელიც განსაღვრულია X სივრცის რაიმე წრფივ $D(T)$ მრავალსახეობაზე (რომელიც საზოგადოდ არ არის ჩაკეტილი ქვესივრცე) . მაგალითად დიფერენცირების ოპერატორი ბუნებრივადაა განსაზღვრულია $C([0,1])$ სივრცის უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა ქვეკლასსზე , რომელიც $C([0,1])$ სივრცის წრფივი მრავალსახეობაა (არა ჩაკეტილი) და ეს ოპერატორი წრფივია. საზოგადოდ პრაქტიკულ სიტუაციებში არ მოითხოვება, რომ $D(T)=X$ ან კიდევ T ოპერატორი იყოს შემოსაზღვრული.

თუ X და Y რაიმე ნორმირებული სივრცეებია , მაშინ მათი საშუალებით შეგვიძლია ავაგოთ ახალი სივრცე; მათი პირდაპიირი ჯამი $X\oplus Y$, რომლის ელემენტებია (x,y) $x\in X, y\in Y$ დალაგებული წყვილები (მათ შემდგომში $x\oplus y$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ). ეს სიმრავლე ცხადია წრფივ სივრცეს წარმოადგენს ბუნებრივად განსაზღვრული შეკრების და სკალარზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ. $X\oplus Y$ -ში ნორმა შეგვიძლია განვმარტოთ ასე $\|x\oplus y\|=\|x\|+\|y\|$.

განმარტება 1. ვთქვათ X და Y რაიმე ნორმირებული სივრცეებია, ხოლო $T : X \to Y$ წრფივი ოპერატორია რომელიც განსაღვრულია X სივრცის რაიმე წრფივ $D(T)$ მრავალსახეობაზე. T ოპერატორის გრაფიკი $\Gamma(T)$ წარმოაგენს $X \oplus Y$ ნორმირებული სივრცის ქვესიმრავლეს , რომელიც განმარტებულია ტოლობით $\Gamma(T) = \{x \oplus y \in X \oplus Y : x \in D(T), y = Tx\}$. (ანუ $\Gamma(T) = \{x \oplus T(x) : x \in D(T)\}$).

შევნიშნოთ, რომ $\Gamma(T)$ არის $X \oplus Y$ სივრცის წრფივი მრავალსახეობა.

თეორემა 1. (ბანახის თეორემა ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ) ვთქვათ განმარტება. ვთქვათ X და Y რაიმე ბანახის სივრცეებია, ხოლო $T : X \to Y$ წრფივი ოპერატორია რომელის განსაზღვრის $D(T)$ არისათვის გვაქვს $D(T) = X$. მაშინ $T : X \to Y$ ოპერატორი შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა T ოპერატორის გრაფიკი ჩაკეტილია $X \oplus Y$ სივრცეში.

დამტკიცება. (აუცილებლობა) ვთქვათ T შემოსაზღვრული ოპერატორია და $\{x_n \oplus y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა წაროადგენს $\Gamma(T)$ სიმრავლიდან აღებულ რაიმე მიმდევრობას, რომელიც კრებადია $x \oplus y$ ელემენტისაკენ ($X \oplus Y$ ნორმით) . ცხადია გვაქვს $x_n \to x$ და $y_n \to y$. T ოპერატორის უწყვეტობის გამო $Tx_n \to Tx$ Y -სივრცეში. ამავე დროს გვაქვს $y_n = Tx_n$ და ამიტომ $Tx_n \to y$. მაშასადამე $y = Tx$ და $(x, y) \in \Gamma(T)$; ე. ი. $\Gamma(T)$ ჩაკეტილია $X \oplus Y$ -ში.

საკმარისობა. ვთქვათ $\Gamma(T)$ სიმრავლე ჩაკეტილია $X \oplus Y$ სივრცეში. ცხადია $\Gamma(T)$ თვიტონ იქნება ბანახის სივრცე $X \oplus Y$ -ის ნორმით. განვიხილოთ ასახვები $\pi_1 : \Gamma(T) \to X$ და $\pi_2 : \Gamma(T) \to Y$ მოცემული შესაბამისად შემდეგნაირად $\pi_1 : x \oplus Tx \mapsto x$ და $\pi_2 : x \oplus Tx \mapsto Tx$. ადვილია ჩვენება, რომ π_1 და π_2 ოპერატორები შემოსაზღვრული (ანუ უწყვეტი) ოპერატორებია. ამავე დროს ეს ოპერატორები სურექციული და ინექციურია. შებრუნებული ასახვის შესახებ ბანახის თეორემიდან გამოდის, რომ $(\pi_1)^{-1} : X \to \Gamma(T)$ შემოსაზღვრულია. შევნიშნოთ, რომ $T : X \to Y$ ოპერატორი შეგვიძლია $T = \pi_2 \circ (\pi_1)^{-1}$ სახით წარმოვადგინოთ

