თ ე ნ გ ი ზ კ ო პ ა ლ ი ა ნ ი

მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ა ნ ა ლ ი ზ ი I

სალექციო კურსი

თ ბ ი ლ ი ს ი 2 0 0 7

თავი 1

ასახვის ცნება. ასახვათა ელემენტარული კლასიფიკაცია (სურექციული, ინექციური და ბიექციური ასახვები). ასახვათა კომპოზოციის ცნება. ურთიერთშექცეული ასახვები. ასახვის გრაფიკის ცნება. დალაგების მიმართება სიმრავლეში.

ასახვის ცნება

განმარტება1.1. ვთქვათ, X და Y რაიმე სიმრავლეებია. ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს X სიმრავლეზე განსაზღვრული ასახვა (ფუნქცია) მნიშვნელობებით Y სიმრავლე**ში**, თუ X სიმრავლის ყოველ $x \in X$ ელემენტს რაიმე f წესით ეთანადება ერთადერთი $y \in Y$ ელემენტი. ამ შემთხვევაში X სიმრავლეს ვუწოდებთ ასახვის(ფუნქციის) განსაზღვრის არეს, ხოლო Y სიმრავლეს—ასახვის(ფუნქციის) ცვლილების არეს. ზოგად $x \in X$ ელემენტს ვუწოდებთ ასახვის(ფუნქციის) არგუმენტს. თუ არგუმენტის კონკრეტულ x_0 მნიშვნელობას ასახვით ეთანადება $y_0 \in Y$ ელემენტი, მაშინ y_0-ს ვუწოდებთ ასახვის(ფუნქციის) მნიშვნელობას x_0 ელემენტზე და ჩავწერთ $y_0 = f(x_0)$, საზოგადოდ x არგუმენტისათვის კი ვწერთ $y = f(x)$. ასახვის(ფუნქციის) $y = f(x) \in Y$ მნიშვნელობები, საზოგადოდ იცვლებიან x არგუმენტის ცვლილებასთან ერთად და ამ მიზეზის გამო $y = f(x)$ სიდიდეს დამოკიდებულ ცვლადს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ცნება მთელი მათემატიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტალური ცნებაა. ჩვენი კურსისათვის **ასახვის და ფუნქციის ცნება ეკვივალენტური ცნებებია.** (იმის და მიხედვით თუ X და Y სიმრავლეები როგორი ბუნების სიმრავლეები არიან მათემატიკის სხვადასხვა ნაწილში იყენებენ <ფუნქციის> ტერმინის სხვადასხვაგვარ სინონიმებს: ასახვა, გარდაქმნა, ოპერატორი, ფუნქციონალი და ა.შ.)
მაშასადამე ფუნქციის(ასახვის) მოცემა ნიშნავს შემდეგი (X, f, Y) სამეულის მითითებას, სადაც X ასახვის განსაზღვრის არეა, Y ასახვის ცვლილების არე, ხოლო f წესია(კანონია) რომლის მიხედვითაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება. ფუნქციის(ასახვის) აღსანიშნავად მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y \text{ ან } (X, f, Y).$$

იმ შემთხვევაში, როცა კონტექსტიდან ცნობილია როგორია ფუნქციის განსაზღვრის არე და ცვლილების არე ფუნქციის აღსანიშნავად იყენებენ უბრალოდ აღნიშვნებს $x \mapsto f(x)$ ან $y = f(x)$ ან უბრალოდ ფუნქციას აღნიშნავენ სიმბოლოთი f და არ მიუთითებენ მის განსაზღვრის და ცვლილების არეს (და უბრალოდ ვიტყვით მოცემულია f ასახვა(ფუნქცია)).

განმარტება1.2. ორ f, g ასახვას ვუწოდებთ ტოლს, თუ მათ გააჩნიათ ერთიდაიგივე განსაზღვრის X არე და ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის $f(x) = g(x)$.

განმარტება1.3. ვთქვათ $f : X \to Y$ რაიმე ასახვაა და A სიმრავლე X სიმრავლის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლეა, მაშინ სიმბოლოთი $f|_A$ ავღნიშნავთ ასახვას $\varphi : A \to Y$, რომელიც A სიმრავლეზე ემთხვევა f ასახვას. ანუ $f|_A(x) = f(x)$, თუ $x \in A$. $f|_A$ ასახვას უწოდებენ f ასახვის შეზღუდვას A

სიმრავლეზე, ხოლო $f: X \to Y$ ასახვას $f\big|_A : A \to Y$ მიმართ $\varphi: A \to Y$ ასახვის გავრცობას (გაგძელებას) X სიმრავლემდე.

განმარტება1.4. $f(X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ Y სიმრავლის ყველა იმ y ელემენტთა ერთობლიობას, რომელთათვისაც არსებობს ერთი მაინც $x \in X$ შემდეგი თვისებით $f(x) = y$ და ვუწოდებთ ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლეს. მაშასადამე: $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x, x \in X \text{ და } y = f(x)\}$.

მაგალითი1.5. ფუნქციის $f: R \to R; f(x) = x^2$ მნიშვნელობათა არეა $[0,+\infty)$ სიმრავლე, ხოლო ცვლილების არეა R სიმრავლე. ფუნქციის $f: (-1,1] \to [0,+\infty); f(x) = x^2$ მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0,1]$ სიმრავლე, ცვლილების არეა $[0,+\infty)$ სიმრავლე.

ასახვათა ელემენტარული კლასიფიკაცია.

განმარტება1.6. ა)ვთქვათ $f: X \to Y$ რაიმე ასახვაა და A სიმრავლე X სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა., A სიმრავლის ანასახი (სახე) f ასახვის დროს აღინიჭნება სიმბოლოთი $f(A)$ და წარმოადგენს სიმრავლეს

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x, x \in A \text{ და } y = f(x)\}.$$

(შევნიშნოთ, რომ $f(\varnothing) = \varnothing$.)

ბ) ვთქვათ B სიმრავლე Y სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეა. B სიმრავლის წინარე სახე f ასახვის დროს აღინიშნება სიმბოლოთი $f^{-1}(B)$ და წარმოადგენს სიმრავლეს

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

(შევნიშნოთ, რომ $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.)

მაგალითი1.7. ვთქვათ მოცემულია ასახვა $f: R \to R; f(x) = x^2$. მაშინ $f(\{-5,5,4\} = \{16,25\}, f((1,5]) = (1,25], f([-1,5] = [0,25]$.

$f^{-1}(\{25\}) = \{-5,5\}, f^{-1}(\{-4\}) = \varnothing, f^{-1}((0,25]) = [-5,5] \setminus \{0\}, f^{-1}((-\infty,0]) = \{0\}$.

განმარტება1.8. ვთქვათ, მოცემულია ასახვა $f: X \to Y$.

ა) ვიტყვით, რომ f ასახვა არის სურექციული, თუ $f(X) = Y$ (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ f არის X სიმრავლის ასახვა Y სიმრავლე**ზე**).

ბ) ვიტყვით, რომ f ასახვა არის ინექციური, თუ X-დან აღებული ნებისმიერი x_1 და x_2 ელემენტებისთვის $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$, ე. ი. ასახვა ინექციურია, თუ განსხვავებულ ელემენტებს აქვთ განსხვავებული ანასახები.

გ)ასახვას უწოდებენ ბიექციურს, ანუ ურთიერთცალსახას, თუ ის არის ერთდროულად ინექციურიც და სურექციულიც.

მაგალითი1.9. ვთქვათ, მოცემულია ასახვები:

ა) $f: R \to R$, $f(x) = x^2$;

ბ) $g: R \to [0;+\infty)$, $g(x) = x^2$;

გ) $h: [0;+\infty) \to [0;+\infty)$, $h(x) = x^2$. (R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.)

ცხადია, რომ $f(R) = [0;+\infty) \neq R$, ამიტომ f ასახვა არ არის სურექციული. ამავე დროს $f(-1) = f(1)$, მაშასადამე f არ არის ინექციურიც. g ასახვა არის სურექციული, მაგრამ არ არის ინექციური. h ასახვა არის ინექციურიც და სურექციულიც, მაშასადამე არის ბიექციური ასახვა.

შექცეული ასახვის ცნება.

განმარტება1.10. ვთქვათ, $f: X \to Y$ ასახვა არის ბიექციური, ანუ ურთიერთცალსახა ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე. ასახვას $f^{-1}: Y \to X$, რომელიც ყოველ $y \in Y$ ელემენტს უთანადებს იმ $x \in X$ ელემენტს, რომლის ანასახიც არის y ელემენტი უწოდებენ $f: X \to Y$ ასახვის შექცეულ ასხვას.
შევნიშნოთ, რომ f-ის სურექციულობის გამო არსებობს ასეთი $x \in X$ ელემენტი, ხოლო f-ის ინექციურობის გამო ის ერთადერთია, ასე, რომ f^{-1} ასახვა კორექტულადაა განსაზღვრული. ცხადია, რომ f^{-1}-იც იქნება ბიექციური ასახვა.
მეორე მხრივ, თუ განვიხილავთ f^{-1} ასახვის შექცეულს, ანუ $(f^{-1})^{-1}$ ასახვას, მაშინ იგი დაემთხვევა თავდაპირველ f ასახვას, ე. ი. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

მაგალითი1.11. ა) ვთქვათ, მოცემულია $X = \{a,b,c\}$, $Y = \{1,2,3\}$ და $f: X \to Y$, სადაც $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ და $f(c) = 1$. ცხადია, რომ f არის ბიექციური ასახვა, ამიტომ არსებობს ასახვა $f^{-1}: Y \to X$ და $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(3) = b$.
ბ) ვთქვათ, $f: R \to R$, $f(x) = 4x - 5$. ცხადია, რომ f არის ბიექციური ასახვა და $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}$.

შენიშვნა: სიმბოლო f^{-1} ჩვენ ვიყენებთ ორ სიტუაციაში ა) f ასახვის შექცეული ასახვის აღნიშვნისას(რომელიც არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა f ასახვა ბიექციაა ბ) B სიმრავლის წინარე $f^{-1}(B)$ სახის აღნიშვნისათვის, რომელიც განსაზღვრულია ნებისმიერი f ასახვისათვის.

ორი ასახვის კომპოზიცია.

განმარტება1.12 ვთქვათ, მოცემულია $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ ასახვები. მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ახალი ასახვა $g \circ f: X \to Z$, რომლის მნიშვნელობები X სიმრავლის ელემენტებზე განისაზღვრება ფორმულით:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

მიღებულ $g \circ f$ ასახვას უწოდებენ f და g ასახვების კომპოზიციას.

მაგალითი1.13. ვთქვათ, მოცემულია $f(x) = 2x + 1$ და $g(x) = 3x - 2$. მაშინ $(g \circ f)(x) = 6x + 1$ და $(f \circ g)(x) = 6x - 3$.

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ იმ შემთხვევასშიც კი როცა ორივე კომპოზიცია განმარტებულია,საზოგადოდ $f \circ g \neq g \circ f$.

მაგალითი1.14. ვთქვათ $X = Y = \{a,b\}$ და $f, g: X \to Y$ განმარტებულია შემდეგი წესით $f(a) = f(b) = a; g(a) = g(b) = b$. მაშინ $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) = b; (f \circ g)(a) = (f \circ g)(b) = a$.

კომპოზიციის ოპერაცია შეიძლება შევასრულოთ რამდენჯერმე, აღსანიშნავია რომ აღნიშნულ ოპერაციას გააჩნია ასოციაციურობის თვისება, სახელდობრ:
ვთქვათ მოცემულია სამი $f: X \to Y; g: Y \to Z; h: Z \to M$ ასახვები, მაშინ სამართლიანია ტოლობა:
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
მართლაც $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.
აღნიშნული ტოლობის ძალით განხილული კომპოზიციებს ჩავწერთ ფრჩხილების გარეშე ასეთი ფორმით $h \circ g \circ f$.
ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ სასრული რაოდენობა ფუნქციათა კომპოზიცია.

განმარტება1.14. იგივური ვუწოდოთ ასახვას, რომელიც ყოველ ელემენტს ასახავს თავის თავზე, ე. ი. $I: X \to X$ არის იგივური ასახვა, თუ ყოველი $x \in X$

ელემენტისათვის $I(x)=x$. (ზოგჯერ იგიურ ასახვას, რომელიც X სიმრავლეზეა განმარტებული ავღნიშნავთ სიმბოლოთი I_X.)

შევნიშნოთ, რომ თუ $f:X\to Y$ არის ბიექციური ასახვა, მაშინ $f^{-1}\circ f$ და $f\circ f^{-1}$ იგივური ასახვებია.(მიაქციეთ ყურადღება $f^{-1}\circ f$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა X, ხოლო $f\circ f^{-1}$ ფუნქციის Y სიმრავლე.)

განმარტება1.15. ვთქვათ $f:X\to Y, g:Y\to X$ ასახვები ისეთია, რომ $g\circ f=I_X$, მაშინ g ფუნქციას უწოდებენ f ფუნქციის მარცხენა შექცეულს, ხოლო f ფუნქციას უწოდებენ g ფუნქციის მარჯვენა შექცეულ ფუნქციას.
შესაძლებელია ფუნქციას ჰქონდეს რამოდენიმე მარჯვენა ან მარცხენა შექცეული ფუნქცია(შესაძლებელია საერთოდ არც გააჩნდეს). **იხ. სავარჯიშოები**.
შევნიშნოთ, რომ თუ ფუნქცია ბიექციაა მაშინ მას გააჩნია, ერთადერთი როგორც მარცხენა ასევე მარჯვენა შექცეული ფუნქცია (რაც ავტომატურად გამოდის შექცეული ფუნქციის განმარტებიდან).

თეორემა1.16. ვთქვათ $f:X\to Y, g:Y\to X$ ასახვები ისეთია, რომ $g\circ f=I_X$, მაშინ g სურექციული და f ინექციური ასახვებია.

დამტკიცება. ვინაიდან $g\circ f=I_X:X\to X$, ამიტომ
$X=I_X(X)=(g\circ f)(X)=g(f(X))\subset g(Y)$ და მაშასადამე g სურექციულია.
თუ $a\in X, b\in X$ მაშინ
$(a\neq b)\Rightarrow(I_X(a)\neq I_X(b))\Rightarrow((g\circ f)(a)\neq(g\circ f)(b))\Rightarrow(g(f(a))\neq g(f(b)))\Rightarrow(f(a)\neq f(b))$.
მაშასადამე f ინექციურია.

შედეგი 1.17. ასახვები $f:X\to Y, g:Y\to X$ ბიექციურია და ურთიერთშექცეული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $g\circ f=I_X$ და $f\circ g=I_Y$.

დამტკიცება. თეორემა 1.16 ის ძალით თუ ერთდროულად სრულდება ტოლობები $g\circ f=I_X$ და $f\circ g=I_Y$, მაშინ g და f ფუნქციები ერთდროულად სურექციული და ინექციურია.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან შესაძლებელია მოვიყვანოთ ურთიერთშექცეული ფუნქციების შემდეგი განმარტება

განმარტება1.18. ასახვებს $f:X\to Y, g:Y\to X$ უწოდებენ ურთიერთშექცეულს თუ სამართლიანია ტოლობები: $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$.

ასახვის გრაფიკი.

განმარტება.1.19. $f:X\to Y$ ასახვის გრაფიკს უწოდებენ $X\times Y$ დეკარტული ნამრავლის ქვესიმრავლეს, რომელიც შედგება ყველა $(x,f(x))$ დალაგებული წყვილისაგან:

$$G_f=\{(x,y)\in X\times Y \mid x\in X, y=f(x)\}.$$

მიმართების ცნება.

განმარტება1.20. ვთქვათ მოცემულია რაიმე არაცარიელი X სიმრავლე. დაუშვათ ρ არის $X\times X$ დეკარტული ნამრავლის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლე. თუ დალაგებული წყვილი (x,y) არის ρ სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ამბობენ რომ X სიმრავლის x ელემენტი ρ მიმართებაშია X სიმრავლის y ელემენტთან და ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ $x\rho y$. ρ –ს უწოდებენ მიმართებას X სიმრავლეში.

ინტუიციურ დონეზე ρ სიმრავლეში რაიმე მიმართების მოცემა ნიშნავს რაღაც თვისების(ნიშნის მიხედვით) გარკვეული წყვილების არჩევას $X\times X$ სიმრავლიდან. მაგალითად ვთქვათ X არის უნივერსიტეტის სტუდენტთა

სიმრავლე. ვთქვათ, რომ x სტუდენტი არის ρ მიმართებაში y სტუდენტთან თუ მათ ორივემ ვერ დააგროვეს საჭირო რაოდენობის კრედიტი წრფივ ალგებრაში. ამ ნიშნის მიხედვით $X \times X$ სიმრავლეში შეგვიძლია მოვნიშნოთ გარკვეული ქვესიმრავლე სტუდენთა წყვილებისგან შემდგარი(შესაძლოა ცარიელიც) ანუ დავამყაროთ <გარკვეული> მიმართება სდუდენტთა სიმრავლეში.

ანალიზის კურსის აგებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება სიმრავლეში დალაგების მიმართების ცნება.

განმარტება1.21. ვთქვათ ρ მიმართება X სიმრავლეში (ანუ $R \subset X \times X$). ვიტყვით, რომ ის არის დალაგების მიმართება X სიმრავლეში თუ სრულდება პირობები:

ა) X სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის (x, x) არის ρ სიმრავლის ელემენტი ანუ X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი არის თავის თავთან ρ მიმართებაში (რეფლექსურობის თვისება). მოკლედ: $\forall x \in X$ გვაქვს $(x, x) \in R$ ანუ $x\mathrm{R}x$.

ბ) $(x\mathrm{R}y) \wedge (y\mathrm{R}z) \Rightarrow (x\mathrm{R}z)$ (ტრანზიტულობის თვისება).

გ) $(x\mathrm{R}y) \wedge (y\mathrm{R}x) \Rightarrow (x = y)$ (ანტისიმეტრიულობის თვისება).

შემდგომში თუ სიმრავლეში გვაქვს მოცემული დალაგების რაიმე ρ მიმართება მას ავღნიშნავთ სიმბოლოთი $\leq$, ხოლო თუ $(x, y) \in R$ მას ასე ჩავწერთ $x \leq y$ და ვიტყვით უბრალოდ x ელემენტი ნაკლები ან ტოლი(არ აღემატება) y ელემენტს. თუ გვაქვს $x \leq y$ და $x \neq y$, მაშინ ამ ფაქტს ასე ავღნიშნავთ $x < y$ და ვიტყვით x ელემენტი მკაცრად ნაკლებია y ელემენტზე.

მაგალითი1.22. ვთქვათ X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, 2^X სიმბოლოთი ავღნიშნოთ X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. (შევნიშნოთ, რომ თუ X არის სასრული n-ელემენტიანი სიმრავლე მაშინ მისი ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე შედგება 2^n რაოდენობა ელემენტისაგან). 2^X სიმრავლეში შემოვიღოთ დალაგების$\leq$ მიმართება შემდეგნაირად:

დაუშვათ $A, B \in 2^X$ (ანუ A და B არის X სიმრავლის რაიმე ორი ქვესიმრავლე). ჩავთვალოთ, რომ A ნაკლებია ან ტოლი B-ზე ($A \leq B$) თუ $A \subset B$. თუ გავითვალისწინებთ სიმრავლეთა ელემენტარულ თვისებებს: კერძოდ

ა) $A \subset A$ ბ) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ გ) $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow (A = B)$

ადვილად დავასკვნით, რომ შემოღებული მიმართება 2^X სიმრავლეში არის დალაგების მიმართება. შევნიშნოთ, რომ 2^X სიმრავლეში აღმოჩნდება ორი მაინც A, B ელემენტი რომელთათვისაც არაა სამართლიანი არცერთი შემდეგი უტოლობებიდან $A \leq B$ და $B \leq A$. (შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ნამდვილ რიცხვთა ბუნებრივი დალაგებისას ასეთ ფაქტს ადგილი არ აქვს.)

მაგალითი1.23. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში ჩვენთვის კარგად ცნობილი ბუნებრივი დალაგება($x \leq y$ თუ x რიცხვის შესაბამისი წერტილი რიცხვით ღერძზე უფრო მარცხნივაა ვიდრე y რიცხვის შესამამისი წერტილი ან ისინი ემთხვევიან) ცხადია არის დალაგების მიმართება მოყვანილი განმარტების მიხედვით. (საკმარისია გავიხსენოთ ნამდვილი რიცხვების ელემენტარული თვისებები რომელიც სკოლის კურსიდანაა ცნობილი.) მოყვანილი მაგალითი მნიშვნელოვანია შემდეგი თვალსაზრისით: ნებისმიერი ორი განსხვავებული x, y რიცხვებისათვის ან $x < y$ ან $y < x$ შევნიშნოთ, რომ მაგალითი1.24-ში მოყვანილი დალაგებისათვის ამ ფაქტს ადგილი არ აქვს.

განმარტება1.24. ვთქვათ $\leq$ რაიმე დალაგებაა X სიმრავლეში. ვიტყვით, რომ მოცემული დალაგება წრფივია თუ X სიმრავლის ნებისმიერი ორი

განსხვავებული x, y ელემენტისათვის სამართლიანია ერთ-ერთი შემდეგი ორი უტოლობიდან $x < y, y < x$. (წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით,რომ სიმრავლე ნაწილობრივ დალაგებულია.)
ერთიდაიგივე სიმრავლეში შეიძლება გვქონდეს შემოღებული რამოდენიმე სრულიად განსხვავებული დალაგების მიმართება.

მაგალითი1.25. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეში შემდეგი დალაგება: ჩავთვალოთ, რომ $n, m \in N$ რიცხვებისათვის $n \le m$ თუ n უნაშთოდ ყოფს m რიცხვს. ცხადია მოყვანილი მიმართება დალაგების მიმართებაა N სიმრავლეში. შევნიშნოთ, რომ ამ მიმართების მიხედვით არაა სამართლიანი უტოლობები $3 \le 5; 5 \le 3; 7 \le 9$ და ა.შ. მაშასადამე მოყვანილი მიმართება N სიმრავლეში არის ნაწილობრივი დალაგების მიმართება და ის არსებითად განსხვავდება ნატურალურ რიცხვთა ბუნებრივი დალაგებისაგან.

სავარჯიშოები.

1. მოცემულია ფუნქცია $f : R \to R, f(x) = 3x + 5$. იპოვეთ
   ა) $f([2,7]), f((4,7]), f([5,9)), f(5,7), f((-\infty,5]), f((-\infty,7)), f((4,+\infty)), f([7,+\infty)), f(R)$
   ბ) $f^{-1}([2,7]), f^{-1}(\{1,-5,7\}), f^{-1}((-2,7]), f^{-1}([3,8)), f^{-1}((3,9)), f^{-1}((-\infty,7]),$
   $f^{-1}((-\infty,3)), f^{-1}([7,+\infty))$.
2. მოცემულია ფუნქცია $f : R \to R, f(x) = x^2 - 3x + 2$. იპოვეთ
   ა) $f(\{1,2,5\}), f([0,5]) f((0,5)), f([-1,5)), f([-1,1/3)), f((3/2,7], f(-\infty,3]), f(-\infty,4)),$
   $f((-\infty,1]), f((-\infty,1)), f([1,+\infty), f((-3,+\infty), f([-1,5] \cup [6,+\infty)), f(R)$.
   ბ) $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1,2\}), f^{-1}((-\infty,5]), f^{-1}((-\infty,5)), f^{-1}([1,2]), f^{-1}((1,2)),$
   $f^{-1}((1,2]), f^{-1}([0,+\infty))$, $f^{-1}(R)$.
3. მოცემულია ფუნქცია $f : R \to R, f(x) = 2^x$. იპოვეთ
   ა) $f(0), f(\{0\}), f(\{3\}), f(\{1,2\}), f([1,2]), f([1,2)), f((1,2]), f((1,2)), f([1,+\infty)), f((-\infty,5])$
   ბ) $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}((-\infty,0]), f^{-1}((-\infty,5]), f^{-1}((1,32]], f^{-1}((64,+\infty)), f^{-1}(R)$.
4. მოცემულია ფუნქცია $f : (0,+\infty) \to R, f(x) = \log_2(x)$. იპოვეთ
   ა) $f(\{8\}), f(\{1,2\}), f([1,2]), f([1,2)), f((1,2]), f((4,9)), f([1,+\infty)), f((-\infty,7])$
   ბ) $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}((-\infty,0]), f^{-1}((-\infty,5]), f^{-1}((1,32]], f^{-1}((64,+\infty)), f^{-1}(R)$.
5. მოცემულია ფუნქცია $f : (0,+\infty) \to R, f(x) = \log_2 |x|$. იპოვეთ
   ა) $f(\{-8\}), f(\{-1,2\}), f([-1,2]), f([-2,1)), f((1,2]), f((-4,9)), f([-1,+\infty)), f((-\infty,7])$
   ბ) $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{-1,1\}), f^{-1}((-\infty,0]), f^{-1}((-\infty,-5]), f^{-1}((-1,32]], f^{-1}((64,+\infty)), f^{-1}(R)$
6. მოცემულია ფუნქცია $f : R \to R, f(x) = \sin x$. იპოვეთ
   ა) $f(\{\pi\}), f(\{\pi/2,\pi\}), f([0,2\pi]), f([0,2\pi)), f((0,2\pi]), f((4\pi,9\pi)), f([\pi,+\infty)),$
   ბ) $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{\pi\}), f^{-1}((-\infty,\pi/2]), f^{-1}((-\pi,5\pi]), f^{-1}([\pi,32\pi]], f^{-1}((\pi,+\infty)), f^{-1}(R)$
7. არის თუ არა $f : X \to Y$ ასახვა ინექციური, თუ
   ა) $X = [1,3], Y = R, f(x) = 3x + 5$; ბ) $X = (1,3], Y = R, f(x) = -3x + 5$ გ)
   $X = (1,3), Y = R, f(x) = 5x + 6$ დ) $X = [2,5], Y = R, f(x) = x^2 - 4x + 3$ ე)
   $X = (-2,2), Y = R, f(x) = x^2 - 4x + 3$ ვ) $X = (1,5], Y = R, f(x) = x^2 - 4x + 3$
   ზ) $X = [2,5], Y = R, f(x) = x^2 - 4x + 3$ თ) $X = (-\infty,0), Y = R, f(x) = x^2 - 4x + 3$ ი)
   $X = (2,+\infty), Y = (-1,+\infty), f(x) = x^2 - 4x + 3$.
8. მოცემულია ფუნქცია $f : R \to R, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$. იპოვეთ

ა) $f([1,5]), f((-\infty,2)), f((2,3)), f((3,+\infty))$ ბ) არის თუ არა მოცემული ფუნქციის შეზღუდვა $(2,3],(3,+\infty),(1,4)$ სიმრავლეებზე ინექციური?

9. მოცემულია ფუნქცია $f: R\setminus\{5\} \to R, f(x) = \dfrac{2x-5}{x-5}$. იპოვეთ

ა) $f((-\infty,2)), f((2,3)), f((4,+\infty)), f^{-1}(-\infty,5]), f^{-1}([-5,25]), f^{-1}(R), f^{-1}((-\infty,0]), f^{-1}((0,+\infty))$.

ბ) იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. არის თუ არა მოცემული ფუნქცია ინექციური.

10. არის თუ არა $f: X \to Y$ ასახვა ინექციური, თუ

ა) $X=[1,3], Y=R, f(x)=3x+5$; ბ) $X=(1,3], Y=R, f(x)=-3x+5$ გ) $X=(1,3), Y=R, f(x)=5x+6$ დ) $X=[2,5], Y=R, f(x)=x^2-4x+3$ ე) $X=(-2,2), Y=R, f(x)=x^2-4x+3$ ვ) $X=(1,5], Y=R, f(x)=x^2-4x+3$ ზ) $X=[2,5], Y=R, f(x)=x^2-4x+3$ თ) $X=(-\infty,0), Y=R, f(x)=x^2-4x+3$ ი) $X=(2,+\infty), Y=(-1,+\infty), f(x)=x^2-4x+3$.

11. არის თუ არა ასახვა $f:[1,3] \to R$ ინექცია, თუ

ა) $f(x)=x^2-3x+7$ ბ) $f(x)=x^2-3x+2$ გ) $f(x)=x^2-5x+6$ დ) $f(x)=2^x+1$ ე) $f(x)=x^3-3x+7$ ვ) $f(x)=x^3+2x^2-3x+2$ ზ) $f(x)=[x]$ თ) $f(x)=x-[x]$.

12. ააგეთ რაიმე ბიექციური ასახვა A და B სიმრავლეებს შორის თუ

ა) $A=[a,b], B=[c,d]$ ბ) $A=(a,b), B=(c,d)$ გ) $A=[a,b), B=[c,d)$ დ) $A=[a,b), B=[c,d]$ ე) $A=[a,b], B=(c,d)$ ე) $A=(a,b), B=(0,+\infty)$ ვ) $A=(a,b), B=(-\infty,0)$ ზ) $A=(a,b), B=(-\infty,+\infty)$ თ) $A=(0,+\infty), B=(-\infty,+\infty)$.

13. არსებობს თუ არა უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს ბიექციურ ასახვას A და B სიმრავლეებს შორის თუ $A=[a,b]$ და $B=[1,2]\cup[5,6]$.

14. არსებობს თუ არა უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს ბიექციურ ასახვას A და B სიმრავლეებს შორის თუ $A=[a,b]$ და $B=(1,2)$.

15. ცნობილია, რომ $f: X \to Y$ ასახვა სადაც $X=(-\infty,2], Y=(a,+\infty)$ და $f(x)=x^2-4x+2a$ წარმოადგენს ინექციას. იპოვეთ ყველა ასეთი თვისების a რიცხვი.

16. იპოვეთ $f(x)=x^2+bx+c$ სახით მოცემული რაიმე ფუნქცია, რომელიც X სიმრავლეს ბიექციურად ასახავს Y სიმრავლეზე თუ ა) $X=[1,2], Y=[3,5]$ ბ) $X=(1,3), Y=(6,8)$ გ) $X=(1,2], Y=(3,7]$ დ) $X=(-\infty,1], Y=[3,+\infty)$ ე) $X=(1,+\infty), Y=(3,+\infty)$.

17. ცნობილია, რომ $f:(-\infty,1] \to [-12,+\infty); f(x)=x^2+bx+c$ წარმოადგენს სურექციას, და $f(-1)=5$. იპოვეთ b,c რიცხვები.

18. ცნობილია, რომ $f:(-\infty,1] \to [-1,+\infty); f(x)=bx+c$ წარმოადგენს სურექციას და $f(-1)=5$. იპოვეთ b,c რიცხვები.

19.მოცემულია ფუნქცია $f(x)=x^2-2bx+1$. b-ს რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს ა) მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, ბ) მხოლოდ უარყოფით მნიშვნელობებს, გ) როგორც დადებით ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს.

20.მოცემულია ფუნქცია $f:[0,\infty) \to R$ მოცემული შემდეგი წესით $f(x)=x^2-2x+k$, ცნობილია,რომ მისი მნიშვნელობათა არეა $[1,+\infty)$ სიმრავლე. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშნელობები.

21.ვთქვათ აგებული გვაქვს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. დავადგინოთ როგორ შეიძლება მივიღოთ მოცემული გრაფიკიდან შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები ა)

$y=|f(x)|$; ბ) $y=-f(x)$; გ) $y=-|f(x)|$;დ) $y=f(-x)$;ე) $y=-f(-x)$ვ) $y=f(|x|)$ თუ გამოვიყენებთ ox ან oy ღერძების მიმართ სიმეტრიულ გარდაქმნებს.

22. ცნობილია, რომ ასახვა $f:R\to E$ არის სურექციული. იპოვეთ E სიმრავლე თუ f ასახვა მოცემულია წესით:

ა) $f(x)=\dfrac{2x-3}{5x+2}$ ბ) $f(x)=x^2+2x+7$ გ) $f(x)=-2x^2+2x+7$ დ)

$f(x)=2\sin x+3\cos x$ ე) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ ვ) $f(x)=2^x+3$ ზ) $f(x)=2^{-x}+3$ თ)

$f(x)=\sin^2 x-3\sin x+2$.

23. ცნობილია, რომ ასახვა $f:[1,3]\to E$ არის სურექციული. იპოვეთ E სიმრავლე თუ f ასახვა მოცემულია წესით:

ა) $f(x)=x^2-3x+7$ ბ) $f(x)=-x^2-3x+7$ გ) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ დ) $f(x)=|x^2-3x+2|$

24. ცნობილია, რომ ასახვა $f:E\to[1,+\infty)$ არის ბიექცია. იპოვეთ E სიმრავლე თუ f ასახვა მოცემულია წესით: $f(x)=x^2-3x+\dfrac{13}{4}$. (რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?)

25.ცნობილია, რომ $f(x)=ax^2+bx+1$ ფუნქციის გრაფიკი $(1,6)$ და $(-1,0)$ წერტილებზე გადის. იპოვეთ a და b რიცხვები.

26. მოცემულია სამი წერტილი $(-2,3),(1,-2)$ და $(0,5)$ წერტილი. იპოვეთ $f(x)=ax^2+bx+c$ სახის ფუნქცია, რომლის გრაფიკი მოცემულ წერტილებზე გადის.

27.ვთქვათ x რაიმე რიცხვია. $[x]$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს. (დაამტკიცეთ, რომ ასეთი ერთადერთი რიცხვი არსებობს.) განვსაზღვროთ ფუნქცია $f:R\to R$ შემდეგნაირად $f(x)=[x]$. იპოვეთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა არე. იპოვეთ ლუწ რიცხვთა სიმრავლის წინარე სახე. აგეთ ამ ფუნქციი გრაფიკი.

28.მოცემულია ფუნქცია $f(x)=x^2-2bx+1$. b-ს რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს ა) მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, ბ) მხოლოდ უარყოფით მნიშვნელობებს, გ) როგორც დადებით ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს.

29.მოცემულია ფუნქცია $f:[0,\infty)\to R$ მოცემული შემდეგი წესით $f(x)=x^2-2x+k$, ცნობილია,რომ მისი მნიშვნელობათა არეა $[1,+\infty)$ სიმრავლე. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშნელობები.

30.ვთქვათ, $f:X\to Y$ რაიმე ასახვაა. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი წინადადებები ურთიერთეკვივალენტურია:

ა) f ინექციაა; ბ) $f^{-1}(f(A))=A,\quad \forall A\subset X$; გ) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)\quad \forall A,B,$ სადაც $A\subset X, B\subset X$; დ) $f(A)\cap f(B)=\varnothing \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$; ე) $f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B),$ როცა $B\subset A\subset X$.

31.სამართლიანია თუ არა ტოლობები

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B);$$
$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)?$$

თუ რომელიმე ტოლობა არ არის სამართლიანი მოიყვანეთ საჭირო კონტრმაგალითი.

32.მოცემულია ფუნქცია $f: E \to R$, A სიმრავლე ფუნქციის განსაზღვრის არის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლეა. სამართლიანია თუ არა ტოლობა

$$f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)?$$

(მითითება: განიხილეთ ფუნქცია $f(x) = x^2$, $E = R$ და $A = [0,+\infty)$.)

33.მოცემულია ფუნქცია $f: E \to R$. ვთქვათ A სიმრავლე ფუნქციის მნიშვნელობათა $L = f(E)$ არის რაიმე ქვესიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$f^{-1}(L \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

34.ვთქვათ A და B ფუნქციის მნიშვნელობათა არის რაიმე ქვესიმრავლეებია. სამართლიანია თუ არა ტოლობები

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)?$$

35. ვთქვათ $f: X \to Y$ რაიმე ასახვაა, ხოლო A, B არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეები, ხოლო A', B' არის ვთქვათ Y სიმრავლის ქვესიმრავლეები. აჩვენეთ, რომ

ა) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$, აჩვენეთ აგრეთვე, რომ ვთქვათ $f(A) \subset f(B)$ ჩართვიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $A \subset B$ ჩართვა.

ბ) $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')) \Rightarrow (A' \subset B')$

36. აჩვენეთ, რომ ასახვა $f: X \to Y$

ა) სურექციულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $B' \subset Y$ სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა $f(f^{-1}(B')) = B'$.

ბ) ბიექციურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ნებისმიერი $A \subset X$ და $B' \subset Y$ სიმრავლეებისათვის სამართლიანია ტოლობები

$(f^{-1}(f(A)) = A) \wedge (f(f^{-1}(B')) = B')$.

37. აჩვენეთ, რომ ა $f: X \to Y$ ასახვისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

ა) f ინექციურია ბ) $f^{-1}(f(A)) = A$ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისათვის.

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ნებისმიერი $A \subset X$ $B \subset X$ სიმრავლეებისათვის.

გ) $f(A) \cap f(B) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

38. ვთქვათ $f: X \to Y, g: Y \to Z$ ბიექციური ასახვებია. აჩვენეთ, რომ $g \circ f: X \to Z$ ბიექციურია და $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

39. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $f: X \to Y, g: Y \to Z$ ფუნქციებისათვის და ნებისმიერი $C \subset Z$ სიმრავლისათვის $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

ლექცია 2

ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე. სისრულის აქსიომა. სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი. არქიმედეს აქსიომა. ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები. თვლის პოზიციური სისტემები. ინდუქციური სიმრავლეები. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

კოში-კანტორის, ბორელ-ლებეგის, ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემები. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები. კანტორის თეორემა.

მათემატიკური ანალიზი ეფუძნება ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ განმარტებას. შეუძლებელია ანალიზის ისეთი ფუნდამენტური ცნებების შესწავლა, როგორიცაა უწყვეტობა, დიფერენცირებადობა, ინტეგრებადობა თუ სრულყოფილად არ იქნა გააზრებული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.
რიცხვი მათემატიკაში, როგორც დრო ფიზიკაში ცნობილია ყველასათვის. ავღნიშნოთ, რომ რიცხვის ცნება არის ერთერთი ძირითადი მათემატიკური აბსტრაქცია, რომლის გადმოცემას შეიძლება მიეძღვნას დამოუკიდებელი კურსი.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის აქსიომატიკა.

განმარტება2.1. ვიტყვით, რომ სიმრავლე R არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ,ხოლო მისი ელემენტები ნამდვილი რიცხვები, თუ შესრულებულია ქვემოთ მოყვანილ პირობათა კომპლექსი, რომელსაც ნამდვილ რიცხვთა აქსიომატიკას უწოდებენ, სახელდობრ:

(I) შეკრების აქსიომები

განსაზღვრულია ასახვა (შეკრების ოპერაცია)

$$+ : R \times R \to R$$

რომელიც ნებისმიერ დალაგებულ წყვილს $(x, y) \in R \times R$ შეუსაბამებს R სიმრავლის რომელიღაც ერთ ელემენტს $x + y \in R$, (რომელსაც x და y ელემენტების ჯამს ვუწოდებთ) ისე რომ სრულდება პირობები:

1. $\forall x, y \in R : x + y = y + x$ (კომუტაციურობის კანონი);
2. $\forall x, y, z \in R : (x + y) + z = x + (y + z)$ (ასოციაციურობის კანონი);
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R, x + 0 = x$ (R-ში ნულოვანი ელემენტის არსებობა);
4. $\forall x \in R, \exists (-x) \in R, x + (-x) = 0$ (R-ის ყოველი ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტის არსებობა);

შენიშვნა 2.2 თუ რაიმე G სიმრავლეზე განსაზღვრულია ოპერაცია, რომელიც აკმაყოფილებს 2,3,4 აქსიომებს, მაშინ ამბობენ რომ ამ სიმრავლეზე მოცემულია ჯგუფის სტრუქტურა, ანუ უბრალოდ G არის ჯგუფი. თუ ოპერაციას უწოდებენ შეკრების ოპერაციას, მაშინ ჯგუფს უწოდებენ ადიციურ ჯგუფს და თუ დამატებით სრულდება აქსიომა 1 მაშინ ჯგუფს უწოდებენ კომუტაციურ ანუ აბელის ჯგუფს. მაშასადამე R არის შეკრების ოპერაციის მიმართ აბელის ჯგუფი.)

(II) გამრავლების აქსიომები

განსაზღვრულია ასახვა (გამრავლების ოპერაცია)

$$\times : R \times R \to R$$

რომელიც ნებისმიერ დალაგებულ წყვილს $(x, y) \in R \times R$ შეუსაბამებს R სიმრავლის რომელიღაც ერთ ელემენტს $x \times y \in R$, (რომელსაც x და y ელემენტების ნამრავლს ვუწოდებთ და შემდგომში ავღნიშნავთ ასე $x \cdot y$) ისე რომ სიმრავლე $R \setminus \{0\}$ გამრავლების ოპერაციის მიმართ აბელის ჯგუფი (რომელსაც სხვაგვარად მულტიპლიკაციურ აბელის ჯგუფს უწოდებენ), რაც ნიშნავს შემდეგს:

5. $\forall x, y \in R \setminus 0 : \quad x \cdot y = y \cdot x$ (კომუტაციურობის კანონი);
6. $\forall x, y, z \in R \setminus 0 : \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ასოციაციურობის კანონი);

7. $\exists 1 \in R:\ 1 \cdot x = x \quad \forall x \in R$. (ერთეულის არსებობა);
8. $\forall x \in R \setminus 0 \quad \exists x^{-1}:\ x \cdot x^{-1} = 1$ (შებრუნებული ელემენტის არსებობა);

(I,II) კავშირი შეკრების და გამრავლების ოპერაციას შორის

გამრავლების ოპერაცია დისტრიბუციულია შეკრების ოპერაციის მიმართ ანუ:
9. $\forall x, y, z \in R:\quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (დისტრიბუციულობის კანონი შეკრების მიმართ);

შენიშვნა 2.3. თუ რაიმე G სიმრავლეზე განსაზღვრულია ორი ოპერაცია რომლებიც აკმაყოფილებენ 1-9 აქსიომათა სისტემას მაშინ G უწოდებენ ველს.

(III) დალაგების აქსიომები

R სიმრავლე წრფივად დალაგებული სიმრავლეა: ანუ R სიმრავლეში განსაზღვრულია $\leq$ მიმართება შემდეგი თვისებებით

10. $\forall x \in R:\ x \leq x$;
11. $\forall x, y \in R:\ (x \leq y \ \text{და}\ y \leq x) \Rightarrow (x = y)$;
12. $\forall x, y, z \in R:\ (x \leq y \ \text{და}\ y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$;
13. $\forall x, y \in R:\ x \leq y$ ან $y \leq x$;

(I,III) კავშირი შეკრების ოპერაციას და R დალაგების მიმართებას შორის

14. $\forall x, y, z \in R:\ (\ x \leq y\ ) \Rightarrow (\ x + z \leq y + z\ )$;

(II,III) კავშირი გამრავლების ოპერაციას და დალაგების მიმართებას შორის

15. თუ $x, y \in R$ რიცხვებისთვის $0 \leq x$ და $0 \leq y$, მაშინ $0 \leq x \cdot y$;

(IV) სისრულის (უწყვეტობის) აქსიომა

16. თუ არაცარიელი $X, Y \subset R$ ქვესიმრავლეები ისეთია, რომ $\forall x \in X$ და $\forall y \in Y$ რიცხვებისთვის სრულდება $x \leq y$ უტოლობა, მაშინ $\exists c \in R$ ისეთი, რომ $x \leq c \leq y$ $\forall x \in X$ და $\forall y \in Y$ ელემენტებისათვის.