$$x \xrightarrow{(\pi_1)^{-1}} (x, Tx) \xrightarrow{\pi_2} Tx .$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ორი შემოსაზღვრული ოპერატორის კომპოზიცია შემოსაზღვრულია დავასკვნით, რომ $T : X \to Y$ შემოსზაზღვრულია.

შენიშვნა 1. თეორემა ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ ეფექტურად შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს ოპერატორის შემოსაზღვრულობის დასამტკიცებლად. სახელდობრ $T : X \to Y$ ოპერატორის შემოსაზღვრულობის საჩვენებლად ბუნებრივად ვიქცევით ასე: ვიღებთ X -დან ნებისმიერად კრებად $x_n \to x$ მიმდევრობას. შემდგომში ვაჩვენებთ, რომ Tx_n მიმდევრობა კრებადია Y -ში დამისი ზღვარი ტოლია Tx . თუ გამოვიყენებთ თეორემას

ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ თეორემას ოპერატორის შემოსაზღვრულობის დასამტკიცებლად შეგვიძლია მოვიქცეთ ასე: დაუშვებთ, რომ $x_n \to x$ კრებადი მიმდევრობისათვის გვაქვს, რომ $Tx_n \to y$ სადაც $y \in Y$ რაღაც ელემენტია. ოპერატორის შემოსაზღვრულობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $y = Tx$.

მაგალითი. ვთქვათ $X = C([0,1])$ (ბუნებრივი ნორმით). განვიხილოთ $T : X \to X$ ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია უწყვეტად წარმოებად $D(T) = C^1([0,1])$ წრფივ მრავალსახეობაზე მოცემული წესით (დიფერენცირებაობის ოპერატორი)

$$Tx(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad 0 \le t \le 1.$$

ცხადია $D(T)$ წრფივი მრავალსახეობა ყველგან მკვრივია $C([0,1])$ სივრცეში და მოცემული ოპერატორიც წრფივია. ვაჩვენოთ, რომ $T : X \to X$ ჩაკეტილია, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული. T -ს არაშემოსაზღვრულობა მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ ასე: განვიხილოთ მიმდევრობა $g_n(t) = t^n, n \in N, \quad t \in [0;1]$. ცხადია $g_n \in D(T)$ და $T(g_n) = ng_{n-1}, n > 1$. ამავე დროს $\| g_n \|_{C([0,1])} = 1$ და $\| Tg_n \|_{C([0,1])} = n$.

ვაჩვენოთ, რომ $\Gamma(T)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. ვთქვათ $x_n \in D(T)$ მიმდევრობისათვის გვაქვს $x_n \to x$ (X სივრცეში) და $Tx_n \to y$ (X სივრცეში). უნდა ვაჩვენოთ, რომ $x \in D(T)$ და $y \in Tx$. ყოველი $t \in [0,1]$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_0^t y(s)ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} \frac{dx_n}{ds} ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \frac{dx_n}{ds} ds = \lim_{n\to\infty} (x_n(t) - x_n(0)) = x(t) - x(0) .$$

ამიტომ $x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \quad t \in [0,1]$, სადაც $y \in C([0,1])$. მაშასადამე $x \in C^1([0,1])$ $\dfrac{dx}{ds} = y$. საბოლოოდ გვაქვს $x \in D(T) \quad Tx = y$ ანუ $x \oplus y \in \Gamma(T)$; ე.ი. $\Gamma(T)$ ჩაკეტილია.

განმარტება 2. ვთქვათ X და Y რაიმე ნორმირებული სივრცეებია, ხოლო $T : X \to Y$ წრფივი ოპერატორია რომელიც განსაღვრულია X სივრცის რაიმე წრფივ $D(T)$ მრავალსახეობაზე , რომელიც ყველგან მკვრივია X სივრცეში. ვიტყვით, რომ $T : X \to Y$ ოპერატორი ჩაკეტილია თუ მისი გრაფიკი $X \oplus Y$ სივრცეში ჩაკეტილია.

შევნიშნოთ, რომ ჩაკეტილი ოპერატორის ცნება ერთერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა ჰილბერტის სივრცეში არაშემოსაზღვრული ოპერატორების შესწავლის დროს.

თეორემა 2. (ჰელინგერ-ტიოპლიცი). ვთქვათ $A:H\to H$ წრფივი ოპერატორია H ჰილბერტის სივრცეა და $D(A)=H$. დაუშვათ $<x,Ax>=<Ax,y>\ \forall x,y\in H$, მაშინ A შემოსაზღვრული ოპერატორია.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ A ოპერატორის გრაფიკი $\Gamma(A)$ ჩაკეტილია. დაუშვათ $x_n\to x$ $Ax_n\to y$. ყოველი $z\in H$ ელემენტისათვის გვაქვს

$$<z,y>=\lim_{n\to\infty}<z,Ax_n>=\lim_{n\to\infty}<Az,x_n>=<Az,x>=<z,Ax>.$$

საიდანაც გვექნება $<z,y-Ax>=0$ ყოველი $z\in H$ ვექტორისათვის. ავიღოთ $z=y-Ax$. $<y-Ax,y-Ax>=0$ ტოლობიდან გვექნება $y-Ax=0$ ანუ $y=Ax$. მაშასადამე $x\oplus y\in X\oplus Y$. ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ თეორემის ძალით A შემოსაზღვრული ოპერატორია.

დამტკიცებული თეორემა გვეუბნება, რომ ჰილბერტის სივრცეზე განსაზღვრული სიმეტრიული ოპერატორი შემოსაზღვრულია. მაშასადამე მთელს ჰილბერტის სივრცეზე განსაზღვრული სიმერტიული არაშემოსაზღვრული ოპერატორი არ არსებობს. შევნიშნოთ, რომ სიმერტიული არაშემოსაზღვრული ოპერატორებს ფართო გამოყენება აქვს კვანტურ მექანიკაში.

4.7. ხანი-ბანახის თეორემა.

თეორემა 1. ვთქვათ X წრფივი სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. ხოლო $p:X\to R$ X-ზე განსზღვრული ნამდვილი ფუნქცია აკმაყოფილებს თვისებებს:

ა) $p(x+y)\le p(x)+p(y)\quad \forall x,y\in X$ (ნახევრადადიციურობის თვისება)

ბ) $p(\alpha x)=\alpha p(x)\quad \forall x\in X;\forall\alpha\ge 0$.

დაუშვათ M არის X-ის რაიმე ქვესივრცე რომელზედაც განსაზღვრულია რაიმე f_0 წრფივი ფუნქციონალი $f_0:M\to R$:

$$f_0(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\quad \forall x,y\in M,\forall\alpha,\beta\in R.$$

ვთქვათ ცნობილია, რომ $f_0(x)\le p(x)\quad \forall x\in M$. მაშინ არსებობს ნამდვილი წრფივი $F:M\to R$ ფუნქციონალი განსაზრვრული მთელს X-ზე ისეთი, რომ

ა) F არის f_0 წრფივი ფუნქციონალის გაგრძელება X -ზე; ე.ი. $F(x) = f_0(x) \quad \forall x \in M$;

ბ) $F(x) \le p(x) \quad \forall x \in M.$

დამტკიცება. პირველ რიგში განვიხილოთ შემთხვევა, როცა X წრფივი სივრცე მოჭიმულია $M \cup \{x_0\};\ x_0 \notin M$ სიმრავლეზე ანუ $X = \{x = m + \alpha x_0 : m \in M, \alpha \in R\}$. ვინაიდან $x_0 \notin M$ ამიტომ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის $x = m + \alpha x_0$ წარმოდგენა ერთადერთია. მაშინ F წრფივ ფუნქციონალათვის გვექნება $F(x) = F(m + \alpha x_0) = F(m) + \alpha F(x_0) = f_0(m) + \alpha c$. ჩვენ უნდა ავარჩიოთ c ისე, რომ $F(x) \le p(x) \quad \forall x \in M.$ ანუ $f_0(m) + \alpha c \le p(m + \alpha x_0), \forall \alpha \in R$. ეს უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია პირობების

$$f_0(m/\alpha) + c \le p(x_0 + m/\alpha) \text{ როცა } \alpha > 0,$$

$$f_0(m/-\alpha) - c \le p(-x_0 + m/-\alpha) \text{ როცა } \alpha < 0.$$

იმისათვის, რომ ეს პირობები შესრულდეს ავირჩიოთ c ისე, რომ

$$f_0(m') - p(m' - x_0) \le c \le p(x_0 + m'') - f_0(m'') \quad \forall m', m'' \in M .$$