თუ ჩვენ რაიმე G სიმრავლეში ვაჩვენეთ რომ ზემოთ მოყვანილი აქსიომები სრულდება, ვიტყვით, რომ G წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის კონკრეტულ რეალიზაციას ანუ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ერთ-ერთ მოდელს. ბუნებრივია ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ერთი მაინც სიმრავლე ზემოთ მოყვანილი თვისებით. ამ კითხვას დადებითი პასუხი გააჩნია. სწორედ სკოლის კურსში შესწავლილ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არის 1-16 თვისებათა მატარებელი. მოყვანილი აქსიომებზე დაყრდნობით სრული სიმკაცრით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ნატურალურ N, მთელი Z, რაციონალური Q და ბოლოს ირაციონალურ რიცხვთა I სიმრავლე. მეორე მნიშვნელოვანი კითხვა რომელიც აღნიშნულ პრობლემატიკასთან დაკავშირებით დაისმის არის საკითხი მოდელის ერთადერთობის შესახებ, რომელიც ასეთნაირად წყდება: ვთქვათ დამოუკიდებლად ავაგეთ ორი R_A, R_B სიმრავლე (მოდელი) რომლებიც აკმაყოფილებენ 1-16 პირობებს (წარმოიდგინეთ ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენა ათობით და ორობით სისტემაში, რომლებიც წარმოადგენენ

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ორ დამოუკიდებელ რეალიზაციას) , მაშინ არსებობს ბიექცია $f: R_A \to R_B$, რომელიც ინახავს არითმეტიკულ ოპერაციებს და დალაგებას, ე.ი.

$1) f(x+y) = f(x) + f(y); 2) f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y); 3) x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y).$

მაშასადამე R_A და R_B მოდელები წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ორ ტოლფას (თანაბარუფლებიან) მოდელს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ რომ აგებული მოდელები იზომორფულია.

ნამდვილ რიცხვების ზოგიერთი ალგებრული თვისება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, როგორც ალგებრული სტრუქტურა წარმოადგენს ალგებრულ ველს(1-9 აქსიომები). აღნიშნული აქსიომების გამოყენებით ჩვენ მკაცრად შეგვძლია დავამტკიცოთ ნამდვილ რიცხვთა ყველა ის ალგებრული თვისება, რომელსაც <ბუნებრივად> ვიყენებდით სკოლის კურსში. ამ საკითხებს უფრო დაწვრილებით შეისწავლით ალგებრას კურსში და ჩვენ ამაზე არ შევრჩერდებით. მოვიყვანთ მხოლოდ რამოდენიმე სავარჯიშოს. სახელდებრ: გამოიყენეთ 1-9 აქსიომები და აჩვენეთ, რომ

1. $\forall x \in R$ სამართლიანია ტოლობა $x \cdot 0 = 0$
2. $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \forall (y = 0)$;
3. $-x = (-1) \cdot x$;
4. $\forall x \in R \quad -x = (-1) \cdot x$;
5. $\forall x \in R \quad (-1) \cdot (-x) = x$;
6. $\forall x \in R \quad (-x) \cdot (-x) = x$;

დალაგების აქსიომიდან გამომდინარე შედეგები. 1-15 აქსიომების ძალით ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე წარმოადგენს წრფივად დალაგებულ ალგებრულ ველს. აღნიშნული აქსიომების გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ უტოლობათა თვისებები, რომელსაც სკოლის კურსში ვიყენებდით. მოვიყვანთ რამოდენიმე დებულებას სავარჯიშოს სახით. 1-15 აქსიომების საფუძველზე აჩვენეთ,რომ

1) $0 < 1$ 2) $(0 < x) \Rightarrow (0 < x^{-1})$ 3) $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < x \cdot y)$ 4) $(0 < x) \wedge (y < z) \Rightarrow (x \cdot y < x \cdot z)$ და ა.შ.

განმარტება 2.4. რიცხვი რომელიც 0-ზე მეტია დადებით რიცხვს ვუწოდებთ, რიცხვი რომელიც ნულზე ნაკლებია უარყოფით რიცხვს ვუწოდებთ. მაშასადამე რიცხვი 1 დადებითი რიცხვია.

სისრულის აქსიომა და რიცხვითი სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრის არსებობა.

ვთქვათ, A ნამდვილ რიცხვთა რაიმე ქვესიმრავლეა R-დან, $A \subset R$.

განსაზღვრება 2.5. A სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული ზემოდან, თუ არსებობს $m \in R$ ნამდვილი რიცხვი ისეთი, რომ $\forall x \in A$ რიცხვისთვის $x \le m$. ამ შემთხვევაში m რიცხვს უწოდებენ A სიმრავლის ზედა საზღვარს(მაჟორანტს).

A სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული ქვემოდან, თუ არსებობს $p \in R$ ნამდვილი რიცხვი ისეთი, რომ $\forall x \in A$ რიცხვისთვის $x \ge p$. ამ შემთხვევაში p რიცხვს უწოდებენ A სიმრავლის ქვედა საზღვარს(მინორანტს).

A სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ ის არის შემოსაზღვრული როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

განსაზღვრება 2.6. $a \in A$ ელემენტს ეწოდება A სიმრავლის უდიდესი(ანუ მაქსიმალური) ელემენტი თუ $\forall x \in A$ ელემენტისათვის $x \le a$.

$a \in A$ ელემენტს ეწოდება A სიმრავლის უმცირესი(ანუ მინიმალური) ელემენტი თუ $\forall x \in A$ ელემენტისათვის $a \le x$. A სიმრავლის მაქსიმალურ, მინიმალურ ელემენტს(თუ არსებობს) ავღნიშნავთ სიმბოლოებით $\max A, \min A$.

მე-11 აქსიომის ძალით ადვილად დავასკვნით, რომ თუ რიცხვით სიმრავლეს გააჩნია მაქსიმალური(მინიმალური) ელემენტი მაშინ ის ერთადერთია (გაიაზრეთ).

შევნიშნოთ, რომ შემოსაზღვრულ სიმრავლეში შეიძლება არ არსებობდეს მაქსიმალური ან მინიმალური ელემენტი.

მაგალითი 2.7. სიმრავლე $A = \{x \in R \mid 0 \le x < 1\}$ შემოსაზღვრულია, გააჩნია მინიმალური ელემენტი, მაგრამ არ გააჩნია მაქსიმალური ელემენტი.

განსაზღვრება 2.8. ზემოდან შემოსაზღვრული A სიმრავლის ზედა საზღვრებს შორის უმცირესს ეწოდება A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი, ანუ A სიმრავლის სუპრემუმი და აღინიშნება $\sup A$ სიმბოლოთი. ქვემოდან შემოსაზღვრული A სიმრავლის ქვედა საზღვრებს შორის უდიდესს ეწოდება ზუსტი ქვედა საზღვარი, ანუ ინფიმუმი და აღინიშნება $\inf A$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, $\sup A = a$, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1) $\forall x \in A: \ x \le a$; 2) $\forall a' < a$, $\exists x' \in A$ ისეთი, რომ $x' > a'$.

ასევე, $\inf A = b$, თუ

1) $\forall x \in A: \ x \ge b$; 2) $\forall b' > b$, $\exists x' \in A$ ისეთი, რომ $x' < b'$.

გავაანალიზოთ ზემოთ მოყვანილი განმარტება. ვთქვათ A სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ მას გააჩნია მაჟორანტი, ვთქვათ რიცხვი a_0, მაშინ ამ რიცხვზე მეტი ნებისმიერი რიცხვი აგრეთვე A სიმრავლის მაჟორანტაა. განმარტებით A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი მაჟორანტებს შორის მინიმალური ელემენტია. როგორც ზემოთ ვნახეთ საზოგადოდ შესაძლებელია ქვემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს არ გააჩნდეს მინიმალური ელემენტი. მაშასადამე ის რომ მაჟორანტებს შორის არის მინიმალური მაჟორანტა დასაბუთებას მოითხოვს. აქ არსებით როლს თამაშობს სისრულის(მე-16) აქსიომა. სამართლიანია **შემდეგი ფუნდამენტალური თეორემა**:

თეორემა 2.9.ა)**(ზედა საზღვრის პრინციპი)** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ყოველ არაცარიელ ზემოდან შემოსაზღვრულ ქვესიმრავლეს გააჩნია ერთადერთი ზუსტი ზედა საზღვარი.

ბ) **(ქვედა საზღვრის პრინციპი)** არაცარიელ ქვემოდან შემოსაზღვრულ ქვესიმრავლეს გააჩნია ერთადერთი ზუსტი ქვედა საზღვარი.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ა) ნაწილი ბ) დამტკიცდება ანალოგიურად. როგორც უკვე ავღნიშნეთ თუ სიმრავლეს გააჩნია მინიმალური ელემენტი, მაშინ ის ერთადერთია, ამიტომ დასამტკიცებელია ზუსტი ზედა საზღვრის არსებობა.

ვთქვათ A სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია. ავღნიშნოთ B სიმბოლოთი A სიმრავლის ზედა საზღვრებს სიმრავლე, რომელიც ცხადია არაცარიელია, ე.ი. $B = \{y \in R \mid \forall x \in A (x \le y)\} \ne \varnothing$. A და B სიმრავლე აკმაყოფილებს სისრულის აქსიომის ყველა პირობას, მაშასადამე არსებობს $a \in R$ ისეთი, რომ $\forall x \in A, \forall y \in B$ გვაქვს $x \le a \le y$. საიდანაც დავასკვნით, რომ a წარმოადგენს A სიმრავლის მაჟორანტს და B სიმრავლის მინორანტს. a რიცხვი როგორც A სიმრავლის მაჟორანტი ცხადია შედის B სიმრავლეში. მაშასადამე $a = \min B = \sup A$. თეორემა დამტკიცებულია.

A სიმრავლის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები შეიძლება ეკუთვნოდეს თვით A სიმრავლეს და შეიძლება არ ეკუთვნოდეს. მაგალითად, $\sup(0;1)=\sup(0;1]=1$, $1\in(0;1]$ და $1\notin(0;1)$.

თუ A სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ იგი წარმოადგენს A სიმრავლის უდიდეს ელემენტს, ანუ მაქსიმუმს, ე. ი. $\sup A=\max A$. ასევე, თუ A სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ იგი წარმოადგენს A სიმრავლის უმცირეს ელემენტს, ანუ მინიმუმს, ე. ი. $\inf A=\min A$.

თუ A სიმრავლე არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან, ვწერთ $\sup A=+\infty$. თუ A სიმრავლე არ არის შემოსაზღვრული ქვემოდან, ვწერთ $\inf A=-\infty$.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ C ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა და $A\subset C$. აჩვენეთ, რომ $\sup A\le\sup C$.

2. ვთქვათ C ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა და $A\subset C$. აჩვენეთ, რომ $\inf A\ge\inf C$.

3. ვთქვათ A და B ($A\subset R, B\subset R$) ზემოდან (სათანადოდ ქვემოდან) შემოსაზღვრული სიმრავლეებია, მაშინ ზემოდან(ქვემოდან) შემოსაზღვრულია $A\cup B$ სიმრავლეც და

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\},$$
$$\inf(A\cap B)=\min\{\inf A,\inf B\}.$$

4. ვთქვათ A და B ($A\subset R, B\subset R$) შესაბამისად ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეებია ისეთი, რომ A სიმრავლის ყოველი რიცხვი ა) არ აღემატება, ბ) მკაცრად ნაკლებია B სიმრავლის ყოველ ელემენტზე. აჩვენეთ, რომ $\sup A\le\sup B$. აჩვენეთ, რომ ბ) შემთხვევაში საზოგადოდ $\sup A<\sup B$ უტოლობა სამართლიანი არ არის.

5. მოცემული სიმრავლეებისათვის იპოვეთ მათი (თუ არსებობს) მაქსიმალური და მინიმალური ელემენტი, ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები.

ა) $A=N$ (ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე), $A=Z$ (მთელ რიცხვთა სიმრავლე), $A=Q$ (რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე).

ბ) $A=Q\cap[0,1)$, $A=Q\cap(\sqrt{2},\sqrt{3}]$.

გ) $A=\left\{x\middle|x=\frac{1}{n};n\in N\right\}$;

დ) $\left\{1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}\middle|n\in N\right\}$;

ე) $A=\left\{x\middle|x=\frac{n}{n+1};n\in N\right\}$;

მ) $\left\{1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{n(n-1)/2}\middle|n\in N\right\}$

) $A=\left\{x\middle|x=-2+\frac{1}{n};n\in N\right\}$.

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}\middle|n\in N\right\}$

ზ) $A=\left\{x\middle|x=5-\frac{1}{2n+3};n\in N\right\}$,

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\middle|n\in N\right\}$

თ) $A=\left\{x\middle|x=\frac{2n-1}{3n+2};n\in N\right\}$.

$\left\{(1+1/n)^n\cdot(-1)^n+\sin\frac{\pi n}{4}\middle|n\in N\right\}$

ი) $A=\left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\,|\,n\in N\right\}$

$\left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{\pi n}{4}\middle|n\in N\right\}$

კ) $A=\left\{(-1)^{n-1}(2+\frac{3}{n})\,|\,n\in N\right\}$.

$\left\{\cos^n\frac{2\pi n}{3}\middle|n\in N\right\}$

$\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\middle|n\in N\right\}$

6. ვთქვათ მოცემულია $A, B \subset R$ სიმრავლეები. განვსაზღვროთ $A \oplus B = \{x \in R | x = a + b; a \in A, b \in B\}$ და $A \otimes B = \{x \in R | x = a \cdot b; a \in A, b \in B\}$. სამართლიანია თუ არა ტოლობები:

ა) $\sup(A \oplus B) = \sup A + \sup B; \sup(A \otimes B) = \sup A \cdot \sup B$.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

$1, 1+1, (1+1)+1,$ და ა.შ სახის რიცხვებს ავღნიშნავთ სიმბოლოებით 1,2,3,... და ვუწოდებთ ნატურალურ რიცხვებს. აქ მოყვანილი <განმარტება> მოითხოვს შემდგომ დასაბუთებას ვინაიდან რაიმე პროცესის გაგრძელება (რისთვისაც გამოვიყენეთ სიტყვა და ა.შ.) ყოველთვის არაა ცალსახა და შეიცავს გაურკვევლობის ელემენტებს.

განმარტება2.10. სიმრავლეს $X \subset R$ უწოდებენ ინდუქციურს, თუ ის ყოველ $x \in X$ რიცხვთან ერთად შეიცავს $x+1$ რიცხვსაც.

მაგალითი2.11. R ინდუქციური სიმრავლეა, დადებით რიცხვთა სიმრავლე ინდუქციურია.

შევნიშნოთ, რომ თუ გვაქვს ინდუქციურ სიმრავლეთა რაიმე ერთობლიობა $X_\alpha; \alpha \in A$ და მათი თანაკვეთა $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ არაცარიელია, მაშინ X სიმრავლეც არაცარიელია.

მართლაც

$$(x \in X) \Rightarrow (\forall \alpha \in A, (x \in X_\alpha)) \Rightarrow (\forall \alpha \in A, (x+1 \in X_\alpha)) \Rightarrow (x+1 \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X).$$

განმარტება2.12. მინიმალურ ინდუქციურ სიმრავლეს რომელიც შეიცავს 1 ვუწოდებთ ინდუქციურ სიმრავლეს ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ყველა იმ ინდუქციურ სიმრავლეთა თანაკვეთა, რომელთაგან თითოეული შეიცავს 1 -ს უწოდებენ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს ავღნიშნავთ N სიმბოლოთი. $N = \{ 1; 2; 3; \ldots \}$.

შემდეგი ფუნდამენტალური პრინციპი ზემოთ მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ფუნდამენტალური პრინციპი:

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

ვთქვათ N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე E სიმრავლეს გააჩნია თვისება: $1 \in E$ და $x \in E$ რიცხვთან ერთად E სიმრავლე შეიცავს $x+1$ რიცხვს, მაშინ $E = N$.

სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ,რომ $(n \in N) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n-1) \in N)$
2. ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის სიმრავლეში $\{x \in N | n < x\}$ არსებობს მინიმალური ელემენტი და $\min\{x \in N | n < x\} = n+1$.
3. $(m \in N) \wedge (n \in N) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \leq m)$.
4. აჩვენეთ, რომ არ არსებობს ნატურალური რიცხვი x ისეთი რომ $n < x < n+1$ თუ $n \in N$.
5. ვთქვათ $n \in N$ და $n \neq 1$ აჩვენეთ, რომ $n-1 \in N$ და არ არსებობს ნატურალური x რიცხვი ისეთი, რომ $n-1 < x < n$.
6. აჩვენეთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ არაცარიელ ქვესიმრავლეს გააჩნია მინინმალური ელემენტი.

7. აჩვენეთ, რომ Z, Q ინდუქციური სიმრავლეებია.
8. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ინდუქციური სიმრავლე ზემოდან არაა შემოსაზღვრულია.
9. ააგეთ ინდუქციური სიმრავლეები, რომელიც განსხვავებულია N, Z, Q, R სიმრავლეებისაგან.
10. აჩვენეთ,რომ $(1+x)^n \geq 1+nx$, როცა $x > -1, n \in N$. (ბერნულის უტოლობა) როგორც შედეგი აღნიშნული ფაქტიდან აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $a > 1$ და ნატურალური $n > 1$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$.
11. ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ

ა) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}; n \in N$

ბ) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1+2+...+n)^2; n \in N$

გ) $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$ სადაც $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ $k! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k; 0! = 1$. (ნიუტონის ბინომის ფორმულა.)

დ) $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ სადაც $x_k \geq 0; k = 1,2,...,n.$ (საშუალო არითმეტიკულს და საშუალო გეომეტრიულს შორის კავშირი.)

ე) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n; n \in N, n > 1.$

ვ) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}; n \in N.$

ზ) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}; n \in N, n \geq 2$.

თ) $n^{n+1} > (n+1)^n; n \in N, n \geq 3$.

ი) $\left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k; 0 \leq x_k \leq \pi, k = 1,2,...,n.$

მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

განმარტება2.13. ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებს და ნულს ვუწოდებთ მთელ რიცხვებს. მთელ რიცხვთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ Z ასოთი. $Z = \{0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \ldots\}$.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

განმარტება2.14. $m \cdot n^{-1} \equiv \frac{m}{n}$ სახის რიცხვს(ანუ წილადს), სადაც m მთელი რიცხვია, ხოლო n ნატურალური, ვუწოდებთ რაციონალურ რიცხვს. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ Q ასოთი. $Q = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N\right\}$.

ცხადია, რომ $N \subset Z \subset Q$. რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებები (წილადებზე მოქმედებები შეგვიძლია გამოვიყვანოთ 1-9 აქსიომებზე დაყრდნობით თუმცა მასზე აქ არ შევრჩერდებით.)

ირაციონალური რიცხვები.

განმარტება2.15. ნამდვილი რიცხვები, რომლებიც არ არიან რაციონალური უწოდებენ ირაციონალურ რიცხვებს.

კლასიკური მაგალითი ირაციონალური რიცხვისა არის $\sqrt{2}$ ანუ რიცხვი შემდეგი თვისებით $s \in R, s > 0$ და $s^2 = 2$. ასეთი რიცხვის არსებობის დამტკიცება არსებითად ეყრდნობა სისრულის აქსიომას.

თეორემა2.16.

არსებობს დადებითი რიცხვი $s \in R$, რომლის კვადრატია 2 და ის არ არის რაციონალური რიცხვი.

დამტკიცება. ვთქვათ X, Y სიმრავლეები განსაზღვრულია შემდეგი წესით: $X = \{x > 0 \mid x^2 < 2\}; Y = \{y > 0 \mid y^2 > 2\}$. ვინაიდან $1 \in X$ და $2 \in Y$ ამიტომ ისინი არაცარიელები არიან. გარდა ამისა დადებითი x, y რიცხვებისათვის გვაქვს $(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2)$ ამიტომ ნებისმიერი $x \in X$ რიცხვი ნაკლებია ნებისმიერ $y \in Y$ რიცხვზე. სისრულის აქსიომის ძალით არსებობს რიცხვი $s \in R$ თვისებით $x \le s \le y \quad \forall x \in X$ და $\forall y \in Y$. ვაჩვენოთ, რომ $s^2 = 2$.

დაუშვათ, რომ $s^2 < 2$. ავღნიშნოთ $S = s + \frac{2 - s^2}{3}$. გვექნება $S > s$ და $S^2 < 2$. საიდანაც დავასკვნით, რომ $S \in X$, ეს უკანასკნელი კი შეუძლებელია ვინაიდან ნებისმიერი $x \in X \quad x \le s$.

ანალოგიურად დაუშვათ $s^2 > 2$. ავღნიშნოთ $S = s - \frac{s^2 - 2}{3}$. გვექნება $S < s$ და $S^2 > 2$. საიდანაც დავასკვნით, რომ $S \in Y$, ეს უკანასკნელი კი შეუძლებელია ვინაიდან ნებისმიერი $y \in Y \quad x \ge s$. მაშასადამე გვაქვს $s^2 = 2$.

ვაჩვენოთ, რომ $s \notin Q$. დაუშვათ $s \in Q$. განვიხილოთ წარმოდგენა $s = \frac{m}{n}$ უკვეცი წილადის სახით წარმოდგენა. გვექნება $m^2 = 2n^2$. საიდანაც დავასკვნით, რომ m^2 და მაშასადამე m იყოფა 2-ზე. ე.ი. $m = 2k$. თუ ამ უკანასკნელს გავვითვალისწინებთ ტოლობაში $s^2 = 2$, გვექნება $2k^2 = n^2$ საიდანაც დავასკვნით, რომ n იყოფა 2-ზე. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $s = \frac{m}{n}$ წილადი იკვეცება 2-ზე, რაც პირობის ძალით შეუძლებელია. თეორემა დამტკიცებულია.

არქიმედეს პრინციპი.

არქიმედეს პრინციპი წარმოადგენს კლასიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანეს პრინციპს, რომელიც საფუძვლად უდევს ნამდვილი რიცხვების პრაქტიკულ გამოყენებას რაიმე სიდიდის გაზომვის დროს. აღნიშნული პრინციპის დასაბუთება ეყრდნობა სისრულის აქსიომას (უფრო ზუსტად მის ექვივალენტურ დებულებას ზუსტი ზედა საზღვრის შესახებ). მთელ რიგ სახელმძღვანელოებში ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის აქსიომატიკური აგების დროს არქიმედეს აქსიომას ერთერთ აქსიომადაა მიჩნეული.

როგორც ქვემოთ დავინახავთ არქიმედეს აქსიომა გამოსახავს დამოკიდებულებას ნატურალურ (მთელ რიცხვებს) და სისრულის აქსიომას შორის.

ლემა 2.17. ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ ზემოდან შემოსაზღვრულ არაცარიელ სიმრავლეს გააჩნია მაქსიმალური ელემენტი.

დამტკიცება. ვთქვათ $E \subset N$ ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა. ზედა საზღვრის პრინციპის თანახმად არსებობს $\sup E = s \in R.$. სიმრავლის ზედა საზღვრის განმარტების ძალით E სიმრავლეში მოიძებნება ნატურალური რიცხვი $n \in N$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $s-1 < n \le s$. მაშინ $n = \max E$, ვინაიდან ყველა ნატურალური რიცხვი რომელიც მეტია n, არაა ნაკლები $n+1$, ხოლო $n+1>s$. მაშასადამე n-ზე დიდი ნატურალური რიცხვი არ შედის E სიმრავლეში. ლემა დამტკიცებულია.

შედეგი2.18. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა შემოსაზღვრული.

წინააღმდეგ შემთხვევაში რომელიღაც ნატურალური რიცხვი $n \in N$ მაქსიმალურია, მაგრამ $n < n+1$ და $n+1 \in N$, რაც ეწინააღმდეგება იმას,რომ n მაქსიმალურია.

ანალოგიურად როგორც ლემა 2.17 შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა 2.19.. ა)მთელ რიცხვთა ნებისმიერ ზემოდან შემოსაზღვრულ არაცარიელ სიმრავლეს გააჩნია მაქსიმალური ელემენტი.

ბ) მთელ რიცხვთა ნებისმიერ ქვემოდან შემოსაზღვრულ არაცარიელ სიმრავლეს გააჩნია მინიმალური ელემენტი.

გ) მთელ რიცხვთა სიმრავლე არააშემოსაზღვრული არც ქვემოდან და არც ზემოდან.

თეორემა 2.20. (არქიმედეს პრინციპი) ვთქვათ h რაიმე დადებითი რიცხვია. ნებისმიერი $x \in R$ რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი მთელი რიცხვი k ისეთი, რომ $(k-1)h \le x < kh$.

დამტკიცება. ვინაიდან Z არაა შემოსზღვრული ზემოდან, ამიტომ $\left\{ n \in Z \middle| \frac{x}{h} < n \right\}$ სიმრავლე არაცარიელი მთელ რიცხვთა ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა. ამიტომ ამ სიმრავლეში არის მინიმალური ელემენტი k, ე.ი $k-1 \le \frac{x}{h} < k$.

ვინაიდან $h>0$ ამიტომ ეს უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია დასამტკიცებელი უტოლობების. ერთადერთობა ავტომატურად გამოდის სიმრავლის მინიმალური ელემენტის ერთადერთობიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.21. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ნატურალური n რიცხვი ისეთი, რომ $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

მართლაც არქიმედეს პრინციპის ძალით არსებობს $n \in N$ ისეთი, რომ $1 < \varepsilon \cdot n$. ვინაიდან $0<1$ და $0<\varepsilon$, გვაქვს $0<n$. მაშასადამე $n \in N, 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

შედეგი2.22. თუ რიცხვი $x \in R$ ისეთია, რომ $0 \le x$ და ნებისმიერი $n \in N$ სამართლიანია უტოლობა $x < \frac{1}{n}$, მაშინ $x=0$.

დამტკიცება . უტოლობა $0<x$ შეუძლებელია შედეგი 2.21-ის ძალით.

შედეგი2.23. ნებისმიერი $a,b\in R$ რიცხვებისათვის სადაც $a<b$ მოიძებნება ერთი მაინც რაციონალური რიცხვი r ისეთი, რომ $a<r<b$.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ შედეგი 2.21-ით და ავარჩიოთ $n\in N$, ისეთი რომ $0<\frac{1}{n}<b-a$. არქიმედეს პრინციპის თანახმად არსებობს ერთადერთი $m\in N$, ისეთი რომ $\frac{m-1}{n}\le a<\frac{m}{n}$. მაშინ $\frac{m}{n}<b$, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება $\frac{m-1}{n}\le a<b\le\frac{m}{n}$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $\frac{1}{n}>b-a$. მაშასადამე გვაქვს, რომ $\frac{m}{n}\in Q$ და $a<\frac{m}{n}<b$.

თვლის პოზიციური სისტემები. არქიმედეს პრინციპი უდევს საფუძვლად ნებისმიერი რიცხვის წარმოდგენას ეგრეთწოდებულ პოზიზიურ სისტემაში ფუძით q, სადაც q რაიმე ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია.

ლემა 2.24. ვთქვათ $q>1$ რაიმე ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი $x\in R$ რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი მთელი $k\in Z$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$q^{k-1}\le x<q^k.$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ ყველა $q^k, k\in N$ სახის რიცხვებისაგან შემდგარი სიმრავლე ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ სიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი s და ზუსტი ზედა საზღვრის განმარტების ძალით მოვძებნით ნატურალურ $m\in N$ რიცხვ ისეთს, რომ $\frac{s}{q}<q^m\le s$. მაშინ $s<q^{m+1}$ და მივიღებთ, რომ s არ არის ზუსტი ზედა საზღვარი ჩვენი სიმრავლის.

ვინაიდან $1<q$ ამიტომ $q^m<q^n$ $m,n\in N, m<n$. მაშასადამე ნებისმიერი $c\in R$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $n_0\in N$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $n>n_0$ გვექნება $c<q^n$. ამ უკანასკნელიდან გამოდის, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ მოიძებნება $M\in N$ ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური $m>M$ რიცხვისათვის $\frac{1}{q^m}<\varepsilon$ გვექნება. მართლაც საკმარისია ავიღოთ $c=\frac{1}{\varepsilon}$ და $n_0=M$, მაშინ $\frac{1}{\varepsilon}<q^m$ როცა $m>M$.

მთელ რიცხვთა $n\in Z$ სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $x<q^n$, ყოველი ფიქსირებული $x>0$ რიცხვისათვის შემოსაზღვრულია ქვემოდან.

ამიტომ ამ სიმრავლეში არის უმცირესი ელემენტი k , რომელიც არის საძიებელი რიცხვი ვინაიდან სამართლიანია უტოლობები $q^{k-1} \le x < q^k$.
ასეთი მთელი k რიცხვის ერთადერთობა გამოდის იმ ფაქტიდან რომ თუ $m,n \in Z$ და მაგალითად $m < n$ მაშინ $m \le n-1$ და ამიტომ $q^m \le q^{n-1}$ როცა $q > 1$. მართლაც უკანასკნელი შენიშვნიდან გამოდის, რომ უტოლობები $q^{m-1} \le x < q^m, q^{n-1} \le x < q^n$ ერთროულად ვერ შესრულდება თუ $m \ne n$ ვინაიდან ორივე უტოლობიდან გვექნება უტოლობა $q^{n-1} \le x < q^m$.

ზემოთ მოყვანილი ლემა 2.24-ს ჩვენ გამოვიყენებთ ნებისმიერი $x \in R$ ნამდვილი რიცხვის პოზიციურ სისტემაში წარმოდგენის დასაბუთებისათვის.

ვთქვათ $q > 1$ რაიმე ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. ლემა 2.24-ის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ ერთადერთი $p \in Z$ ისეთი, რომ

$$q^p \le x < q^{p+1}.$$

განმარტება 2.25. რიცხვი $p \in Z$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $q^p \le x < q^{p+1}$ უწოდებენ x რიცხვის რიგის (q ფუძის მიმართ).

არქიმედეს პრინციპის თანახმად მოიძებნება ერთადერთი ნატურალური რიცხვი $\alpha_p \in N$ ისეთი, რომ

$$\alpha_p q^p \le x < \alpha_p q^p + q^p \quad (*)$$

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ $\alpha_p \in \{1,....,q-1\}$. ($*$) პირობისა და არქიმედეს პრინციპის ძალით არსებობს ერთადერთი რიცხვი $\alpha_{p-1} \in \{1,....,q-1\}$ ისეთი, რომ

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} \le x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + q^{p-1}.$$

თუ უკვე შევასრულებულია ანალოგიური მოქმედება n-ჯერ, მაშინ გვექნება

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + ... + \alpha_{p-n} q^{p-n} \le x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + ... + \alpha_{p-n} q^{p-n} q^{p-n} + q^{p-n}.$$

არქიმედეს პრინციპის თანახმად მოიძებნება $\alpha_{p-n-1} \in \{1,....,q-1\}$ ისეთი, რომ

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + ... + \alpha_{p-n} q^{p-n} + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} \le x <$$

$$< \alpha_p q^p + \alpha_p q^{p-1} + ... + \alpha_{p-n} q^{p-n} q^{p-n} + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} + q^{p-n-1}.$$

მაშასადამე აგებულია ალგორითმი რომლის მიხედვითაც ნებისმიერ დადებით ნამდვილ $x \in R$ რიცხვს ცალსახად ეთანადება მიმდევრობა $\alpha_p \alpha_{p-1} .. \alpha_{p-n} \cdots$ ისე, რომ მიმდევრომის თითოეული წევრი ეკუთვნის $\{1,....,q-1\}$ სიმრავლეს. თუ არაფორმალურად ვიტყვით, ჩვენ ავაგეთ რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა

$$r_n = \alpha_p q^p + \alpha_p q^{p-1} + ... + \alpha_{p-n} q^{p-n} q^{p-n}$$

ისეთი, რომ

$$r_n \le x < r_n + \frac{1}{q^{n-p}}. \quad (**)$$

როგორც ვხედავთ, ჩვენ ავაგეთ xრისხვის სპეციალური ტიპის მიახლოებები რაციონალური r_n რიცხვების საშუალებით. ამასთანავე $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}\cdots$ სიმბოლო არის აგებული $\{r_n\}$რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობის <შიფრი>. იმისათვის, რომ ამ შიფრის საშუალებით აღვადგინოთ $\{r_n\}$ მიმდევრობა ამისათვის აუცილებელია აღნიშნული იქნას x რიცხვის რიგი p.

შევთანხმდეთ, რომ თუ $p\geq 0$, მაშინ α_0 -ის შემდეგ დავწეროთ მძიმე(ან წერტილი), ხოლო თუ $p<0$

მაშინ α_p -ს მარცხნივ დავწეროთ $|p|$ რაოდენობის ნული და შემდეგ მძიმე და ნული.

მაგალითი. ვთქვათ $q=10$ მაშინ

$$20,37=2\cdot 10^1+0\cdot 10+1\cdot 10^0+3\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}$$

$$0,0034=3\cdot 10^{-3}+4\cdot 10^{-4}$$

მაშასაამე ციფრის მნიშვნელობა $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}\cdots$ სიმბოლურ ჩანაწერში დამოკიდებულია იმაზე თუ ეს ციფრი რა პოზიციას იკავებს მძიმის მიმართ. (**) -დან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ორ განსხვავებულ x,x' რიცხვებს შეესაბამება რაციონალურ რიცხვთა სხვადასხვა $\{r_n\}$, $\{r'_n\}$ მიმდევრობები და მაშასადამე სხვადასხვა სიმბოლოები $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}\cdots$ და $\alpha'_p\alpha'_{p-1}..\alpha'_{p-n}\cdots$.

ახლა გავარკვიოთ საკითხი ნებისმიერ $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}\cdots$ სიმბოლოს შეესაბამება თუ არა რაიმე რიცხვი $x\in R$. ამ კითხვას უარყოფითი პასუხი გააჩნია.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ აღწერილი ალგორითმის მიხედვით ნაპოვნი რიცხვები (რომელთაც ციფრებს ვუწოდებთ) $\alpha_{p-1}\in\{1,....,q-1\}$ არ შეიძლება ყველანი რაღაც ნომრიდან დაწყებული ერთიდაიგივე $q-1$ -ის ტოლი იყოს.

მართლაც, თუ $n>k$ გვაქვს

$r_n=\alpha_p q^p+\alpha_p q^{p-1}+...+\alpha_{p-k}q^{p-k}q^{p-k}+(q-1)q^{n-k-1}+...+(q-1)q^{p-n}$ ე.ი.

$r_n=r_k+\frac{1}{q^{k-p}}-\frac{1}{q^{n-p}}$ და ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ r_n ზემოთ მოყვანილ განმარტებას გვექნება

$$r_k+\frac{1}{q^{k-p}}-\frac{1}{q^{n-p}}\leq x<r_k+\frac{1}{q^{k+p}}.$$

მაშინ როცა $n>k$ გვექნება $0<r_k+\frac{1}{q^{k-p}}-x<\frac{1}{q^{n-p}}$

ეს უკანასკნელი ლემა 2.24-ის ძალით შეუძლებელია.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\alpha_{p-k-1},\alpha_{p-k},...\alpha_{p-n}$ ციფრებს შორის ერთი მაინც ნაკლებია $q-1$ მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ
$r_n < r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}}$ ანუ რაც იგივეა $r_n + \frac{1}{q^{n-p}} = r_k + \frac{1}{q^{k-p}}$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი სიმბოლოს $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}...$ რომელიც შედგება ციფრებისაგან $\alpha_k \in \{1,....,q-1\}$ და რაგინდ შორს $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}...$ ჩანაწერში გვხვდება ციფრი განსხვავებული $q-1$ საგან შეესაბამება რაიმე რიცხვი $x \in R$. მართლაც $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}...$ სიმბოლოს საშუალებით ავაგოთ (როგორც ზემოთ) რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა $\{r_n\}$. ამ მიმდევრობის აგებდან გამომდინარე გვექნება უტოლობები $r_0 \le r_1 \le r_2 \le .. \le r_n \le ...$ და

$$r_0 \le r_1 \le r_2 \le ... < .. \le r_n + \frac{1}{q^{n-p}} \le .. \le r_1 + \frac{1}{q^{1-q}} \le r_0 + \frac{1}{q^{-p}}$$

მკაცრი უტოლობა ჩანაწერში უნდა გავიგოთ ასე: მარცხენა მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი ნაკლებია მკაცრად მარჯვენა მიმდევრობის ნებისმიერ წევრზე. თუ ავიღებთ $x = \sup_{n \in N} r_n$ მაშინ $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_{p-n}...$ სიმბოლოს შეესაბამება რიცხვი x.

მაშასადამე ნებისმიერ $x \in R$ რიცხვს ჩვენ ცალსახად შეუსაბამედ სიმბოლო $\alpha_p\alpha_{p-1}..\alpha_0..$ თუ $p \ge 0$ ან $0,0,..0,\alpha_p...$ თუ $p < 0$. მიღებულ წარმოდგენას უწოდებენ x რიცხვის წარმოდგენას პოზიციურ სისტემაში q ფუძით. $x < 0$ შეუსაბამოთ $-x$ რიცხვის წარმოდგენა უარყოფითი ნიშნით. ხოლო 0-ს შეუსაბამოთ სიმბოლო 0,0...0....

კლასიკური ანალიზის სამი ფუნდამენტალური თეორემა

ჩვენ დავამტკიცებთ სამ ფუნდამენტურ თეორემას, რომელებსაც ფართოდ იყენებენ მათემატიკურ ანალიზში. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული თეორემები შეიძლება გამოყენენული იქნეს ნამდვილ რიცხვთა აქსიომატიკური აგებისას, როგორც აქსიომები სისრულის აქსიომის ნაცვლად. (ამ შემთხვევაში სისრულის აქსიომა შეგვეძლება დავამტკიცოთ როგორც თეორემა.)
თეორემა ჩადგმული სეგმენტების შესახებ(კოში-კანტორის პრინციპი)

განმარტება 2.26. ფუნქციას $f : N \to X$, სადაც N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა უწოდებენ მიმდევრობას X სიმრავლეში ანუ უბრალოდ მიმდევრობას. f ფუნქციის $f(n)$ მნიშვნელობებს რომლებიც ეთანადებიან $n \in N$ რიცხვს ავღნიშნავთ x_n-ით და უწოდებენ მიმდევრობის n-ურ წევრს.

განმარტება 2.27. ვთქვათ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ სიმრავლეთა რაიმე მიმდევრობაა. თუ $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ (ე.ი. $\forall n \in N(X_n \supset X_{n+1})$, მაშინ ამბობენ რომ მოცემულია ერთმანეთში ჩალაგებულ სიმრავლეთა მიმდევრობა.

თეორემა 2.28. ერთმანეთში ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობისათვის $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$, არსებობს ერთი მაინც წერტილი $c \in R$, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. თუ ამავე დროს ცნობილია, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს მოცემულ სეგმენტთა მიმდევრობაში სეგმენტი I_k, რომლის სიგრძე $|I_k| < \varepsilon$, მაშინ c ერთადერთი საერთო წერტილია მოცემული სეგმენტებისა.

დამტკიცება. ვთქვათ $I_m = [a_m, b_m], I_n = [a_n, b_n]$ ჩვენი მიმდევრობის ნებისმიერი ორი სეგმენტია. შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია უტოლობა $a_m \le b_n$. მართლაც წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა $a_n \le b_n < a_m \le b_m$, რაც იმას ნიშნავს, რომ I_n, I_m სეგმენტებს საერთო წერტილი არ გააჩნია, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. (რადგან დიდი ნომრით სეგმენტი ქვესიმრავლეა მეორე სეგმენტის.)

განვიხილოთ სიმრავლეები: $A = \{a_m, m \in N\}, B = \{b_n, n \in N\}$. აგებული სიმრავლეები აკმაყოფილებენ სისრულის აქსიომის პირობებს, საიდანაც დავასკვნით, რომ არსებობს $c \in R$ ისეთი, რომ $\forall a_m \in A, \forall b_m \in B$ სრულდება უტოლობები $a_m \le c \le b_n$. კერძოდ კი $a_n \le c \le b_n, \forall n \in N$. მაშასადამე წერტილი c ეკუთვნის ყველა სეგმენტს.

ავამტკიცოტ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ c_1, c_2 ორი ნებისმიერი წერტილია რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. თუ ისინი განსხვავებულია მაგალითად $c_1 < c_2$, მაშინ ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის გვაქვს $a_n \le c_1 < c_2 \le b_n, \forall n \in N$. საიდანაც გვექნება $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n, \forall n \in N$. პირობის ძალით მოცემული ყოველი სეგმენტის სიგრძე არ შეიძლება იყოს $c_2 - c_1$ დადებით რიცხვზე მეტი, ვინაიდან ჩვენს მიმდევრობაში არსებობენ სეგმენტები რაგინდ მცირე სიგრძით. მაშასადამე მოცემულ სეგმენტებს ერთადერთი საერთო წერტილი გააჩნიათ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა ინტერვალის სასრული დაფარვის შესახებ. (ბორელ- ლებეგის პრინციპი.)

განმარტება 2.29. ამბობენ რომ სიმრავლეთა სისტემა(სიმრავლეთა ერთობლიობა) $S = \{X\}$ ფარავს Y სიმრავლეს, თუ $Y \subset \bigcup_{X \in S} X$ (ანუ Y სიმრავლის ნებისმიერი y ელემენტი ეკუთვნის S სისტემის ერთერთ X სიმრავლეს მაინც). S სიმრავლის ნებისმიერ არაცარიელ ქვესიმრავლეს უწოდებენ S სისტემის ქვესისტემას.

თეორემა 2.30. ინტერვალთა ნებისმიერი სისტემისათვის, რომელიც ფარავს სეგმენტს, არსებობს სასრული ქვესისტემა, რომელიც აგრეთვე ფარავს მოცემულ სეგმენტს.

დამტკიცება. ვთქვათ $S = \{U\}$ არის U ინტერვალთა რაიმე სისტემა რომელიც ფარავს $I_1 = [a, b]$ სეგმენტს. თუ I_1 სეგმენტისათვის არ არსებობს ინტერვალთა სასრული ქვესისტემა, რომელიც ფარავს I_1 სეგმენტს მოვიქცეთ შემდეგნაირად: გავყოთ I_1 სეგმენტი შუაზე, მიღებული ორი ქვესეგმენტიდან ცხადია ერთ-ერთს მაინც(ავღნიშნოთ ის I_2-ით) ექნება შემდეგი თვისება: მისთვის არ არსებობს მოცემული ინტერვალების სასრული სისტემა რომელიც მას ფარავს. I_2 სეგმენტზე მოვახდინოთ იგივე პროცესი. ასეთნაირად მივიღებთ I_3 სეგმენტს და ა.შ.

მაშასადამე ასეთი პროცესით ჩვენ ავაგებთ $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას, რომლის ყოველი სეგმენტისათვის არ არსებობს დამფარავი ინტერვალთა $S = \{U\}$ სისტემის სასრული ქვესისტემა, რომელიც ამ სეგმენტს ფარავს. აგებულ სეგმენტთა მიმდევრობაში არის სეგმენტები რაგინდ მცირე სიგრძით. (შევნიშნოთ, რომ $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$.) თეორემა ძალით არსებობს ერთადერთი $c \in R$ წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $I_n, n \in N$. ვინაიდან $c \in I_1 = [a,b]$, ამიტომ იარსებებს ინტერვალი $(\alpha, \beta) = U \in S$ დამფარავი S სისტემიდან, რომელიც შეიცავს c წერტილს, ე.ი. $\alpha < c < \beta$. ვთქვათ $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. სეგმენტთა აგებულ მიმდევრობაში მოვძებნოთ სეგმენტი I_n თვისებით $|I_n| < \varepsilon$. ვინაიდან $c \in I_n$ და $|I_n| < \varepsilon$ გვექნება $I_n \subset U = (\alpha, \beta)$, ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ I_n სეგმენტისათვის არ არსებობს იტერვალთა სასრული ქვედაფარვა. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ჩვენი დაშვება არასწორია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა ზღვრული წერტილის შესახებ. (ბოლცანო-ვაიერშტრასის პრინციპი)

განსაზღვრება 2.31. $x \in R$ წერტილის მიდამოს ვუწოდებთ ნებისმიერ ინტერვალს, რომელიც ამ წერტილს შეიცავს. x წერტილის δ მიდამოს ვუწოდებთ $(x - \delta, x + \delta)$ სახის ინტერვალს.