ასეთი არჩევა შესაძლებელია ვინაიდან

$$f_0(m') + f_0(m'') = f_0(m' + m'') \le p(m' + m'') =$$
$$p(m' - x_0 + m'' + x_0) \le p(m' - x_0) + p(m'' + x_0)$$

და საკმარისია c ავირჩოით ისე, რომ ის მოთავსებული იყოს შემდეგ ორ რიცხვს შორის $\sup_{m' \in M}[f_0(m') - p(m' - x_0)]$ და $\inf_{m'' \in M}[p(m'' + x_0) - f_0(m'')]$.

განვიხილოთ ახლა f_0 წრფივი ფუნქციონალის ყველა იმ g წრფივ გაგრძელებათა ერთობლიობა რომელთათვისაც g -ს განსაზღვრის არეზე სრულდება უტოლობა ჩვენს მიერ აგებული სიმრავლეში შემოვიტანოთ დალაგების მიმართება: ჩავთვალოთ, რომ $h \succ g$ თუ h ფუნქციონალი g ფუნქციონალის გაგრძელებაა. მაშინ ცორნის ლემის თანახმად არსებობს f_0 ფუნქციონალის მაქსიმალური გაგრძელება რომელიღაც g ფუნქციონალი, რომლისთვისაც $g(x) \le p(x)$ უტოლობა სრულდება g ფუნქციონალის განსაზღვრის არეზე. დაგვრჩა დასამტკიცებელი, რომ $D(g) = X$. ეს ასე, რომ არ იყოს $D(g)$ სიმრავლიდან კიდევ იარსებებდა მისი გაგრძელება უფრო დიდ წრფივ სივრცეზე. მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება იმას, რომ ფუნქციონალი g მაქსიმალური ელემენტია.

შედეგი. ვთქვათ X წრფივი სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. ხოლო $p : X \to R$ X -ზე განსზღვრული ნამდვილი ფუნქცია აკმაყოფილებს თვისებებს:

ა) $p(x+y) \le p(x)+p(y) \quad \forall x,y \in X$ (ნახევრადადიციურობის თვისება)

ბ) $p(\alpha x)=\alpha p(x) \quad \forall x \in X; \forall \alpha \ge 0$.

მაშინ არსებობს X სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი f , რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$-p(-x) \le f(x) \le p(x) \quad \forall x \in X .$$

დამტიცება. ავიღოთ რაიმე $x_0 \in X$ ელემენტი და განვსაზღვროთ ქვესივრცე $M=\{x:\ x=\alpha x, \alpha \in R\}$. M სიმრავლეზე განვმარტოთ ფუნქციონალი $f_0(x)=\alpha p(x) \quad \forall x \in M$. ცხადია M სიმრავლეზე გვაქვს უტოლობა $f_0(x) \le p(x)$. მართლაც თუ $\alpha > 0$ მაშინ $p(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$, ხოლო თუ $\alpha < 0$, მაშინ $\alpha p(x_0) \le -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0)$ (ვინაიდან $0 = p(0) \le p(x_0)+p(-x_0)$) . ხანი ბანახის თეორემის ძალით არსებობს წრფივი ფუნქციონალი f განსაზღვრული მთელს X სიმრავლეზე ისეთი, რომ $f(x)=f_0(x) \quad \forall x \in M$ და $f(x) \le p(x) \quad \forall x \in X$. ვინაიდან $-f(x)=f(-x) \le p(-x) \quad \forall x \in X$, ამიტომ გვექნება $-p(-x) \le f(x) \le p(x) \quad \forall x \in X$.

შენიშვნა 1. შესაძლებელია იგივე მეთოდოლოგიით რაც ზემოთ გამოვიყენეთ დამტკიცებული იქნეს (შესაბამისი ცვლილებით) ხანი-ბანახის თეორემა იმ შემთხვევაშიც როცა ვიხილავთ წრფივ სივრცეს კომპლექსური ველის მიმართ. ამ დროს წრფივი ფუნქციონალები განიხილება მნიშვნელობებით კომპლექსურ რიცხვთა ველში.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით წრფივ სივრცეებს . იმ შემთხვევაში როცა დამატებით წრფივი სივრცე ნორმირებულია, მაშინ ჰანი-ბანახის უკვე დამტკიცებული თეორემიდან შეგვიძლია მივიღოთ ჰანი-ბანახის თეორემა წრფივი ნორმირებული სივრცეებისათვის.

თეორემა 2. ვთქვათ X წრფივი ნორმირებული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. დაუშვათ M არის X -ის რაიმე ქვესივრცე, ხოლო f_1 არის M -ზე განსაზღვრული წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი. მაშინ არსებობს მთელს X სიმრავლეზე განსაზღვრული უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალი f ისეთი, რომ ა) f არის f_1 ფუნქციონალის გაგრძელება, ბ) $\| f_1 \| = \| f \|$ (ანუ მათი ნორმები ტოლია).

დამტკიცება. X სივრცეზე განვიხილოთ ფუნქცია $p(x)=\| f_1 \| \cdot \| x \|$. ცხადია p X -ზე განსაზღვრული ნახევარნორმაა, ამასთანავე $| f_1(x) | \le p(x) \; \forall x \in M$. ხანი-ბანახის უკვე დამტკიცებული თეორემიდან დავასკვნით, რომ არსებობს მთელს X -ზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი f რომელიც f_1 ფუნქციონალის გაგრძელებაა და სამართლიანია

უტოლობა $|f(x)|\le p(x)$. გვაქვს $\|f\|\le \sup_{\|x\|\le 1} p(x)=\|f_1\|$. მეორე მხრივ ვინაიდან f არის f_1 ფუნქციონალის გაგრძელებაა, ამიტომ $\|f\|\ge\|f_1\|$. საბოლოოდ გვექნება $\|f\|=\|f_1\|$.

ბუნებრივია ისმის კითხვა. ნებისმიერი ნორმირებული სივრცისათვის არსებობს თუ არა ამ სივრცეზე განსაზღვრული არანულოვანი წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი. შევნიშნოთ, რომ არსებობს წრფივი ტოპოლოგიური სივრცეები რომელზედაც განსაზღვრული წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი მხოლოდ ნულოვანი ფუნქციონალია. წრფივი ნორმირებული სივრცეებისათვის ეს ამოცანა დადებითად წყდება.

თეორემა 3. ვთქვათ X წრფივი ნორმირებული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ და $x_0\in X$. არსებობს X-ზე განსაზღვრული წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი f ისეთი, რომ $f(x_0)=\|x_0\|$ და $\|f\|=1$.

დამტკიცება. სიმრავლე $M=\{x:\ x=\alpha x, \alpha\in R\}$ X სივრცის ქვესივრცეა. M სიმრავლეზე განვმარტოთ წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი $f_0(x)=\alpha\cdot\|x_0\|,\quad x=\alpha x_0$. გვაქვს $|f_0(x)|=|\alpha\cdot\|x_0\||=\|\alpha x_0\|,\quad \forall x=\alpha x_0$, ამიტომ $\|f_0\|=1$ (f_0 ფუნქციონალი განსაზღვრულია M ქვესივრცეზე). თეორემა თუ გამოვიყენებთ მივიღებთ დასამტკიცებელ დებულებას.

დამტკიცებული თეორემიდან გამოდის , რომ თუ X წრფივი ნორმირებული სივრცეა, მაშინ მისი შეუღლებული სივრცე X^* არატრივიალურია, ანუ ის შეიცავს არანულოვან წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალებს. თეორემა დან გამოდის, რომ X ნორმირებული სივრცის ნებისმიერი ორი $x_1\ne x_2$ ელემენტებისათვის არსებობს წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი f განსაზღვრული X-ზე ისეთი, რომ $f(x)_1\ne f(x_2)$. საკმარისია გამოვიყენოთ თეორემა როცა $x_0=x_1-x_2$.

მოვიყვანოთ ხანი-ბანახის თეორემის ერთი გმოყენება.