განსაზღვრება 2.32. $c \in R$ წერტილს უწოდებენ $X \subset R$ სიმრავლის ზღვრულ წერტილს, თუ ამ წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს უსასრულოდ ბევრ წერტილს X სიმრავლიდან.

მაგალითი 2.33. (a,b) ინტერვალისათვის ზღვრული წერტილია $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი.

თეორემა 2.34. ნებისმიერ შემოსაზღვრულ უსასრულო სიმრავლეს გააჩნია ერთი მაინც ზღვრული წერტილი.

დამტკიცება. ვთქვათ X უსასრულო შემოსაზღვრული სიმრავლეა R-დან. X სიმრავლის შემოსაზღვრულობის გამო რაიმე $I = [a,b]$ სეგმენტისათვის გვაქვს $X \subset [a,b]$. ვაჩვენოთ, რომ I სეგმენტის ერთი მაინც წერტილი არის X სიმრავლის ზღვრული წერტილი. დაუშვათ წინააღმდეგი. მაშინ ყოველი $x \in I$ წერტილისათვის არსებობს მიდამო $U(x)$ რომელიც ან საერთოდ არ შეიცავს რაიმე წერტილს X სიმრავლიდან ან მათი რაოდენობა სასრულია. ასეთნაირად ყოველი $x \in I$ წერტილისათვის აგებული ინტერვალთა $\{U(x)\}$ ერთობლიობა წარმოადგენს $I = [a,b]$ სეგმენტის დამფარავ ერთობლიობას. თეორემა 2.30-ის ძალით აღნიშნული დაფარვიდან გამოიყოფა I სეგმენტის სასრული ქვედაფარვა $U(x_1), U(x_2), ..., U(x_n)$. ვინაიდან $X \subset I$, ამიტომ ინტერვალთა ეს სისტემა ფარავს აგრეთვე X სიმრავლეს. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $U(x_k)$ ინტერვალი შეიცავს არაუმეტეს სასრული რაოდენობა წერტილებს X სიმრავლიდან. ვინაიდან აგებულ ინტერვალთა რაოდენობა სასრულია დავასკვნით, რომ X სიმრავლეც სასრულია, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ ჩალაგებულ ინტერვალთა ერთობლიობას შესაძლოა არ გააჩნდეს საერთო წერტილი.

2. აჩვენეთ, რომ სეგმენტის დამფარავ სეგმენტთა ერთობლიობიდან შეიძლება არ გამოიყოს ამ სეგმენტის სასრულ სეგმენტთა ქვედაფარვა.
3. აჩვენეთ, რომ ინტერვალის დამფარავ ინტერვალთა ერთობლიობიდან შეიძლება არ გამოიყოს სასრული რაოდენობა ინტერვალებისა, რომელიც კვლავ დაფარავს მოცემულ ინტერვალს.
4. აჩვენეთ, რომ ინტერვალის დამფარავ სეგმენტთა ერთობლიობიდან შეიძლება არ გამოიყოს სასრული რაოდენობა სეგმენტებისა, რომელიც ფარავს მოცემულ ინტერვალს.
5. აჩვენეთ,რომ თუ ნამდვილ რიცხვთა (1-16) აქსიომათა სისტემაში სისრულის (16) აქსიომას შევცვლით ა) ბოლცანო-ვაიერშტრასის პრინციპით ბ) ბორელ-ლებეგის პრინციპით მივიღებთ (1-16) აქსიომათა სისტემის ტოლფას აქსიომათა სისტემას. თუ სისრულის აქსიომას შევცვლით კოში-კანტორისა და არქიმედის პრინციპით მივიღებთ (1-16) სისტემის ტოლფას აქსიომათა სისტემას.
6. ვთქვათ n რაიმე ნატურალური რიცხვია, რომელიც არ წარმოაგგენს რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატს. $Q(\sqrt{n})$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ ყველა იმ $a+b\sqrt{n}$ სახის რიცხვთა ერთობლიობა სადაც $a,b\in Q$. აჩვენეთ, რომ $Q(\sqrt{n})$ სიმრავლე არის დალაგებული ალგებრული ველი(ბუნებრივი ალგებრული ოპერაციების და დალაგების მიმართ), რომელიც აკმაყოფილებს არქიმედეს აქსიომას, მაგრამ არ აკმაყოფილებს სისრულის აქსიომას.
7. იპოვეთ $E=\{\sin n^{\circ}\,|\,n\in N\}$ სიმრავლის ზღვრული წერტილები.
8. მოიყვანეთ უსასრულო სიმრავლის მაგალითი რომელსაც ა) არ გააჩნია ზღვრული წერტილი ბ) გააჩნია ერთი ზღვრული წერტილი გ) გააჩნია ზუსტად $n; n\in N$ ზღვრული წერტილი.
9. ვთქვათ მოცემულია სასრული სიმრავლე $E=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. ააგეთ სიმრავლე, რომლის ყველა ზღვრულ წერტილთა სიმრავლეა E.
10. ააგეთ თვლადი სიმრავლე, რომლის ზღვრულ წერტილთა სიმრავლე არაა თვლადი.
11. იპოვეთ ზღვრული წერტილები შემდეგი სიმრავლეების:

ა) $\left\{(-1)^{n-1}\left(2+\frac{1}{n}\right)\middle|\,n\in N\right\}$; ბ) $\left\{1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}\middle|\,n\in N\right\}$;

გ) $\left\{1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{n(n-1)/2}\middle|\,n\in N\right\}$; დ) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}\middle|\,n\in N\right\}$;

ე) $\left\{1+n\sin\frac{\pi n}{2}\middle|\,n\in N\right\}$; ვ) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\middle|\,n\in N\right\}$;

ზ) $\left\{(1+1/n)^n\cdot(-1)^n+\sin\frac{\pi n}{4}\middle|\,n\in N\right\}$; თ) $\left\{\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{\pi n}{4}\middle|\,n\in N\right\}$;

ი) $\{(-1)^n n\,|\,n\in N\}$; კ) $\left\{\cos^n\frac{2\pi n}{3}\middle|\,n\in N\right\}$; ლ) $\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\,\middle|\,n\in N\right\}$.

თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები.

განმარტება 2.35. X სიმრავლეს უწოდებენ თვლადს თუ არსებობს ბიექცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესა და X სიმრავლეს შორის ანუ არსებობს ფუნქცია $f : N \to R$ რომელიც ბიექციაა.

(მაშასადამე არაფორმალურად რომ ვთქვათ X სიმრავლე თვლადია თუ მისი ყველა ელემენტების გადასანომრავად საჭიროა ყველა ნატურალური რიცხვი, ანუ X სიმრავლე შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობის სახით.)

თეორემა 2.36. ა)თვლადი სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო ქვსიმრავლე თვლადია.

ბ) თვლად სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი სისტემის გაერთიანება თვლადია.

დამტკიცება. ა) საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო E ქვესიმრავლე თვლადია. საჭირო ბიექცია $f : N \to E$ ავაგოთ შემდეგნაირად: E სიმრავლეში არსებობს მინიმალური რიცხვი რომელიც შეუსაბამოთ $1 \in N$ და და ავღნიშნოთ ის e_1-ით. E სიმრავლე უსასრულოა ამიტომ $E \setminus \{e_1\}$ სიმრავლე უსასრულო ნატურალურ რიცხვთა ქვესიმრავლეა რომლის მინიმალური ელემენტი შეუსაბამოთ $2 \in N$ რიცხვს და ავღნიშნოთ ის e_2-ით. ანალოგიურად განვიხილოთ სიმრავლე $E \setminus \{e_1, e_2\}$ და აღნიშნული პროცესი გავაგრძელოთ. ვინაიდან E სიმრავლე უსასრულოა ამიტომ პროცესი არ შეიძლება შეწყდეს რაიმე $n \in N$ ბიჯზე და ინდუქციის პრინციპის თანახმად ნებისმიერ $n \in N$ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება რაიმე რიცხვი $e_n \in E$. აგებული ასახვა $f : N \to E$ ინექციაა. ვაჩვენოთ, რომ ის სურექციაა ანუ $f(N) = E$. ვთქვათ $e \in E$. სიმრავლე $\{n \in N \mid n \le e\}$ სასრულია, და მაშასადამე მისი ქვესიმრავლე $\{n \in E \mid n \le e\}$. ვთქვათ k ელემენთტა რაოდენობაა უკანასკნელ სიმრავლეში. მაშინ აგების თანახმად $e_k = e$.

ბ) ვთქვათ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ სიმრავლეთა თვლადი სისტემაა ისეთი, რომ თითოეული $X_m = \{x_m^1, x_m^2, ..., x_m^1, ...\}$ სიმრავლე თვლადია, ამიტომ სიმრავლე $X = \bigcup_{n \in N} X_n$ უსასრულოა. X_m სიმრავლის x_m^n ელემენტი შეგვიძლია გავაიგივეოთ (m,n) ნატურალურ რიცხვთა წყვილთან. მაშასადამე X სიმრავლე შეგვიძლია გავაიგივეოთ $N \times N$ სიმრავლის რაღაც უსასრულო ქვესიმრავლესთან. თეორემის ბ) პუნქტის დასამტკიცებლად საკმარისია ავაგოთ, რაიმე ბიექცია $f : N \times N \to N$. ასეთი ბიექციის ერთერთი მაგალითია ფუნქცია მოცემული წესით $(m,n) \to \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ (აღნიშნული ასახვას აქვს სახე: ჩვენ გადავნომრავთ სიბრტყის წერტილებს კორდინატებით (m,n) დიაგონალების გასწვრივ სადაც $m+n$ მუდმივია.) თეორემა დამტკიცებულია.

მაშასადამე ნებისმიერი თვლადი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე ან სასრულია ან თვლადი. იმ შემთხვევაში როცა სიმრავლე ან სასრულია ან თვლადი ამბობენ რომ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. მაშასადამე ზემოთ მოყვანილი დებულება შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: თვლად სიმრავლეთა არაუმეტეს თვლადი გაერთიანება თვლადია.

შედეგი. ღაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი $\frac{m}{n}$ შეიძლება გავაიგივეოთ დალაგებულ წყვილთან (m,n) $N \times N$ სიმრავლიდან. ორი წყვილი (m,n) და (m',n') გვაძლევს ერთიდაიგივე რაციონალურ რიცხვს , მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ისინი პროპორციულია. მაშასადამე თუ ნებისმიერი რაციონალური რიცხვისათვის იმ (m,n) წარმოდგენას ამოვირჩევთ, რომლის მეორე

კომპონენტი(მნიშვნელი) მინიმალური ნატურალური რიცხვია, მივიღებთ, რომ არსებობს ბიექცია Q სიმრავლესა და $N \times N$ სიმრავლის რაღაც უსასრულო ქვესიმრავლეს შორის ანუ Q სიმრავლე თვლადია.

არათვლადი სიმრავლეები.

განსაზღვრება 2.37. უსასრულო სიმრავლეს რომელიც თვლადი არაა არათვლადი სიმრავლე ეწოდება.

თეორემა 2.38. (კანტორი) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არათვლადია.

(მაშასადამე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიძლება წარმოდგენილი $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობის სახით.)

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $[0,1]$ სეგმენტი არაა თვლადი. დაუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ იგი თვლადია ანუ ის შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ მიმდევრობის სახით. ავიღოთ x_1 წერტილი და დავაფიქსიროთ $[0,1] = I_0$ სეგმენტის რაიმე ქვექვეგმენტი I_1 რომელიც არ შეიცავს x_1 წერტილის. I_1 სეგმენტში ავაგოთ I_2 სეგმენტი, რომელიც არ შეიცავს x_2-ს. გავაგრძელოთ ეს პროცესი ანუ თუ აგებული გვაქვს სეგმენტი $I_n, (|I_n| > 0)$ ავაგოთ ახალი $I_{n+1}, (|I_{n+1}| > 0)$, $I_{n+1} \subset I_n$ სეგმენტი თვისებით $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. ჩვენს მიერ აგებულ ერთმანეთში ჩალაგებულ სეგმენტებს ცხადია ექნებათ საერთო ერთი წერტილი მაინც, რომელიც ცხადია არის $[0,1]$ სეგმენტის წერტილი , მაგრამ ის ჩვენი აგების თანახმად არ ემთხვევა $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ მიმდევრობის არცერთ წერტილს. რაც წინააღმდეგობაა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. $Q \neq R$ (ანუ არსებობს ნამდვილი რიცხვი რომელიც რაციონალური არ არის).

სავარჯიშოები

1. ნამდვილ რიცხვს ვუწოდოთ ალგებრული თუ ის რაიმე რაციონალური კოეფიციენტების მქონე ალგებრული პოლინომის ფესვია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ტრანსცენდენტული რიცხვი ვუწოდოთ. მაგალითად $\sqrt{2}, \sqrt[7]{2}, ..$ ალგებრულია (განიხილეთ მაგ. $x^2 - 2 = 0 . x^7 - 2 = 0$) აჩვენეთ, რომ ა) ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია ბ) ტრანსცენდენტული რიცხვი არსებობს.
2. აჩვენეთ, რომ ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არათვლადია.
3. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად სიმრავლეს.
4. აჩვენეთ, რომ სიბრტყეზე მდებარე ყველა იმ სამკუთხედების სიმრავლე რომელთა კორდინატები რაციონალური რიცხვებია თვლადია.
5. აჩვენეთ, რომ ყველა სასრული ათწილადების სიმრავლე თვლადია.
6. დაამტკიცეთ, რომ სეგმენტზე განსაზღვრული მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.
7. სიბრტყეზე მოცემულია წერტილთა სიმრავლე, რომლის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი მეტია π-ზე. აჩვენეთ, რომ ეს სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

თავი 3

ფუნდამენტური მიმდევრობის ცნება. რიცხვითი მიმდევრობის კრებადობის კოშის აუცილებელი და საკმარისი ნიშანი. რიცხვითი მწკრივის კრებადობის კოშის აუცილებელი და საკმარისი ნიშანი. მონოტონური მიმდევრობები და მათი

კრებადობა. ნეპერის რიცხვი. მიმდევრობის კერძო ზღვრები. მიმდევრობის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა ზღვარი. რიცხვითი მწკრივის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი. ნეპერის რიცხვის წარმოდგენა მწკრივის სახით. ნეპერის რიცხვის ირაციონალობის დამტკიცება.

ზოგიერთი ცნება და ფაქტი კალკულუსის კურსიდან. კალკულუსის კურსში ჩვენ შევისწავლეთ მათემატიკის ერთერთი უმნიშვნელოვანესი რიცხვითი მიმდევრობის ზღვრის ცნება. მთელი რიგი საკითხები აღნიშნულ კურსში შევისწავლეთ აღწერითი ფორმით. ქვემოთ დავადგენთ, რომ აღნიშნული ცნება ბუნებრივ კავშირშია სისრულის (უწყვეტობის) აქსიომასთან. პირველ რიგში გავიხსენოთ ზოგიერთი უკვე ცნობილი (კალკულუსის კურსიდან) განმარტება და ფაქტი.

განსაზღვრება 3.1. $f : N \to R$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, უწოდებენ რიცხვით მიმდევრობას. f ფუნქციის $f(n)$ მნიშვნელობებს უწოდებენ მიმდევრობის წევრებს და მათ აღნიშნავენ სიმბოლოთი $x_n = f(n)$. თვით მიმდევრობას კი აღნიშნავენ $(x_n)_{n\geq 1}$ სიმბოლოთი. (ან $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ან უბრალოდ $x_n, n = 1,2,...$) მიმდევრობის მოცემა შესაძლებელია წევრების ჩამოთვლითაც. მაგალითად:

x_1, x_2, x_3, . . . , x_n, . . . ამ შემთხვევაში x_n-ს უწოდებენ მიმდევრობის ზოგად წევრს.

განსაზღვრება 3.2. ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის a რიცხვი და ჩავწერთ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $n(\varepsilon) \in N$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $n \in N, n > n(\varepsilon)$ რიცხვისთვის შესრულდება $|x_n - a| < \varepsilon$ უტოლობა.

თუ ადგილი აქვს $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ტოლობას, მაშინ ვამბობთ, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისკენ, ხოლო თვით $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას კრებადს უწოდებენ.

თუ მიმდევრობას ზღვარი არ გააჩნია, მაშინ მას განშლადს უწოდებენ.

რიცხვით ღერძზე a წერტილის მიდამოს უწოდებენ ნებისმიერ ინტერვალს, რომლის შეიცავს a წერტილს. კერძოდ, a რიცხვის ε მიდამოს უწოდებენ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ინტერვალს.

მიმდევრობის ზღვრის ცნებიდან გამომდინარეობს, რომ a რიცხვი არის მიმდევრობის ზღვარი, თუკი a-ს ნებისმიერ მიდამოში ხვდება მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლოა სასრული რაოდენობით წევრებისა.

მაგალითები: 3.3.

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ვინაიდან $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, როცა $n > n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, ვინაიდან $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, როცა $n > n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, ვინაიდან $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, როცა $n > n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, ვინაიდან $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, როცა $n > n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$ როცა $|q| > 1$. მართლაც, $\left|\frac{1}{q^n} - 0\right| = \frac{1}{|q|^n} < \varepsilon$, როცა $n > \log_{|q|} \frac{1}{\varepsilon}$.

6) განვიხილოთ $x_n = (-1)^n$ მიმდევრობა ანუ -1, 1, -1, 1, -1, 1, . . .

ეს მიმდევრობა განშლადია, ვინაიდან ნებისმიერი $a \in R$ რიცხვისთვის არსებობს ამ რიცხვის მიდამო, რომლის გარეთ მოხვდება ან -1, ან 1, ე. ი. მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობით წევრები.

განსაზღვრება 3.4. $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება სტაციონალური (მუდმივი), თუ არსებობს c ნამდვილი რიცხვი და n_0 ნომერი, ისეთი, რომ $x_n = c$, როცა $n \geq n_0$.

განსაზღვრება 3.5. $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული ზემოდან, თუ არსებობს $M \in R$ ისეთი, რომ $x_n \leq M$, $n \in N$.

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული ქვემოდან, თუ არსებობს $m \in R$ ისეთი, რომ $x_n \geq m$, $n \in N$.

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ ის არის შემოსაზღვრული ზემოდანაც და ქვემოდანაც, ანუ არსებობს $P \in R$ რიცხვი ისეთი, რომ $|x_n| \leq P$, $n \in N$.

კალკულუსის კურსში ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემების სამართლიანობა:

თეორემა 3.6 .ა) სტაციონალური მიმდევრობა კრებადია.

ბ) თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მას გააჩნია ერთადერთი ზღვარი.

გ) კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

შენიშვნა 3.7. მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელი პირობაა, მაგრამ არაა საკმარისი. ამას ადასტურებს ზემოთ მოყვანილი 6) მაგალითი შემოსაზღვრული, მაგრამ განშლადი მიმდევრობისა.

თეორემა 3.8. ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ რაიმე კრებადი მიმდევრობებია. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, მაშინ

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, თუ $y_n \neq 0$, $n = 1,2,3,...$ და $b \neq 0$.

თეორემა 3.9. ა) ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ რაიმე კრებადი მიმდევრობებია. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ და $a < b$, მაშინ არსებობს n_0 ნომერი ისეთი, რომ ყოველი $n > n_0$-ისთვის სრულდება $x_n < y_n$ უტოლობა.

ბ) ვთქვათ, $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ და $(z_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობები ისეთია, რომ როცა $n \geq n_0$, $n_0 \in N$ სრულდება $x_n \leq z_n \leq y_n$ უტოლობა. თუ ამას გარდა $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობები კრებადია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, მაშინ კრებადია $(z_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობაც და $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

შედეგი 3.10. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

ა) თუ ადგილი აქვს უტოლობას $x_n \geq y_n$, როცა $n \geq n_0$, $n_0 \in N$, მაშინ $a \geq b$.

ბ) თუ ადგილი აქვს უტოლობას $x_n > y_n$, როცა $n \geq n_0$, $n_0 \in N$, მაშინ $a \geq b$.

განსაზღვრება 3.11. ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არის უსასრულოდ მცირე, თუ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

თეორემა 3.12. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის ნამრავლი შემოსაზღვრულ მიმდევრობაზე კვლავ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

მაგალითი 3.13. ვთქვათ, $x_n = \frac{1}{n}$ და $y_n = \sin n$. ცხადია, რომ $x_n = \frac{1}{n}$ უსასრულოდ მცირეა, ხოლო $y_n = \sin n$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაგრამ არ არის კრებადი. მიუხედავად ამისა, $x_n \cdot y_n$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა, ანუ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = 0$.

განსაზღვრება 3.14. ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის $+\infty$ და ჩავწერთ $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, თუ $\forall M \in R$ რიცხვისთვის $\exists n(M) \in N$ ისეთი, რომ როცა $n > n(M)$, გვექნება $x_n > M$.

ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის $-\infty$ და ჩავწერთ $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, თუ $\forall M \in R$ რიცხვისთვის $\exists n(M) \in N$ ისეთი, რომ როცა $n > n(M)$, გვექნება $x_n < M$.

ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი არის ∞ და ჩავწერთ $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, თუ $\forall M \in R$ რიცხვისთვის $\exists n(M) \in N$ ისეთი, რომ როცა $n > n(M)$, გვექნება $|x_n| > M$.

აღნიშნულ შემთხვევებში მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ დიდი.

მაგალითი 3.15. 1) $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$; 2) $\lim_{n\to\infty} (-n^3) = -\infty$; 3) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$.

ფუნდამენტალური მიმდევრობები. რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის ცნება, რომელიც შესწავლილი იყო სამწუხაროდ უშუალოდ ვერ იძლევა რაიმე $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის კრებადობის (ან განშლადობის) აღმოჩენის საშუალებას. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ისეთ ნიშნებს, რომლებიც მიმდევრობის წევრთა "ყოფაქცევის" შესწავლით საშუალებას მოგვცემს დავადგინოთ მიმდევრობის კრებადობის, თუ განშლადობის საკითხი. ერთ-ერთი ასეთი ფუნდამენტალური ნიშანი ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოსს **კოშს(1789-1857).** კოშის თეორემის ინტუიციური შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ თურმე მიმდევრობა კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მიმდევრობის ნომრის ზრდასთან ერთად ამ მიმდევრობის წევრთა "გადაადგილებანი" თანდათანობით ქრებიან, ან სხვანაირად, თუ ორი დიდი "ნომრის" მქონე წევრი "ერთმანეთთან ახლოს" აღმოჩნდებიან.

განსაზღვრება 3.16. $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნომერი $n(\varepsilon) \in N$ ისეთი, რომ ყოველი $n > n(\varepsilon)$ და $m > n(\varepsilon)$ ნომრებისთვის შესრულდება $|x_n - x_m| < \varepsilon$ უტოლობა.

თეორემა 3.17.(კოშის კრიტერიუმი). იმისათვის, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ფუნდამენტური.

დამტკიცება. ვთქვათ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ და $\varepsilon > 0$ რაიმე ფიქცირებული რიცხვია. მაშინ ზღვრის განმარტების თანახმად მოიძებნება $k \in N$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $n > k, m > k$ გვექნება

$$| x_n - a |< \varepsilon / 2, | x_m - a |< \varepsilon / 2,$$

ამიტომ, როცა $n > k, m > k$ გვექნება

$$| x_n - x_m |=| (x_n - a) + (a - x_m) |\leq | x_n - a | + | a - x_m |< \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

ამით ჩვენ დავადგინეთ, რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ $(x_n)_{n\geq 1}$ ფუნდამენტალური მიმდევრობაა. ეს ნიშნავს, რომ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $k \in N$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $n \geq k, m \geq k$ გვაქვს

$$| x_n - x_m |< \varepsilon / 3 \quad .$$

ამ უტოლობაში დაუშვათ, რომ $m = k$, მაშინ მივიღებთ, რომ $\forall n \geq k$

$$x_k - \varepsilon / 3 < x_n < x_k + \varepsilon / 3 . \qquad (1)$$

ეს ნიშნავს, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. $\forall n \in N$ რიცხვისათვის განვსაზღვროთ რიცხვები

$$a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \inf_{m\geq n} x_m ; b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \sup_{m\geq n} x_m .$$

ცხადია, რომ $\forall n \in N$ გვაქვს $a_n \leq x_n \leq b_n$. ამასთან $(a_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზრდადია, ხოლო $(b_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კლებადი. განვიხილოთ სეგმენტთა (შესაძლებელია აღმოჩნდეს, რომ $a_n = b_n$ რაღაც ნომრიდან დაწყებული) მიმდევრობა $[a_n, b_n], n = 1,2,...$. (1) პირობის ძალით $\forall n \geq k$

$$x_k - \varepsilon / 3 \leq a_n \leq x_n \leq b_n < x_k + \varepsilon / 3 .$$

საიდანაც გვექნება $b_n - a_n < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, როცა $n \geq k$. მაშასადამე $[a_n, b_n], n = 1,2,...$ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობაა ისეთი, რომ ამ მიმდევრობაში არსებობს რაგინდ მცირე სიგრძის სეგმენტი, ამიტომ არსებობს ერთადერთი a წერტილი ისეთი, რომ $\forall n \in N \quad a \in [a_n, b_n]$.

ამრიგად $\forall n \geq k$ სრულდება უტოლობები:

$$a_n \leq a \leq b_n ; a_n \leq x_n \leq b_n ,$$

საიდანაც გვექნება

$$| x_n - a |\leq b_n - a_n < \varepsilon ,$$

როცა $n \geq k$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.18. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ $x_n = (-1)^n$ მიმდევრობა განშლადია.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ **მიმდევრობა არ არის ფუნდამენტური ნიშნავს, რომ არსებობს** $\varepsilon > 0$ **რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი** $n \in N$ **ნომრისთვის არსებობს** $n_1 > n$ **და** $n_2 > n$ **ნომრები, რომელთათვისაც** $\left|x_{n_1} - x_{n_2}\right| \geq \varepsilon$.

ავიღოთ $\varepsilon = 1$. მაშინ ყოველი $n \in N$ ნომრისთვის გვაქვს $\left|x_{n+1} - x_{n+2}\right| = \left|1 - (-1)\right| = 2 > 1 = \varepsilon.$ მაშასადამე $x_n = (-1)^n$ მიმდევრობა არ არის ფუნდამენტური, ე. ი. კოშის კრიტერიუმის ძალით მოცემული მიმდევრობა არ არის კრებადი.

მაგალითი3.19. ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობა $x_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{2^3} + ... + \frac{\cos n}{2^n}$, $n \geq 1$. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია.

ვთქვათ, $m = n + p$. მაშინ $|x_m - x_n| = |x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)}{2^{n+2}} + ... + \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq$

$\leq \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)}{2^{n+2}} \right| + ... + \left| \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}(1 - \frac{1}{2^p}) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. ამრიგად, საკმარისია ავიღოთ $n(\varepsilon) = [\log_2 \frac{1}{\varepsilon}] + 1$. მაშინ $n > n(\varepsilon)$ და $m > n(\varepsilon)$ ნომრებისთვის შესრულდება $|x_n - x_m| < \varepsilon$ უტოლობა, ე. ი. $(x_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია, მაშასადამე არის კრებადიც.

მაგალითი 3.20. ვთქვათ მოცემული გვაქვს $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ არაუარყოფით მთელ რიცხვთა მიმდევრობა, სადაც $0 \leq a_n \leq 9; n = 1,2,...$ განვიხილოთ სასრულ ათობით ათწილადთა მიმდევრობა:

$$x_1 = 0, a_1, \; x_2 = 0, a_1 a_2, ..., x_n = 0, a_1 a_2 a_3 ... a_n, ...$$

ვაჩვენოთ, რომ $(x_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ $m > n$. შევაფასოთ $x_m - x_n$ სხვაობა.

$| x_m - x_n | = | 0, a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} a_{n+2} a_m - 0, a_1 a_2 ... a_n | = 0,00...0 a_{n+1} a_{n+2} a_m =$

$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + ... + \frac{a_m}{10^m} \leq \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + ... + \frac{9}{10^m} = 9 \cdot \frac{(1/10)^{n+1}(1 - (1/10)^{m+1})}{1 - 1/10} < \frac{1}{10^n}$.

ავიღოთ $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ვიპოვოთ ისეთი $k \in N$ რიცხვი, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\frac{1}{10^k} < \varepsilon \Rightarrow 10^k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow k > \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

დაუშვათ $n_0 = \left[\lg \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, მაშინ ცხადია გვექნება $| x_m - x_n | < \varepsilon$, როცა $m > n > n_0$. მაშასადამე $(x_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია. ცხადია მისი ზღვარი არის მწკრივის ჯამი $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$ რომელსაც მოკლედ ავღნიშნავთ ასე $0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ...$ (უსასრულო ათწილადი).

მაგალითი. 3.21. ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობა $(x_n)_{n \geq 1}$, რომლის ზოგადი წევრია $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ განშლადია.

მართლაც $\forall n \in N$

$| x_{2n} - x_n | = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

ამიტომ კოშის კრიტერიუმის თანახმად ეს მიმდევრობა განშლადია. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი მიმდევრობა წარმოადგენს ჰარმონიული მწკრივის $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ კერძო ჯამებს.

ჩვენ კალკულუსის კურსში შევისწავლეთ რიცხვითი მწკრივები. "უსასრულო რაოდენობა" რიცხვების ჯამის ცნება არსებითად ეყრდნობა რიცხვითი მიმდევრობის კრებადობის ცნებას. არსებობს ბუნებრივი კავშირი რიცხვითი მწკრივების თეორიასა და რიცხვითი მიმდევრობების კრებადობის საკითხებს

შორის. მთელი რიგი დებულებები რიცხვითი მიმდევრობების შესახებ სათანადო ბუნებრივი სახეცვლილებითცვლებით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ რიცხვითი მწკრივებისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა. განვიხილოთ მისი წევრებისაგან შედგენილი ფორმალური უსასრულო ჯამი $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$, რომელსაც მოკლედ აღვნიშნავთ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 3.22. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ უსასრულო ჯამს უწოდებენ უსასრულო მწკრივს, ან მოკლედ მწკრივს. $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის წევრებს უწოდებენ მწკრივის წევრებს, ხოლო x_n-ს უწოდებენ მწკრივის ზოგად წევრს (ან მწკრივის n-ურ წევრს).

განვსაზღვროთ ნამდვილ $(S_n)_{n\geq 1}$ რიცხვთა მიმდევრობა შემდეგი წესით: $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. აგებულ მიმდევრობას უწოდებენ მოცემულ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობას, ხოლო მის წევრებს უწოდებენ მწკრივის კერძო ჯამებს.

განსაზღვრება 3.23. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივის $(S_n)_{n\geq 1}$ კერძო ჯამთა მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მწკრივს უწოდებენ კრებადს, ხოლო $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის S ზღვარს უწოდებენ მწკრივის ჯამს და ჩაწერენ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$. თუ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა განშლადია, მაშინ მწკრივსაც განშლადს უწოდებენ.

შენიშვნა 3.24. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა. ავიღოთ $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3 - x_2$, . . . , $y_n = x_n - x_{n-1}$, . . . მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა იქნება წინასწარ მოცემული $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა. მართლაც, $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots (x_n - x_{n-1}) = x_n$.

განსაზღვრება 3.25. ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი. განვიხილოთ მწკრივი $x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$. ამ მწკრივს უწოდებენ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივის n-ურ ნაშთს.

შენიშვნა 3.26. ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია S. მაშინ $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$. აქედან $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S - S_n$, ამიტომ $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0$.

მიმდევრობისათვის უკვე ცნობილი კოშის თეორემას რიცხვითი მწკრივებისათვის აქვს შემდეგი სახე

თეორემა 3.26.(მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი). იმისათვის, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$

რიცხვისთვის არსებობდეს $n(\varepsilon)\in N$ ნომერი ისეთი, რომ ყოველი $n>n(\varepsilon)$ და ყოველი p ნატურალური რიცხვებისთვის შესრულდება უტოლობა $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_n\right|<\varepsilon$.

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმიდან თუ გავითვალისწინებთ, რომ $S_{n+p}-S_n=\sum_{k=n+1}^{n+p}x_n$.

შედეგი 3.27. თუ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი კრებადია, მაშინ მასში სასრული რაოდენობის წევრების შეცვლით მიღებული მწკრივი კრებადია. თუ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი განშლადია, მაშინ მასში სასრული რაოდენობის წევრების შეცვლით მიღებული მწკრივი განშლადია.

თეორემა 3.28. იმისათვის, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი იყოს კრებადი, აუცილებელია, რომ მისი ზოგადი წევრის ზღვარი იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. აუცილებელია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ მწკრივის $(S_n)_{n\geq1}$ კერძო ჯამთა მიმდევრობა კრებადია. მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.29. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$. მას უწოდებენ ჰარმონიულ მწკრივს. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით ჩვენ უკვე ვაჩვენოთ, რომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ განშლადია. მაშასადამე ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

აღნიშნული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ წინა თეორემაში $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ პირობა არაა საკმარისი $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივის კრებადობისათვის.

მაგალითი. 3.30. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$, $(|q|<1)$, რომლის წევრები შეადგენენ უსასრულო კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას . გვაქვს $S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$. მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$. ე. ი. $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=\frac{1}{1-q}$, როცა $|q|<1$.

თუ $|q|>1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ მწკრივი განშლადია ვინაიდან მწკრივის ზოგადი წევრი ნულისკენ არ მიისწრაფის.

მაგალითი 3.31. გამოთვალეთ უსასრულო ჯამი $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

ავიღოთ $S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}=$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$ მაშინ $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$

ამრიგად, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$

მონოტონური მიმდევრობები. **განსაზღვრება 3.32.** $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $\forall n\in N$ ნომრისთვის ადგილი აქვს $x_n<x_{n+1}$ უტოლობას; ეწოდება არაკლებადი, თუ $\forall n\in N$ ნომრისთვის ადგილი აქვს $x_n\leq x_{n+1}$ უტოლობას; ეწოდება კლებადი, თუ $\forall n\in N$ ნომრისთვის ადგილი აქვს $x_n>x_{n+1}$ უტოლობას; ეწოდება არაზრდადი, თუ $\forall n\in N$ ნომრისთვის ადგილი აქვს $x_n\geq x_{n+1}$ უტოლობას.

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება მონოტონური, თუ ის არის ზრდადი, ან არაკლებადი, ან კლებადი, ან არაზრდადი.

თეორემა 3.33. (ვაიერშტრასი). იმისათვის, რომ არაკლებადი მიმდევრობა იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ის რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ჩვენთვის უკვე ცნობილია კალკულუსის კურსიდან. დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ არაკლებადი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ სიმრავლე რომელიც მიმდევრობის წევრებისაგან (ყველა) შემდგება ზემოდან შემოსაზღვრულია და მას გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი. ავღნიშნოთ $a=\sup_{n\in N} x_n$. დავამტკიცოთ, რომ $a=\lim_{n\to\infty} x_n$. სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვრის განმარტების ძალით, ნებისმიერად ფიქსირებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $k\in N$ რიცხვი ისეთი, რომ $x_k>a-\varepsilon$. რადგან $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ როცა $n>k$ გექნება $x_n\geq x_k>a-\varepsilon$. მეორე მხრივ $\forall n\in N$ გვაქვს $x_n\leq a<a+\varepsilon$ ამიტომ $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, როცა $n>k$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $a=\lim_{n\to\infty} x_n$. თეორემა დამტკიცებულია. შევნიშნოთ, რომ ფაქტიურად ჩვენ დავამტკიცეთ ცოტა მეტი, სახელდობრ თეორემის პირობებში $\lim_{n\to\infty} x_n=\sup_{n\in N} x_n$.

ანალოგიურად დამტკიცდება

თეორემა 3.34. (ვაიერშტრასი). იმისათვის, რომ არაზრდადი მიმდევრობა იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ქვემოდან შემოსაზღვრული. (ამ შემთხვევაში $\lim_{n\to\infty} x_n=\inf_{n\in N} x_n$.)

შენიშვნა 3.35. ადვილი დასადგენია, რომ თუ არაკლებადი(არაზრდადი) $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული არაა, მაშინ $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty, (\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty)$.

შენიშვნა 3.36. ზემოთ მოყვანილ თეორემებში ზემოდან ან ქვემოდან შემოსაზღვრულობის მოთხოვნა ტოლძალოვანია შემოსაზღვრულობის მოთხოვნის.

შენიშვნა 3.37. ზემოთ მოყვანილი თეორემები ცხადია სამართლიანია იმ შემთხვევაში თუ მიმდევრობას მონოტონურობის ხასიათი აქვს რაღაც ნომრიდან დაწყებულს.

შედეგი 3.38. ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი, სადაც $x_n \geq 0, \quad n \geq 1$. იმისათვის, რომ ეს მწკრივი იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ მოცემული რიცხვითი მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა $(S_n)_{n\geq 1}$ არის არაკლებადი.

ნეპერის რიცხვი. განვიხილოთ ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი

მაგალითი 3.39. ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობა $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$ დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია. განვიხილოთ დამხმარე მიმდევრობა $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. ვაჩვენოთ. რომ x_n მიმდევრობა ზრდადია, ხოლო y_n მიმდევრობა კლებადია. ამისათვის გამოვიყენებთ ცნობილ ბერნულის უტოლობას: $(1+x)^n \geq 1+nx$, როცა $x > -1$ და $n \in N$.

განვიხილოთ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(1+\frac{-1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq$

$\geq \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} > x_n$, ე. ი. x_n ზრდადია.

ანალოგიური გზით ვაჩვენებთ, რომ y_n მიმდევრობა კლებადია. ამასთან ერთად $x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1$, ამიტომ x_n და y_n მიმდევრობები იქნებიან შემოსაზღვრული, ამიტომ ზემოთ მოყვანილი თეორემის ძალით ორივე კრებადია. მაშასადამე, გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ აღნიშნული ზღვარი არის ირაციონალური რიცხვი. მას აღნიშნავენ e სიმბოლოთი და ნეპერის რიცხვს უწოდებენ. $e \approx 2{,}7$. (აღნიშნული რიცხვი ისეთივე მნიშვნელოვანია ანალიზში, როგორც რიცხვი π გეომეტრიაში, მათ შორის არსებობს ფუნდამენტალური დამოკიდებულება $e^{i\cdot\pi} = -1$.) ამრიგად

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

მათემატიკაში განსაკუთრებით გამოიყენება ისეთი ლოგარითმები, სადაც ფუძედ აღებულია e რიცხვი. მოცემული $x > 0$ რიცხვისათვის ლოგარითმი e ფუძით აღინიშნება $\ln x$ სიმბოლოთი და უწოდებენ $x > 0$ რიცხვის ნატურალურ ლოგარიმს .

მაგალითი 3.40. დავამტკიცოთ, რომ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$.

ვთქვათ, $x_n = \frac{n}{2^n}$. მაშინ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2n} < 1$, როცა $n > 1$. ამრიგად, $x_n = \frac{n}{2^n}$ მიმდევრობა არაზრდადია და ქვემოდან შემოსაზღვრული, ამიტომ ის იქნება კრებადი, ამავე დროს $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} x_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} x_n$. საიდანაც ვიღებთ, რომ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

ანალოგიური წესით შეგვიძლია დავამტკიცეთ, რომ 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, სადაც $a > 1$, $\alpha > 0$. 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, სადაც $a \in R$.

ნამდვილ რიცხვთა ზოგიერთი ფუნდამენტალური პრინციპი. ჩვენ შევისწავლეთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის მთელი რიგი თვისებები, შევნიშნოთ, რომ R სიმრავლის "ანალიზური" თვისებების დასაბუთების დროს ჩვენ ვიყენებდით უწყვეტობის(სისრულის) პრინციპს (რომელიც ნამდვილ რიცხვთა აქსიომატიკაში ერთერთ აქსიომად არის მიჩნეული). R სიმრავლის სისრულის თვისება შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი დებულებიდან ერთ-ერთით.

1. ვთქვათ Aდა Bნამდვილ რიცხვთა არაცარიელი ქვესიმრავლეებია. თუ $\forall x \in A$ და $\forall y \in B$ გვაქვს $x \le y$, მაშინ არსებობს $c \in R$ რიცხვი ისეთი, რომ $\forall x \in A$ და $\forall y \in B$სრულდება უტოლობა $x \le c \le y$ **(დედეკინდის პრინციპი).**
2. ნამდვილ რიცხვთა ზემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა საზღვარი **(ვაიერშტრასის პრინციპი).**
3. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ ზრდად და ზემოდან შემოსაზღვრულ $(x_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი **(ვაიერშტრასის პრინციპი).**
4. სეგმენტის ინტერვალებით ნებისმიერი დაფარვა შეიცავს სასრულ ქვედაფარვას **(ბორელ-ლებეგის პრინციპი).**
5. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ შემოსაზღვრულ უსასრულო სიმრავლეს გააჩნია ერთი მაინც ზღვრული წერტილი **(ბოლცანო-ვაიერშტრასის პრინციპი).**
6. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია**(კოშის პრინციპი).**
7. თუ სეგმენტთა $[a_n, b_n], n = 1,2,...$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს პირობებს:

ა) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$ ბ) $b_n - a_n \to 0$, როცა $n \to \infty$,

მაშინ არსებობს ერთადერთი წერტილი $x \in R$ ისეთი, რომ $\forall n \in N, x \in [a_n, b_n]$ **(კოში-კანტორის პრინციპი).**

საკმარისია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს მოვაშოროთ თუნდაც ერთი წერტილი, რომ ყველა ზემოთ აღნიშნული პრინციპი მცდარი აღმოჩნდება.

ამ პრინციპებიდან თითოეული შეგვიძლია ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა აქსიომატიკურ განსაზღვრაში უწყვეტობის აქსიომად. შევნიშნოთ, რომ თუ უწყვეტობის აქსიომად კოში-კანტორის პრინციპს, მაშინ ნამდვილ რიცხვთა განმსაზღვრელ აქსიომებში უნდა პოსტულირებდეს აგრეთვე არქიმედეს აქსიომა.

მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი. მიმდევრობის კერძო ზღვრები.

ვთქვათ $(x_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. ავაგოთ ახალი $(S_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობა შემდეგი წესით: $S_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \sup_{k\ge n} x_k$ (ასეთი მიმდევრობა ჩვენ უკვე აგებული გვაქვს კოშის თეორმის დამტკიცებისას). ცხადია, რომ აგებული

მიმდევრობა არაზრდადია ამიტომ მას გააჩნია სასრული ზღვარი ან ის მიისწრაფის $-\infty$-კენ.

იმ შემთხვევაში, როცა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული ზემოდან მაშინ ყოველი $n \in N$ ნომრისათვის $S_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \sup_{k\geq n} x_k = +\infty$. ამ შემთხვევაში ფორმალურად ჩავთვალოთ, რომ $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. მაშასადამე ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვითი მიმდევრობისათვის $\lim_{n\to\infty} S_n$ არის ან სასრული რიცხვი ან $-\infty$ ან $+\infty$ (როცა მიმდევრობა არაა ზემოდან შემოსაზღვრული).

განმარტება 3.41. $(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვითი მიმდევრობის ზედა ზღვარს უწოდებენ ზღვარს $\lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} x_k)$ (რომელიც არის სასრული რიცხვი ან $-\infty$ ან $+\infty$) მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

ანალოგიურად ვთქვათ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ავაგოთ ახალი $(s_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემდეგი წესით: $s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \inf_{k\geq n} x_k$ (ასეთი მიმდევრობა ჩვენ უკვე აგებული გვაქვს კოშის თეორმის დამტკიცებისას). ცხადია, რომ აგებული მიმდევრობა არაკლებადია ამიტომ მას გააჩნია სასრული ზღვარი ან ის მიისწრაფის $+\infty$-კენ.

იმ შემთხვევაში, როცა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული ქვემოდან მაშინ ყოველი $n \in N$ ნომრისათვის $s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \inf_{k\geq n} x_k = -\infty$. ამ შემთხვევაში ფორმალურად ჩავთვალოთ, რომ $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$. მაშასადამე ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვითი მიმდევრობისათვის $\lim_{n\to\infty} s_n$ არის ან სასრული რიცხვი ან $+\infty$ ან $-\infty$ (როცა მიმდევრობა არაა ქვემოდან შემოსაზღვრული).

განმარტება 3.42. $(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვითი მიმდევრობის ქვედა ზღვარს უწოდებენ ზღვარს $\lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} x_k)$ (რომელიც არის სასრული რიცხვი ან $-\infty$ ან $+\infty$) მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

მაგალითი. 3.43. $x_n = (-1)^n, n \in N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} x_k) = \lim_{n\to\infty}(+1) = 1$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} x_k) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1$$

მაგალითი 3.44. $x_n = n^{(-1)^n}, n \in N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} k^{(-1)^k}) = \lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} k^{(-1)^k}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

მაგალითი 3.45. $x_n = n, n \in N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} k) = \lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} k) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

მაგალითი 3.46. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n}\frac{(-1)^k}{k}\right)=0$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n}\frac{(-1)^k}{k}\right)=0$$

მაგალითი 3.47. $x_n=(-1)^n n, n\in N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n}(-1)^k k\right)=\lim_{n\to\infty}(+\infty)=+\infty$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n}(-1)^k k\right)=\lim_{n\to\infty}(-\infty)=-\infty$$

მაგალითი 3.48. $x_n=-n^2, n\in N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n}-k^2\right)=\lim_{n\to\infty}-n^2=-\infty$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n}-k^2\right)=\lim_{n\to\infty}(-\infty)=-\infty$$

განსაზღვრება 3.49. ვთქვათ $(x_n)_{n\ge1}$ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა, ხოლო $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ არის ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა. მაშინ $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ $((x_{n_k})_{k\ge1})$ მიმდევრობას უწოდებენ $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობას.

პირველ რიგში ავღნიშნოთ, რომ სამართლიანია

თეორემა 3.50. თუ მიმდევრობა $(x_n)_{n\ge1}$ კრებადია, მაშინ მისი ნებისმიერი $(x_{n_k})_{k\ge1}$ ქვემიმდევრობა კრებადია იგივე ზღვრისკენ.

დამტკიცება. საკმარისია $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობისათვის გამოვიყენოთ პირდაპირ კრებადობის ცნება (ან კრებადობის კოშის კრიტერიუმი).

თეორემა 3.51. (ბოლცანო-ვაიერშტრასი). ყოველი შემოსაზღვრული რიცხვითი მიმდევრობიდან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. ვთქვათ $(x_n)_{n\ge1}$ შემოსაზღვრული მიმდევრობაა, ხოლო E არის მიმდევრობის წევრებისაგან (ყველა) შედგენილი სიმრავლე. შესაძლოა ეს სიმრავლე იყოს სასრული (მაგ. $x_n=(-1)^n$ მიმდევრობისათვის $E=\{-1,1\}$). ამ შემთხვევაში არსებობს ერთი მაინც x და ნომერთა მიმდევრობა $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ ისეთი, რომ $x_{n_1}=x_{n_2}=\ldots x_{n_k}=\ldots=x$. მიმდევრობა $(x_{n_k})_{k\ge1}$ მუდმივია და ამიტომ კრებადია.

თუ E სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის ძალით მას გააჩნია ერთი მაინც ზღვრული წერტილი x. ვინაიდან x არის E სიმრავლის ზღვრული წერტილი ამიტომ შეგვიძლია ვიპოვოთ ნომერი $n_1\in N$ ისეთი, რომ $|x_{n_1}-x|<1$. თუ $n_k\in N$ ნომერი უკვე არჩეულია ისე, რომ $|x_{n_k}-x|<1/k$, მაშინ გათვალისწინებით იმისა, რომ x არის E სიმრავლის ზღვრული წერტილი, შეგვიძლია ვიპოვოთ ნომერი $n_{k+1}\in N; n_k<n_{k+1}$ ისეთი, რომ $|x_{n_{k+1}}-x|<1/(k+1)$. ვინაიდან $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$ ამიტომ აგებული ქვემიმდევრობა $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}\ldots$ კრებადია x რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა როცა მიმდევრობა $(x_n)_{n\ge1}$ არაა შემოსაზღვრული. მაშინ ნებისმიერი $k\in N$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ

ნომრები $n_k \in N$ ისეთი, რომ $|x_{n_k}| > k$ და $n_k < n_{k+1}$. აგებული მიმდევრობა ცხადია მიისწრაფის ∞.

მაშასადამე სამართლიანია

თეორემა 3.52. (ბოლცანო-ვაიერშტრასი განზოგადოებული თეორემა). ყოველი რიცხვითი მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა ან ქვემიმდევრობა, რომელიც მოიისწრაფის ∞-კენ.

მაგალითი 3.53. განვიხილოთ მიმდევრობა $x_n = n^{(-1)^n}$. ეს მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული, მაშასადამე განშლადია. ამავე დროს მისი ზღვარი არ არის არანაირი უსასრულობის ტოლი. ავიღოთ $n_k = 2k$, $k \geq 1$. მაშინ მივიღებთ $x_{n_k} = 2k$ ქვემიმდევრობას, რომელიც განშლადია $+\infty$-ისკენ. თუ ავიღებთ $n_k = 2k+1$, $k \geq 1$, მაშინ მივიღებთ $x_{n_k} = \frac{1}{2k+1}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც კრებადია 0-ისკენ.

განსაზღვრება 3.54. a რიცხვის (ან სიმბოლოს $-\infty$, ან $+\infty$) უწოდებენ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის კერძო ზღვარს, თუ ეს მიმდევრობა შეიცავს ქვემიმდევრობის, რომლის ზღვარია a რიცხვი ($-\infty$, ან $+\infty$).

შენიშვნა 3.55. ბოლცანო-ვაიერშტრასისგანზოგადოებული თეორემის თანახმად ნებისმიერ მიმდევრობას სასრული ან უსასრულობის ტოლი ერთი მაინც კერძო ზღვარი გააჩნია.

მაგალითი 3.56. $x_n = n^{(-1)^n}$ მიმდევრობას გააჩნია ორი კერძო ზღვარი: 0 და $+\infty$.

თეორემა 3.57. ვთქვათ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ვთქვათ E მოცემული მიმდევრობის კერძო ზღვრების(ყველა) სიმრავლეა. E სიმრავლეს გააჩნია როგორც მაქსიმალური ასევე მინიმალური ელემენტი და სამართლიანია ტოლობები: $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \max E$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \min E$.

დამტკიცება. დამტკიცებას მოვიყვანთ ქვედა ზღვრისათვის(ანალოგიური მსჯელობა სამართლიანია ზედა ზღვრისათვის). ვთქვათ $s = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. როგორც ვიცით მიმდევრობა $s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \inf_{k\geq n} x_k$ არაკლებადია და $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$. ვისარგებლოთ სიმრავლის ქვედა საზღვრის განმარტებით ინდუქციის გამოყენებით ავაგოთ ნომრების მიმდევრობა $k_n \in N$ ისე, რომ $k_n < k_{n+1}$ და $s_n \leq x_{k_n} < s_n + 1/n$. შევნიშნოთ, რომ $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + 1/n) = s$ და ამიტომ ორი პოლიციელის შესახებ თეორემის თანახმად $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = s$. მაშასადამე $s = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ რიცხვი მოცემული მიმდევრობის ერთ-ერთი კერძო ზღვარია. ვაჩვენოთ, რომ ეს უმცირესი კერძო ზღვარია. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. ცხადია შეგვიძლია მოვძებნოთ რიცხვი $n \in N$ ისეთი, რომ $s - \varepsilon < s_n$ საიდანაც გვექნება $s - \varepsilon < s_n = \inf_{k\geq n} x_k \leq x_k$ ნებისმიერი $k \geq n$. მაშასადამე $s - \varepsilon < x_k$ როცა $k \geq n$, საიდანაც დავასკვნით, რომ მოცემული მიმდევრობის არცერთი კერძო ზღვარი არ შეიძლება ნაკლები იყოს $s - \varepsilon$ რიცხვზე. მოყვანილი მსჯელობა სამართლიანია ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის. მაშასადამე მიმდევრობის არცერთი კერძო ზღვარი არ არის s რიცხვზე ნაკლები. თეორემა დამტკიცებულია.

ზოგიერთი თეორემა რიცხვითი მწკრივის კრებადობის შესახებ.

განსაზღვრება 3.58. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივს უწოდებენ აბსოლუტურად კრებადს, თუ კრებადია $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ მწკრივი.

შენიშვნა 3.59. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად, მაშინ ის კრებადიცაა. მართლაც, რადგანაც $|x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \le |x_n| + |x_{n+1}| + \ldots |x_{n+p}|$, ამიტომ მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის ძალით მწკრივის აბსოლუტური კრებადობიდან გამომდინარეობს მწკრივის კრებადობა. ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი კი გვიჩვენებს, რომ კრებადი მწკრივი შეიძლება არ იყოს აბსოლუტურად კრებადი.

მაგალითი 3.60. განვიხილოთ მწკრივი $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$. მისი კერძო ჯამია ან $\frac{1}{n}$ ან 0. ამიტომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ, მაშასადამე მწკრივიც კრებადია ნულისკენ. მეორე მხრივ, მწკრივის წევრების მოდულებისაგან შედგენილი მწკრივია $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots$, რომელიც განშლადია, ე. ი. მწკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი.

განსაზღვრება 3.61. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივს ეწოდება პირობით კრებადი, თუ ის კრებადია, მაგრამ არ არის აბსოლუტურად კრებადი. ზემოთ მოყვანილი მაგალითი არის პირობით კრებადი მწკრივის მაგალითი.

თეორემა 3.62. (შედარების თეორემა). ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ არაუარყოფით წევრებიანი მწკრივებია. თუ არსებობს $n_0 \in N$ ნომერი ისეთი, რომ $\forall n > n_0$ ნომრისთვის ადგილი აქვს $x_n \le y_n$ უტოლობას, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივის კრებადობა, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ მწკრივის განშლადობა.

დამტკიცება. ვინაიდან მწკრივის სასრული რაოდენობა წევრები მწკრივის კრებადობის ხასიათზე გავლენას არ ახდენს, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_n \le y_n$ უტოლობა სრულდება ნებისმიერი ნომრისათვის. მაშინ გვექნება

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \le \sum_{k=1}^{n} y_k = B_n .$$

თუ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ მწკრივი კრებადია, მაშინ არაკლებადი მიმდევრობა $\{B_n\}_{n\ge 1}$ შემოსაზღვრულია და მისი ზვარი ტოლია B და სამართლიანია უტოლობა $A_n \le B_n \le B$ ყოველი $n \in N$. მაშასადამე არაკლებადი მიმდევრობა $\{A_n\}_{n\ge 1}$ შემოსაზღვრულია და მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ მწკრივი კრებადია. თეორემის მეორე ნაწილი ავტომატურად მიიღება ტეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილიდან თუ დაუშვებთ წინააღმდეგობას. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.63. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. ვინაიდან $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ როცა $n\geq 2$ მწკრივი და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ შედარების თეორემით $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივი კრებადია. მტკიცდება, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

შედეგი 3.64. (მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის ვაიერშტრასის მაჟორანტული ნიშანი). ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ რაიმე მწკრივებია. თუ არსებობს $n_0\in N$ ნომერი ისეთი, რომ $\forall n>n_0$ ნომრისთვის ადგილი აქვს $|x_n|\leq y_n$ უტოლობას, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა.

დამტკიცება. შედარების ნიშნის თანახმად მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ კრებადია, მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ აბსოლიტურად კრებადია.

მაგალითი 3.65. განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ვინაიდან $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივი კი კრებადია.

თეორემა3.66. (კოშის ნიშანი). ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი და $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x_n|}=q$. მაშინ სამართლიანია:

ა) თუ $q<1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

ბ) თუ $q>1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი განშლადია.

გ) თუ $q=1$, მაშინ არსებობს შესაბამისი როგორც აბსოლუტურად კრებადი, ისე განშლადი მწკრივი.

დამტკიცება. ა) ვთქვათ $q<1$, ავიღოთ $p\in R$ პირობით $q<p<1$. მიმდევრობის ზედა ზღვარის განმარტების ძალით მოიძებნება $m\in N$ რიცხვი ისეთი, რომ $\sqrt[n]{|x_n|}<p$ როცა $n>m$, მაშასადამე როცა $n>m$ გვექნება $|x_n|<q^n$. ვინაიდან $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ მწკრივი კრებადია ამიტომ ვაიერშტრასის შედარების ნიშნის თანახმად $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ აბსოლიტურად კრებადია.

ბ) ვინაიდან q წარმოადგენს $\sqrt[n]{|x_n|}$ მიმდევრობის ერთერთ კერძო ზღვარს, ამიტომ ნომერთა რაიმე ქვემიმდევრობისათვის გვექნება $\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{|x_{n_k}|}=q>1$. ამ უკანასკნელი ტოლობიდან დავასკვნით, რომ რაღაც ნომრიდან

დაწყებული $|x_{n_k}|>1$. მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივისათვის არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი ნიშანი (ზოგადი წევრი არ მიისწრაფის ნულისაკენ) და ამიტომ მწკრივი განშლადია.

გ) საკმარისია განვიხილოთ მწკრივები $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. როგორც უკვე ვიცით პირველი მწკრივი კრებადია მეორე განშლადი. ამავე დროს $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n_k]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n_k]{\frac{1}{n^2}}=1$.

თეორემა 3.67. (დალამბერის ნიშანი). ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი და $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q$. მაშინ სამართლიანია:

ა) თუ $q<1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

ბ) თუ $q>1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივი განშლადია.

გ) თუ $q=1$, მაშინ არსებობს შესაბამისი როგორც აბსოლუტურად კრებადი, ისე განშლადი მწკრივი.

დამტკიცება. ა) ვთქვათ $q<1$, ავიღოთ $p\in R$ პირობით $q<p<1$. მოვძებნოთ $m\in N$ რიცხვი ისეთი, რომ შესრულდეს $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|<p$ როცა $n>m$. ვინაიდან სასრული რაოდენობა მწკრივის წევრებისა მის კრებადობის ხასიათზე გავლენას არ ახდენს ამიტომ ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|<p$ უტოლობა სრულდება ნებისნიერი $n\in N$.

ვინაიდან $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\cdot\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x_2}{x_1}\right|=\left|\frac{x_{n+1}}{x_1}\right|$ ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ შეფასება $|x_{n+1}|\le|x_1|\cdot q^n$. ვინაიდან $\sum_{n=1}^{\infty}|x_1|q^n$ მწკრივი კრებადია ამიტომ ვაიერშტრასის შედარების ნიშნის თანახმად $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ აბსოლიტურად კრებადია.

ბ) თუ $q>1$, მაშინ მოიძებნება $m\in N$ ისეთი, რომ $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1$ როცა $n>m$. საიდანაც გვექნება $|x_n|<|x_{n+1}|$ როცა $n>m$. მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივისათვის არ სრულდება პირობა $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ ამიტომ მწკრივი განშლადია.

გ) როგორც კოშის თეორემაში საკმარისია განვიხილოთ მწკრივები $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

მაგალითი 3.68. კრებადია თუ არა მწკრივი? 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

1) გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$, ე. ი. მწკრივი კრებადია.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1$, ე. ი. მწკრივი განშლადია.

ნეპერის რიცხვის წარმოდგენა რიცხვითი მწკრივის სახით.

თეორემა 3.69. სამართლიანია წარმოდგენა

$$e=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...$$

დამტკიცება. ნიუტონის ბინომის თანახმად

$$(1+1/n)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+...+\frac{n(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+...+\frac{1}{n^n}=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

მიღებული ტოლობიდან დავასკვნით $e_n<s_n, n=1,2,...$ სადაც $e_n=(1+1/n)^n$ და $s_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$. მეორე მხრივ თუ $k\in N$ ფიქსირებულია და $n\geq k$ გვექნება

$1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<e_n$. თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $n\to\infty$ მივიღებთ $s_k\leq e$ ნებისმიერი $k\in N$. მაშასადამე ნებისმიერი $n\in N$ გვაქვს $e_n<s_n\leq e$. თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე , როცა $n\to\infty$ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

შევაფასოთ სიდიდე $e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+.....=$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+....\right]<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+....\right]=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}\cdot\frac{n+2}{n!\cdot(n+1)^2}<\frac{1}{n!\cdot n}.$$

$e-s_n$ სხვაობის მიღებული შეფასება შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$e=s_n+\frac{\theta_n}{n!\cdot n}$ სადაც $0<\theta_n<1$. აღნიშნული წარმოდგენა საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ ნეპერის რიცხვის ირაციონალობა(ინფორმაციისათვის ნეპერის რიცხვი არამარტო ირაციონალური და ამავე დროს ტრანცენდენტულია). მართლაც დაუშვათ წინააღმდეგი ვთქვათ $e=\frac{p}{q}$ სადაც $p,q\in N$. მაშინ რიცხვი $q!\cdot e$ რიცხვი ნატურალურია, ამავე დროს გვაქვს

$$q!\cdot e = q!\left(s_q + \frac{\theta_q}{q!\cdot q}\right) = q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}+\frac{\theta_q}{q}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამოდის ,რომ რიცხვი $\frac{\theta_q}{q}$ მთელია, რაც შეუძლებელია (ვინაიდან $0<\theta_n<1$).

ნიშანმონაცვლე მწკრივის კრებადობა.

განსაზღვრება 3.70. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k = p_1 - p_2 + p_3 + \ldots + (-1)^k p_k + \ldots$ სახის მწკრივს, სადაც $p_k \geq 0$, უწოდებენ ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივს.

თეორემა 3.71. ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k = p_1 - p_2 + p_3 + \ldots + (-1)^k p_k + \ldots$ ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი, სადაც $p_k \geq 0$. თუ p_k მიმდევრობა არაზრდადია და $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$, მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k = p_1 - p_2 + p_3 + \ldots + (-1)^k p_k + \ldots$ მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k = p_1 - p_2 + p_3 + \ldots + (-1)^k p_k + \ldots$ მწკრივი და p_k არაზრდადი მიმდევრობისათვის $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$. ვთქვათ, $(S_n)_{n\geq 1}$ არის მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა. განვიხილოთ

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n})$$

მიმდევრობა. შევნიშნოთ, რომ ფრჩხილებში მოქცეული თითოეული შესაკრები არაუარყოფითია, ამიტომ $(S_{2n})_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არაკლებადია. მეორე მხრივ გვაქვს

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n},$$

საიდანაც ცხადია, რომ $\forall n \in N$-ისთვის $S_{2n} \leq p_1$. ამიტომ $(S_{2n})_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია.

ამრიგად, $(S_{2n})_{n\geq 1}$ არის არაკლებადი და ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა, ამიტომ მას ზღვარი აქვს, ანუ $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. ცხადია, რომ

$$S_{2n-1} = S_{2n} + p_{2n},$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მოცემულობის თანახმად $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$, მივიღებთ, რომ კერძო ჯამთა $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ ქვემიმდევრობა კრებადია იგივე S ზღვრისკენ, ანუ $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$. ამრიგად, $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია S ზღვრისკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 3.72. ნიშანმონაცვლეობით მწკრივს, რომელიც აკმაყოფილებს ზემოთ დამტკიცებული თეორემის პირობებს, უწოდებენ ლაიბნიცის მწკრივს.

ამრიგად, ლაიბნიცის მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 3.73. განვიხილოთ მწკრივი:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \ldots$$

ცხადია, რომ ეს არის ლაიბნიცის მწკრივი, ამიტომ იგი კრებადია. ამავე დროს შევნიშნოთ, რომ ეს მწკრივი არის პირობით კრებადი, ვინაიდან ამ მწკრივის

წევრების მოდულებისაგან შედგენილი მწკრივია ჰარმონიული მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, რომელიც განშლადია.

მტკიცდება, რომ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ მწკრივთა აბსოლიტური და პირობით კრებადობის შესახებ რამდენიმე მნიშვნელოვანი დებულებადებულება:

თეორემა 3.73. ვთქვათ, მოცემულია აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ და ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=S$. მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივის წევრების ნებისმიერი გადანაცვლების შედეგად მიღებული მწკრივი კვლავ აბსოლუტურად კრებადი იქნება იგივე S ჯამისკენ.

თეორემა 3.74. ვთქვათ, მოცემულია პირობით კრებადი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$. მაშინ წინასწარ დასახელებული ნებისმიერი L ნამდვილი რიცხვისთვის შეგვიძლია $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ მწკრივის წევრები ისე გადავანაცვლოთ, რომ მიღებული მწკრივი კრებადი იყოს L რიცხვისკენ.

როგორც დავინახეთ რიცხვთა "უსასრულო " ჯამების განხილვისას მთელი რიგი ალგებრული თვისებები კერძოდ კი შეკრების ოპერაციის კომუტაციურობის თვისებას ადგილი არ აქვს (პირობით კრებადი მწკრივებისათვის).

ბოლოს განვიხილოთ ერთი სპეციალური კლასი რიცხვითი მწკრივებისა, რომლებიც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, ესაა მწკრივები რომელთა წევრები მონოტონურ მიმდევრობას ადგენენ. მათთვის სამართლიანია კრებადობის შემდეგი ნიშანი

თეორემა. (კოში) ვთქვათ $p_1\ge p_2\ge p_3\ge\ldots\ge p_k\ge\ldots\ge 0$, მაშინ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ კრებადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ $\sum_{n=0}^{\infty}2^n p_{2^n}=p_1+2p_2+8p_8+\ldots$ კრებადია.

დამტკიცება. სამართლიანია ტოლობები

$$p_2\le p_2\le p_1$$
$$2p_4\le p_3+p_4\le 2p_2$$
$$4p_8\le p_5+p_6+p_7+p_8\le 4p_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2^n p_{2^{n+1}}\le p_{2^n+1}+p_6+\ldots+p_{2^{n+1}}\le 2^n p_{2^n}$$

თუ შევკრებთ ამ უტოლობებს მივიღებთ

$$\frac{1}{2}(S_n-p_1)\le A_{2^n+1}-p_1\le S_n$$

სადაც $A_n=p_1+p_2+\ldots.+p_n, S_n=p_1+2p_2+\ldots.+2^n p_{2^n}$ თეორემაში განხილული მწკრივების კერძო ჯამებია. $A_n, S_n, n=1,2,\ldots$ მიმდევრობები არაკლებადი მიმდევრობებია ამიტომ უკვე მირღებული უტოლობების ძალით ისინი ერთდროულად კრებადი ან განშლადი მწკრივებია. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.75. ვთქვათ, მოცემულია მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. როცა $p>1$, მაშინ მწკრივი კრებადია, ხოლო როცა $p\le 1$, მაშინ განშლადია.

მართლაც თუ $p\ge 0$ მოცემული მწკრივის კრებადობის ხასიათი ემთხვევა $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{1-p})^n$ მწკრივის კრებადობის ხასიათს, ეს უკანასკნელი კრებადია მხოლოდ მაშინ როცა $p>1$. თუ $p<0$ მოცემული მწკრივი განშლადია ვინაიდან მისი ზოგადი წევრი ნულისკენ არ მიისწრაფის.

სავარჯიშოები

1. გაიხსენეთ რიცხვითი მიმდევრობის ცნება. შემოსაზღვრული (ზემოდან, ქვემოდან) მიმდევრობის ცნება. კრებადი მიმდევრობის ცნება. აჩვენეთ რომ კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მოიყვანეთ აღნიშნული ცნებების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.
2. ცნობილი კრებადი მიმდევრობის ცნება ტოლფასია თუ არა შემდეგი წინადადების: $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ თუ $\forall\varepsilon>0,\exists$ დადებითი K რიცხვი (არა აუცილებელად ნატურალური) ისეთი, რომ $\forall n>K:|x_n-a|<\varepsilon$?
3. მაგალითზე აჩვენეთ, რომ N_0 ნომერი, რომელიც ფიგურირებს მიმდევრობის ზღვრის განმარტებაში საზოგადოდ დამოკიდებულია ε რიცხვზე.
4. ვთქვათ რიცხვითი მიმდევრობა x_n აკმაყოფილებს პირობას: $\exists N_0$ ისეთი, რომ $\forall\varepsilon>0,\forall n>N_0:|x_n-a|<\varepsilon$. ყოველი კრებადი მიმდევრობა აკმაყოფილებს თუ არა აღნიშნულ პირობას? როგორი მიმდევრობები აკმაყოფილებენ ზემოთ მოყვანილ პირობას?
5. ვთქვათ $\lim_{n\to\infty}x_n=a$.შეიძლება თუ არა მიმდევრობაში არსებობდეს უსასრულოდ ბევრი დადებითი რიცხვები თუ $a<0$.
6. ვთქვათ a წერტილის რომელიღაც მიდამოში არის მოცემული x_n მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წერტილი. შეიძლება თუ არა აღნიშნული პირობიდან დავასკვნათ, რომ ა) $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ ბ) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია გ) ამ მიდამოს გარეთ მდებარე არცერთი წერტილი არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის ზღვარი თუ ეს უკანასკნელი არსებობს.
7. ვთქვათ a წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არის მოცემული x_n მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წერტილი. შეიძლება თუ არა აღნიშნული პირობიდან დავასკვნათ, რომ ა) $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ ბ) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.
8. დაამტკიცეთ, რომ თუ მიმდევრობა კრებადია , მაშინ ა) ის შემოსაზღვრულია (მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელი პირობა) ბ)მისი ზღვარი ერთადერთია.

9. მოიყვანეთ ε, N ტერმინების გამოყენებით ჩანაწერის $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$ ფორმულირება.
10. აჩვენეთ, რომ $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს a წერტილის რაიმე მიდამო, რომლსაც არ ეკუთვნის მოცემული მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წევრი.
11. შემოსაზღვრულია თუ არა მიმდევრობები:

ა) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ბ) $x_n = 2n$ გ) $x_n = \ln n$ დ) $x_n = \sin n$ ე) $x_n = n \cdot (-1)^n$ ვ) $x_n = \ln(\ln(n+3))$ ზ) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$

12. ისარგებლეთ მიმდევრობის ზღვრის ცნებით აჩვენეთ, რომ

ა) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ბ) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$ გ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ დ) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} = 0$

ე) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n} \sin(n^2+1)}{n+3} = 0$ ვ) $\lim_{n\to\infty} (0{,}6)^n = 0$ ზ) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 0$

თ) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 - 6n + 5} = 1$.

13. დაადგინეთ მოცემული მიმდევრობები არის თუ არა მონოტონური რაღაც ნომრიდან დაწყებული, არის თუ არა შემოსაზღვრული თუ

ა) $x_n = \frac{2n-1}{3n+4}$ ბ) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2+n}$ გ) $x_n = \frac{n^2+10n}{10+n}$ დ) $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$

ე) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2 + n\cos n + 1}$ ვ) $x_n = \frac{1}{\sin n^2 + n}$ ზ) $x_n = \frac{n}{\ln(n!)}$

თ) $x_n = (\sin 1) \cdot (\sin 2) \cdot \ldots \cdot (\sin n)$ ი) $x_n = \sin^2(1) \cdot \sin^2(2) \cdot \sin^2(3) \cdot \ldots \cdot \sin^2(n)$

14. იპოვეთ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობის ზღვრები (თუ არსებობს)

ა) $x_n = \frac{2n^3 - n}{3n^3 + n^2 + 1}$ ბ) $x_n = \frac{1 - 2n^2}{3n^3 + n^2 + 1}$ გ) $x_n = \frac{2n^3 - n}{n^2 + 1}$ დ) $x_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{n+1}$

ე) $x_n = \frac{2n + \sin n}{5n + 1}$ ვ) $x_n = \frac{n! - 1}{n! + 1}$ ზ) $x_n = \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$ თ) $x_n = \cos \frac{n\pi}{7}$

ი) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ კ) $x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}$ ლ) $x_n = \sin n$

15. იპოვეთ α, β, γ მუდმივები ისეთი, რომ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი თუ

ა) $x_n = \frac{n^\alpha + 1}{n^\beta + 1}$ ბ) $x_n = n^\gamma \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

13. ცნობილია, რომ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. აჩვენეთ, რომ ა) $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ ბ) $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$
14. ვთქვათ $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. ამ პირობიდან შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

15. ვთქვათ მიმდევრობა $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ კრებადია. აჩვენეთ, რომ ან $\exists n$ ისეთი, რომ $x_n = M$ ან $\exists k$ ისეთი, რომ $x_k = m$ ან კიდევ $\exists n$ და $\exists k$ ისეთი, რომ $x_n = M$, $x_k = m$ სადაც $M = \sup\{x_n\}$ და $n = \inf\{x_n\}$.
16. ვთქვათ მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წევრი არის ა) ნული წერტილის ნებისმიერ მიდამოში ბ) ნული ნერტილის ნებისმიერი მიდამოს გარეთ.

შეიძლება თუ არა, რომ დავასკვნათ: ა)მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა ბ)მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია.

17. ცნობილია, რომ $y_n \neq 0 \forall n$ და ა) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ბ) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.

შეიძლება თუ არა, რომ $\{x_n / y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი? უსასრულოდ მცირე? უსასრულოდ დიდი ?განშლადი ? მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.

18. ვთქვათ $\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა მიმდევრობაა.

შეიძლება თუ არა აღნიშნული პირობიდან დავასკვნათ, რომ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ და $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობიდან ერთერთი მაინც უსასრულოდ მცირეა.

19. ვთქვათ $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა მიმდევრობაა.

შეიძლება თუ არა აღნიშნული პირობიდან დავასკვნათ, რომ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ და $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობიდან ერთერთი მაინც უსასრულოდ მცირეა.

20. დაამტკიცეთ, რომ თუ $x_n \geq y_n$ და $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ მაშინ $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

21. ცნობილია, რომ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია, ხოლო $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდვრობა უსასრულოდ დიდი. შეიძლება თუ არა $\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა იყოს ა)კრებადი ბ) განშლადი მაგრამ შემოსაზღვრული გ) იყოს უსასრულოდ დიდი დ) იყოს უსასრულოდ მცირე.

22. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული.

23. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty(-\infty)$, მაშინ $\{x_n\}$ სიმრავლეს გააჩნია უმცირესი (უდიდესი) ელემენტი.

24. იპოვეთ მიმდევრობის უმცირესი წევრი თუ ა) $x_n = n^2 - 9n - 100$ ბ) $x_n = n + 100/n$.

25. ვთქვათ მიმდევრობა $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ კრებადია ხოლო $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა განშლადი. აჩვენეთ, რომ $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ განშლადია. მაგალითებზე აჩვენეთ, რომ $\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა შეიძლება იყოს ა) კრებადი ბ) განშლადი.

26. ვთქვათ $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია. შეიძლება დავასკვნათ თუ არა რომ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ და $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობი კრებადია?

27. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობა $x_n = \sin(n)$ განშლადია.

28. მოცემულია, რომ $\lim_{n\to\infty} x_n = b \neq \infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ აჩვენეთ, რომ

ა) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \infty$ ბ) $\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = 0$ გ) $\lim_{n\to\infty}(y_n / x_n) = \infty$ დ) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty$

თუ $b \neq 0$.

29. იპოვეთ $\lim_{n\to\infty} x_n$ თუ

ა) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ ბ) $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$ გ) $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\ (n+1)}$

დ) $x_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$ ე) $x_n = \sqrt[n]{n}$ ვ) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ ზ) $x_n = \frac{2^n}{n!}$ თ) $x_n = \frac{a^n}{n!}$

ი) $x_n = \sqrt[n]{a}$ კ) $x_n = nq^n; |q| < 1$ ლ) $x_n = \frac{\ln n}{n}$ მ) $x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

30. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით დაადგინეთ, კრებადია თუ განშლადი რიცხვითი მიმდევრობები თუ

ა) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}$ ბ) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ გ) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ დ) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{k(k+1)}$ ე) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$

ვ) $x_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$ ზ) $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k$ სადაც $|q|<1$ და $|a_k| < M, \forall k, M > 0.$

31. იპოვეთ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობის ყველა კერძო ზღვრები აგრეთვე ზუსტი ზედა და ქვედა ზღვარი თუ:

ა) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$ ბ) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$ გ) $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$

დ) $x_n = 1 + n\sin\frac{\pi n}{2}$ ე) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ ვ) $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{\pi n}{4}$

ზ) $x_n = \cos^n\frac{2\pi n}{3}$ თ) $x_n = (-1)^{n-1} n$ ი) $x_n = (1+1/n)^n \cdot (-1)^n + \sin\frac{\pi n}{3}$

32. ააგეთ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა, რომლის ყველა კერძო ზღვრების სიმრავლე წინასწარ მოცემული რიცხვთა $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ სასრული სიმრავლეა.

33. ააგეთ რიცხვითი მიმდევრობა, რომელსაც ა) მხოლოდ ერთი კერძო ზღვარი გააჩნია, მაგრამ არ არის კრებადი. ბ) გააჩნია უსასრულო რაოდენობა კერძო ზღვრები ბ) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი კერძო ზღვარია.

34. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობებს $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ და $\left\{x_n \cdot \sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ გააჩნიათ ერთიდაიგივე კერძო ზღვრები.

35. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

ბ) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

36. ვთქვათ $x_n \ge 0, y_n \ge 0 (n = 1,2,...)$

ა) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n \cdot y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

ბ) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

37. დაამტკიცეთ, რომ

$0 < e - (1+1/n)^n < 3/n \quad (n = 1,2,3....)$

38. ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის აჩვენეთ, რომ $(n/e)^n < n! < e(n/2)^n$.

39. ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის აჩვენეთ, რომ $1/(n+1) < \ln(1+1/n) < 1/n$

40. ვთქვათ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. რა შეიძლება ითქვას $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ზღვრის შესახებ?

41. იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი, რომელიც მოცემულია რეკურენტული წესით: x_1 რაიმე რიცხვია, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $0 < x_1 < 1$; $x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \forall n \ge 1$.

42. დაამტკიცეთ, რომ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ მიმდევრობა კრებადია.

43. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ რეკურენტული წესით მოყვანილ მიმდევრობები კრებადია და იპოვეთ ეს ზღვრები თუ

ა) $x_1 = a, x_2 = b, a \ne b, x_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2 \forall n \ge 3$.

ბ) x_1 ნებისმიერი დადებითი რიცხვია,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\ \forall n\geq 1, a>0\,.$$

44. დაადგინეთ მწკრივთა კრებადობის ხასიათი (კრებადია თუ განშლადი)

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n-3}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sin n}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right)$

ი) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$ ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

45. დაადგინეთ მწკრივთა კრებადობის ხასიათი (კრებადია თუ განშლადი), კრებადობის შემთხვევაში იპოვეთ ჯამი

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}(10^{-n}+9^{-n})$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}(10^{-n}+9^{n})$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n}\cos\frac{n\pi}{2}$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n/3}$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 10^{-n/2}$

ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 10^{-n}$ ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{17}$ თ) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 10^{-(2n-1)}$

46. დაადგინეთ მწკრივთა კრებადობის ხასიათი (კრებადია თუ განშლადი) გამოიყენეთ ვაიერშტრასის შედარების ნიშანი

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ი) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ კ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

ლ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-\sin n}$ მ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!-n}$

47. დაადგინეთ მწკრივთა კრებადობის ხასიათი (კრებადია თუ განშლადი) ,გამოიყენეთ დალამბერის ან კოშის ნიშანი ნიშანი

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}arctgn$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n^2)!}$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^{\sqrt{2}}}$ ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$ ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^2}}{n!}$

48. დაადგინეთ მწკრივის კრებადობის და აბსოლიტურად კრებადობის ხასიათი

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-n}$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n arctgn}{n}$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+5)}{n^2+3}$

თავი 4

ფუნქციის ზღვარი წერტილში.კოშისა და ჰაინეს განმარტებანი. მათი ტოლფასობა. ფუნქციის რხევა სიმრავლეზე. ფუნქციის ზღვრის ზოგიერთი ზოგადი თვისება. ფუნქციათა ასიმტოტურ ყოფაქცევათა შედარება.

კალკულუსის კურსიდან ჩვენთვის უკვე ცნობილია წერტილში ფუნქციის ზღვრის ცნება, სახელდობრ: ვთქვათ, $(a;b)$ რაიმე ინტერვალია R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან და $c\in(a;b)$. ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $E=(a;c)\cup(c;b)$.

განსაზღვრება 4.1. (წერტილში ფუნქციის ზღვრის ცნება კოშის აზრით). ვიტყვით, რომ $f:E\to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim_{x\to c}f(x)=p$, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ $x\in E$ წერტილისთვის სრულდება $0<|x-c|<\delta$ უტოლობა, მაშინ შესრულდება $|f(x)-p|<\varepsilon$ უტოლობაც.

შენიშვნა 4.2. შესაძლებელია, ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებაში ფუნქცია განსაზღვრული იყოს c წერტილშიც ნებისმიერად, რაც ზღვრის არსებობაზე და მის სიდიდეზე არანაირ გავლენას არ ახდენს.

ანალოგიურად ჩვენ შევისწავლეთ წერტილში მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი, რომელთა განმარტება იგივეა, რაც უკვე მოყვანილი განმარტება თუ c წერტილის როლში ავიღებთ შესაბამისად a და b წერტილებს. ამ შემთხვევაში მარჯვენა და მარცხენა ზღვრების აღსანიშნავად ვიყენებდით სიმბოლოებს $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = p$ და $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = p$.

მაგალითი 4.3. ვთქვათ, $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ავიღოთ $\delta = \varepsilon$. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$ უტოლობას, გვექნება რომ $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, როდესაც $0 < |x| < \delta = \varepsilon$.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ ფუნქციას ზღვარი შეიძლება ქონდეს ისეთ წერტილშიც, რომელშიც განსაზღვრული არ არის. ეს გარემოება გათვალისწინებულია ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებაში მოცემულ $0 < |x - c| < \delta$ უტოლობაში.

ზემოთ განხილულ განმარტებებს თუ დაუკვირდებით შევამჩნევთ, რომ c წერტილს რომლისთვისაც განსაზღვრული იყო ზღვარი (მარჯვენა, მარცხენა ზღვარი) ჰქონდა თვისება: ის ფუნქციის განსაზღვრის არის ზღვრული წერტილი იყო ანუ c წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არსებობდა უსასრულოდ ბევრი წერტილი ფუნქციის განსაზღვრის არიდან. მოვიყვანოთ განმარტება, რომელიც მოიცავს ყველა ჩვენს მიერ ცნობილ განმარტებებს.

განსაზღვრება 4.4. (წერტილში ფუნქციის ზღვრის ცნება კოშის აზრით). ვთქვათ c წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. ვიტყვით, რომ $f : E \to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში E სიმრავლის გასწვრივ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ x\in E}} f(x) = p$ (ან $f(x) \to p$, როცა $E \ni x \to c$ ან $\lim\limits_{E\ni x\to c} f(x) = p$), თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ $x \in E$ წერტილისთვის სრულდება $0 < |x - c| < \delta$ უტოლობა, მაშინ შესრულდება $|f(x) - p| < \varepsilon$ უტოლობაც.

შენიშვნა 4.5. კალკულუსის კურსში ჩვენ ძირითადად განვიხილავდით ფუნქციებს რომელთა განსაზღვრის არე რაიმე შუალედი (მაგ. $(a;b)$) ან "გაჩხვლეტილი" შუალედი იყო (მაგ. $(a;c) \cup (c;b)$). ასეთი სიმრავლეების ზღვრული წერტილების სიმრავლე მარტივი აღსაწერია ($(a;b)$ ინტერვალის და $(a;c) \cup (c;b)$ გაჩხვლეტილი ინტერვალის ყველა ზღვრული წერტილის სიმრავლეა $[a;b]$ სეგმენტი). ფუნქცია შესაძლოა განსაზღვრული იყოს გაცილებით უფრო რთულ სიმრავლეზე ვიდრე ზემოთ მოყვანილი სიმრავლეებია.

მაგალითი 4.6. ვთქვათ E სიმრავლე არის რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე. განვიხილოთ ფუნქცია $f : E \to R$ განსაზღვრული შემდეგი წესით: ვთქვათ $\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$ არის $x \in Q$ რაციონალური რიცხვის წარმოდგენა უკვეცი წილადის სახით (შევნიშნოთ, რომ ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია). განვსაზღვროთ $f(x) = \frac{1}{n}$. (ამ ფუნქციას რიმანის ფუნქციას უწოდებენ.)

შევნიშნოთ, რომ Q სიმრავლისათვის ნებისმიერი $c \in R$ ნამდვილი რიცხვი ზღვრული წერტილია. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ აღნიშნული ფუნქციის ზღვარი ნებისმიერ $c \in R$ წერტილში რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გასწვრივ. ვაჩვენოთ, რომ აგებული ფუნქციის ზღვარი ნებისმიერ ფიქსირებულ $c \in R$ წერტილში Q სიმრავლის გასწვრივ არის რიცხვი ნული.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ c წერტილის ყოველ კონკრეტულ მიდამოში ფიქსირებული $A \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს სასრული რაოდენობა $\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$ წილადები ისეთი, რომ $n < A$. ამიტომ შეგვიძლია ავაგოთ c წერტილის ისეთი პატარა მიდომო, რომელშიც მოხვედრილი წილადიების მნიშვნელი (გარდა შესაძლოა c წერტილისა თუ ის რაციონალურია) მეტი იქნება A ზე. მაშასადამე აღნიშნული მიდამოდან აღებული ნებისმიერი რაციონალური x რიცხვიათვის (რომელიც c-ს არ ემთხვევა) გვექნება $|f(x)-0| < 1/A.$ თუ წინასწარ ფიქსირებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ჩვენ ჯერ ავიჩევთ $A \in N$ ნატურალურ რიცხვს ისე, რომ $1/A < \varepsilon$ და ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას გავიმეორებთ დავასკვნით, რომ $|f(x)-0| < 1/A < \varepsilon$ c წერტილის რომელიღაც მიდამოდან აღებული ნებისმიერი x რიცხვიათვის (რომელიც c-ს არ ემთხვევა). მაშასადამე $f(x) \to o$, როცა $Q \ni x \to c$.

ქვემოთ ძირითადად განვიხილავთ სიტუაციებს როცა ფუნქციის განსაზღვრის არე რაიმე შუალედია. ასეთ შემთხვევაში ხშირად თუ ეს არ იწვევს გაუგებრობას სიტყვებს " c წერტილში ზღვარი E სიმრავლის გასწვრივ" გამოვტოვებთ და მოკლედ ვიტყვით " ზღვარი c წერტილში (ზღვარი მარჯვნიდან, ზღვარი მარცხნიდან).

ჩვენ უკვე შესწავლილი გვაქვს რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი. შესაძლებელია განვმარტოთ ფუნქციის ზღვარი წერტილში უკვე ცნობილი მიმდევრობის ზღვრის ცნებაზე დაყრდნობით. ეს მიდგომა საშუალებას მოგვცემს მთელი რიგი დებულებები ფუნქციათა შესახებ მივიღოთ მიმდევრობებზე უკვე ცნობილი ფაქტებზე დაყრდნობით.