თეორემა 4. ვთქვათ X წრფივი ნორმირებული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. ყოველი $x\in X$ განვსაზღვროთ ფუნქციონალი $F_x: X^*\to R$ შემდეგი წესით: $F_x(f)=f(x)\ \ \forall f\in X^*$. F_x წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს X^* სივრცეზე (ანუ $F_x\in(X^*)^*=X^{**}$) და ასახვა $\pi: X\ \to X^{**}$ განსაზღვრული შემდეგი წესით $\pi(x)=F_x$ წარმოადგენს იზომეტრიას X წრფივი ნორმირებული სივრცეიდან ბანახის სივრცეში.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის $F_x\in X^{**}$. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ასახვა $x\to F_x$ წრფივია. მართლაც

$$F_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha F_x(f)+\beta F_y(f) \ \ \alpha,\beta\in R.$$

ამასთანავე $|F_x(f)|=|f(x)|\le\|f\|\cdot\|x\|\ \forall f\in X^*$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $F_x\in X^{**}$ და $\|F_x\|\le\|x\|$. ხანი-ბანახის თეორემის ძალით ყოველი ფიქსირებული $x\in X,\ x\ne 0$ ელემენტისათვის არსებობს $f'\in X^*$ ისეთი, რომ $\|f'\|=1$ და $f'(x)=\|x\|$. ასეთი f' ფუნქციონალისათვის გვექნება $F_x(f')=f'(x)=\|x\|=\|f'\|\cdot\|x\|$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $\|F_x\|=\|x\|$.

ამოცანები პრაქტიკული მუშაობისათვის

1.იპოვეთ ფუნქციონალის ნორმა თუ

ა) $f\in C^*([-1;1]),\quad f(x)=\dfrac{1}{3}(x(-1)+x(1))$;

ბ) $f\in C^*([-1;1]),\quad f(x)=x'(0)$;

გ) $f\in(l_\infty)^*,\quad f(x)=x_1+x_2$

დ) $f\in(l_2)^*,\quad f(x)=x_1+x_2$;

დ) $f\in(l_2)^*,\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k}{k}$;

ე) $f\in(l_1)^*,\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$.

ვ) $f\in C^*([-1;1]),\quad f(x)=\int_0^1 x(t)dt-\int_{-1}^0 x(t)dt$;

ზ) $f\in C^*([-1;1]),\quad f(x)=x(0)-\int_0^1 x(t)dt$;

თ) $f\in C^*([-1;1]),\quad f(x)=\int_{-1}^{1}x(t)dt-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}x(k/n)$

ი) $A\in(L^2([0,1]))^*,\ Ax(t)=\int_0^{1/2}\sqrt{s}x(s^2)ds$

2.ვთქვათ $1<p<\infty$. $\alpha\in R$ რა მნიშვნელობისათვის ფუნქციონალი $f(x)=\int_0^1\frac{x(s)}{s^\alpha}ds$ ეკუთვნის $(L^p([0,1]))^*$

3.შეამოწმეთ, არის თუ არა ოპერატორი $A: X\to X$ წრფივი და უწყვეტი და ამ უკანასკნელის შემთხვევაში იპოვეთ ნორმა თუ

ა) $X=C([0,1]),\ Ax(t)=x^2(t)$;

ბ) $X=C([0,1]),\ Ax(t)=\sin(x(t))$;

გ) $X=C([0,1]),\ Ax(t)=\int_0^1 tx(t)dt$;

დ) $X=L^2([0,2\pi]),\ Ax(t)=\int_0^{2\pi}\cos(2t+3s)x(s)ds$.

4.შეამოწმეთ, არის თუ არა ოპერატორი $A: X\to X$ წრფივი და უწყვეტი და ამ უკანასკნელის შემთხვევაში იპოვეთ ნორმა თუ

ა) $X=l_2,\ Ax=(0,x_1,x_2,...)$;

ბ) $X=l_2,\ Ax=(x_2,x_3,x_4,...)$;

გ) $X=l_2,\ Ax=(x_1,0,x_3,0,x_5,...)$;

გ) $X=l_1,\ Ax=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{3}x_3,...)$;

დ) $X=l_1,\ Ax=(2x_1,(1+1/2)x_2,(1+1/3)x_3,...,(1+1/n)x_n,...)$;

ე) . $X=C([0,1]),\ Ax(t)=\int_0^1 e^{3t-2s}x(s)ds$.

ვ) $X = C([0,1]),\ Ax(t) = \int_0^1 t^{\alpha} s^{\beta} x(s)ds, \quad \alpha \geq 0, \beta > -1.$

გამოიკვლიეთ ოპერატორთა წერტილოვანი და თანაბარი კრებადობის საკითხი თუ

ა) $X = l_2, \quad A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, ..., \frac{x_k}{n}, ... \right), \ x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

ბ) $X = l_2, \quad A_n x = \left(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ... \right), \ x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

გ) $X = C([0,1]), \quad A_n x(t) = t^n (1-t) x(t), \ t \in [0,1];$

დ) $X = C([0,1]), \quad A_n x(t) = t^n x(t), \ t \in [0,1].$