განსაზღვრება 4.7. (წერტილში ფუნქციის ზღვრის ცნება ჰაინეს აზრით). ვთქვათ c წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. ვიტყვით, რომ $f: E \to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში E სიმრავლის გასწვრივ არის p რიცხვი (ჰაინეს აზრით) და ჩავწერთ $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in E}} f(x) = p$, თუ E-დან აღებული წერტილთა ნებისმიერი $(x_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობისათვის სადაც $x_n \neq c, n = 1,2,...$ და რომელიც კრებადია c რიცხვისკენ, გვექნება, რომ $(f(x_n))_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია p რიცხვისკენ.

თეორემა 4.8. იმისათვის, რომ $f: E \to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში E სიმრავლის გასწვრივ იყოს p რიცხვი ჰაინეს აზრით, აუცილებელია და საკმარისი , რომ p იყოს $f: E \to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში E სიმრავლის გასწვრივ კოშის აზრითაც.

დამტკიცება. ვთქვათ $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in E}} f(x) = p$ კოშის აზრით. ავიღოთ $\varepsilon > 0$ რიცხვი. მაშინ მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x - c| < \delta$ და $x \in E$ გვექნება

$|f(x)-p|<\varepsilon$. განვიხილოთ E-დან წერტილთა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა რომელიც კრებადია c წერტილისაკენ და $x_n \neq c, n=1,2,\ldots$. მოვძებნოთ $A\in N$ ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ $|x_n-c|<\delta$, როცა $n>A$. მაშინ გვექნება, რომ $|f(x_n)-p|<\varepsilon$, როცა $n>A$. მაშასადამე $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=p$. თეორემის ერთი ნაწილი დამტკიცებულია. ვთქვათ $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in E}} f(x)=p$ ჰაინეს აზრით. თუ დაუშვებთ, რომ $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in E}} f(x)\neq p$ კოშის აზრით, მაშინ არსებობს $\varepsilon_0>0$ რიცხვი ისეთი, რომ c წერტილის $\frac{1}{n}, n\in N$ მიდამოდან აღებული რომელიღაც $x_n\in E\setminus\{c\}$ რიცხვისათვის $|f(x_n)-p|\geq\varepsilon_0$. ვინაიდან $|x_n-c|<1/n, n=1,2,\ldots$ ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$, მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq p$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in E}} f(x)=p$ კოშის აზრით. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 4.9. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $R\setminus\{0\}$. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციას $c=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. განვიხილოთ $c=0$ წერტილისაკენ კრებადი ორი რიცხვითი მიმდევრობა:

$$x_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}; n=1,2,\ldots$$

გვაქვს $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=-1,.\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=1$. მაშასადამე $c=0$ წერტილში მოცემულ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნია.

წერტილში ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმი.

განსაზღვრება 4.10. ვთქვათ მოცემულია $f: X\to R$ ფუნქცია და $E\subset X$. f ფუნქციის რხევას E სიმრავლეზე უწოდებენ სიდიდეს

$$\omega(E,f)=\sup_{x,y\in E}|f(x)-f(y)|.$$

მაგალითი. 4.11. $\omega([-1,2],x)=3$, $\omega((-1,2],x)=3$

$\omega([-1,2],x^2)=4$ $\omega([-1,2),x^2)=4$

$\omega([-\pi,\pi],\sin x)=2$.

თეორემა 4.12. (კოში) ვთქვათ c წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. იმისათვის, რომ $f: E\to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში E სიმრავლის გასწვრივ არსებობდეს აუცილებელია და საკმარისი რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობდეს c წერტილის მიდამო $U(c)$ ისეთი, რომ $\omega(E\cap U(c)\setminus\{c\}, f)<\varepsilon$.

შენიშვნა 4.13. შემდგომში თუ $U(c)$ არის c რაიმე მიდამო, სიმრავლეს $U(c)\setminus\{c\}$ ვუწოდებთ c წერტილის გაჩხვლეტილ მიდამოს და ავღნიშნავთ სიმბოლოთი $\overset{\circ}{U}(c)$.

მარტივია ჩვენება იმისა, რომ ზემოთ მოყვანილი თეორემა თეორემა ტოლფასია შემდეგი თეორემის

თეორემა 4.14. (კოში) ვთქვათ c წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. იმისათვის, რომ $f: E\to R$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში E სიმრავლის გასწვრივ არსებობდეს აუცილებელია და საკმარისი რომ ყოველი $\varepsilon>0$

რიცხვისათვის არსებობდეს c წერტილის მიდამო $U(c)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი ორი x და y რიცხვებისათვის სიმრავლიდან $\overset{\circ}{U}(c)\cap E$ შესრულდეს უტოლობა $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

დამტკიცება. საკმარისობა. პირობის ძალით $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს c წერტილის მიდამო $U(c)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი ორი x და y რიცხვებისათვის სიმრავლიდან $\overset{\circ}{U}(c)\cap E$ სამართლიანია უტოლობა $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. განვიხილოთ $E\setminus\{c\}$ სიმრავლიდან c წერტილისკენ კრებადი რაიმე მიმდევრობა $x_n, n=1,2,...$ ცხადია ამ მიმდევრობისათვის მოიძებნება $k\in N$ ისეთი, რომ $x_n\in\overset{\circ}{U}(c)\cap E$ როცა $n>k$. ამიტომ ნებისმიერი $m,n>k$ ნომრებისათვის გვექნება $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. მაშასადამე მიმდევრობა $f(x_n)$, $n=1,2,...$ ფუნდამენტალურია, ამიტომ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. ვაჩვენოთ, $E\setminus\{c\}$ სიმრავლიდან აღებული c წერტილისკენ კრებადი სხვა $y_n, n=1,2,...$ მიმდევრობისათვის $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=A$. (საიდანაც ჰაინეს განმარტების საფუძველზე დავასკვნით, c წერტილში ფუნქციის ზღვარის არსებობას). ცხადია $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$ ზღვარის არსებობს (უნდა ვაჩვენოთ, რომ ის ტოლია A რიცხვის). ავიღოთ $k_1>k$ ნატურალური რიცხვი, ისეთი რომ $y_n\in\overset{\circ}{U}(c)\cap E$ როცა $n>k_1$. მაშინ ნებისმიერი $n>k_1$ ნომრებისათვის გვექნება $|f(y_n)-f(x_n)|<\varepsilon$. ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ ამიტომ შეგვიძლია მოვძებნოთ $k^*>k_1$ ისეთი, რომ $|f(x_n)-A|<\varepsilon$, როცა $n>k^*$. შაბოლოოდ, როცა $n>k^*$ გვექნება

$$|f(y_n)-A|\le|f(y_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

საიდანაც გვექნება, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=A$. თეორემა დამტკიცებულია.

ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში.

განსაზღვრება 4.15. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to+\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=p$, თუ

ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $M>0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $x>M$, მაშინ შესრულდება $|f(x)-p|<\varepsilon$ უტოლობა.

განსაზღვრება 4.16. ვთქვათ, მოცემულია $f:(-\infty;a)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to-\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=p$, თუ

ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $M>0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $x<-M$, მაშინ შესრულდება $|f(x)-p|<\varepsilon$ უტოლობა.

განსაზღვრება 4.17. ვთქვათ, მოცემულია $f:(-\infty;a)\cup(b;+\infty)\to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ

$\lim_{x\to\infty} f(x) = p$, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $M > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $|x| > M$, მაშინ შესრულდება $|f(x) - p| < \varepsilon$ უტოლობა.

ფუნქციის უსასრულო ზღვრები

განსაზღვრება 4.18. ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to R$ ფუნქცია და c წერტილი არის E სიმრავლის ზღვრული წერტილი. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი c წერტილში არის $+\infty$-ის ტოლი და ჩავწერთ $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, თუ ყოველი $M > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x - c| < \delta$, მაშინ შესრულდება $f(x) > M$ უტოლობა.

განსაზღვრება 4.19. ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to R$ ფუნქცია და c წერტილი არის E სიმრავლის ზღვრული წერტილი. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი c წერტილში არის $-\infty$-ის ტოლი და ჩავწერთ $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, თუ ყოველი $M > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x - c| < \delta$, მაშინ შესრულდება $f(x) < -M$ უტოლობა

განსაზღვრება 4.20. ვთქვათ, მოცემულია $f : E \to R$ ფუნქცია და c წერტილი არის E სიმრავლის ზღვრული წერტილი.. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი c წერტილში არის ∞-ის ტოლი და ჩავწერთ $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, თუ ყოველი $M > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x - c| < \delta$, მაშინ შესრულდება $|f(x)| > M$

სავარჯიშო 4.21. ჩამოაყალიბეთ, რას ნიშნავს 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; 2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; 3) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; 4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; 5) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; 6) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

7) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; 8) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; 9) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

შევნიშნოთ, რომ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ მოყვანილი განმარტებების ტოლფასი განმარტებანი ჰაინეს აზრით. მაგალითად

განსაზღვრება 4.22. ვთქვათ, მოცემულია $f : (a;+\infty) \to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \to +\infty$ არის p რიცხვი და ჩავწერთ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = p$, თუ

ყოველი $(a;+\infty)$ შუალედიდან აღებული ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ გვაქვს $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = p$.

ფუნქციათა ასიმპტოტური ყოფაქცევის შედარება.

როდესაც მოითხოვება ფუნქციის შესწავლა რაიმე წერტილის მიდამოში (ან უსასრულობაში) ამბობენ, რომ საჭიროა ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა ამ წერილის მიდამოში. ფუნქციის ასიმპტოტურ ყოფაქცევას ძირითადად ახასიათებენ შესასწავლი ფუნქციის შედარებით (რაიმე მეთოდით) უფრო მარტივით და კარგად შესწავლილი ფუნქციებთან.

მაგალითი 4.23. განვიხილოთ ფუნქცია $\pi : (0,+\infty) \to R$ განსაზღვრული შემდეგნაირად: ყოველი ფიქსირებული x რიცხვისათვის $\pi(x)$ წარმოადგენს იმ მარტივი რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც არ აღემატებიან x რიცხვს. ბუნებრივია დაისვას საკითხი თუ როგორი ასიმტოტური ყოფაქცევა გააჩნია $\pi(x)$ ფუნქციას. ჯერ კიდევ ევკლიდესათვის იყო ცნობილი, რომ $\pi(x) \to \infty$,

როცა $x \to \infty$. ჩებიშევმა (მე-19 საუკუნე) დაადგინა რიცხვთ თეორიის ერთერთი ფუნდამრნტალური ფაქტი. სახელდობრ მის მიერ ნაჩვენები იყო, რომ $\pi(x)$ და $\frac{x}{\ln x}$ ფუნქციებს, როცა x იზრდება "გარკვეული აზრით" ერთნაირი ყოფაქცევა გაჩნიათ. სახელდობრ სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური ტოლობა $\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \alpha(x)$ სადაც $\alpha(x)$ ფუნქციას გააჩნია თვისება $\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 0$.

განმარტება 4.24. ვიტყვით, რომ $f : E \to R$ ფუნქციას აქვს $g : E \to R$ ფუნქციის რიგი (და ვიტყვით f არის O დიდი g E სიმრავლეზე) თუ არსებობს $c>0$ მუდმივი ისეთი, რომ $|f(x)| \le c|g(x)|, \forall x \in E$. ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ $f(x)=O(g(x))$ E სიმრავლეზე.

მაშასადამე ჩანაწერი $f(x)=O(1)$ E-ზე ნიშნავს რომ f ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

მაგალითი 4.25. $x^2 = O(x^3)$ $[1,+\infty)$ სიმრავლეზე (და არა $[0,+\infty)$ სიმრავლეზე).

განმარტება 4.26. დაუშვათ E ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა, რომლის ზღვარითი წერტილია a. ვიტყვით, რომ $f : E \to R$ ფუნქცია არის o მცირე $g : E \to R$ ფუნქციის მიმართ როცა $x \to a$ (და ვიტყვით f არის o მცირე g როცა $x \to a$) თუ არსებობს $\alpha : E \to R$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\alpha(x) \to 0$ როცა $E \ni x \to a$ და $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \forall x \in E$. ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ $f(x)=o(g(x))$ როცა $E \ni x \to a$.

შენიშვნა 4.27. ანალოგიური ცნებები შეგვიძლია შემოვიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა E სიმრავლე არაა შემოსაზღვრული ზემოდან (ქვემოდან) და $a = +\infty$ ($a = -\infty$).

მაგალითი 4.28. ა) $x^3 = o(x^2)$ როცა $x \to 0$ ბ) $\frac{1}{x^3} = o(\frac{1}{x^3})$ როცა $x \to +\infty$.

განმარტება 4.29. ვიტყვით, რომ $f : E \to R$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა a წერტილში თუ $\lim_{E \ni x \to a} f(x) = 0$. (შესაძლებელია ის შემთხვევებიც როცა $a = +\infty, a = -\infty, a = \infty$)

განმარტება 4.30. ვიტყვით, რომ $f : E \to R$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია a წერტილში თუ $\lim_{E \ni x \to a} f(x) = \infty(+\infty, -\infty)$. (შესაძლებელია ის შემთხვევებიც როცა $a = +\infty, a = -\infty, a = \infty$)

შენიშვნა 4.31. თუ $g(x) = 1, \forall x \in E$ მაშინ ჩანაწერი $f(x)=o(1)$ როცა $E \ni x \to a$ უბრალოდ აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ f ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა $x = a$ წერტილში.

განმარტება 4.32. ვთქვათ g ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა $x = a$ წერტილში და $f(x)=o(g(x))$ როცა $E \ni x \to a$, მაშინ ამბობენ რომ f ფუნქცია უფრო მაღალი უსასრულოდ მცირეა $x = a$ წერტილში, ვიდრე g ფუნქცია.

მაგალითი 4.33. $x^3 = o(x^2)$ როცა $x \to 0$ და ამიტომ x^3 ფუნქცია უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა ვიდრე x^2 ფუნქცია როცა $x \to 0$ (ანუ $x = 0$ წერტილში).

განმარტება 4.34. ვთქვათ f, g ფუნქციები უსასრულოდ დიდი ფუნქციებია $x = a$ წერტილში და $f(x)=o(g(x))$ როცა $E \ni x \to a$, მაშინ ამბობენ რომ g ფუნქცია უფრო მაღალი უსასრულოდ დიდია $x = a$ წერტილში, ვიდრე f ფუნქცია.

თუ ვისარგებლებთ წერტილში ფუნქციის ზღვრის უკვე ცნობილ თვისებებს შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ უსასრულოდ მცირეთა თვისებები რომელთაც

შემდგომში გამოვიყენებთ ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლისას. (სიმარტივისათვის განსაზღვრის E არეზე აპელირებას არ გავაკეთებთ).

თეორემა 4.35. ვთქვათ $f(x)=o(1)$ და $g(x)=o(1)$ როცა $x=a$. მაშინ $f(x)+g(x)=o(1)$ და $f(x)g(x)=o(1)$ როცა $x=a$.

ბ) ვთქვათ $f(x)=o(1)$ როცა $x=a$, ხოლო ხოლო g შემოსაზღვრული ფუნქციაა. მაშინ $f(x)g(x)=o(1)$, როცა $x=a$. (ფორმალურად აღნიშნული დებულება ასეც შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: უსასრულოდ მცირისა და შემოსაზღვრული ფუნქციის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა.)

დამტკიცება. თეორემის ა) პუნქტი ცნობილი დებულებაა კალკულუსის კურსიდან. დავამტკიცოთ ბ) ნაწილი. დავაფიქსიროთ $\varepsilon>0$ რიცხვი. ვინაიდან g შემოსაზღვრული ფუნქციაა ამიტომ მოიძებნება $M>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|g(x)|<M$ როცა $x\in E$. ვინაიდან $f(x)=o(1)$ როცა $x=a$ ამიტომ $\frac{\varepsilon}{M}>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $0<|x-a|<\delta$ გვექნება $|f(x)-0|<\frac{\varepsilon}{M}$. მაშასადამე როცა $0<|x-a|<\delta$ გვაქვს $|f(x)g(x)-0|<|f(x)-0||g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon$. საიდანაც დავასკვნით, რომ $f(x)g(x)=o(1)$, როცა $x=a$.

მაგალითი 4.36. $x^7\sin\left(\frac{1}{x^5+x^2}\right)=o(1)$ როცა $x=0$. ვინაიდან $y=\sin(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ფუნქციაა, ხოლო $x^7=o(1)$ როცა $x=0$.

შენიშვნა4.37. შევნიშნოთ, რომ ტოლობები სადაც გამოყენებულია სიმბოლო o მცირე არის პირობითი. მაგალითად ჩანაწერი $x^3=o(x^2)$ როცა $x\to 0$ სამართლიანია, მაგრამ ჩანაწერზე $o(x^2)=x^3$ ვერ ვიტყვით, რომ სამართლიანია, ვინაიდან $o(x^2)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია ნებისმიერი (რომელდაც) ფუნქცია რომელიც არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ვიდრე x^2 როცა $x\to 0$. ამ თვისების ფუნქციები კი უამრავია. ასე, რომ მაგალითად ჩანაწერის "$\sin x+o(x^2)$ როცა $x\to 0$" ქვეშ გვესმის შემდეგი ფაქტი: მოცემულია ორი ფუნქციის ჯამი რომელთან მეორეს აქვს ის თვისება რომ არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე როცა $x\to 0$ ვიდრე x^2 ფუნქციას.

მოვიყვანოთ უსასრულოდ მცირეთა ზოგიერთი თვისება. ვთქვათ f ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა $x=a$ წერტილში. მაშინ

1. $o(f)+o(f)=o(f)$ როცა $x\to a$.
2. $o(f)-o(f)=o(f)$ როცა $x\to a$.
3. $o(cf)=o(f)\forall c\neq 0$ როცა $x\to a$.
4. $c\cdot o(f)=o(f)\forall c\neq 0$ როცა $x\to a$.
5. $(o(f))^n=o(f^n),\forall n\in N$ როცა $x\to a$.
6. $f^n o(f)=o(f^{n+1}),\forall n\in N$ როცა $x\to a$.

7. $\frac{o(f^n)}{f} = o(f^{n-1}) \forall n \in N, n \geq 2$ როცა $x \to a$.

8. $o(f + o(f)) = o(f)$ როცა $x \to a$.

9. $\frac{o(f)}{f} = o(1)$ როცა $x \to a$.

10. $o(o(f)) = o(f)$ როცა $x \to a$.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე მათგანი. მაგალითად მე-2 თვისება გვესმის ასე: თუ ავიღებთ ნებისმიერად ორ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციას რომლებიც უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა ვიდრე f, მაშინ მათ სხვაობასაც იგივე თვისება აქვს (მივაქციოთ ყურადღება $o(x) - o(x)$ არაა ნულოვანი ფუნქცია!!) დავამტკიცოთ მე-8 თვისება , რომელიც ასე უნდა გავიგოთ თუ ავიღებთ ნებისმიერად ფუნქციას რომელიც არის უფრო მაღალი რიგის ვიდრე ფუნქცია $f(x) + o(f(x))$ (ეს უკანასკნელი ცხადია უსასრულოდ მცირეა როცა $x \to a$) მაშინ ასეთი ფუნქცია უფრო მაღალი რიგისაა ვიდრე $f(x)$ ფუნქცია. მართლაც

$$\frac{o(f(x)+o(f(x))}{f(x)} = \frac{o(f(x)+o(f(x))}{f(x)+o(f(x)} \cdot \frac{f(x)+o(f(x)}{f(x)} = \frac{o(f(x)+o(f(x))}{f(x)+o(f(x)} \cdot \left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) \to 0,$$

როცა $x \to a$.

თეორემა 4.38. იმისათვის, რომ $\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A$ აუცილებელია და საკმარისი, რომ სამართლიანი იყოს წარმოდგენა $f(x) = A + g(x)$ სადაც $g(x) = o(1)$, როცა $x = a$.

დამტკიცება. უცილებლობა. ვთქვათ $\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A$. განვიხილოთ $g(x) = f(x) - A$ ფუნქცია. ცხადია რომ $g(x) = o(1)$, როცა $x = a$ და სამართლიანია საჭირო წარმოდგენა $f(x) = A + g(x)$.

უცილებლობა. ვთქვათ სამართლიანია წარმოდგენა $f(x) = A + g(x)$ სადაც $g(x) = o(1)$, როცა $x = a$. მაშინ გვექნება $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(A + g(x)) = \lim_{x \to a} A + \lim_{x \to a} g(x) = A$.

კალკულუსის კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია სამართლიანობა შემდეგი ზღვრების(შესანიშნავი ზღვრები):

ა) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ბ) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ გ) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ დ) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x} = 1$ ე) $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ვ) $\lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$ ზ) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

(აღნიშნული ტოლობების სამართლიანობა შეგვიძლია დავამტკიცოთ მარტივად ლოპიტალის წესის გამოყენებით.)

აღნიშნული ტოლობები საშუალებას გვაძლევს დავწეროთ შემდეგი ასიმტოტური ტოლობები $x = 0$ წერტილში :

ა) $\sin x = x + o(x)$ ბ) $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ გ) $e^x = 1 + x = o(x)$ დ) $\ln(1+x) = x + o(x)$ ე) ვ) $\arcsin x = x + o(x)$ ზ) $arctgx = x + o(x)$ თ) $tgx = x + o(x)$ ი) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

საილუსტრაციოთ დავამტკიცოთ ერთ-ერთი

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \Rightarrow \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha+\beta(x)\Rightarrow (1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+x\beta(x)\Rightarrow (1+x)^{\alpha}=$$

$$=1+\alpha x+x\beta(x)=1+\alpha x+o(x) \quad \text{როცა} \quad x\to 0.$$

აღნიშნულ ტოლობებში $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეა $x=0$ წერტილში (რომლის არსებობა გამომდინარეობს თეორემა 4.38 დან) და ამიტომ $x\cdot\beta(x)=o(x)$ როცა $x\to 0$.

მაგალითი 4.39. $(1+x)^{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}x+o(x)$ როცა $x\to 0$. აღნიშნულ ტოლობაში $1+\sqrt{2}x$ წრფივი ფუნქცია არის " მთავარი ნაწილი" ხოლო ნაშთითი ფუნქცია $o(x)$ არის გაცილებით მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ვიდრე ფუნქცია x როცა $x\to 0$ (უხეშად რომ ვთქვათ გაცილებით სწრაფად მიისწრაფის ნულისაკენ ვიდრე ფუნქცია x როცა $x\to 0$). როგორც შემდგომში ვნახავთ მთელი რიგი თვისებები $(1+x)^{\sqrt{2}}$ საკმაოდ რთული ფუნქციისა $x=0$ წერტილის მცირე მიდამოში შესაძლოა მარტივი $1+\sqrt{2}x$ წრფივი ფუნქციის საშუალებით დავადგინოთ. შემდგომში ვნახავთ, რომ სამართლიანია უფრო "ზუსტი" ასიმტოტური წარმოდგენები $(1+x)^{\sqrt{2}}$ ფუნქციის $x=0$ წერტილის მიდამოში.

მაგ. $(1+x)^{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}x^2+o(x^2)$ როცა $x\to 0$. აღნიშნულ წარმოდგენაში ძირითადი ნაწილი არის კვადრატული ფუნქცია, ხოლო ნაშთითი ნაწილი $o(x^2)$ არის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ვიდრე ფუნქცია x^2 როცა $x\to 0$. დიფერენციალური აღრიცხვა იძლევა აღნიშნული ტიპის ასიმტოტური წარმოდგენების მიღების საშუალებას.

მაგალითი 4.40. ვიპოვოთ ზღვარი $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(tg(x^2)))}{\ln(\cos 3x)}$

შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევა როცა $x\to 0$.

$$\sin(\sin(tg(x^2)))=\sin(\sin(\frac{x^2}{2}+o(\frac{x^2}{2}))=\sin\left[\frac{x^2}{2}+o(\frac{x^2}{2})+o(\frac{x^2}{2}+o(\frac{x^2}{2}))\right]=$$

$$\sin(\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2))=\sin(\frac{x^2}{2}+o(x^2))=\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

ჩვენ აქ ვისარგებლეთ ტოლობებით $o(\frac{x^2}{2}+o(\frac{x^2}{2}))=o(x^2)$ და $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.

$$\ln(\cos 3x)=\ln(1-\frac{(3x)^2}{2}+o((3x)^2))=\ln(1+(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)))=$$

$$=(-\frac{9x^2}{2}+o(x)^2)o(-\frac{9x^2}{2}+o(x^2))=-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2)=-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)$$

მაშასადამე სამართლიანია წარმოდგენა

$$\frac{\sin(\sin(tg(x^2)))}{\ln(\cos 3x)}=\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{-9}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}\to -\frac{1}{9} \quad \text{როცა} \quad x\to 0.$$

მაგალითი 4.41. გამოვთვალოთ $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

გვაქვს $\sqrt{n^2+1} = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right) = n+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$ როცა $n\to\infty$.

საიდანაც

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \sin(\pi n+\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n})) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n}))\to 0 \text{ როცა } n\to\infty.$$

სავარჯიშოები

1. . ცნობილია, რომ $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ არსებობს, რა შეიძლება ითქვას ზღვრების $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ არსებობის შესახებ?

2. ცნობილია, რომ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ არსებობს, რა შეიძლება ითქვას ზღვრების $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ არსებობის შესახებ?

3. ცნობილია, რომ $\lim_{x\to a}(f(x)$ არსებობს, ხოლო $\lim_{x\to a} g(x)$ არ არსებობს რა შეიძლება ითქვას ზღვრების $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ და $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ არსებობის შესახებ?

4. მოცემულია,რომ $\lim_{x\to a} f(x) = a > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, აჩვენეთ $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

5. მოცემულია,რომ $\lim_{x\to a} f(x) = a < 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, აჩვენეთ $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.

რა შეიძლება ითქვას $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ ზღვრის არსებობის შესახებ თუ $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

6. მოცემულია,რომ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, აჩვენეთ $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$.

7. მოცემულია,რომ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, რა შეიძლება ითქვას $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ ზღვრის არსებობის შესახებ.

8. ცნობილია, რომ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ და $g(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$.

9.მოიყვანეთ $\alpha(x)$ ფუნქციის მაგალითი, რომელთათვისაც სამართლიანია ტოლობა

ა) $\alpha(x) = o(x)$, როცა $x\to 0$ ბ) $\alpha(x) = o(\sqrt{x-1})$ როცა $x\to 1-$

გ) $\alpha(x) = o(1/x^2)$ როცა $x\to\infty$.

10.. დაამტკიცეთ, რომ $x^3 = o(x^2)$ როცა $x\to 0$. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $x^3 = o(\beta(x))$ როცა $x\to 0$ თუ ა) $\beta(x) = x$ ბ) $\beta(x) = x^2\sqrt{|x|}$ გ) $\beta(x) = x^3\sqrt{|x|}$ დ) $\beta(x) = x^2\sin x$

11. დაამტკიცეთ, რომ $(x-1)^2 = o(x-1)$ როცა $x\to 1$. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $(x-1)^2 = o(\beta(x))$ როცა $x\to 1$ თუ ა) $\beta(x) = (x-1)^3$ ბ) $\beta(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln x}$ გ) $\beta(x) = \sin(x-1)^2$

12. დაამტკიცეთ, რომ $1/x^4 = o(1/x^3)$ როცა $x\to\infty$. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $1/x^4 = o(\beta(x))$ როცა $x\to\infty$ თუ ა) $\beta(x) = 1/x^5$ ბ) $\beta(x) = 1/(x+1)^4$ გ) $\beta(x) = \frac{1}{x^3\sin x}$ დ) $\beta(x) = \frac{1}{(x-1)^4\, arctg(1/x)}$

13.. ისარგებლეთ სიმბოლო "o მცირე" ჩაწერეთ $\alpha(x)$ ფუნქციისათვის $\alpha(x)=o(x^k)$ სახის ტოლობა როცა $x\to 0$ თუ:

ა) $\alpha(x)=o(x^2)+o(x^2)$ ბ) $\alpha(x)=o(x)-o(x)$ გ) $\alpha(x)=5o(x)$ დ) $\alpha(x)=o(5x^2)$ ე) $\alpha(x)=(o(x))^2$ ვ) $\alpha(x)=xo(x)$ ზ) $\alpha(x)=\dfrac{o(x^5)}{x^2}$ თ) $\alpha(x)=o(-x+2x^2+x^4)$ ი) $\alpha(x)=o(o(x^2))$ კ) $\alpha(x)=o(x+o(x))$

14.. ისარგებლეთ სიმბოლო "o მცირე" ჩაწერეთ $\alpha(x)$ ფუნქციისათვის $\alpha(x)=o(1/x^k)$ სახის ტოლობა როცა $x\to\infty$ თუ:

ა) $\alpha(x)=o(1/x)-o(1/x)$ ბ) $\alpha(x)=o(100/x)$ გ) $\alpha(x)=15o(1/x)$ დ) $\alpha(x)=(o(1/\sqrt{|x|}))^2$ ე) $\alpha(x)=x^2(o(1/x^3))$ ვ) $\alpha(x)=o(o(1/x^2))$ ზ) $\alpha(x)=o(1/x^2-1/x)$ თ) $\alpha(x)=o(1/x^2+o(1/x^2))$

15. დაწერეთ ასიმტოტური წარმოდგენა როცა $x\to 0$ $o(x^\alpha),\alpha\ge 0$ სახის ნაშთითი წევრით შემდეგი ფუნქციებისა:

ა) $\sin^2(5\sqrt{x}),\sin^2(5\sqrt{x}+x);(x>0)$ ბ) $\cos^2(5x^2),\cos^2(6x^2+x)$ გ) $e^{2x},e^{2x+\sqrt{x}};(x>0)$ დ) $\ln(1-x^2),\ln(1-x^2+x)$ ე) $\ln(\cos 2x),\ln(\cos(2x+x^2))$, ვ) $\cos\sqrt{\sin x};(x>0)$ ზ) $\ln(e^x+\sqrt{x}),(x>0)$ თ) $\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}};(x>0)$ ი) $\cos x\cos x^2-1$

16. დაითვალეთ ფუნქციის რხევა მითითებულ სიმრავლეებზე $\omega(E,f)$ თუ

ა) $E=[1,6],f(x)=3x-5$ ბ) $E=[-1,1],f(x)=x^2$ გ) $E=[1,6],f(x)=x^2-3x+2$ დ) $E=[1,4],f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x-1$ ე) $E=[0,\pi/2],f(x)=6\sin x-3x$ ვ) $E=(0,1/\pi],f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ ზ) $E=(0,10^{-5}],f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

17. იპოვეთ a,b ისეთი,რომ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

18. იპოვეთ a_i,b_i მუდმივები $(i=1,2)$ ისეთი, რომ

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0\ ,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0.$$

ზ ღ ვ რ ე ბ ი

19.გამოთვალეთ ზღვრები

ა) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3}{2x-1}$;ბ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x}{2x+7}$;გ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-x+10}{2x^2-5x}$; დ)) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x^5}{2x^5-4x-1}$;

ი)) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)(x-1)^2}{8x^3-3x+5}$; კ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3}{2x^2-1+x}$; ლ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-5x^3}{2x-1+x^2}$;

ა) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5x+4}$; ბ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; გ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$;

დ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-\sqrt{4x^2+1}}$; ე) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x-3\cdot4^x}{5^x-7\cdot3^x}$; ვ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x-3^x}{5^x-2^x}$;

ზ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$; თ) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$; ი) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

კ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$; ლ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$; მ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

20. იპოვეთ ზღვრები

ა) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sin5x}$; ბ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+6x}{\sin5x}$; გ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{\cos(5x)-\cos(3x)}$;დ) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$;

ე) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; ვ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin x}{tg2x}$;ზ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}-1}$;თ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{tg(\pi(2+x))}$; ი)

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{tgx}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$; კ) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; ლ) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(3x)-\cos x}{tg^2(2x)}$;მ) $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{1+\cos(2\pi x)}{tg^2(2\pi x)}$;

ნ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{\sin(\pi x)}$;ო) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg(5x)}{\sin3x}$; პ) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2(3x)}$;ჟ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(8\pi x)}$;რ) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg(5x)}{tg(3x)}$.

21. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$; ბ) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$; გ) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$; დ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

ე) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$ $(m,n\in\mathrm{N})$; ვ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$; ზ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$;

თ) $\lim\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$, როცა $x\to+0,\quad x\to1,\quad x\to+\infty$; ი) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax+1}{bx+2}\right)^x$ $(a^2+b^2\neq0)$;

კ) $\lim\limits_{x\to\pi/4+0}\left[tg(\pi/8+x)\right]^{tg2x}$; ლ) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left[\sin x\right]^{tgx}$; მ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\quad b>0)$.

22. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$ $(m,n\in\mathrm{N})$; ბ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+9x}}{1-\sqrt{1-x/2}}$; გ) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^4 3\sqrt{x}}$;

დ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x}}{\sin(x^2/2)-\sin x}$; ე) $\lim\limits_{n\to0}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ $(a>0)$; ვ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$; ზ) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{tg2x}$;

თ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$; ი) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$; კ) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

9. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\left(\pi\cdot2^x\right)}{\ln\cos\left(\pi\cdot2^x\right)}$; ბ) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}\ \ (a>0)$; გ) $\lim\limits_{h\to0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}\ \ (a>0)$;

დ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln tg\left(\pi/4+ax\right)}{\sin bx}$; ე) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\left(xe^x\right)-\cos\left(xe^{-x}\right)}{x^3}$; ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin\left(\ln\sqrt{\cos\pi/n}\right)$;

ზ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^a+\sin\frac{1}{n}\right]^n$; თ) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

23. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$; ბ) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$; გ) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x 2$;

დ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{\sin^2 2x}$; ე) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}\ \ (a>0)$; ვ) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)\ \ (a>0)$;

ზ) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{tg\sqrt{x}}$; თ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}$; ი) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{x+1}\right)^a\right)\right]^{x^2}$; კ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$;

ლ) $\lim\limits_{n\to\infty}tg^n\left[\frac{\pi-4}{4}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\right]$; მ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$; ნ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$.

თავი 5

წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა. ელემენტარულ ფუნქციათა უწყვეტობა. უწყვეტ ფუნქციათა ლოკალური და გლობალური თვისებები. თანაბარი უწყვეტობა. ბოლცანო-კოშის თეორემა უწვეტი ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ. ვაიერშტრასის თეორემა სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობის შესახებ. კანტორის თეორემა თანაბარი უწყვეტობის შესახებ.

წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა.

განსაზღვრება 5.1. (კოში) ფუნქციას $f:E\to R$ რომელიც განსაზღვრულია $E\subset R$ სიმრავლეზე უწოდებენ $c\in E$ წერტილში უწყვეტს, თუ $f(c)$ წერტილის ნებისმიერი $U(f(c))$ მიდამოსათვის მოიძებნება c წერტილის $U(c)$ მიდამო ისეთი, რომ ნებისმიერი $x\in U(c)\cap E$ წერტილისათვის $f(x)\in U(f(c))$.

მოყვანილი განმარტება $\varepsilon-\delta$ ტერმინოლოგიის გამოყენებით ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

განსაზღვრება 5.2. (კოში) ფუნქციას $f:E\to R$ უწოდებენ $c\in E$ წერტილში უწყვეტს, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი,

რომ თუ $x \in E$ წერტილისთვის სრულდება $|x-c|<\delta$ უტოლობა, მაშინ შესრულდება $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ უტოლობაც.

კალკულუსის კურსიში ჩვენ შევისწავლეთ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა (მარჯვნიდან, მარცხნიდან), როცა ფუნქცია განსაზღვრული იყო რაიმე შუალედზე. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ამ შემთხვევაში ზემოთ მოყვანილი განმარტება ემთხვევა უკვე ცნობილ განმარტებას.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილ განმარტებაში არავითარი შეზღუდვა ფუნქციის განსაზღვრის არეზე არ არის (გარდა იმისა, რომ ის არაცარიელია). ცხადია თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე სასრული რაოდენობა წერტილებისაგან შედგება, მაშინ ის უწყვეტია განსაზღვრის არის ნებისმიერ წერტილში. (საკმარისია გავიაზროთ მარტივი ფაქტი: ნებისმიერი $c \in E$ წერტილისათვის მოიძებნება $U(c)$ მიდამო, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არცერთ წერტილს გარდა c წერტილისა.)

განსაზღვრება 5.3. ვიტყვით, რომ $c \in E$ წერტილი არის E სიმრავლის იზოლირებული წერტილი, თუ არსებობს c ისეთი მიდამო $U(c)$ რომელსაც E სიმრავლესთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს, სახელდობრ c წერტილი.

მაგალითი 5.4. ა) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი მისი იზოლირებული წერტილია.

ბ) $\left\{-\frac{1}{n} \mid n \in N\right\} \cup [0,1]$ სიმრავლის იზოლირებულ წერტილთა სიმრავლეა $\left\{-\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია მისი განსაზღვრის არის ნებისმიერ იზოლირებულ წერტილში უწყვეტია. საინტერესოა ფუნქციის განსაზღვრის არის ის წერტილები, რომლებიც განსაზღვრის არის ზღვრული წერტილებია. ასეთი წერტილებისათვის ცხადია სამართლიანია წინადადება: განსაზღვრის არის ზღვრულ $c \in E$ წერტილში $f: E \to R$ ფუნქცია უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lim\limits_{E \ni x \to c} f(x) = f(c)$.

განსაზღვრება 5.5. (ჰაინე) ვთქვათ, მოცემულია $f: E \to R$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია უწყვეტია $c \in E$ წერტილში, თუ E სიმრავლიდან აღებული c წერტილისაკენ კრებადი ნებისმიერი $(x_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობისათვის ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა $(f(x_n))_{n \geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია $f(c)$ რიცხვისაკენ.

განსაზღვრება 5.6. ვიტყვით, რომ $f: E \to R$ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლეზე, თუ იგი უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. E სიმრავლეზე უწყვეტ ფუნქციათა ერთობლიობას $C(E)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

კალკულუსის კურსში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ელემენტარული ფუნქცია თავის განსაზღვრის არეზე უწყვეტია.

უწყვეტ ფუნქციათა ლოკალური თვისებები

ფუნქციის ლოკალურ თვისებად ითვლება მისი ის თვისება, რომელიც სამართლიანია ფუნქციის განსაზღვრის არის რაიმე ფიქსირებული წერტილის რაგინდ მცირე მიდამოში. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში არის ამ ფუნქციის

ლოკალური თვისება. ფუნქციის გლობალური თვისება არის ის თვისება, რომელიც უკავშირდება ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

თეორემა 5.7. ვთქვათ, $f:E\to R$ და $g:E\to R$ ფუნქციები უწყვეტია $c\in E$ წერტილში. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

ა) არსებობს c წერტილის მიდამო $U(c)$ ისეთი, რომ f ფუნქცია შემოსაზღვრულია $U(c)\cap E$ სიმრავლეზე.

ბ) თუ $f(c)\neq 0$, მაშინ არსებობს c წერტილის $U(c)$ მიდამო ისეთი, რომ $U(c)\cap E$ სიმრავლის ნებისმიერ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობას და $f(c)$ რიცხვს აქვთ ერთიდაიგივე ნიშანი.

გ) c წერტილში უწყვეტი იქნება შემდეგი ფუნქციები:

1) $f(x)+g(x)$
2) $f(x)\cdot g(x)$
3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, თუ $g(c)\neq 0$.

დამტკიცება. ცხადია საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა c წერტილი განსაზღვრის არის ზღვრული წერტილია.

ა) ავიღოთ $\varepsilon=1$. ვინაიდან $\lim\limits_{E\ni x\to c} f(x)=f(c)$ ამიტომ მოიძებნება $\delta>0$ ისეთი, რომ $f(c)-1<f(x)<f(c)+1$, როცა $x\in E$ და $|x-c|<\delta$. საიდანაც გვექნება $|f(x)|\le |f(c)|+1$, როცა $x\in E$ და $|x-c|<\delta$.

ბ) ავიღოთ $\varepsilon=\dfrac{|f(c)|}{3}$. ვინაიდან $\lim\limits_{E\ni x\to c} f(x)=f(c)$ ამიტომ მოიძებნება $\delta>0$ ისეთი, რომ $f(c)-\dfrac{|f(c)|}{3}<f(x)<f(c)+\dfrac{|f(c)|}{3}$, როცა $x\in E$ და $|x-c|<\delta$. შევნიშნოთ, რომ თუ $f(c)$ დადებითია მაშინ $f(c)-\dfrac{|f(c)|}{3}$ რიცხვიც დადებითია და ამ შემთხვევაში გვექნება $f(x)>0$ როცა $x\in E$ და $|x-c|<\delta$. ანალოგიურად თუ $f(c)$ უარყოფითია, $f(c)+\dfrac{|f(c)|}{3}$ რიცხვიც უარყოფითია და ამ შემთხვევაში გვექნება $f(x)<0$ როცა $x\in E$ და $|x-c|<\delta$.

გ) ამ პუნქტში მოყვანილი დებულებები პირდაპირი შედეგია უწყვეტობის განმარტების და წერტილში ფუნქციის ზღვრის უკვე ცნობილი თვისებების(არითმეტიკული თვისებები და ზღვრული გადასვლები).

თეორემა 5.8. ვთქვათ, $f:E\to Y$ ფუნქცია უწყვეტია $c\in E$ წერტილში, ხოლო $g:Y\to R$ ფუნქცია უწყვეტია $f(c)\in Y$ წერტილში, მაშინ $g\circ f:E\to R$ კომპოზიცია უწყვეტია c წერტილში.

დამტკიცება. განვიხილოთ E სიმრავლიდან აღებული $c\in E$ წერტილისაკენ კრებადი $x_n, n=1,2,...$ მიმდევრობა. ვინაიდან $f:E\to Y$ ფუნქცია უწყვეტია $c\in E$ წერტილში ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(c)$. ვინაიდან $g:Y\to R$ ფუნქცია უწყვეტია $f(c)\in Y$ წერტილში, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n))=g(f(c))$. მაშასადამე $g\circ f:E\to R$ ფუნქცია უწყვეტია c წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

უწყვეტ ფუნქციათა გლობალური თვისებები

თეორემა 5.9. (ბოლცანო-კოშის თეორემა შუალედური მნიშვნელობის შესახებ). თუ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტის ბოლოებზე ღებულობს ნიშნით განსხვავებულ მნიშვნელობებს, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს წერტილი, რომელშიც ფუნქციის მნიშვნელობა ხდება ნულის ტოლი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f:[a;b]\to R$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე. გავყოთ $[a;b]$ სეგმენტი შუაზე. თუ გაყოფის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა არ არის ნულის ტოლი, მაშინ მიღებული მონაკვეთებიდან ერთ-ერთის ბოლოებზე ფუნქცია კვლავ იღებს ნიშნით განსხვავებულ მნიშვნელობებს. ახლა ეს მონაკვეთი გავყოთ შუაზე და გავაგრძელოთ პროცესი ასე. მაშინ რომელიღაც საფეხურზე ან ვიპოვით $c\in[a;b]$ წერტილს, რომელშიც $f(c)=0$, ან მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ მონაკვეთთა მიმდევრობას, რომელთა სიგრძეები მიისწრაფვიან ნულისკენ. თუ მოცემული გვაქვს ერთმანეთში ჩალაგებულ მონაკვეთთა მიმდევრობა, რომელთა სიგრძეები მიისწრაფვიან ნულისკენ, მაშინ ცნობილი თეორემის ძალით არსებობს ერთადერთი $c\in[a;b]$ წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა ამ მონაკვეთს. აგების თანახმად, არსებობს მონაკვეთების ბოლოებისაგან შედგენილი ორი მიმდევრობა $(x_n^{'})_{n\geq 1}$ და $(x_n^{''})_{n\geq 1}$ ისეთი, რომ $f(x_n^{'})<0$, $f(x_n^{''})>0$ და $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{'}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{''}=c$. ფუნქციის უწყვეტობის ძალით მივიღებთ: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{'})=f(c)\leq 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{''})=f(c)\geq 0$. ამრიგად, $f(c)=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 5.10. თუ φ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე ინტერვალზე და ინტერვალის a და b წერტილებში იღებს მნიშვნელობებს $\varphi(a)=A$ და $\varphi(b)=B$, მაშინ A და B რიცხვებს შორის მოთავსებული ნებისმიერი C რიცხვისთვის არსებობს a და b წერტილებს შორის მოთავსებული c რიცხვი, რომელშიც $\varphi(c)=C$.

დამტკიცება. $[a;b]$ მონაკვეთი მოცემულ ინტერვალში ძევს, ამიტომ $f(x)=\varphi(x)-C$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია $[a;b]$ სეგმენტზე. ამასთან $f(a)\cdot f(b)=(A-C)\cdot(B-C)<0$, ამიტომ ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ძალით a და b წერტილებს შორის არსებობს c რიცხვი, რომლისთვისაც $f(c)=\varphi(c)-C=0$. შედეგი დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5.11. შუალედური მნიშვნელობის შესახებ ბოლცანო-კოშის თეორემის დამტკიცება გვაძლევს $f(x)=0$ განტოლების ფესვის მოძებნის უმარტივეს ალგორითმს, თუკი $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია მის ბოლოებზე იღებს განსხვავებულ ნიშნიან მნიშვნელობებს.

მაგალითად, $\cos x-x=0$ განტოლებას აქვს ფესვი $(0;\pi)$ ინტერვალში, რადგანაც $f(x)=\cos x-x$ ფუნქცია უწყვეტია $[0;\pi]$ მონაკვეთზე და $f(0)=1>0$, $f(\pi)=-1-\pi<0$.

ახლა მოვიქცეთ ისე, როგორც აღწერილია თეორემის დამტკიცებაში. გავყოთ $[0;\pi]$ შუაზე და შევარჩიოთ საჭირო შუალედი, მერე ის შუალედი გავყოთ შუაზე და ა. შ. როდესაც მიღებული შუალედის სიგრძე ნაკლები გახდება წინასწარ დასახელებულ ε რიცხვზე, მაშინ შუალედის შუაწერტილი იქნება განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა $\frac{\varepsilon}{2}$ სიზუსტით.

თეორემა 5.12. (ვაიერშტრასის თეორემა უწყვეტი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის შესახებ).

ა) სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

ბ) თუ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტზე არსებობს წერტილი, რომელშიც ფუნქცია ღებულობს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას და არსებობს წერტილი, რომელშიც ფუნქცია ღებულობს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას.

დამტკიცება. ვთქვათ $f : E \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა $E = [a,b]$ სიმრავლეზე. უწყვეტ ფუნქციათა ლოკალური თვისების ძალით ნებისმიერ $x \in E$ წერტილისათვის არსებობს მიდამო $U(x)$ მიდამო ისეთი, რომ $U_E(x) = E \cap U(x)$ სიმრავლეზე მოცემული ფუნქცია შემოსაზღვრულია. ყოველი $x \in E$ წერტილისათვის ასეთნაირად აგებულ $U(x)$ მიდამოთა ერთობლიობა ქმნის $[a,b]$ სეგმენტის ინტერვალებით დაფარვას, საიდანაც გამოვყოთ $[a,b]$ სეგმენტის $U(x_1), U(x_2), ..., U(x_n)$ ინტერვალებით სასრული ქვედაფარვა (ბორელ-ლებეგის თეორემა). ვინაიდან $U_E(x_k) = E \cap U(x_k)$ სიმრავლეზე ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ გვექნება $m_k \le f(x) \le M_k$ როცა $x \in U_E(x_k)$, $k = 1,2,...,n$. საიდანაც გვექნება

$$\min\{m_1, m_2, ..., m_n\} \le f(x) \le \max\{M_1, M_2, ..., M_n\}$$

ნებისმიერი $x \in [a,b]$. მაშასადამე მოცემული ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ $M = \sup_{x \in E} f(x)$. დაუშვათ, რომ $\forall x \in E \quad f(x) < M$. მაშინ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $M - f(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლ მნიშვნელობას არცერთ წერტილში არ ღებულობს, თუმცა ღებულობს რაგინდ პატარა მნიშვნელობებს (ვინაიდან $M = \sup_{x \in E} f(x)$), ასე, რომ ფუნქცია $\frac{1}{M - f(x)}$ ღებულობს რაგინდ დიდ მნიშვნელობებს, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან $\frac{1}{M - f(x)}$ ფუნქცია $E = [a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტია და უკვე თეორემის დამტკიცებული ნაწილის თანახმად შემოსაზღვრულია. მაშასადამე ჩვენი დაშვება , რომ $\forall x \in E \quad f(x) < M$ არასწორია. ე.ი. არსებობს ერთი მაინც $c \in E$ ისეთი, რომ $f(c) = M$.

ანალოგიურად თუ განვიხილავთ ფუნქციას $\frac{1}{f(x) - m}$ სადაც $m = \inf_{x \in E} f(x)$ ვაჩვენებთ, რომ რომელიმე $C \in E$ წერტილისათვის $f(C) = m$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5.13. შევნიშნოთ, რომ $f_1(x) = x$ და $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქციები უწყვეტებია $(0;1)$ ინტერვალზე, მაგრამ $f_1(x) = x$ ფუნქციას არა აქვს $(0;1)$ ინტერვალზე არც მაქსიმალური და არც მინიმალური მნიშვნელობა, ხოლო $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია $(0;1)$ ინტერვალზე. მაშასადამე თეორემის პირობაში სეგმენტის მოთხოვნა არსებითია.

განმარტება 5.14. ფუნქციას $f : E \to R$ უწოდებენ თანაბრად უწყვეტს $E \subset R$ სიმრავლეზე, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $x, y \in E$ რიცხვებისათვის როცა $|x - y| < \delta$ სამართლიანია $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

შენიშვნა 5.15. თუ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია რაიმე სიმრავლეზე მაშინ ის უწყვეტია ამ სიმრავლის ნებისმიერ წერტილში. დასამტკიცებლად საკმარისია ზემოთ მოყვანილ განმარტებაში დავაფიქსიროთ $y = c$. მაშინ ავტომატურად მივიღებთ ფუნქციის უწყვეტობას $c \in E$ წერტილში.

შენიშვნა 5.16. შესაძლებლია $f : E \to R$ ფუნქცია უწყვეტი იყოს E სიმრავლის ყოველ წერტილში (ანუ E სიმრავლეზე) მაგრამ ის არ იყოს თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე. მაგალითად: $f : (0,1) \to R, f(x) = \sin\frac{1}{x}$ უწყვეტია $(0,1)$ სიმრავლეზე. ნული წერტილის ნებისმიერ მიდამოში მოცემული ფუნქცია ღებულობს როგორც -1 ასევე +1 ტოლ მნიშვნელობებს, ამიტომ თუ ავიღებთ $\varepsilon < 2$ უკვე აღარ შესრულდება თანაბარი უწყვეტობის პირობები.

ის ფაქტი, რომ f ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე შეგვიძლია $\varepsilon - \delta$ ტერმინებში ასე გამოვხატოთ

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, \exists y \in E(|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

ის ფაქტი, რომ f ფუნქცია უწყვეტი E სიმრავლეზე შეგვიძლია $\varepsilon - \delta$ ტერმინებში ასე გამოვხატოთ

$$\forall a \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

როგორც ვხედავთ δ რიცხვის არჩევა დამოკიდებულია $a \in E$ და ε-ზე და ამიტომ ფიქსირებული ε დროს ის საზოგადოდ იცვლება a რიცხვის ცვლილებასთან ერთად. თანაბრად უწყვეტობის შემთხვევაში კი შესაძლებელია ფიქსირებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ყოველი $a \in E$ რიცხვისათვის საერთო $\delta > 0$ რიცხვის არჩევა.

თეორემა 5.17. (კანტორის თეორემა თანაბარი უწყვეტობის შესახებ). სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ $f : E \to R$ $E = [a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. დაუშვათ ის არაა თანაბრად უწყვეტი. მაშინ არსებობს $\varepsilon_0 > 0$ შემდეგი თვისებით: $\forall \delta > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $x, y \in E$ რიცხვები ისეთი, რომ $|x - y| < \delta$ და $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. მაშასადამე $\delta = \frac{1}{n}, n = 1,2,...$ რიცხვებისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ $x_n, y_n \in E$ თვისებით $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ და $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ $n = 1,2,...$ ვინაიდან $x_n, n = 1,2,...$ და $y_n, n = 1,2,...$ მიმდევრობები შემოსაზღვრულია ამიტომ შეგვიძლია ავაგოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა $n_k, k = 1,2,...$ ისეთი, რომ $x_{n_k}, k = 1,2,..$ და $y_{n_k}, k = 1,2,..$ მიმდევრობები კრებადია, ცხადია მათი ზღვარი ერთიდაიგივეა (ვინაიდან $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ $n = 1,2,...$) და ზღვარი $E = [a,b]$ სეგმენტს ეკუთვნის. ვთქვათ ეს ზღვარი არის c. ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია ამიტომ

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(c)$$

მაშინ მოიძებნება $m \in N$ ისეთი, რომ როცა $k > m$

$$|f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \text{ და } |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ როცა $k > m$

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(y_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

რაც ეწინააღმდეგება უტოლობას $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$. მაშასადამე ჩვენმა დაშვებამ მიგვიყვანა წინააღმდეგობამდე. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5.18. როგორც დავინახეთ თეორემის დამტკიცემა არსებითად ეყრდნობა განსაზღვრის არის იმ სპეციპიკურ თვისებას, რომ ის არის სეგმენტი, რაც დამტკიცების პროცესში ნათლად სჩანს სახელდობრ როცა $c\in[a,b]$ წერტილს ვაგებთ. იმ შემთხვევაში თუ ფუნქცია ინტერვალზეა განსაზღვრული თეორემა საზოგადოდ სამართლიანი არ არის რაც ზემოთ უკვე ვნახეთ კონკრეტულ მაგალითზე. ინტერვალის შემთხვევაში თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას, რაც განვახორციელეთ სეგმენტის შემთხვევაში და ავაგებთ კრებად $x_{n_k},k=1,2,..$ და $y_{n_k},k=1,2,..$ მიმდევრობებს შეიძლება მოხდეს, რომ მათი ზღვარი $c\notin(a,b)$.

სავარჯიშოები

1. $\varepsilon-\delta$ ტერმინოლოგიის გამოყენებით აჩვენეთ უწყვეტობა შემდეგი ფუნქციებისა:
   ა) $f(x)=ax+b$ ბ) $f(x)=x^2$ გ) $f(x)=x^3$ დ) $f(x)=\sqrt{x}$ ე) $f(x)=\sqrt[3]{x}$
   დ) $f(x)=\sin x$ ე) $f(x)=\cos x$ ვ) $f(x)=arctgx$
2. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=x+0{,}001[x]$. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0.001$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$, როცა $|x'-x|<\delta$. სამართლიანია თუ არა აღნიშნული წინადადება იმ შემთხვევაში, როცა $0<\varepsilon\leq 0.001$?
3. ვთქვათ ზოგიერთი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ისეთი, რომ $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ როცა $|x-c|<\delta$. შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია c წერტილში, თუ ვიცით, რომ ზემოთ მოყვანილი თვისების მქონე $\varepsilon>0$ რიცხვების სიმრავლე ა)სასრულია ბ) უსასრულოა გ) $\frac{1}{2^n},n=1,2,...$ სახის რიცხვებია.
4. ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია c წერტილის რაიმე მიდამოში. არის თუ არა f ფუნქცია უწყვეტი c წერტილილში თუ
   ა) $\exists\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x(|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon)$
   ბ) $\forall\delta>0\exists\varepsilon>0\forall x(|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon)$
   გ) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x(|f(x)-f(c)|<\varepsilon\Rightarrow|x-c|<\delta)$
   დ) $\forall\delta>0\exists\varepsilon>0\forall x(|f(x)-f(c)|<\varepsilon\Rightarrow|x-c|<\delta)$
   ე) $\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\forall x(|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon)$
   ვ) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x(|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|\leq\varepsilon)$
   ზ) $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x(|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|\leq 7\varepsilon)$
5. მოიყვანეთ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის მაგალითი, რომელიც არაა ა) შემოსაზღვრული ზემოდან ბ) შემოსაზღვრული ქვემოდან გ) ორივე მხრიდან.
6. მოიყვანეთ მაგალითი სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციის, რომელიც არაა ა) შემოსაზღვრული ზემოდან ბ) შემოსაზღვრული ქვემოდან გ) ორივე მხრიდან. შეიძლება თუ არა რომ ასეთი ფუნქცია იყოს უწყვეტი.
7. მოიყვანეთ მაგალითი ინტერვალზე განსაზღვრული და შემოსაზღვრული ფუნქციის, რომელიც ა)ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას მაგრამ არ

ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას ბ) ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას მაგრამ არ ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

8. რა შეიძლება დავასკვნათ $f+g$ ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ c წერტილში თუ
ა) f უწყვეტია c წერტილში, ხოლო g წყვეტილი ბ) ორივე ფუნქცია წყვეტილია c წერტილში.
9. რა შეიძლება დავასკვნათ $f\cdot g$ ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ c წერტილში თუ
ა) f უწყვეტია c წერტილში, ხოლო g წყვეტილი ბ) ორივე ფუნქცია წყვეტილია c წერტილში.
10. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მ,აშინ $F(x)=|f(x)|$ უწყვეტია.

11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f:[a,+\infty)\to R$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, მაშინ ფუნქცია შემოსაზღვრულია.
12. დაამტკიცეთ, რომ თუ f,g ფუნქციები უწყვეტია, მაშინ $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}, G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ფუნქციებიც უწყვეტია.

13. a და b პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2;\\ ax+b, & 2<x\le 3;\\ a(x-1) & x>3. \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x+a, & x\le 0;\\ 2x+3, & 0<x\le 1;\\ ax^2+b & x>1. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2;\\ ax+b, & 2<x\le 3;\\ a(x-1) & x>3. \end{cases}$

14. a და პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1;\\ 3-ax^2, & x>1. \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} a(x+1), & x<1;\\ x^2+2, & x\ge 1. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} ax^2+2, & x\le 2;\\ x^3+2a, & x>2. \end{cases}$

15. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები და ააგეთ მისი გრაფიკი:

ა) $y = sign(\sin x)$; ბ) $y = x - [x]$ გ) $f(x) = [x](x - [x])$ დ) $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$

16. იპოვეთ $g \circ f$ და $f \circ g$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები თუ:

ა) $f(x) = sign(x)$, $g(x) = 1 + x^2$ ბ) $f(x) = sign(x), g(x) = x(1 - x^2)$,

გ) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x - [x]$.

17. დაადგინეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები და მისი ხასიათი თუ:

ა) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$; ბ) $y = \dfrac{1 + x}{!+x^3}$: გ) $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$. დ) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

ე) $y = \ln arctg \dfrac{1}{x}$ ვ) $y = tg \dfrac{1}{x}$ ზ) $y = \dfrac{1}{tg^2 x - 2tgx + 2}$ თ) $y = arctg \dfrac{1}{\sin x}$

18. დაამტკიცეთ , რომ $f : E \to R$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია თუ

ა) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + x^2}, E = [0, +\infty)$ ბ) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}, E = (-\infty, +\infty)$

ბ) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}, E = R \setminus \{0\}$ გ) $f(x) = arctg 2^x, E = R$

დ) $f(x) = xe^{-x}, E = (0, +\infty)$

19. შემოსაზღვრულია თუ არა (ქვემოდან ,ზემოდან) $f : E \to R$ ფუნქცია, თუ

ა) $f(x) = x^2, E = [-5,10], E = [-3, \infty)$

ბ) $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$ $E = (3,4], E = (-1,9) \setminus \{0\}, E = [5, \infty)$

გ) $f(x) = 2^{1/(x-1)}, E = [1, +\infty), E = (-1, +2) \setminus \{1\}$

20. წინასწარ ფიქსირებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის იპოვეთ $\delta = \delta(\varepsilon)$ რომელიც აკმაყოფილებს თანაბრად უწყვეტობის პირობებს შემდეგი $f : E \to R$ ფუნქციებისათვის თუ

ა) $f(x) = 5x - 3, E = R$ ბ) $f(x) = x^2 - 2x - 1, E = [-2,5]$ გ) $f(x) = \sqrt{x}, E = [0, +\infty)$

დ) $f(x) = 2 \sin x - \cos x, E = R$ $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}, E = R \setminus \{0\}$

21. ისარგებლეთ თანაბრად უწყვეტი ფუნქციის ცნებით და დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f(x) = \dfrac{1}{x}$ თანაბრად უწყვეტია $[1, +\infty)$ სიმრავლეზე ბ) არ არის თანაბრად უწყვეტი $(0, \infty)$ სიმრავლეზე.

22. დაამტკიცეთ $f : E \to R$ ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობა თუ

ა) $f(x) = kx + b, E = (-\infty, +\infty)$ ბ) $f(x) = x^3, E = (-1,2), (-1,2], [-1,2), [1,2]$

გ) $f(x) = \sin x, E = (\infty, +\infty)$ დ) $f(x) = e^x, E = (1,10)$

23. გამოიკვლიეთ $f : E \to R$ ფუნქციისათვის თანაბრად უწყვეტობის საკითხი თუ

ა) $f(x) = \ln x, E = (0,1), E = (1,5)$ ბ) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}, E = (0,1), E = (1,5)$

გ) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, E=(0,1), E=(1,5)$ დ) $f(x)=arctgx, E=(-\infty,+\infty)$

ე) $f(x)=\sqrt{x}, E=[0,\infty)$ ვ) $f(x)=\sqrt{x^2+1, E}, E=R$ ზ) $\sqrt{x}\ln x, E=(0,1), E=[1,+\infty)$

თ) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}, E=[0,+\infty), E=(-1,0)$ ი) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}, E=(0,1)$ კ)

$f(x)=\sin(x^2), E=R$ ლ) $f(x)=x+\sin x, E=R$

24. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ თანაბრად უწყვეტია ა) $(-1,0)$ ბ) $(0,1)$ ინტერვალებზე, მაგრამ არაა თანაბრად უწყვეტი $(-1,0)\cup(0,1)$ ინტერვალზე.
25. დაამტკიცეთ, რომ თუ f ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტებზე, მაშინ ის თანაბრად უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზეც.
26. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f:[a,\infty)\to R$ ფუნქცია უწყვეტია და $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ არსებობს (სასრული რიცხვია) მაშინ ის თანაბრად უწყვეტია. მოიყვანეთ $f:[a,\infty)\to R$ ფუნქციის მაგალითი, რომელიც თანაბრად უწყვეტია მაგრამ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ზღვარი არ არსებობს.
27. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სასრულ (a,b) ინტერვალზე განსაზღვრული თანაბრად უწყვეტი f ფუნქციისათვის არსებობს სასრული ზღვრები $\lim\limits_{x\to a+}f(x), \lim\limits_{x\to b-}f(x)$.
28. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სასრულ ინტერვალზე განსაზღვრული თანაბრად უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია.
29. დაამტკიცეთ, რომ ორი თანაბრად უწყვეტი ფუნქციის ჯამი თანაბრად უწყვეტია.
30. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე სასრულ ინტერვალზე მოცემული ორი თანაბრად უწყვეტი ფუნქციის ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციაა. რა შეიძლება ითქვას იმ შემთხვევაში თუ ინტერვალი სასრული არ არის.

31. ცნობილია, რომ $f(x)=x^2$, როცა x-ირაციონალური რიცხვია და $f(x)=1$, როცა x- რაციონალურია. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილები.

25. აჩვენეთ, რომ ფუნქციას

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$x=0$ წერტილში გააჩნია მეორე გვარის წყვეტა.

32. ფუნქციას

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q;\\ 0, & x=R\setminus Q,\end{cases}$$

დირიხლეს ფუნქციას უწოდებენ. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი წერტილი მოცემული ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილია.

33. აჩვენეთ, რომ ფუნქციას $G(x)=x\cdot D(x)$, სადაც $D(x)$ დირიხლეს ფუნქციაა გააჩნია მხოლოდ ერთი უწყვეტობის წერტილი.

34. ფუნქციას

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}\in Q;\\ 0, & x=R\setminus Q,\end{cases}$$

რიმანის ფუნქციას უწოდებენ (ვგულისხმობთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია).

აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია წყვეტილია ნებისმიერ რაციონალურ წერტილში, ხოლო ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვი მოცემული ფუნქციის უწყვეტობის წერტილია.

35. ააგეთ სეგმენტზე განსაზღვრული მონოტონური ფუნქცია, რომელსაც თვლადი რაოდენობა წყვეტის წერტილი ექნება.

36. ვთქვათ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი f,g ფუნქცია ისეთი,რომ $f(a)<g(a)$ და $f(b)>g(b)$. აჩვენეთ, რომ $c\in[a,b]$ ისეთი, რომ $f(c)=g(c)$.

37. ვთქვათ $f:[0,1]\to[0,1]$ ფუნქცია უწყვეტია. აჩვენეთ, რომ არსებობს $c\in[0,1]$ ისეთი, რომ $f(c)=c$.

38. ვთქვათ $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი f,g ფუნქცია ისეთი,რომ $f\circ g=g\circ f$. აჩვენეთ, რომ არსებობს $c\in[0,1]$ ისეთი, რომ $f(c)=g(c)$.

39. ვთქვათ $f:X\to Y, f^{-1}:Y\to X(X,Y\subset R)$ ფუნქცია ურთიერთშექცეული ფუნქციებია. და f ფუნქცია უწყვეტია $x_0\in X$ წერეტილში. აჩვენეთ, რომ ამ მოცემულობიდან საზოგადოდ არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ f^{-1} ფუნქცია უწყვეტია $y_0=f(x_0)$.

40. აჩვენეთ, რომ კენტი რიგის ალგებრულ პოლინომს გააჩნია ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.

თავი 6

დიფერენციალური აღრიცხვა

წერტილში ფუნქციის დიფერენციალი და წარმოებული. ფუნქციის ასიმტოტური ყოფაქცევის შესწავლა ალგებრული პოლინომების საშუალებით. ფუნქციათა $D^{(n)}(E), C^{(n)}(E)$ სიგლუვის კლასები. დარბუს თეორემა წარმოებული ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ. ელემენტარული ფორმით მოცემული არაცხადი ფუნქცია და მისი წარმოებული.

წერტილში ფუნქციის დიფერენციალი და წარმოებული.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ ორი $f, g : E \to R$ ფუნქცია უწყვეტია $a \in E$ წერტილში. დაუშვათ a წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია და $n \in N$. ვიტყვით, რომ f და g ფუნქციას გააჩნიათ n-ური რიგის შეხება a წერტილში, თუ სამართლიანია ტოლობა

$$f(x) - g(x) = o((x-a)^n) \quad \text{როცა} \quad x \to a .$$

მაგალითი2. ვთქვათ $f(x) = \sin^5 x, g(x) = x^5$ მაშინ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5 x - x^5}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5 x}{x^5} - 1 = 1 - 1 = 0$. ამიტომ მოცემულ ფუნქციებს გააჩნიათ მეხუთე რიგის შეხება როცა $x = 0$ წერტილში. მოსალოდნელია, რომ f და g ფუნქციას ნული წერტილის რაგინდ პატარა მიდამოში ზოგიერთი "თვისება" საერთო ჰქონდეთ ვინაიდან მათ შორის განსხვავება $\sin^5 x - x^5$ "გაცილებით სწრაფად მიდის ნულისაკენ ვიდრე x^5, როცა $x \to 0$" .

ვთქვათ უნდა შევისწავლოთ $f : E \to R$ ფუნქცია a წერტილის რაიმე მიდამოში. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: მოვძებნოთ თუ შესაძლებელია რაიმე <ელემენტარული ფუნქცია> (მაგ. პოლინომი) რომელსაც f ფუნქციასთან ექნება n-ური რიგის შეხება. ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციის მთელი რიგი თვისებები შეიძლება დავადგინოთ g ელემენტარული ფუნქციის საშუალებით. g ფუნქციის როლში შემდგომში განვიხილავთ n-ური რიგის პოლინომს ცენტრით a წერტილში

$$P_n(a,x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n .$$

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ ამოცანას

ამოცანა 3. დავადგინოთ პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფს წარმოდგენას

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad \text{როცა} \quad x \to a . \qquad (1)$$

განვიხილოთ შემთხვევა $n = 1$. დავადგინოთ პირობები, რომელიც უზრუნველყოფს ისეთი $c_0 + c_1(x-a)$ წრფივი ფუნქციის არსებობას, რომლისთვისაც სამართლიანია წარმოდგენა

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + o((x-a)) \quad \text{როცა} \quad x \to a . \qquad (2)$$

დაუშვათ, რომ $f : E \to R$ ფუნქცია უწყვეტია a წერტილში და (2) წარმოდგენა სამართლიანია . მაშინ (2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = c_0 .$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (2) ტოლობა გადავწეროთ ასე

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c_1 + \frac{o((x-a))}{x-a} \quad \text{როცა} \quad x \to a .$$

ამ უკანასკნელ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ტოლია c_1. მაშასადამე მარცხენა მხარეში მდგომი ფუნქციას აგრეთვე გააჩნია ზღვარი a წერტილში და სამართლიანია ტოლობა

$$c_1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad .$$

კალკულუსის კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია, რომ უკანასკნელ ზღვარს უწოდებენ f ფუნქციის წარმოებულს a წერტილში.

განმარტება 4. ვთქვათ $a \in E$ წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. ვიტყვით, რომ $f : E \to R$ ფუნქციას გააჩნია a წერტილში წარმოებული თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

აღნიშნულ ზღვარს უწოდებენ f ფუნქციის წარმოებულს a წერტილში და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $f'(a)$.

შენიშვნა 5. ძირითადად ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $E = [a,b]$. იმ შემთხვევაში, როცა ვიხილავთ წარმოებულს $[a,b]$ სეგმენტის მარცხენა ბოლოში მას ვუწოდებთ f ფუნქციის მარჯვენა წარმოებულს ამ წერტილში, ხოლო თუ ვიხილავთ მარჯვენა ბოლოში მას ვუწოდებთ მარცხენა წარმოებულს.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან დავასკვნით: თუ f ფუნქციისათვის არსებობს წრფივი ფუნქცია, რომელსაც f ფუნქციასთან a წერტილში აქვს პირველი რიგის შეხება მაშინ მას (წრფივ ფუნქციას) აქვს სახე

$$f(a) + f'(a)(x - a) \tag{3}$$

და სამართლიანია წარმოდგენა

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o((x - a)) \quad \text{როცა} \quad x \to a . \tag{4}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x - a = h$.

სიდიდეებს $\Delta a(h) = (a + h) - x$ და $\Delta f(a;h) = f(a + h) - f(a)$ უწოდებენ შესაბამისად არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდს.

(4) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\Delta(a;h) = f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + o(h) \quad \text{როცა} \quad h \to 0. \tag{5}$$

განმარტება 6. ვთქვათ $a \in E$ წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. ვიტყვით, რომ f $f : E \to R$ ფუნქცია დიფერენცირებადია a წერტილში თუ სამართლიანია წარმოდგენა

$$\Delta f(a;h) = f(a + h) - f(a) = A \cdot h + o(h) \quad \text{როცა} \quad h \to 0 . \tag{6}$$

წრფივ ფუნქციას $df(a) : R \to R$ რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით $df(a)(h) = A \cdot h$ უწოდებენ f ფუნქციის დიფერენციალს a წერტილში.

(5) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ თუ f ფუნქციას a წერტილში გააჩნია წარმოებული მაშინ ის ამ წერტილში დიფერენცირებადია და სამართლიანია წარმოდგენა

$$df(a)(h) = f'(a) \cdot h \quad . \tag{7}$$

ვთქვათ ფუნქცია დიფერენცირებადია a წერტილში ანუ სამართლიანია (6) წარმოდგენა მაშინ

$$\frac{\Delta f(a,h)}{h} = A + \frac{o(h)}{h}$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $h \to 0$ მივიღებთ $A = f'(a)$. მაშასადამე თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე წერტილში მას ამავე წერტილში გააჩნია წარმოებული. საბოლოოდ ვღებულობთ

თეორემა 7. იმისათვის, რომ $f : E \to R$ დიფერენცირებადი იყოს $a \in E$ წერტილში აუცილებელია და საკმარისი რომ ამ წერტილში მას გააჩნდეს წარმოებული.

შენიშვნა. დავიმახსოვროთ წერტილში ფუნქციის დიფერენციალი არის წრფივი ფუნქცია (არგუმენტის h ნაზრდის), ხოლო წარმოებული რიცხვია, რომელთა შორის კავშირი (7) ტოლობით გამოისახება.

ხშრად გამოვიყენებთ განმარტება 6-ის ტოლფას შემდეგი განმარტებას

განმარტება 8. ვთქვათ $a \in E$ წერტილი E სიმრავლის ზღვრული წერტილია. ვიტყვით, რომ f $f : E \to R$ ფუნქცია დიფერენცირებადია a წერტილში თუ სამართლიანია წარმოდგენა

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + o(x - a) \qquad \text{როცა} \quad x \to a. \qquad (8)$$

ყოველივე ზემოთთქმულისა შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სამართლიანია

თეორემა 9. ფუნქცია $f : E \to R$ დიფერენცირებადია a წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს წრფივი ფუნქცია, რომელსაც f ფუნქციასთან გააჩნია პირველი რიგის შეხება a წერტილში.

განმარტება 10. ვიტყვით, რომ $y = kx + b$ წრფე წარმოადგენს $f : E \to R$ ფუნქციის გრაფიკის მხებს $(a, f(a))$ წერტილში თუ სამართლიანია ტოლობა

$$f(x) - (kx + b) = o((x - a)), \text{ როცა } x \to a.$$

თუ გავითვალისწინებთ თეორემა7-ს გვექნება

თეორემა 11. $f : E \to R$ ფუნქციის გრაფიკის $(a, f(a))$ წერტილში გააჩნია მხები წრფე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f ფუნქციას a წერტილში გააჩნია წარმოებული და ამ შემთხვევაში მხები წრფის განტოლებაა

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

კალკულუსის კურსში ჩვენთვის ცნობილია შემდეგი დებულების სამართლიანობა

თეორემა 12. ფუნქცია $f : E \to R$ დიფერენცირებადია a წერტილში მაშინ მაშინ ის ამ წერტილში უწყვეტია.

თეორემის სამართლიანობა ავტომატურად გამოდის (8) ტოლობიდან საკმარისია ამ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე $x \to a$ გვექნება

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

როგორც კალკულუსის კურსიდანაა უკვე ცნობილი $f(x) = |x|$ ფუნქციას $x = 0$ წერტილში არ გააჩნია წარმოებული თუმცა ამ წერტილში ის უწყვეტია. (შევნიშნოთ, რომ $f(x) = |x|$ ფუნქციას მხოლოდ ერთ წერტილში არ აქვს წარმოებული).

ჯერ კიდევ მეცხრამეტე საუკუნეში აგებული იქნა მთელს ღერძზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის მაგალითები, რომელთაც განსაზღვრის არის არცერთ წერტილში არ გააჩნია წარმოებული. პირველად ამ ტიპის მაგალითი აგებული იყო ბოლცანოს მიერ 1830 წელს და ვაიერშტრასის მიერ 1860 წელს.

შენიშვნა. x წერტილში f ფუნქციის წარმოებულის $f'(x)$ აღნიშვნა შემოღებული იყო ლაიბნიცის მიერ. ხშირად f ფუნქციის წარმოებულის აღსანიშნავად x წერტილში იყენებენ ლაიბნიცის აღნიშვნას $\frac{df(x)}{dx}$. ეს უკანასკნელი ტოლობა უნდა გავიგოთ ასე:
f ფუნქციის დიფერენციალს x წერტილში აქვს სახე
$df(x)(h) = f'(x)\cdot h$ ხოლო თუ განვიხილავთ იგიურ ფუნქციას $f(x) = x$, მაშინ $f'(x) = 1$ ამიტომ $f(x) = x$ ფუნქციის დიფერენციალისათვის გვაქვს $dx(h) = 1\cdot h = h$, ანუ დამოუკიდებელ ცვლადს x თუ განვიხილავთ, როგორც x-ის იგიურ ფუნქციას მაშინ მისი დიფერენციალი ემთხვევა არგუმენტის ნაზრდს h-ს. ანუ ნებისმიერი f ფუნქციისათვის გვაქვს
$df(x)(h) = f'(x)\cdot dx(h)$ ანუ $df(x) = f'(x)\cdot dx$ საიდანაც გვაქვს
$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

წარმოებად ფუნქციათა სხვადასხვა კლასები.

განმარტება 13. ვიტყვით, რომ ფუნქცია $f: E \to R$ დიფერენცირებადია (წარმოებადია) E სიმრავლეზე თუ ის ამ სიმრავლის ნებისმიერ წერტილში დიფერენცირებადია.

თუ $f: E \to R$ ფუნქცია დიფერენცირებადია E სიმრავლეზე მაშინ არსებობს E სიმრავლეზე განსაზღვრული f' ფუნქცია, რომელიც არის f ფუნქციის წარმოებული ფუნქცია და განისაზღვრება შესაბამისობით $x \mapsto f'(x)$. თუ f' ფუნქცია თავის მხრივ წარმოებადია E სიმრავლეზე , მაშინ ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაძღვროთ $(f')' = f''$ ფუნქცია, რომელსაც f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულ ფუნქციას უწოდებენ (ხშირ შემთხვევაში $f''(x)$-ს $\frac{d^2 f(x)}{d^2 x}$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ) ამრიგად, ინდუქციურად განიმარტება ფუნქციის n ური რიგის წარმოებული $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$. (აქ $f^{(n)}$ ჩანაწერი აღნიშნავს f ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებულს, ხშირად მას $\frac{d^n f(x)}{d^n x}$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ.)

შენიშვნა 14. შევნიშნოთ, რომ თუ რაიმე $a \in E$ წერტილში არსებობს $n-$ ური რიგის წარმოებული $f^{(n)}(a)$, მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$ და მაშასადამე არსებობს f ფუნქციის $n-1$ რიგის წარმოებული a წერტილის რაიმე მიდამოში.

განმარტება 15. ვთქვათ n რაიმე ნაურალური რიცხვია. $D^n(E)$-სიმბოლოთი ავღნიშნოთ $f: E \to R$ ფუნქციათა ერთობლიობა, რომლებიც E სიმრავლეზე n-ჯერ წარმოებადი არიან, ხოლო $C^n(E)$ აღნიშნავს ყველა ისეთ $f: E \to R$ ფუნქციათა ერთობლიობას, რომლებიც E სიმრავლეზე n-ჯერ წარმოებადი არიან და $n-$ ური რიგის წარმოებული $f^{(n)}$ ფუნქცია უწყვეტია. (ცხადია $f^{(k)}$ ფუნქციებიც $k = 1,2,\ldots,n-1$ უწყვეტი იქნებიან ავტომატურად).

ფუნქციას უწოდებენ უსასრულოდ დიფერენცირებადს E სიმრავლეზე, თუ მას E სიმრავლეზე გააჩნია ნებისმიერი რიგის წარმოებული. ასეთ ფუნქციათა ერთობლიობას აღნიშნავენ $C^{\infty}(E)$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 16. 1) $f(x)=e^x$, ცხადია, რომ $f^{(n)}(x)=e^x$.

2) $f(x)=\sin x$, ცხადია, რომ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$ (შეამოწმეთ!)

3) $f(x)=\cos x$, ცხადია, რომ $f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2}n)$ (შეამოწმეთ!)

მაგალითი 17. ფუნქციისათვის $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$ გვაქვს

$f\in C^1(R)$, $f\notin D^1(R)$ (შეამოწმეთ!)

მაგალითი 18. ფუნქციისათვის $f(x)=\begin{cases}-x^5, & x>0\\ x^5 & x\le 0\end{cases}$ გვაქვს

$f\in C^4(R)$, $f\notin D^5(R)$ (შეამოწმეთ!)

მაგალითი 19. ფუნქციისათვის $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ გვაქვს

$f\in C(R)$, $f\notin D^1(R)$

მაგალითი 20. ფუნქციისათვის $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ გვაქვს

$f\in C(R)$, $f\in D^1(R)$, $f\notin C^1(R)$.

ცხადია თუ $x\neq 0$ მაშინ

$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

როცა $x=0$, მაშინ წარმოებულის განმარტების თანახმად გვაქვს

$\left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right|=\left|h\sin\frac{1}{h}\right|\le|h|$, როცა $h\neq 0$. თუ გადავალთ ზღვარზე $h\to 0$ მივიღებთ $f'(0)=0$.

ამგვარად განხილული ფუნქცია წარმოებადია მთელს R რიცხვით წრფეზე, მაგრამ f' ფუნქცია არ არის უწყვეტი $x=0$ წერტილში, ვინაიდან $\cos\frac{1}{x}$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to 0$ არ არსებობს.

თუ ფუნქციას რაიმე სეგმენტის ყოველ წერტილში გააჩნია წარმოებული,მაშინ წარმოებულ ფუნქციას გააჩნია მნიშვნელოვან თვისება: ის ღებულობს საშუალედო მნიშვნელობებს. კერძოდ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 21. (დარბუ) ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ წარმოებული f' ფუნქცია ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $f'(a)$ და $f'(b)$ რიცხვებს შორის.

დამტკიცება. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე ვიგულისხმოთ, რომ $f'(a)<f'(b)$. ავიღოთ რაიმე λ რიცხვი პირობით $f'(a)<\lambda<f'(b)$.

წარმოებულის განმარტების ძალით მიოძებნება ისეთი $h>0$, რომ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < \lambda < \frac{f(b-h)-f(b)}{-h} \qquad (9)$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ცხადია, F ფუნქცია უწყვეტია $[a,b-h]$ სეგმენტზე და (9) უტოლობის ძალით $(a,b-h)$ ინტერვალში არსებობს x_0 წერტილი, ისეთი რომ $F(x_0)=\lambda$, ე.ი

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lambda$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად (x_0, x_0+h) ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi)$$

მაშასადამე $f'(\xi)=\lambda$ სადაც $a<\xi<b$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 22. ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ წარმოებული f' ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

ელემენტარული ფორმით მოცემული არაცხადი ფუნქციის წარმოებული.

ვთქვათ $t_0 \in R$ წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრულია $y=y(t)$ და $x=x(t)$ დიფერენცირებადი ფუნქციები. დაუშვათ, რომ $x=x(t)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული $t=t(x)$ ფუნქცია რომელიც განსაზღვრულია $x_0=x(t_0)$ წერტილის $V(x_0)$ მიდამოში. მაშინ $y=y(t)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ აგრეთვე, როგორც x-ის ფუნქცია $y=y(t(x))$, რომელიც უკვე განსაზღვრულია $x_0=x(t_0)$ წერტილის $V(x_0)$ მიდამოში. მაშასადამე $y=y(t)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია როგორც t ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც x-ცვლადზე დამოკიდებულ არაცხადი სახით მოცემულ ფუნქცია.

მაგალითი 23. ვთქვათ $y(t)=\sin(e^t+t)$, $x(t)=e^t+t^3$; $t\in R$. შევნიშნოთ, რომ x როგორც t-არგუმენტის ფუნქცია მკაცრად ზრდადია ($x'(t)=e^t+3t^2$) და ის ბიექციურად ასახავს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს R-ზე და ცხადია არსებობს მისი შექცეული, თუმცა მისი ელემენტარული გზით ჩაწერა შეუძლებელია (ამისათვის უნდა ამოვხსნათ t-ს მიმართ განტოლება $e^t+t^3=x$). მიუხედავად ამისა შესაძლებელია დაგვჭირდეს y-ის როგორც x-ის ფუნქციის (არაცხადად მოცემულის) შესწავლა.

იმ შემთხვევაში როცა $x'(t_0)\neq 0$ შეგვიძლია (გამოვიყენოთ რა რთული ფუნქციის და შექცეული ფუნქციის გაწარმოების წესი) ვიპოვოთ y ფუნქციის როგორც x-ცვლადით წარმოებული $x_0=x(t_0)$ წერტილში

$$y'_x\Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t(x))}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}\cdot\frac{dt(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}}{\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

ამ ტოლობაში გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად ფუნქციას ქვემოთ ინდექსად მინიშნებული აქვს ის ცვლადი, რომელი ცვლადის მიმართ ხდება გაწარმოება.

Iიგივე წესით ვიპოვოთ y ფუნქციის მეორე რიგის როგორც x-ცვლადით წარმოებული $x_0 = x(t_0)$ წერტილში (მას ავღნიშნავთ სიმბოლოთი y''_{xx})

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_{tt}\,x'_t - y'_t\,x''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_{tt}\,x'_t - y'_t\,x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ y ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები x-ცვლადით.

კოშის თეორემა დიფერენციალური აღრიცხვიდან. ტეილორის ფორმულა. ტეილორის მწკრივი. ტეილორის ლოკალური ფორმულა. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციებისს წარმოდგენა ტეილორის მწკრივის სახით. ტეილორის ლოკალური ფორმულა. ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები მაღალი რიგის წარმოებულების გამოყენებით.

კალკულუსის კურსში ჩვენ შევისწავლეთ ფერმას, როლის და ლაგრანჟის თეორემები და მათი საშუალებით დავამტკიცეთ მთელი რიგი დებულებები დიფერენცირებადი ფუნქციების შესახებ. სახელდობრ ფერმას თეორემა გვაძლევს შიდა ლოკალური ექსტრემუმის წერტილების არსებობის აუცილებელ პირობას დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის, ხოლო ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით მივიღეთ ფუნქციის მონოტონურობის და ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები. ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ კოშის თეორემას დიფერენციალური აღრიცხვიდან, რომელიც ბუნებრივი განზოგადოებაა ლაგრანჟის თეორემის.

თეორემა 1. (კოში) ვთქვათ f, g ფუნქციები $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც წარმოებადი არიან $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში და $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. მაშინ (a,b) ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც c წერტილი ისეთი, რომ

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

დამტკიცება. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თეორემის პირობების ძალით $g(a) \neq g(b)$. წინაღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა $g(a) = g(b)$ და g ფუნქცია დააკმაყოფილებდა $[a,b]$ სეგმენტზე როლის თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ მოიძებნებოდა (a,b) ინტერვალში c წერტილი პირობით $g'(c) = 0$, რაც თეორემის პირობებს ეწინააღმდეგება.

განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$F(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და დიფერენცირებადი (a,b) ინტერვალში. ამავე დროს,

$$F(b) = F(a) = -f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

ამიტომ როლის თეორმის თანახმად მოიძებნება (a,b) ინტერვალში c წერტილი პირობით $F'(c) = 0$, მაგრამ

$$F'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) - [f(b) - f(a)]g'(x)$$

ამიტომ გვექნება
$[g(b)-g(a)]f'(c)=[f(b)-f(a)]g'(c)$
საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.
შენიშვნა. თუ ავიღებთ $g(x)=x$ ფუნქციას მივიღებთ ლაგრანჟის თეორემას.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ლაგრანჟის თეორემის კიდევ ერთ განზოგადოებას, რომელიც საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ $C^n(a,b)$ კლასის ფუნქციები ალგებრული პოლინომების საშუალებით.

დიფერენციალური აღრიცხვის უკვე განხილული მასალიდან ნათლად სჩანს, რომ ორ f,g ფუნქციას რაც უფრო მეტი წარმოებულები დაემთხვევა ერთმანეთს x_0 წერტილში (ნულოვანი წარმოებულის ქვეშ x_0 წერტილში უბრალოდ ვიგულისხმოთ ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$), მით უფრო "მეტი საერთო თვისებები" ექნებათ მათ x_0 წერტილის მცირე მიდამოში. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს f ფუნქციისათვის მოვძებნოთ (თუ შესაძლებელია) პოლინომი

$$P_n(x)=P_n(x_0;x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

რომელსაც f ფუნქციასთან x_0 წერტილში გააჩნია n-ური რიგის შეხება.
პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ეს პოლინომი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (2)$$

ე.ი. $c_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{n!},k=0,1,2,\ldots,n.$ ((2) ტოლობის სისწორეში რომ დავრწმუნდეთ საკმარისია ვიპოვოთ (1) პოლინომის $P_n^{(k)}(x),k=0,1,2,\ldots,n$ წარმოებულები და შემდეგ მიღებულ გამოსახულებებში ჩავსვათ $x=x_0$.)

განსაზღვრება 2. ვთქვათ, f ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია n-ური რიგის ჩათვლით ყველა წარმოებული. მაშინ

$$P_n(x_0;x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (3)$$

სახის პოლინომს უწოდებენ x_0 წერტილში f ფუნქციის n-ური რიგის ტეილორის პოლინომს.

ჩვენ გვაინტერესებს სიდიდე $r_n(x_0;x)=f(x)-P_n(x_0;x)$, რომელსაც n-ური რიგის ნაშთს ან ნაშთით წევრს უწოდებენ. მისი საშუალებით f ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x_0;x). \qquad (4)$$

(4) ფორმულას უწოდებენ ტეილორის n-ური რიგის ფორმულას ცენტრით x_0 წერტილში. თუ (4) წარმოდგენაში ავიღებთ ცენტრს $x_0=0$ მაშინ მიღებულ ფორმულას მაკლორენის ფორმულას უწოდებენ.

შენიშვნა 3. ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის ალგებრული პოლინომი

$$Q_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n.$$

მაშინ მისი n-ური რიგის ტეილორის პოლინომი x_0 წერტილში მას დაემთხვევა (შეამოწმეთ!). მაშასადამე ამ შემთხვევაში $r_n(x_0;x)=0$.

თვითონ (4) ფორმულა ცხადია არაა საინტერესო, თუ $r_n(x_0;x)$-ის შესახებ მისი განმარტების გარდა არაფერი არ ვიცით. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა გვაძლევს ნაშთით წევრზე მნიშვნელოვან იმფორმაციას.

თეორემა 4. (ტეილორი) ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია და $x_0, x\in(a;b)$. სეგმენტი ბოლოებით x_0 და x ავღნიშნოთ I-ით. თუ f ფუნქცია უწყვეტია თავისი n-ური რიგის წარმოებულებთან ერთად I სეგმენტიზე, ხოლო I სეგმენტის შიგა წერტილებში მას გააჩნია $n+1$ რიგის წარმოებული, მაშინ I სეგმენტიზე განსაზღვრული ნებისმიერი უწყვეტი φ ფუნქციისათვის, რომლისაც I სეგმენტის ყველა შიგა წერტილში ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული გააჩნია, არსებობს $\xi\in I$ წერტილი ისეთი, რომ

$$r_n(x_0;x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \qquad (5)$$

დამტკიცება.

I სეგმენტზე განვსაზღვროთ t არგუმენტის დამხმარე ფუნქცია $F(t)=f(x)-P_n(t,x)$.

გვაქვს

$$F(t)=f(x)-\Big[\ f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\ \Big].$$

F ფუნქციის განმარტებისა და თეორემის პირობების ძალით დავასკვნით, რომ F ფუნქცია უწყვეტია I სეგმენტზე და დიფერენცირებადია ამ სეგმენტის შიგა წერტილებში, ამავე დროს

$$F'(t)=-\Big[\ f'(t)-\frac{f'(t)}{1!}+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\ -\frac{f''(t)}{1!}(x-t).+..+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ \Big]=$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

გამოვიყენოთ ახლა I სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციათა F,φ წყვილისათვის კოშის თეორემა, რომლის მიხედვითაც არსებობს ξ წერტილი (x_0 და x წერტილებს შორის) ისეთი, რომ

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში $F'(\xi)$-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ და გავითვალისწინემთ ტოლობას $F(x)-F(x_0)=0-F(x_0)=-r_n(x_0,x)$ მივიღებთ ნაშთითი წევრისათვის (5) ტოლობას.

შედეგი 5. თუ (5) ფორმულაში ავიღებთ $\varphi(t)=x-t$ ფუნქციას, მაშინ მივიღებთ

$$r_n(x_0;x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

ამ ფორმულას უწოდებენ ნაშთითი წევრის კოშის ფორმულას.

შედეგი 6. თუ (5) ფორმულაში ავიღებთ $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ ფუნქციას, მაშინ მივიღებთ

$$r_n(x_0;x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

ამ ფორმულას უწოდებენ ნაშთითი წევრის ლაგრანჟის ფორმულას.

შენიშვნა7. თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f^{(n+1)}(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+O((x-x_0)^{n+1}) \quad (6)$$

როცა $x\to x_0$.

განსაზღვრება 8. თუ f ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია ნებისმიერი $n\in N$ რიგის წარმოებული, მაშინ

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

მწკრივს უწოდებენ x_0 წერტილში f ფუნქციის ტეილორის მწკრივს.

თუ f ფუნქციის ტეილორის მწკრივს იხილავენ $x_0=0$ წერტილში, მაშინ მიღებულ მწკრივს უწოდებენ მაკლორენის მწკრივს, ე. ი. მაკლორენის მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

ზოგიერთი *ელემენტარული ფუნქციის წარმოდგენა ტეილორის ფორმულით.*

მაგალითი 9. ვთქვათ, $f(x)=e^x$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f^{(n)}(x)=e^x, n\in N$, $x_0=0$, წერტილში მივიღებთ

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(0;x), \quad x\in R$$

სადაც $r_n(0;x)=\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$, $|\xi|<|x|$ (ლაგრანჟის ფორმულა).

ვთქვათ x რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. შევნიშნოთ, რომ

$$|r_n(0;x)|\le\frac{e^{|\xi|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ამიტომ გვაქვს $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(0;x)=0$.

მაშასადამე $f(x)=e^x$ ფუნქციის შესაბამისი მაკლორენის მწკრივი კრებადია ყოველ $x\in R$ წერტილში, ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad x\in R$$

და შემდეგ ასიმპტოტურ წარმოდგენას

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+.O(x^{n+1})$ როცა $x\to 0$.

მაგალითი10. ვთქვათ, $f(x)=\sin x$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$, $n\in N$,

$x_0=0$ წერტილში მივიღებთ ლაგრანჟის ნაშთით წევრს

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\sin(\xi+\frac{\pi}{2}(n+1))x^{n+1}, \qquad x\in R.$$

როგორც მაგალით 9-ში ვაჩვენეთ ანალოგიურად $f(x)=\sin x$ ფუნქციის შესაბამისი მაკლორენის მწკრივი კრებადია ყოველ $x\in R$, ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots, \qquad x\in R$$

და ასიმპტოტურ ფორმულას

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}) \quad \text{როცა} \quad x \to 0.$$

მაგალითი11. ანალოგიურად როგორც მაგალით 10-ში $f(x) = \cos x$ ფუნქციისთვის მივიღებთ:

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}\cos(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1))x^{n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots, \qquad x \in R$$

და ასიმპტოტურ ფორმულას

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}) \quad \text{როცა} \quad x \to 0.$$

მაგალითი12. ვთქვათ $f(x) = \ln(x+1)$. მარტივია ჩვენება იმისა, რომ $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. ტეილორის n-ური რიგის ფორმულას $x_0 = 0$ წერტილში (მაკლორანის ფორმულა) აქვს სახე

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + r_n(0,x)$$

სადაც ნაშთითი წევრის კოშის ფორმულის თანახმად

$$r_n(0;x) = \frac{(-1)^n n!(x-\xi)^n x}{n!(1+\xi)^n} = (-1)^n x\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \qquad (7)$$

სადაც ξ რიცხვი 0 და x რიცხვებს შორის მდებარეობს.
როცა $|x|<1$ გვექნება

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{|1+\xi|} \le \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \le 1 - \frac{1-|x|}{1-0} = |x|. \qquad (8)$$

(7) ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს $|r_n(0,x)| \le |x|^{n+1}$. ამ უტოლობიდან დავასკვნით, რომ თუ $|x|<1$ ნაშთითი წევრი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $n \to \infty$. მაშასადამე როცა $|x|<1$ სამართლიანია წარმოდგენა

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots$$

და ასიმპტოტური ფორმულა

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1}) \quad \text{როცა} \quad x \to 0.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი მწკრივი როცა $|x|>1$ არაა კრებადი ვინაიდან მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფის ნულისაკენ.

მაგალითი13. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$. გვაქვს $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. ტეილორის ფორმულას როცა $x_0 = 0$ აქვს სახე

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(0,x).$$

განვიხილოთ ნაშთით წევრის სახე (კოშის)

$$r_n(0;x)=\frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n}(x-\xi)^n x$$

სადაც ξ რიცხვი 0 და x რიცხვებს შორის მდებარეობს. ვთქვათ $|x|<1$. თუ ვისარგებლებთ (8) უტოლობით გვექნება

$$|r_n(0;x)|\le\left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)...\left(1-\frac{\alpha}{n}\right).\right|(1+\xi)^{\alpha}|x|^{n+1}$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\alpha\in R$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი x რიცხვისათვის $|x|<1$ ინტერვალიდან გვაქვს, რომ $r_n(0,x)\to 0$ როცა $n\to\infty$. მაშასადამე როცა $|x|<1$ გვაქვს წარმოდგენები

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^{n+1})\quad\text{როცა}\quad x\to 0.$$

თუ ცნობილია ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები x_0 წერტილში, მაშინ ამ წერტილის მიდამოში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობების მოსაძებნად მოსახერხებელია ტეილორის ფორმულის გამოყენება ლაგრანჟის ნაშთითი წევრით.

მაგალითი 14. ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ $f(x)=\sin x$ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა $-1\le x\le 1$ მონაკვეთზე 0,001 სიზუსტით.

$x_0=0$ წერტილში გვაქვს:

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+0\cdot x^{2n+2}+r_{2n+2}(0;x),$$

სადაც ლაგრანჟის ფორმულით

$$r_{2n+2}(0;x)=-\frac{\sin(\xi+\frac{\pi}{2}(2n+3))}{(2n+3)!}x^{2n+3}.$$

მაშინ როცა $|x|\le 1$, გვექნება $|r_{2n+2}(0;x)|\le\frac{1}{(2n+3)!}$.

მაგრამ $\frac{1}{(2n+3)!}<0{,}001$ როცა $n\ge 2$. ამიტომ $\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$.

თეორემა 15. (ტეილორის ლოკალური ფორმულა). თუ f ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია n-ური რიგის ჩათვლით ყველა წარმოებული, მაშინ სამართლიანია ფორმულა

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\quad\text{როცა}\quad x\to x_0.\ (9)$$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $f(x)-P_n(x_0,x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ნულოვანი და შემდგომი წარმოებულები n რიგის ჩათვლით არის ნული. თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს შემდეგი ლემიდან

ლემა 16. თუ ფუნქციას $\varphi:E\to R$, რომელიც განსაზღვრულია E სეგმენტზე x_0 კიდურა წერტილით ისეთია, რომ $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\varphi''(x_0)=....=\varphi^{(n)}(x_0)=0$, მაშინ $\varphi(x)=o((x-x_0)^n)$, როცა $x\to x_0$.

დამტკიცება. როცა $n=1$ დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს x_0 წერტილში ფუნქციის დიფერენცირებადობიდან. მართლაც სამართლიანია წარმოდგენა

$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ როცა $x\to x_0$.

დაუშვათ თეორემის სამართლიანობა როცა $n=k-1\geq 1$. ვაჩვენოთ, რომ დებულება სამართლიანია, როცა $n=k\geq 2$.

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან

$$\varphi^{(k)}(x_0)=(\varphi^{(k-1)})'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi^{(k-1)}(x)-\varphi^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

ამიტომ $\varphi(x),\varphi'(x\ ),\varphi''(x),....,\varphi^{(k-1)}(x)$ წარმოებულები არსებობს x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ აღნიშნული წარმოებულები არსებობს მთელს E სიმრავლეზე. ვინაიდან $k\geq 2$ ამიტომ φ ფუნქციას E სიმრავლეზე გააჩნია წარმოებული და

$$(\varphi')'(x_0)=(\varphi')''(x_0)=....=(\varphi')^{(k-1)}(x_0)=0.$$

ინდუქციის დაშვების ძალით

$$\varphi'(x\ )=o((x-x_0)^{k-1})\ \text{ როცა }\ x\to x_0\ .$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(\xi)(x-x_0)=\alpha(\xi)(\xi-x_0)^{k-1}(x-x_0)$

სადაც ξ წერტილია, რომელიც მდებარეობს x და x_0 წერტილებს შორის, ე. ი. $|\xi-x_0|\leq|x-x_0|$, ხოლო $\alpha(x)\to 0$, როცა $\xi\to x_0$. მაშასადამე როცა $x\to x_0$ გვექნება ერთდროულად $\xi\to x_0$ $\alpha(x)\to 0$ და

$$|\varphi(x)|\leq|\alpha(\xi)||\xi-x_0|^{k-1}|x-x_0|.$$

საბოლოოდ გვექნება

$\varphi(x)=o((x-x_0)^k)$, როცა $x\to x_0$.

ლემა 16 და მაშასადამე თეორემაც დამტკიცებულია. (9) ფორმულას უწოდებენ ტეილორის ფორმულას პიანოს ნაშთითი წევრით.

ფუნქციის ექსტრემუმის გამოკვლევა ტეილორის ფორმულის გამოყენებით

თეორემა 17. ვთქვათ a წერტილის $U(a)$ მიდამოში განსაზღვრულ $f:U(a)\to R$ ფუნქციას a წერტილში გააჩნია n $(n\geq 2)$ რიგამდე წარმოებულები და $f'(a)=f''(a)=....=f^{(n-1)}(a)=0$, ხოლო $f^{(n)}(a)\neq 0$, მაშინ თუ n კენტია a წერტილი არ არის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი. ხოლო თუ n ლუწია , მაშინ a მკაცრი ლოკალური ექსტრემუმის წერტილია. სახელდობრ , თუ $f^{(n)}(a)>0$, მაშინ a ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილია, ხოლო თუ $f^{(n)}(a)<0$, მაშინ a ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ ტეილორის ლოკალური ფორმულით, თეორემის პირობების გათვალისწინებით გვექნება

$$f(x)-f(a)=\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)=$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\alpha(x)(x-a)^n$$

სადაც $\alpha(x)\to 0$, როცა $x\to a$. გვექნება

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\alpha(x)(x-a)^n=\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\alpha(x)\right](x-a)^n. \quad (10)$$

რადგანაც $f^{(n)}(a)\neq 0$, ხოლო $\alpha(x)\to 0$, როცა $x\to a$ ამიტომ $\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\alpha(x)\right]$ ჯამს, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a წერტილთან აქვს $f^{(n)}(a)$-ის ნიშანი. თუ n კენტია, მაშინ $(x-a)^n$ ფუნქცია ნიშანს იცვლის a წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლისას, ამიტომ ნიშანს იცვლის (10) ტოლობის მარჯვენა და მაშასადამე მარცხენა მხარე. ეს იმას ნიშნავს, რომ a არ არის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი.

თუ n ლუწია, მაშინ $(x-a)^n$ ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს, კერძოდ კი $(x-a)^n>0$, როცა $x\neq a$ და მაშასადამე a წერტილის მცირე მიდამოში $f(x)-f(a)$ გამოსახულების ნიშანი (10) ტოლობის გამო ემთხვევა $f^{(n)}(a)$ რიცხვის ნიშანს. ამიტომ a ექსტრემუმის წერტილია. თეორემა დამტკიცებულია.

ფუნქციის ამოზნექილობა. შუალედზე განსაზღვრული დიფერენცირებადი ფუნქციის ამოზნექილობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. იენსენის უტოლობა. კავშირი საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის. იუნგის უტოლობა. ჰელდერის უტოლობა.

განსაზღვრება 1. $(a,b)\subset R$ ინტერვალზე განსაზღვრულ $f:(a,b)\to R$ ფუნქციას უწოდებენ ზემოთ (ქვემოთ) ამოზნექილს თუ ნებისმიერი $x,y\in(a,b)$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\alpha\geq 0,\beta\geq 0$ რიცხვებისათვის, რომელთა ჯამი ტოლია ერთის სრულდება უტოლობა

$$f(\alpha x+\delta y)\leq \alpha f(x)+\beta f(y) \text{ (ქვემოთ ამოზნექილობა)}, \quad (1)$$

$$f(\alpha x+\delta y)\geq \alpha f(x)+\beta f(y) \text{ (ზემოთ ამოზნექილობა)}; \quad (2)$$

თუ ზემოთ მოყვანილი უტოლობები სრულდება მკაცრად ნებისმიერი $x\neq y$ და $\alpha\cdot\beta\neq 0$, $\alpha+\beta=1$ რიცხვებისათვის მაშინ f ფუნქციას (a,b) შუალედზე ქვემოთ (ზემოთ) მკაცრად ამოზნექილ ფუნქციას უწოდებენ.

(1) უტოლობაიდან მარტივად გამომდინარეობს ფუნქციის ამოზნექილობის ცნების შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

(1) უტოლობის მარჯვნივ დგას f ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში $\alpha x+\beta y\in[x,y]\subset(a,b)$, ხოლო მარცხნივ ამავე წერტილში იმ წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობა რომელიც გადის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის $(x,f(x))$ და $(y,f(y))$ წერტილზე, ასე რომ ფუნქცია ამოზნექილია ქვემოთ(ზემოთ) ნიშნავს შემდეგს: ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერ ორ წერტილის შემაერთებელი ქორდა ამ წერტილების შემაერთებელი ფუნქციის გრაფიკის <რკალის> ზემოთ (ქვემოთ) მდებარეობს.

(1) უტოლობას შეგვიძლია მივცეთ აგრეთვე შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: განვიხილოთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე (გეომეტრიული ფიგურა) $E=\{(x,y)\in R^2 \mid x\in(a,b), f(x)<y\}$ რომელის ფუნქციის გრაფიკის ზემოთ მდებარეობს. თუ ფუნქცია ამოზნექილია ქვემოთ მაშინ აღნიშნული სიმრავლე ამოზნექილია (და პირიქით) როგორც გეომეტრიული ფიგურა. შევნიშნოთ, რომ R^2 სიბრტყის რაიმე სიმრავლეს უწოდებენ ამოზნექილს თუ ის მის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს მათ შემაერთებელ მონაკვეთსაც.

ფუნქციის ამოზნექილობის ცნება ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა როგორც თეორიულ ასევე გამოყენებით ანალიზში. შევნიშნოთ რომ ფუნქციის ამოზნექილობასთან დაკავშირებულ საკითხები შეიწავლება <ამოზნექილ ანალიზში> რომელიც მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დამოუკიდებელი დარგია. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ფუნქციის ამოზნექილობასთან დაკავშირებულ საკითხებს დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით. ავღნიშნოთ პირველ რიგში რომ შესაძლოა ფუნქცია ამოზნექილი იყოს მაგრამ ფუნქციის განსაზღვრის არის გარკვეულ წერტილებში მას წარმოებული არ გააჩნდეს. ერთ-ერთი ასეთი მაგალითია ფუნქცია $f(x)=|x|$, რომელიც ქვემოთ ამოზნექილია მაგრამ $x=0$ წერტილში მას წარმოებული არ გააჩნია. მოვიყვანოთ ამოზნექილობის ზემოთ მოყვანილი განმარტების ტოლფასი განმარტება, რომლითაც შემდგომში ვისარგებლებთ. განვიხილოთ ქვემოთ ამოზნექილობის შემთხვევა.

(1) უტოლობა ჩავწეროთ სხვა ფორმით. ტოლობებიდან $z=\alpha x+\beta y;\alpha+\beta=1$ გვექნება

$$\alpha=\frac{y-z}{y-x} \quad \text{და} \quad \beta=\frac{z-x}{y-x}$$

ამიტომ (1) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$f(z)\le\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y). \tag{3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $x<y$. თუ გავითვალისწინებთ უტოლობებს $x\le z\le y$ და (3) უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $y-x$ რიცხვზე , მივიღებთ

$$(y-z)f(x)+(x-y)f(z)+(z-x)\ge 0. \tag{4}$$

თუ გავითვალისწინებთ $y-x=(y-z)+(z-x)$ წარმოდგენას (4) უტოლობაში, ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ უტოლობას

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \tag{5}$$

როცა $x<z<y$ და $x,y\in(a,b)$.

სინამდვილეში (5) უტოლობა არის (1) უტოლობის ტოლფასი სხვა ფორმით წარმოდგენილი უტოლობა, რომელიც შეგვიძლია მივიღოთ ფუნქციის ქვემოთ ამოზნექილობის განმარტებად. ანალოგიურად შეგვიძლია მოვიქცეთ ზემოთ ამოზნექილობის შემთხვევაში. (5) უტოლობა გამოხატავს შემდეგ გეომეტრიულ ფაქტს: $(z,f(z))$ და $(x,f(x))$ წერტილებზე გამავალი ქორდის დახრილობის კოეფიციენტი არ აღემატება $(y,f(y))$ და $(z,f(z))$ წერტილებზე გამავალი ქორდის საკუთხო კოეფიციენტს, როცა $a<x<z<y<b$.

მოვიყვანოთ ფუნქციის ქვემოთ(ზემოთ) ამოზნექილობის განმარტება

განმარტება 2. ვიტყვით, რომ ფუნქცია $f:(a,b)\to R$ ამოზნექილია ქვემოთ (ზემოთ) (a,b) ინტერვალზე თუ (a,b) ინტერვალიდან აღებული ნებისმიერი $x<z<y$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \quad \text{(ქვემოთ ამოზნექილობის შემთხვევა)} \tag{6}$$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\ge\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \quad \text{(ზემოთ ამოზნექილობის შემთხვევა)}, \tag{7}$$

თუ ზემოთ მოყვანილი უტოლობები სრულდება მკაცრად მაშინ ფუნქციას უწოდებენ მკაცრად ქვემოთ (ზემოთ) ამოზნექილს.

თეორემა 3. იმისათვის, რომ (a,b) ინტერვალზე განსაზღვრული დიფერენცირებადი $f:(a,b)\to R$ ფუნქცია იყოს ამოზნექილი ქვემოთ (ზემოთ)

(a,b) ინტერვალზე აუცილებელია და საკმარისი რომ წარმოებული ფუნქცია f' (a,b) ინტერვალზე იყოს არაკლებადი (არაზრდადი).

დამტკიცება. ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადი და ქვემოთ ამოზნექილი ფუნქციაა (a,b) შუალედზე. თუ (6) უტოლობაის ორივე მხარეში გადავალთ ზღვარზე ჯერ როცა $z \to x$, მერე კი როცა $z \to y$ მივიღებთ

$$f'(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'(y)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ f' ფუნქცია არაკლებადია. შევნშნოთ, რომ თუ ფუნქცია f მკაცრად ამოზნექილია ქვემოთ, მაშინ (6) უტოლობა სრულდება მკაცრად. ვისარგებლოთ ლაგრანჟის თეორემით და უკვე დამტკიცებული ფაქტით (f' ფუნქცია არაკლებადია) მივიღებთ

$$f'(x) \le f'(n) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(m) \le f(y)$$

სადაც $x < n < z < m < y$. მაშასადამე თუ დიფერენცირებადი f ფუნქცია ამოზნექილია ქვემოთ რაიმე შუალედზე, მაშინ f' ფუნქცია არაკლებადია, ხოლო თუ დამატებით ფუნქცია მკაცრად ამოზნექილია ქვემოთ, მაშინ f' ზრდადი ფუნქციაა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ f' ფუნქცია (a,b) ინტერვალზე არაკლებადია, მაშინ f ფუნქცია ქვემოთ ამოზნექილია (a,b) ინტერვალზე. მართლაც ვთქვათ $a < x < z < y < b$. ლაგრანჟის თეორემის ძალით

$$f'(n) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}, \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(m)$$

სადაც $a < n < x < m < b$. ვინაიდან $f'(n) \le f'(m)$ ამიტომ გვექნება (6) უტოლობა. თუ f' ფუნქცია ზრდადია, მაშინ (6) უტოლობა შესრულდება მკაცრად და ამ დროს ფუნქცია მკაცრად ამოზნექილია ქვემოთ.

ანალოგიური მსჯელობები შეგვიძლია ჩავატაროთ ზემოთ ამოზნექილობის შემთხვევაში. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ გავიხსენებთ რაიმე შუალედზე განსაზღვრული დიფერენცირებადი ფუნქციის მონოტონურობის ხასიათსა და წარმოებულის ნიშანს შორის ცნობილი დამოკიდებულება გვექნება

შედეგი 4. ვთქვათ ფუნქციას $f:(a,b) \to R$ (a,b) შუალედზე გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული. ა) იმისათვის, რომ f ფუნქცია (a,b) შუალედზე იყოს ქვემოთ (ზემოთ) ამოზნექილი აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) (a,b) შუალედზე.

ბ) თუ (a,b) შუალედზე $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), მაშინ f ფუნქცია (a,b) შუალედზე მკაცრად ამოზნექილია ქვემოთ (ზემოთ).

შენიშვნა. შესაძლებელია ფუნქცია მკაცრად ამოზნექილი იყოს ქვემოთ (ზემოთ) მაგრამ $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) უტოლობა არ შესრულდეს (a,b) ინტერვალის ყოველ წერტილში (თუმცა $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) უტოლობა ყოველთვის შესრულდება). საკმარისია განვიხილოთ ქვემოთ ამოზნექილი ფუნქცია $f(x) = x^4$.

თეორემა 5. იმისათვის, რომ (a,b) ინტერვალზე დიფერენცირებადი $f:(a,b) \to R$ ფუნქცია იყოს (a,b) ინტერვალზე ამოზნექილი ქვემოთ (ზემოთ) აუცილებელია და საკმარისი რომ ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ (ზემოთ) არ მდებარეობდეს. მკაცრად ქვემოთ (ზემოთ) ამოზნექილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი რომ ფუნქციის გრაფიკის ყოველი წერტილი ნებისმიერი მხების მკაცრად ზემოთ (ქვემოთ) მდებარეობდეს გარდა შეხების წერტილისა.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ $c \in (a,b)$. $(c, f(c))$ წერტილში გავლებული ფუნქციის მხების განტოლებას აქვს სახე $y = f(c) + f'(c)(x-c)$, ამიტომ

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) = (f'(m) - f''(c))(x-c), \qquad (8)$$

სადაც m წერტილი არჩეულია ლაგრანჟის თეორემის ძალით x და c წერტილებს შორის. ვინაიდან f ფუნქცია ქვემოთ ამოზნექილია ამიტომ f' ფუნქცია არაკლებადია (a,b) ზე და $f'(m) - f'(c)$-ს ნიშანი ემთხვევა $x-c$-ს ნიშანს (8) ტოლობის ძალით, ამიტომ $f(x) - y(x) \geq 0$ ნებისმიერ $x \in (a,b)$ წერტილში. იმ შემთხვევაში როცა ფუნქცია მკაცრად ამოზნექილია, მაშინ f' მკაცრად ზრდადია (a,b) ამიტომ $f(x) - y(x) > 0$, როცა $x \in (a,b)$ და $x \neq c$.

საკმარისობა. თუ ნებისმიერი $x, c \in (a,b)$

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \geq 0 \qquad (9)$$

მაშინ

$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \leq f'(c) \quad \text{როცა} \quad x < c \quad \text{და}$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \geq f'(c) \quad \text{როცა} \quad x > c.$$

მაშასადამე ნებისმიერი $x, z, y \in (a,b)$ სამეულისათვის, როცა $x < z < y$ გვექნება

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y-z} \qquad (10)$$

ამასთანავე ამ უკანასკნელ უტოლობაში გვექნება მკაცრი უტოლობა თუ (9) უტოლობაში მკაცრი უტოლობა სრულდება. (10) უტოლობიდან გამომდინარეობს ფუნქციის ქვემოთ ამოზნექილობა. ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ ზემოთ ამოზნექილობის შემთხვევა. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 6. ფუნქცია $f(x) = e^x$ ქვემოთ მკაცრად ამოზნექილი ფუნქციაა. $(0,1)$ წერტილში ფუნქციის გრაფიკის მხების განტოლებაა $y = x+1$, მაშასადამე ნებისმიერი $x \in R$ რიცხვისათვის გვაქვს უტოლობა $e^x \geq 1 + x$.

მაგალითი 7. ფუნქცია $f(x) = \ln x$ ზემოთ ამოზნექილი ფუნქციაა როცა $x > 0$. $(1,0)$ წერტილში ფუნქციის გრაფიკის მხების განტოლებაა $y = x-1$, ამიტომ როცა $x > 0$ გვექნება $\ln x \leq x-1$.

თეორემა 8. (იენსენის უტოლობა). ვთქვათ ფუნქცია $f : (a,b) \to R$ ქვემოთ (ზემოთ) ამოზნექილი ფუნქციაა. მაშინ (a,b) ინტერვალიდან აღებული ნებისმიერი $x_1, x_2, \cdots, x_n$ რიცხვებისათვის და არაუარყოფითი $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ რიცხვებისათვის, რომელთა ჯამი ერთის ტოლია სამართლიანია უტოლობა

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \qquad (11)$$

$$(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)) \qquad (12)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ქვემოთ ამოზნექილობის შემთხვევა.

დამტკიცება ვაწარმოოთ ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. როცა $n = 2$ (11) უტოლობა ემთხვევა ფუნქციის ქვემოთ ამოზნექილობის ცნობილ განმატრებას. დაუშვათ (11) სამართლიანია $n = m-1$ სათვის და ვაჩვენოთ (11) –ის სამართლიანობა როცა $n = m$. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ რიცხვებში $\alpha_n \neq 0$. მაშინ $\beta = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ და $\frac{\alpha_2}{\beta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1$. თუ ვინაიდან ფუნქცია ქვემოდან ამოზნექილია და $\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_2}{\beta} x_n \in (a,b)$, $\alpha_1 + \beta = 1$ ამიტომ

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \le f(\ \alpha_1 f(x_1) + \beta(\ \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + ... + \frac{\alpha_2}{\beta} x_n\ )\ ) \le$$

$$f(\ \alpha_1 (f(x_1)\ ) + \beta f(\ \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + ... + \frac{\alpha_2}{\beta} x_n\ ). \qquad (13)$$

ინდუქციის დაშვების ძალით

$$f(\ \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + ... + \frac{\alpha_2}{\beta} x_n\ ) \le \frac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + ... + \frac{\alpha_2}{\beta} f(x_n).$$

თუ უკანასკნელ უტოლობას გამოვიყენებთ (13) -ში მივიღებთ დასამტკიცებელ დებულებას. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ (12) უტოლობის სამართლიანობა.

მაგალითი 9. ფუნქცია $f(x) = \ln x$ $(0,+\infty)$ სიმრავლეზე ამოზნექილია ზემოთ, ამიტომ გვექნება

$$\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + ... + \alpha_n \ln x_n \le \ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n)$$

ანუ

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \qquad (14)$$

როცა $x_i > 0, \alpha_i \ge 0; i = 1,2,...,n$ და $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

თუ ავიღებთ (14) უტოლობაში $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$, მივიღებთ საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის ცნობილ დამოკიდებულებას

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

მაგალითი 10. (იუნგის უტოლობა) (14) უტოლობაში ავიღოთ $n = 2, \alpha_1 = 1/p < 1, \alpha_2 = 1/q < 1, x_1 = a, x_2 = b \ge 0$ სადაც $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0$ მივიღებთ

$$a^{1/p} b^{1/q} \le a/p + b/q$$

მაგალითი 11. ვთქვათ $f(x) = x^p, x \ge 0, p > 1$. მაშინ f ფუნქცია ქვემოთ ამოზნექილია. ამიტომ გვექნება (11) უტოლობიდან გვექნება

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x)^p \le \alpha_1 x_1^p + \alpha_2 x_2^p + ... + \alpha_n x_n^p \qquad (15)$$

თუ (15) უტოლობაში ავიღებთ $q = \frac{p}{p-1}, \alpha_i = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}, x_i = \frac{a_i \sum_{k=1}^{n} b_k^q}{b^{\frac{1}{p-1}}}$ მივიღებთ კლასიკურ ჰელდერის უტოლობას (ვგულისხმობთ a_i, b_i არაუარყოფითი რიცხვებია)

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \ \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}$$

სადაც $1/p + 1/q = 1, p > 1$.

1. იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული

ა) $y = x^x$;
ბ) $y = (x-1)^{2x}$;
გ) $y = (\cos x)^x$;
დ) $y = (\ln x)^{x+1}$.
ე) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;
ვ) $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;
ზ) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;
თ) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
ი) $y = x^5 \arcsin 3x + \tan x^4$;
კ) $y = (x+1)^2 \arctan 3x + \sin x^3$;
ლ) $y = \sqrt[3]{x^2+3x} - \sin(2x+\sqrt{x})$;
მ) $y = (2x-1)^2 \, arc\cot 5x + \sin x^4$.
ნ) $y = x^{\sin^2 x} + x^7 e^{\tan x}$;
ო) $y = x^{\cos 2x} + \sqrt[3]{x} \cdot e^{\sin x}$;
პ) $y = \arctan(2x+3) - x^{2x+1}$;
ჟ) $y = x^{x+\sin^2 x} + (x-1)^3 e^{1+\tan x}$.

2. განიხილეთ y როგორც x-ის ფუნქცია და იპოვეთ $y' = \dfrac{dy}{dx}$ თუ

ა) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$
ბ) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$
გ) $\begin{cases} x = 1-t^2, \\ y = t-t^3 \end{cases}$
დ) $\begin{cases} x = \ln t(1+t^2), \\ y = t - arctgt \end{cases}$
ე) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
ვ) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t}, \\ y = tgt \end{cases}$
ზ) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$
თ) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

3. განიხილეთ y როგორც x-ის ფუნქცია და იპოვეთ $\dfrac{d^2y}{d^2x}$

ა) $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$
ბ) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\cos 2t \end{cases}$
გ) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$
დ) $\begin{cases} x = (1+t^2)e^t, \\ y = t^2 e^{2t} \end{cases}$

4. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობებს

ა) $\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = y$

ბ) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ $(x-y)^2 \dfrac{d^2y}{d^2x} = 2\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)$

5. იპოვეთ $y = 5x^3$ კუბური პარაბოლის იმ წერტილზე გამავალი მხების საკუთხო კოეფიციენტი, რომლის აბსცისაა $x = 2$.

6. იპოვეთ $y = x^3$ კუბური პარაბოლის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი 3-ის ტოლია.

7. იპოვეთ $y = x^2 - 7x + 3$ პარაბოლის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხები $5x + y - 3 = 0$ წრფის ა) პარალელურია ბ) მართობულია.

8. იპოვეთ $y = e^{x-1}$ წირის იმ მხების კუთხური კოეფიციენტი, რომელიც გავლებულია ამ წირის $y = 1$ წრფესთან თანაკვეთის წერტილში.

9.. შეადგინეთ $y = x^2 - 2x + 5$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც პარალელურია პარაბოლის (1,4) და (3,8) წერილების შემაერთებელი ქორდისა.

10. იპოვეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის მხები წრფის განტოლება მითითებულ წერტილში თუ

ა) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $t_0 = \pi/2$ ბ) $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$ $t_0 = 1$

გ) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ $t_0 = \pi/6$ გ) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $t_0 = \pi/4$

11. შეადგინეთ $y = \dfrac{x+9}{x+5}$ ჰიპერბოლის იმ მხების განტოლებები, რომლებიც გადიან კორდინატთა სათავეში.

12. აჩვენეთ, რომ $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ ჰიპერბოლის საკორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებში ამ ჰიპერბოლისადმი გავლებული მხებები პარალელურია.

13. იპოვეთ a პარამეტრის ის მნიშვნელობები ისეთი, რომ მოცემული ფუნქცია იქნება უწყვეტად წარმოებადი იყოს მის განსაზღვრის არეზე თუ

ა) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 5, & x \le 1; \\ 2x + a + 4 & x > 1 \end{cases}$ ბ) $f(x) = \begin{cases} e^x + ax + 4, & x \le 0; \\ 2\cos x + 3a\sin x + 3, & x > 0 \end{cases}$

გ) $f(x) = \begin{cases} \sin x + ax, & x \le 0; \\ x\cos x + 3a\sin x + 5x & x > 0 \end{cases}$ გ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + (a+3)e^x, & x \le 0; \\ \sin x + x + a\cos x + 3 & x > 0 \end{cases}$

14. იპოვეთ a და b პარამეტრის ის მნიშვნელობები ისეთი, რომ მოცემული ფუნქცია იყოს უწყვეტად წარმოებადი მის განსაზღვრის არეზე თუ

ა) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 1; \\ x^2 + bx + a, & x > 1 \end{cases}$ ბ) $f(x) = \begin{cases} e^x + ax, & x \le 1; \\ b\cos \pi x + 3a\sin \pi x + 3, & x > 1 \end{cases}$

გ) $f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax + 4, & x \le 2; \\ 2\cos \pi x + 3a\sin \pi x + 3b, & x > 2 \end{cases}$ დ) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \le 0; \\ 2b\cos x + 3a\sin x + 3e^x, & x > 0 \end{cases}$

15. იპოვეთ a, b და c პარამეტრის ის მნიშვნელობები ისეთი, რომ მოცემული ფუნქცია იყოს ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი მის განსაზღვრის არეზე თუ

ა) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 1; \\ ax^2 + bx + c, & x > 1 \end{cases}$ ბ) $f(x) = \begin{cases} a\sin \pi x + b\cos \pi x, & x \le 1; \\ ax^2 + bx + c, & x > 1 \end{cases}$

გ) $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \le 1; \\ ax^2 + bx + c, & x > 1 \end{cases}$ დ) $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \le 1; \\ ax^2 + bx + c, & x > 1 \end{cases}$

16. ვთქვათ $f(x)$ სამჯერ წარმოებადი ფუნქციაა. იპოვეთ $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ თუ

ა) $y = f(x^2)$; ბ) $y = f(e^x)$.

17. მოცემულია $y = \dfrac{x^2}{1-x}$. იპოვეთ $y^{(8)}$.

18. მოცემულია $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. იპოვეთ $y^{(100)}$.

19. მოცემულია $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. იპოვეთ $y^{(n)}$.

20. მოცემულია $y = \sin^2(x)$. იპოვეთ $y^{(n)}$.

21. მოცემულია $f(x) = arctgx$. იპოვეთ $f^{(n)}(0)$.

22. მოცემულია $f(x) = \arcsin(x)$. იპოვეთ $f^{(n)}(0)$.

23. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია n-ური რიგის წარმოებული მაშინ $F(x)=f(ax+b)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა $F^{(n)}(x)=a^n f^{(n)}(ax+b)$.

24 იპოვეთ $P^{(n)}(x)$, თუ $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.

25. იპოვეთ $y^{(n)}$, თუ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

26.ვთქვათ ფუნქცია $f:(-\infty,a]\to R$ შუალედზე ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა. შეარჩიეთ m,n,k რიცხვები ისეთი, რომ ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases} f(x); & x\le a,\\ m(x-a)^2+n(x-a)+k, & x>a,\end{cases}$$

ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი იყოს განსაზღვრის არეზე.

27. სამართლიანია თუ არა რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი $x=0$ წერტილში ფუნქციისათვის $y=\sin^2(\sqrt[3]{x^2})$. არსებობს თუ არა ამ ფუნქციის წარმოებული აღნიშნულ წერტილში.

28.იპოვეთ ფუნქციის ცალმხრივი $f'(x_0+)$, $f'(x_0-)$ (მარჯვენა და მარცხენა) წარმოებულები მითითებულ x_0 წერტილში, თუ

ა) $f(x)=|x|$, $x_0=0$; ბ) $f(x)=|x|$, $x_0=1$; გ) $f(x)=x^2\operatorname{sgn}(x)$, $x_0=0$;

დ) $f(x)=\sqrt{\sin^2 x}$, $x_0=0$; ე) $f(x)=|x|\sin x$, $x_0=0$; ვ) $f(x)=|x-\pi/2|\cos x$, $x_0=\pi/2$; ზ) $f(x)=|x-1|e^x$, $x_0=1$.

29. სამართლიანია თუ არა დებულებები: თუ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წარმოებული, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია, მაშინ ა)ფუნქციას $f(x)+g(x)$ ბ) $f(x)g(x)$ არ გგაჩნია x_0 წერტილში წარმოებული.

30.შეიძლება თუ არა გამოყენებული იქნას ნამრავლის გაწარმოების ფორმულა $f(x)g(x)$ ფუნქციის გაწარმოებისათვის x_0 წერტილში, თუ

ა) $f(x)=x, g(x)=|x|, x_0=0;$ ბ) $f(x)=x, g(x)=|x|, x_0=1;$

გ) $f(x)=\sin x, g(x)=\operatorname{sgn} x, x_0=1;$ დ) $f(x)=x^2, g(x)=sig(x), x_0=0$.

არსებობს თუ არა ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში $f(x)g(x)$ ფუნქციის წარმოებული მითითებულ წერტილებში?

31. m და n რიცხვების რა მნიშვნელობისათვის ფუნქციას

$f(x)=|x|^m\sin\dfrac{1}{|x|^n}$ როცა $x\neq 0$ და $f(0)=0$ როცა $x=0$ გააჩნია წარმოებული $x=0$ წერტილში.

32. იპოვეთ $f'(a)$, თუ $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $x=a$ წერტილში.

33. .აჩვენეთ, რომ ფუნქციას $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $x=a$ წერტილში და $f(a)\neq 0$ არ გააჩნია აღნიშნულ წერტილში წარმოებული.

34. ააგეთ უწყვეტი ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც არ გააჩნია წარმოებული მხოლოდ ფიქცირებულ $x=a_1,\ldots,a_n$ წერტილებში. (მითითება: განიხილეთ ფუნქცია $f(x)=|x-a_1||x-a_2|\cdots|x-a_n|$.)

35. მოიყვანეთ ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც მხოლოდ ერთ წერტილში ექნება წარმოებული.

36.იპოვეთ შემდეგი ჯამები:

ა) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^n$;

ბ) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx$;

გ) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx$.

37. სამართლიანია თუ არა დებულება: “ თუ $f(x)<g(x)$, მაშინ $f'(x)<g'(x)$” ?

38. იპოვეთ $f'(0)$, თუ $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$.

39. რა შეიძლება ითქვას $F(x)=f(g(x))$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობის შესახებ $x=a$ წერტილში, თუ ა) $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წარმოებული $g(a)$ წერტილში, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია $x=a$ წერტილში წარმოებული. ბ) $f(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული $g(a)$ წერტილში, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას გააჩნია $x=a$ წერტილში წარმოებული. გ) $f(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული $g(a)$ წერტილში, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას არ გააჩნია $x=a$ წერტილში წარმოებული. (მითითება: განიხილეთ ფფუქციები ა) $f(x)=x^2, g(x)=|x|$;

ბ) $f(x)=|x|, g(x)=x^2$;გ) $f(x)=2x+|x|, g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$ და $a=0$.)

40. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წარმოებული $(a,+\infty)$ შუალედში და არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. არსებობს თუ არა ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

(მითითება: განიხილეთ ფუნქცია $f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}$.)

41. აჩვენეთ, რომ ლუწი ფუნქციის წარმოებული ფუნქცია (თუ ის არსებობს) კენტი ფუნქციაა, ხოლო კენტი ფუნქციის წარმოებული ლუწი.

42. ჩაწერეთ $P(x)$ პოლინომი $(x-a)$ სხვაობის მთელ დადებით ხარისხების ჯამათ

ა) $P(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4,\ a=4$

ბ) $P(x)=x^3-2x^2+3x+5,\quad a=5$

გ) $P(x)=-2x^3+5x^2+3x+1,\ a=1$

დ) $P(x)=x^{10}+3x+1,\quad a=1$

43. m პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის $x^3-3x+m=0$ განტოლობების ფესვები ნამდვილია.

44. წარმოადგინეთ ფუნქცია f მაკლორანის ფორმულის სახით ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ ლაგრანჟის და კოშის სახით თუ

ა) $f(x)=e^{2x-x^2},\ n=5.$

ბ) $f(x)=\sin(\sin x),\ n=3.$

გ) $f(x)=\cos(\sin x),\ n=4.$

დ) $f(x)=\ln\frac{\sin x}{x},\quad n=3$

ე) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3},\quad n=3.$

ვ) $f(x)=\sqrt[n]{a^n+x},\quad n=2.$

ზ) $f(x)=\sqrt{1-x+2x^2},\ n=3.$

თ) $f(x)=(x+5)e^{2x},\ n=3.$

45. წარმოადგინეთ ფუნქცია f ტეილორის მწკრივის სახით ცენტრით $x=1$ თუ

ა) $f(x)=x^2$ ბ) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x-1)^2$ წევრამდე.

გ) $f(x)=\sin(\pi x/2)$ $(x-1)^4$ წევრამდე.

46. იპოვეთ შემდეგი მიახლოებითი ფორმულების აბსოლიტური ცდომილება

ა) $\sin x \approx x-\frac{x^3}{6}$ თუ $|x|\le 1/2$.

ბ) $tgx \approx x+\frac{x^3}{3}$ თუ $|x|\le 0{,}1$.

გ) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ თუ $0\le x\le 1$.

47. ტეილორის ფორმულის გამოყენებით დაითვალეთ

ა) $\sqrt[3]{9}$ 10^{-3} სიზუსტით. ბ) $\sqrt[4]{90}$ 10^{-4} სიზუსტით

გ) $\sin 18^\circ$ 10^{-4} სიზუსტით დ) $\sin 1^\circ$ 10^{-4} სიზუსტით

ე) $\cos 6^\circ$ 10^{-5} სიზუსტით ვ) $\ln 1{,}1$ 10^{-3} სიზუსტით.

ზ) $e^{0,2}$ 10^{-5} სიზუსტით.

48. გამოიყენეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების ტეილორის ფორმულით წარმოდგენები იპოვეთ ზღვრები

ა) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$ ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2tgx}{\ln(1+x^3)}$ გ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$ დ)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ ე) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ ვ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)$

ზ) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{e^x}\,(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1})$

49. შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა როლის თეორემის პირობებს მითითებულ შუალედში შემდეგი ფუნქციები

ა) $f(x)=x^3+4x^2-7x-10,\quad [-1,2]$ ბ) $f(x)=x^2+3x-1,\quad [0,1]$

ბ) $f(x)=\ln\sin x,\quad \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ გ) $f(x)=\sin x,\quad [0,\pi]$

50. აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს. იპოვეთ ამ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია:

ა) $f(x)=x-x^3,\quad [-1,0]$ და $[0,1]$; ბ) $f(x)=(x^2-4)(2x-1),\quad [-1,1]$ და $[1,2]$.

51. აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემის პირობებს. იპოვეთ ამ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილები, რომელზედაც გავლებული მხები გრაფიკის კიდურა წერტილების შემაერთებელი ქორდის პარალელურია:

ა) $f(x)=x^2,\quad [1,3]$; ბ) $f(x)=x+1/x,\quad [1/2,2]$; გ) $f(x)=arctgx$, $[0,1]$.

52. ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ უტოლობები:

ა) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

ბ) $\frac{a-b}{a}\le\ln\frac{a}{b}\le\frac{a-b}{b}$, თუ $0<b\le a$;

გ) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, როცა $x>0$;

დ) $[e^x\ge 1+x$, როცა $x\in R$.

53. შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა კოშის თეორემის პირობებს მითითებულ შუალედში შემდეგი ფუნქციები:

ა) $f(x)=x^2, g(x)=x^3$ $[-1,1]$ ბ) $f(x)=x^3, g(x)=x^2+1$ $[1,2]$

გ) $f(x)=\sin x, g(x)=x+\cos x$ $[0,\pi/2]$ დ) $f(x)=\cos x, g(x)=x^3$ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

54. შემდეგი ფუნქციებისათვის შეამოწმეთ კოშის თეორემის პირობები და დაწერეთ კოშის ფორმულა

ა) $f(x)=\sin x, g(x)=\ln x$ $[a,b];0<a<b$

ბ) $f(x)=e^{2x}, g(x)=1+e^x$ $[a,b]$

55. გამოიკვლიეთ ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკის ესკიზი თუ

1. ა) $y=-3x^2+x^3$; ბ) $y=3x^3-2x^2+4$;
   გ) $y=x^3-6x^2+9x-2$; დ) $y=x^4-2x^3+3$.
2. ა) $y=-x^4+4x^3-2x^2$; ბ) $y=3x^3-2x^2+4$;
   გ) $y=x^4-2x^3+3$; დ) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$.
3. ა) $y=\frac{x^2}{x^3+3}$; ბ $y=\frac{2x}{x^2+1}$
   გ) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$ დ) $y=\frac{x}{2}+\frac{8}{x}$
4. ა) $y=\frac{2}{x}+x^2$; ბ $y=\frac{2x}{x^2+1}$
   გ) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ დ) $y=\frac{x^4-3}{x}$
5. ა) $y=2x-\sqrt{x}$; ბ $y=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}$
   გ) $y=x\sqrt{x+3}$ დ) $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$
6. ა) $y=\sqrt{x^2-4x+6}$; ბ $y=x-\sqrt{x^2-2x}$
   გ) $y=x+\sqrt{x^2-1}$ დ) $y=\sqrt{3x^2-2x}$
7. ა) $y=e^x-x$; ბ $y=xe^x$
   გ) $y=xe^{-x}$ დ) $y=x^2e^{-x}$
8. ა) $y=x\ln x$; ბ $y=\frac{\ln x}{x}$
   გ) $y=x-\ln x$ დ) $y=\frac{x}{\ln x}$
9. ა) $y=\sin x+\cos x$; ბ) $y=x+\sin x$
   გ) $y=x+\cos x$ დ) $y=x-2\sin x$
10. ა) $y=x\,arctgx$; ბ $y=\frac{x}{2}+arctgx$
    გ) $y=\frac{1}{arctgx}$ დ) $y=x-2arctgx$
11. ა) $y=\ln\cos x$; ბ $y=\sin x-\ln\sin x$
    გ) $y=\ln(\cos x-\sin x)$ დ) $y=\ln(\cos x+\sin x)$

12. ა) $y = 3x - x^3$; ბ) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$;

გ) $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$; დ) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

13. ა) $y = (x-3)\sqrt{x}$; ბ) $y = e^{2x - x^2}$;

გ) $y = x + e^{-x}$; დ) $y = \frac{e^x}{1+x}$.

56. ლოპიტალის თეორემის გამოყენებით გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arctan x}$

ბ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

გ) $\lim\limits_{x\to a+} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

დ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

ე) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - e^x) \tan \frac{\pi x}{2}$

ვ) $\lim\limits_{x\to 1-} \ln x \ln(1-x)$

ზ) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2 + x - 6} \right)$

თ) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

ი) $\lim\limits_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$

კ) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

ლ) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$

მ) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln(1-x) \right)^{\ln(1-x)}$

ნ) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

ო) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$

პ) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan x)^{c \tan x}$

ჟ) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$

რ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x + 2 \sin x}$

ს) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$

ტ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{x^2}$

უ) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

ფ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x a^x}$

ხ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2\pi - x)}{\arctan \frac{2x}{1 - x^2}}$

ყ) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(a + be^x)}{a + ex}$

შ) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x c \tan x)$

ჩ) $\lim\limits_{x\to 1-} [(1-x)\ln(1-x)]$

57. ვთქვათ, რომ $f \in C((a,b))$ და ნებისმიერი $x_1, x_2 \in (a,b)$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

დაამტკიცეთ, რომ f ამოზნექილი ფუნქციაა (a,b) ინტერვალზე.

57. აჩვენეთ, რომ თუ ფუნქცია $f:R\to R$ ამოზნექილია და შემოსაზღვრულია, მაშინ ის მუდმივი ფუნქციაა.

58. აჩვენეთ, რომ თუ ფუნქცია $f:R\to R$ ამოზნექილია და

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

მაშინ ის მუდმივი ფუნქციაა.

59. აჩვენეთ, რომ თუ ფუნქცია $f:(a,b)\to R$ ამოზნექილია ქვემოთ, მაშინ ნებისმიერი $x\in(a,b)$ წერტილში ფუნქციას გააჩნია მარჯვენა და მარცხენა წარმოებული და $f'_-(x)\le f'_+(x)$.

60. დაამტკიცეთ, რომ, როცა $t>0$ და $x\in R$ სამართლიანია უტოლობა

$$xt\le e^x+t\ln\frac{t}{e}.$$

61. აჩვენეთ, რომ როცა

ა) $\cos x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3,\quad 0<|x|<\pi/2.$

ბ) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ x>0.$

გ) $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x},\quad x>0.$

დ) $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x,\ x>0.$

ე) $x+\frac{x^3}{3}<tgx,\ 0<x<\pi/2.$

62. გამოიყენეთ როლის თეორემა და აჩვენეთ, რომ თუ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის

$$Q_n(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$$

ყველა ფესვი ნამდვილია, მაშინ ნარმოებულებს $Q'_n(x),Q''_n(x),\ldots,Q_n^{(n-1)}(x)$ გააჩნიათ ნამდვილი ფესვები.

63. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაგრამ არაა შემოსაზღვრული ამ ინტერვალზე, მაშინ მისი წარმოებულიც არაა შემოსაზღვრული მოცემულ ინტერვალზე.

64. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტია და (a,b) ინტერვალზე დიფერენცირებადი და არ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას . აჩვენეთ, რომ არსებობს $c\in(a,b)$ ისეთი, რომ $|f(b)-f(a)|<|f'(c)|\cdot|b-a|$.

65. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა და $f'(a)=f'(b)=0$. აჩვენეთ, რომ არსებობს $c\in(a,b)$ ისეთი, რომ $|f(b)-f(a)|<(1/4)\cdot|f''(c)|\cdot(b-a)^2$.

რიმანის ინტეგრალი

სეგმენტის დანაწილების ცნება. რიმანის ჯამები. რიმანის ინტეგრალის ცნება. ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობა. დარბუს ჯამები. ფუნქციის ზედა და

ქვედა ინტეგრალი. ფუნქციის რიმანის აზრით ინტეგრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი.

განსაზღვრება 1. $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება ეწოდება, მის წერტილთა სასრულ $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ სიმრავლეს, სადაც $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. მონაკვეთებს $[x_{k-1},x_k], k=1,2,...,n$ უწოდებენ P დანაწილების ქვესეგმენტებს. რიცხვს $\lambda=\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k|$, სადაც $\Delta x_k=[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,n$ უწოდებენ P დანაწილების პარამეტერს.

განსაზღვრება 2. ვთქვათ P_1 და P_2 წარმოადგენს $[a,b]$ სეგმენტის სხვადასხვა დანაწილებას. ვიტყვით, რომ P_2 უფრო მჭიდრო დანაწილებაა ვიდრე P_1 (ანუ P_2 დანაწილება წარმოადგენს P_1 დანაწილების გაგრძელებას) თუ $P_1\subset P_2$.

ცხადია თუ $P_1\subset P_2$, მაშინ $\lambda(P_2)\le\lambda(P_1)$. ამასთანავე თუ P_1 და P_2 წარმოადგენს $[a,b]$ სეგმენტის ორ ნებისმიერ დანაწილებას, მაშინ $P=P_1\cup P_2$ არის თითოეული დანაწილების გაგრძელება.

განსაზღვრება 3. ვიტყვით, რომ მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება (P,ξ) ამ სეგმენტის მონიშნული $\xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$ წერტილებით, თუ მოცემულია P დანაწილება და ამ დანაწილების ყოველ $[x_{k-1},x_k], k=1,2,...,n$ ქვესეგმენტში არჩეულია რაიმე $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ წერტილი $k=1,2,...,n$.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე და (P,ξ) ამ სეგმენტის მონიშნული წერტილებით დანაწილებაა, მაშინ ჯამს

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)|\Delta x_k|$$

სადაც $\Delta x_k=[x_{k-1},x_k]$, ეწოდება f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამი (P,ξ) მონიშნული დანაწილების მიმართ.

როდესაც $\lambda=\lambda(P)\to 0$, მაშინ $\sigma(f,P,\xi)$ ჯამს შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული <ზღვარი> , რომელიც არაა დაკავშირებული ξ_k წერტილების შერჩევაზე. ცხადია აღნიშნული ზღვარს დასჭირდება მკაცრი განმარტება.

განსაზღვრება 5. I რიცხვს ეწოდება $f:[a,b]\to R$ ფუნქციის რიმანის $\sigma(f,P,\xi)$ ჯამების ზღვარი, როცა $\lambda(P)\to 0$ თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის მონიშნული წერტილებით ნებისმიერი (P,ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრია $\lambda(P)<\delta$ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon$$

ამ ფაქტს ასე ავღნიშნავთ $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I$.

განსაზღვრება 6. ვიტყვით, რომ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I$. I რიცხვს უწოდებენ f ფუნქციის განსაზღვრული (რიმანის) ინტეგრალს $[a,b]$ სეგმენტზე და დავწერთ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I=\int_a^b f(x)dx$$

(რაც ასე იკითხება ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)dx$) a-ს და b-ს შესაბამისად ინტეგრების ქვედა და ზედა საზღვრები ეწოდებათ, x-ს ინტეგრების ცვლადი, $f(x)dx$ ინტეგრელქვეშა გამოსახულება.

შემდგომში ჩვენ გვექნება საქმე რიმანის ინტეგრალთან და ზოგჯერ სიმარტივისათვის ნაცვლად "რიმანის ინტეგრალი", "ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია" შესაბამისათ ვიტყვით "ინტეგრალი" და "ინტეგრებადი ფუნქცია"

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ დამოუკიდებელია ინტეგრების x ცვლადზე, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du .$$

შემდგომში $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ რიმანის აზრით ინტეგრებად ყველა ფუნქციათა ერთობლიობას (სიმრავლეს) ავღნიშნავთ სიმბოლოთი $R([a,b])$.

მაგალითი 7. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული მუდმივი ფუნქცია: $f(x) = c, \forall x \in [a,b]$.

გვექნება $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \mid \Delta x_k \mid = c\sum_{k=1}^{n} \mid \Delta x_k \mid = c(b-a)$, ნებისმიერი (P,ξ) დანაწილებისათვის. მაშასადამე

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a) .$$

მაგალითი 8. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტზე f ფუნქცია შემდეგი წესით: $f(x) = 0$ თუ x რაციონალურია და $f(x) = 1$ თუ x ირაციონალურია (დირიხლეს ფუნქცია). ვთქვათ P რაიმე დანაწილებაა. თუ მოვნიშნავთ $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ წერტილებს ისე, რომ თითოეული
ξ_k იყოს რაციონალური, მაშინ გვექნება

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \mid \Delta x_k \mid = 0 \cdot \sum_{k=1}^{n} \mid \Delta x_k \mid = 0 .$$

თუ მოვნიშნავთ $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ წერტილებს ისე, რომ თითოეული
ξ_k იყოს ირაციონალური, მაშინ გვექნება

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \mid \Delta x_k \mid = 1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \mid \Delta x_k \mid = (b-a) .$$

მაშასადამე დირიხლეს ფუნქცია არ არის რიმანის აზრით ინტეგრებადი $[a,b]$ სეგმენტზე.

ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი პირობა

თეორემა 9. იმისათვის, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული f ფუნქცია იყოს რიმანის აზრით ინტეგრებადი აუცილებელია რომ ის იყოს შემოსაზღვრული.
(მოკლედ, $f \in R([a,b]) \Rightarrow f$ შემოსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე.)

შევნიშნოთ, რომ შემოსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება არ იყოს რიმანის აზრით ინტეგრებადი მაგ. დირიხლეს ფუნქცია).

დამტკიცება. დაუშვათ წინააღმდეგი: ვთქვათ $f : [a,b] \to R$ ინტეგრებადია მაგრამ ის შემოსაზღვრული არ არის $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ ნებისმიერი P დანაწილებისათვის სულ მცირე დანაწილების ერთ-ერთ $[x_{k-1}, x_k]$ ქვესეგმენტზე f

ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ავირჩიოთ სხვადასხვაგვარად $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ წერტილები ისე, რომ $|f(\xi_k)|\Delta x_k \|$ იყოს რაგინდ დიდი. მაშინ ჯამის

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta x_k|$$

აბსოლიტური სიდიდე შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ დიდი თუ მხოლოდ ξ_k რიცხვებს შევცვლით. მაშასადამე არ არსებობს $\sigma(f,P,\xi)$ ჯამების ზღვარი როცა $\lambda(P) \to 0$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ჩვენი დაშვება არასწორია. თეორემა დამტკიცებულია.

დარბუს ჯამები, ფუნქციის ინტეგრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

განსაზღვრება 10. ვთქვათ $f:[a,b] \to R$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე. $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ P დანაწილებისათვის განვსაზღვროთ რიცხვები

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad k = 1,2,...,n.$$

რიცხვებს $U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k|\Delta x_k|$ და $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k|\Delta x_k|$ უწოდებენ f ფუნქციის დარბუს ზედა და ქვედა ინტეგრალურ (უბრალოდ დარბუს) ჯამებს P დანაწილების მიმართ.

განსაზღვრება 11. რიცხვებს

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf U(f,P) \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup U(f,P)$$

სადაც ზუსტი ქვედა და ზედა საზღვარი აიღება $[a,b]$ სეგმენტის ყველა შესაძლებელი P დანაწილების მიმართ, შესაბამისად უწოდებენ f ფუნქციის რიმანის ზედა და ქვედა ინტეგრალებს.

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან f ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს m და M რიცხვები ისეთი, რომ $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$. რის გამოც $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის გვექნება

$$m(b-a) \le L(f,P) \le U(f,P) \le M(b-a)$$

ამრიგად $L(f,P)$ და $U(f,P)$ რიცხვებისაგან შემდგარი სიმრავლეები შემოსაზღვრულია, ამიტომ ფუნქციის ზედა და ქვედა რიმანის ინტეგრალები სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის ყოველთვის არსებობს.

თეორემა 12. თუ P^* არის P დანაწილების გაგრძელება, მაშინ

$$L(f,P) \le L(f,P^\bullet), \tag{1}$$

$$U(f,P^\bullet) \le U(f,P). \tag{2}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვიგულისხმოთ, რომ P^* დანაწილება შეიცავს ერთით მეტ ელემენტს ვიდრე P დანაწილება. ვთქვათ ეს წერტილია $x^\bullet$ და

$x_{k-1} < x^{\bullet} < x_k$ P დანაწილების რომელიღაც x_{k-1} და x_k ორი მეზობელი წერტილისათვის. დაუშვათ

$$\omega_1 = \inf_{x\in[x_{k-1},x^{\bullet}]} f(x) \quad \text{და} \quad \omega_2 = \inf_{x\in[x^{\bullet},x_k]} f(x)$$

ცხადია $\omega_1 \geq m_k$ და $\omega_2 \geq m_k$, სადაც $m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

გვექნება $L(f,P^{\bullet}) - L(f,P) = \omega_1(x^{\bullet} - x_{k-1}) + \omega_2(x_k - x^{\bullet}) - m_k(x_k - x_{k-1}) \geq$
$m_k(x^{\bullet} - x_{k-1}) + m_k(x_k - x^{\bullet}) - m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x^{\bullet} - x_{k-1} + x_k - x^{\bullet} - x_k + x_{k-1}) \geq 0$.

თუ P^* დანაწილება შეიცავს m წერტილით მეტს ვიდრე P დანაწილება, მაშინ გავიმეოროთ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა m-ჯერ, მივიღებთ (1) უტოლობას. ანალოგიურად დავამტკიცებთ (2) უტოლობას.

თეორემა 13. $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

დამტკიცება. ვთქვათ P^* არის $[a,b]$ სეგმენტის ორი P_1 და P_2 დანაწილების საერთო გაგრძელება $P^* = P_1 \cup P_2$, მაშინ თეორემა 8-ის ძალით

$$L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f).$$

ამრიგად $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P_1 და P_2 დანაწილებისათვის

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f) \tag{3}$$

(დარბუს არცერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება დარბუს არცერთ ზედა ჯამს.)

ჩავთვალოთ P_2 ფიქსირებულ დანაწილებად და ავიღოთ ზუსტი ქვედა საზღვარი (3) უტოლობაში ყველა P_1 დანაწილებაის მიმართ, მაშინ (3) –ის ძალით გვექნება

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup L(P_1, f) \leq U(P_2, f) \tag{4}$$

თუ ახლა (5) უტოლობაში ავიღებთ ქვედა საზღვარს ყველა P_2 დანაწილების მიმართ მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

თუ გავიხილავთ რიმანის ინტეგრალურ ჯამს (P,ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის $(\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1,\ldots,n)$
ვინაიდან $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ გვექნება

$$L(P, f) \leq \sigma(f, P, \xi) \leq U(P, f).$$

თუ $[a,b]$ სეგმენტის P დანაწილებას დავაფიქსირებთ, ხოლო ყოველი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის შიგნით ξ_k წერტილებს ვცვლით ისე, რომ $f(\xi_k)$ რაგინდ ახლოს იყოს M_k-სთან, მაშინ $\sigma(f,P,\xi)$ ინტეგრალური ჯამი რაგინ ახლოს იქნება $U(P,f)$ ჯამთან. ნალოგიურად $\sigma(f,P,\xi)$ ჯამი რაგინდ შეგვიძლია დაუახლოვოთ $L(P,f)$ ჯამს. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 14.

$$U(P, f) = \sup_{\xi} \sigma(f, P, \xi) \tag{5}$$

$$L(P, f) = \inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi). \tag{6}$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ (5) ტოლობა. ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება (6). ვთქვათ P $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე ფიქსირებული დანაწილებაა, ხოლო $\varepsilon > 0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. (5) ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია მოვძებნოთ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ წერტილები $(k = 1,\ldots,n)$ ისეთი რომ

$$U(P,f) < \sigma(f,P,\xi) + \varepsilon$$

M_k რიცხვების განმარტების ძალით შეგვიძლია მოვძებნოთ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ისეთი, რომ $M_k < f(\xi_k) + \frac{\varepsilon}{b-a}$, $k = 1,\dots,n$. მაშინ გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \cdot |\Delta x_k| < \sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k) + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) |\Delta x_k| + \varepsilon,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 15. (რიმანი) $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქცია ინტეგრებადობისათვის რიმანის აზრით, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი $\lambda(P) < \delta$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon. \qquad (7)$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ არსებობს ინტეგრალი

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

მაშინ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი რომ $[a,b]$ სეგმენტის მონიშნული წერტილებით (P,ξ) დანაწილებისათვის, რომლიის პარამეტრი $\lambda(P) < \delta$ გვაქვს

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(f,P,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (8)$$

სადაც $\sigma(f,P,\xi)$ არის მოცემული დანაწილების შესაბამისი ინტეგრალური ჯამი. (8) უტოლობის გამო გვექნება (გავითვალისწინოთ აგრეთვე (5) და (6) ტოლობები)

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le L(f,P) \le U(f,P) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$U(P,f) - L(P,f) \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon,$$

როცა $\lambda(P) < \delta$. აუცილებლობა დამტკიცებულია. ახლა ვაჩვენოთ პირობის საკმარისობის სამართლიანობა. ვთქვათ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის P დანაწილებისათვის რომლის პარამეტრი $\lambda(P) < \delta$, სამართლიანია (7) უტოლობა. ზედა და ქვედა ინტეგრალის განმარტების ძალით გვექნება

$$0 \le \bar{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს რომ $\varepsilon > 0$ ნებისმიერად გვქონდა აღებული შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\bar{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = I.$$

ვინაიდან $L(P,f) \le \sigma(f,P,\xi) \le U(P,f)$ და $L(P,f) \le I \le U(P,f)$, ამიტომ, როცა $\lambda(P) < \delta$ გვაქვს

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|\le U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა ასეც შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

თეორემა 16. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქციის ინტეგრებადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\left[U(f,P)-L(f,P)\right]=0. \qquad (9)$$

შევნიშნოთ, რომ $M_k-m_k=\omega(f,[x_{k-1},x_k])=\omega(f,\Delta x_k)$; $k=1,\dots,n$ ამიტომ (9) ტოლობა ასეც შეიძლება გადავწეროთ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta x_k)\,|\,\Delta x_k\,|=0$$

შედეგი 17. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული f ფუნქციის ინტეგრებადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი ზედა და ქვედა ინტეგრალები ტოლი იყოს ე.ი.

$$\bar{I}=\bar{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{I}$$

მართლაც რიმანის თეორემის საკმარისობის დამტკიცებისას ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქცია ინტეგრებადია, მაშინ $\bar{I}=\underline{I}=\int_a^b f(x)dx$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $\bar{I}=\underline{I}=I$, მაშინ f ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მართლაც ავიღოთ ნებისმიერად $\varepsilon>0$ რიცხვი, მაშინ არსებობს P_1 და P_2 დანაწილებები ისეთი, რომ

$$U(P_2,f)-I<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (10)$$

$$I-L(P_1,f)<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (11)$$

ვთქვათ $P=P_1\cup P_2$, მაშინ (10) (11) უტოლობების გათალისწინებით და დარბუს ჯამების თვისების გამოყენებით გვაქვს

$$U(P,f)\le U(P_2,f)<I+\frac{\varepsilon}{2}<L(P_1,f)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\le L(P,f)+\varepsilon.$$

ე.ი. მოიძებნება P დანაწილება ისეთი, რომ

$$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$$

ეს კი რიმანის თეორემის თანახმად ნიშნავს f ფუნქციის ინტეგრებადობას $[a,b]$ სეგმენტზე.

შედეგი 18. თუ f ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ის ინტეგრებადია მის ნებისმიერ ქვესეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $[c,d]\subset[a,b]$. მოვახდინოთ $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფა წერტილთა ისეთი P სისტემით, რომელთა შორის შედის c და d წერტილები.

ავღნიშნოთ P_1-ით P სიმრავლის ის წერტილები, რომლებიც ახდენენ $[c,d]$ სეგმენტის დანაწილებას. მაშინ ცხადია, რომ

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) \le U(P, f) - L(P, f) \to 0$$

როცა $\lambda(P) \to 0$. შედეგი დამტკიცებულია.

ინტეგრებად ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი.

თეორემა 19. სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტზე რიმანის აზრით ინტეგრებადია. ანუ მოკლედ

$$f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R([a,b]).$$

დამტკიცება. რადგან f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ის ამ სეგმენტზე თანაბრად უწყვეტია. მაშასადამე $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $\exists \delta > 0$ რიცხვი, ისეთი რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x, y რიცხვებისათვის, როცა $|x - y| < \delta$ გვაქვს

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილება რომლის პარამეტრიც აკმაყოფილებს პირობას $\lambda(P) < \delta$, მაშინ

$$M_k - m_k = \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \omega(f, \Delta x_k) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

(M_k და m_k წარმოადგენენ შესაბამისად f ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე.)

გვექნება

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k) \cdot |\Delta x_k| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |\Delta x_k| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

მაშასადამე $f \in R([a,b])$.

თეორემა 20. სეგმენტზე განსაზღვრული მონოტონური ფუნქცია ინტეგრებადია.

დამტკიცება. გარკვეულობისათვის დაუშვათ, რომ f ფუნქცია არაკლებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს $[a,b]$ სეგმენტის P დანაწილება, გვაქვს $M_k = f(x_k)$ და $m_k = f(x_{k-1})$. დაუშვათ $\varepsilon > 0$ რაიმე რიცხვია და $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

როცა $\lambda(P) < \delta$, გვექნება

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - f(x_{k-1}) \right] \cdot |\Delta x_k| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - f(x_{k-1}) \right] = \varepsilon,$$

მაშასადამე f ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ სეგმენტზე განსაზღვრულ მონოტონურ ფუნქციას შესაძლოა გააჩნდეს უსასრულო რაოდენობა წყვეტის წერტილები (უფრო ზუსტად სეგმენტზე განსაზღვრულ მონოტონურ ფუნქციას გააჩნია არაუმეტეს თვლადი რაოდენობა წყვეტის წერტილები). მაგალითისათვის განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე მონოტონური ფუნქცია განსაზღვრული ასეთნაირად: $f(1) = 1$ და ყოველ $[1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-(n+1)})$ სიმრავლეზე სადაც $n \in N$ ფუნქციის მნიშვნელობა იყოს

$1-2^{-n}$ რიცხვის. ცხადია ამ ფუნქციას $1-2^{-n}$ სახის წერტილებში გააჩნია წყვეტა და მათი რაოდენობა თვლადია.

ბუნებრივია ისმის კითხვა. როგორი უნდა იყოს $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე, რომ ფუნქცია ინტეგრებადი იყოს რიმანის აზრით. ამ კითხვაზე ამომწურავ პასუხს იძლევა ლებეგის თეორემა.

განმარტება 21. ვიტყვით, რომ $E \subset R$ სიმრავლე ნული ზომისაა თუ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს E სიმრავლის დამფარავი სასრული ან თვლადი ინტერვალების სისტემა, რომელთა სიგრძეების ჯამი ნაკლებია ε-ზე. ცხადია, რომ თუ E სიმრავლე სასრული ან თვლადია მაშინ ის ნული ზომისაა. მართლაც ვთქვათ E სიმრავლის წერტილებია $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ თითოეული წერტილისათვის ავაგოთ ამ წერტილის სიმეტრიული მიდამო, რომლის სიგრძე ნაკლებია $\varepsilon \cdot 2^{-n}$, ასეთი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამია

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon .$$

შევნიშნოთ, რომ არსებობენ არათვლადი სიმრავლეები, რომელთა ზომა ნულია. საზოგადოდ ნული ზომის სიმრავლე საკმაოდ რთული შეიძლება იყოს.

თეორემა 22. (ლებეგი) იმისათვის რომ სეგმენტზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ფუნქცია იყოს რიმანის აზრით ინტეგრებადი აუცილებელია და საკმარისი რომ მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლე იყოს ნული ზომის.

მაგალითი 23. განვიხილოთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი რიმანის ფუნქცია [0,1] სეგმენტზე:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}; & x \in [0,1] \cap Q; x = \frac{m}{n}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus Q. \end{cases}$$

(ვგულისხმობთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია). რიმანის ფუნქცია უწყვეტია ყოველ ირაციონალურ წერტილში, ხოლო რაციონალურ წერტილებში წყვეტილია. მაშასადამე რიმანის ფუნქცია [0,1] სეგმენტზე ინტეგრებადია. შევნიშნოთ, რომ ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილები უსასრულოდ ბევრი მოხვდება [0,1] სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილების ნებისმიერ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთში.

მაგალითი 24. ვთქვათ $f : [a,b] \to [c,d]$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. ხოლო $g : [c,d] \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა. კომპოზიცია $g \circ f : [a,b] \to R$ უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტის ყველა იმ წერტილში სადაც f ფუნქცია უწყვეტია, აქედან გამომდინარე ლებეგის კრიტერიუმის თანახმად $g \circ f$ ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე.

მაგალითი 25. განვიხილოთ ფუნქცია $g(x) = |\operatorname{sgn}|(x)$, ეს ფუნქცია ტოლია 1-ის როცა $x \neq 0$ და ტოლია 0-ის როცა $x = 0$. ვთქვათ f ფუნქცია ემთხვევა რიმანის ფუნქციას [1,2] სეგმენტზე (მაგალითი 18). ფუნქცია $g \circ f$ ამ სეგმენტზე ემთხვევა დირიხლეს ფუნქციას, რომელიც ინტეგრებადი არ არის. მაშასადამე შესაძლებელია f, g ფუნქციები რიმანის აზრით ინტეგრებადი იყვნენ, მაგრამ $g \circ f$ კომპოზიცია ინტეგრებადი არ იყოს.

ინტეგრალის წრფივობა, ადიციურობა და მონოტონურობა. ინტეგრალი, როგორც ინტეგრების მონაკვეთის ადიციური ფუნქცია. ინტეგრალის მონოტონურობა და საშუალო მნიშვნელობის თეორემები.

ინტეგრალის წრფივობა, ადიციურობა და მონოტონურობა.

თეორემა 1. ვთქვათ $f \in R([a,b])$ და $g \in R([a,b])$, მაშინ მათი წრფივი კომბინაციაც $\alpha f + \beta g$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და სამართლიანია ტოლობა

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \qquad (1)$$

დამტკიცება. როგორიც არ უნდა იყოს (P,ξ) მონიშნული წერტილებით დანაწილება, ცხადია მართებულია ტოლობა

$$\sigma(\alpha f + \beta g, P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k =$$
$$= \alpha\sigma(f,P,\xi) + \beta\sigma(g,P,\xi)$$

მიღებულ ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda(P) \to 0$ დავასკვნით, რომ $\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ და სამართლიანია (1) ტოლობა.

თეორემა 2. ვთქვათ $f \in R([a,b])$ და $g \in R([a,b])$, მაშინ: ა) $|f| \in R([a,b])$ ბ) $fg \in R([a,b])$.

დამტკიცება. ვთქვათ P არის $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება, ხოლო $\Delta x_k, k = 1,...,n$ დანაწილების მონაკვეთები. ცხადია სამართლიანია უტოლობა

$$\omega(|f|, \Delta x_k) \le \omega(f, \Delta x_k)$$

ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(|f|, \Delta x_k)|\Delta x_k| \le \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k|$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან თუ გავითვალისწინებთ რიმანის თეორემას დავასკვნით, რომ მართებულია წინადადება $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$. თეორემის ა) ნაწილი დამტკიცებულია. დავამტკიცოთ ბ) პუნქტის სამართლიანობა. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $f \in R([a,b]) \Rightarrow f^2 \in R([a,b])$. ვინაიდან $f \in R([a,b])$, ამიტომ f შემოსაზღვრული ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე და არსებობს $C > 0$ მუდმივა, ისეთი, რომ $|f(x)| \le C$ $[a,b]$ სეგმენტზე. გვექნება $|f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)| \cdot |f(x) + f(y)| \le 2C|f(x) - f(y)|$, ამიტომ

$$\omega(f^2, \Delta x_k) \le 2C\omega(f, \Delta x_k) \text{ და ამიტომ}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f^2, \Delta x_k)|\Delta x_k| \le 2C\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta x_k)|\Delta x_k|$$

საიდანაც დავასკვნით $f \in R([a,b]) \Rightarrow f^2 \in R([a,b])$.
თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\right]$$

დავასკვნით, რომ
$(f \in R([a,b]) \wedge g \in R([a,b])) \Rightarrow fg \in R([a,b])$.

ინტეგრალი, როგორც ინტეგრების მონაკვეთის ადიციური ფუნქცია.

თეორემა 3. ვთქვათ $f \in R([a,c])$ და $a < b < c$, მაშინ

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \qquad (2)$$

დამტკიცება. ის რომ f ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ და $[b,c]$ სეგმენტებზე, გამომდინარეობს რიმანის თეორემის მეორე შედეგიდან.
განვიხილოთ $[a,c]$ სეგმენტის ის P დანაწილებები, რომლებიც შეიცავენ b წერტილს. ყოველი ასეთი (P,ξ) დანაწილება წარმოშობს $[a,b]$ და $[b,c]$ სეგმენტების (P',ξ') და (P'',ξ'') დანაწილებებს შესაბამისად. ამასთანავე $P = P' \cup P''$ და $\xi = \xi' \cup \xi''$. ვექნება

$$\sigma(f,P,\xi) = \sigma(f,P',\xi') + \sigma(f,P'',\xi'') \qquad (3)$$

ვინაიდან $\lambda(P') \le \lambda(P)$ და $\lambda(P'') \le \lambda(P)$, ამიტომ (3) ტოლობაის ორივე მხარეში ზღვარზე გადასვლით როცა $\lambda(P) \to 0$ მივიღებთ (2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევთანხმდეთ, რომ თუ $a > b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

ამ გარემოების გამო ბუნებრივია მივიღოთ $\int_a^a f(x)dx = 0$.

ამ შეთანხმების და თეორემა 3-ის ძალით გვაქვს ინტეგრალის შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება:
ვთქვათ $a,b,c \in R$ და f ფუნქცია ინტეგრებადია a,b,c ბოლოების მქონე უდიდეს სეგმენტზე, მაშინ სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0.$$

დამტკიცება: ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე ვიგულისხმოთ $a = \min\{a,b,c\}$ და $c = \max\{a,b,c\}$ და $a < b < c$. თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 3 ზემოთ მოყვანილ შეთანხმებას მივიღებთ საჭირო ტოლობას.

ინტეგრალის მონოტონურობა და საშუალო მნიშვნელობის თეორემები

თეორემა 4. ვთქვათ $f \in R([a,b])$ მაშინ $|f| \in R([a,b])$ და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (4)$$

თუ ამასთანავე $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \le M$, მაშინ

$$\int_a^b |f(x)|dx \le M(b-a)$$

დამტკიცება. $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$ წინადადების სამართლიანობა უკვე დამტკიცებული გვაქვს. ინტეგრალური ჯამებისათვის სამართლიანია შემდეგი მარტივი შეფასება

$$\sigma(f,P,\xi) = \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\Delta x_k| \le M(b-a)$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda(P) \to 0$ მივიღებთ

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le M(b-a)$$

თეორემა 5. ვთქვათ $f, g \in R([a,b])$ და $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{5}$$

დამტკიცება. $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი (P,ξ) დანაწილებისათვის

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta x_k| \le \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|\Delta x_k| = \sigma(g,P,\xi)$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda(P) \to 0$ მივიღებთ (5) უტოლობას.

ამ თვისებას ინტეგრალის მონოტონურობის თვისება ჰქვია.

შედეგი 6. ვთქვათ $f \in R([a,b])$ და $\forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M$, მაშინ

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \tag{6}$$

და სახელდობრ, თუ $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \ge 0$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

დამტკიცება. თუ მოვახდენთ $m \le f(x) \le M$ უტოლობის მხარეების ინტეგრებას და გამოვიყენებთ თეორემა 5-ს მივიღებთ (6) უტოლობას.

შედეგი 7. ვთქვათ $f \in R([a,b])$ და $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, მაშინ არსებობს $\eta \in [m,M]$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = \eta(b-a) \tag{7}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\eta = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. (6) უტოლობიდან გამოდის რომ $\eta \in [m,M]$.

შედეგი 8. ვთქვათ $f \in C([a,b])$, მაშინ არსებობს $\xi \in [a,b]$ ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{8}$$

დამტკიცება. ვთქვათ η განმარტებულია (7) ტოლობით. კოშის თეორემის თანახმად უწყვეტი ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ ვინაიდან $m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \le \eta \le \max_{x\in[a,b]} f(x) = M$ ამიტომ არსებობს $\xi \in [a,b]$ წერტილი ისეთი, რომ $f(\xi) = \eta$ ასე რომ (8) ტოლობა მიიღება (7) ტოლობიდან.

თეორემა 9. (საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემა) ვთქვათ $f, g \in R([a,b])$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. თუ g ფუნქცია არაუარყოფითია (არადადებითია) $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta\int_a^b g(x)dx \tag{9}$$

სადაც $\eta \in [m,M]$. თუ დამატებით $f \in C([a,b])$, მაშინ მოიძებნება წერტილი $\xi \in [a,b]$ ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \qquad (10)$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\forall x \in [a,b] \quad g(x) \geq 0$.

რადგანც $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, როცა $\forall x \in [a,b] \quad g(x) \geq 0$ გვექნება

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

მოვახდინოთ ამ უკანასკნელი უტოლობის ინტეგრება

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \qquad (11)$$

თუ $\int_a^b g(x)dx = 0$, მაშინ (11) გვიჩვენებს, რომ (9) ტოლობა შესრულებულია. თუ $\int_a^b g(x)dx > 0$, მაშინ დაუშვათ

$$\eta = \left(\int_a^b g(x)dx\right)^{-1} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

(11) უტოლობიდან მივღებთ $m \leq \eta \leq M$. მაგრამ ეს ტოლფასია (9) ტოლობის. (10) ტოლობა გამომდინარეობს (9) ტოლობიდან და უწყვეტი ფუნციის გლობალური თვისებებიდან. ვინაიდან $f \in C([a,b])$ ამიტომ f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[m,M]$ სეგმენტი და რადგანაც $\eta \in [m,M]$, ამიტომ არსებობს $\xi \in [a,b]$ წერტილი, ისეთი რომ $f(\xi) = \eta$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. (საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემა) ვთქვათ $f, g \in R([a,b])$ და g მონოტონური ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ არსებობს $\xi \in [a,b]$ რიცხვი, ისეთი რომ მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

ინტეგრალი და პირველადი. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში. ტეილორის ფორმულა. ცვლადის შეცვლის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში.

ვთქვათ f რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციაა. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტზე ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ F კორექტულადაა განსაზღვრული . მართლაც ვინაიდან f რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია ამიტომ ის (უფრო სწორედ მისი შეზღუდვა) ინტეგრებადი იქნება $[a,x] \subset [a,b]$ ქვესეგმენტზე. F ფუნქციას უწოდებენ ინტეგრალს ცვლადი ზედა საზღვრით.

თეორემა 1. ვთქვათ $f \in R[a,b]$, მაშინ $F \in C[a,b]$.

დამტკიცება. ვინაიდან f ინტეგრებადია ამიტომ ის შემოსაზღვრულია, ე.ი. $|f(x)|<C$ $[a,b]$ სეგმენტზე რაიმე C მუდმივისათვის. თუ გამოვიყენებთ ინტეგრალის ადიციურობას გვექნება

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right|=\left|\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right|=\left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right|\le$$

$$\left|\int_x^{x+h}|f(t)|dt\right|\le C|h|, \qquad (2)$$

როცა $x, x+h\in[a,b]$.

(2) უტოლობიდან დავასკვნით, რომ F ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილში უწვეტია. მაშასადამე $F\in C[a,b]$. თეორემა დამტკიცებულია.

შევისწავლოთ (1) ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკითხები.

თეორემა 2. ვთქვათ ვთქვათ $f\in R[a,b]$. დაუშვათ f ფუნქცია უწყვეტია $x\in[a,b]$ წერტილში. მაშინ ფუნქცია განსაზღვრული (1) ტოლობით დიფერენცირებადია x წერტილში და სამართლიანია ტოლობა

$$F'(x)=f(x).$$

დამტკიცება. დაუშვათ $x, x+h\in[a,b]$. შევაფასოთ სხვაობა $F(x+h)-F(x)$. ვინაიდან f x წერტილში უწყვეტია ამიტომ გვექნება $f(t)=f(x)+\Delta(t)$, სადაც $\Delta(t)\to 0$, როცა $t\to x; t\in[a,b]$. ფუნქცია $\Delta(t)=f(t)-f(x)$ $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია, როგორც t-ს ფუნქცია (x-ფიქსირებული წერტილია). ავღნიშნოთ $I(h)$-ით მონაკვეთი ბოლოებით x და $x+h$ წერტილში. ვთქვათ $M(h)=\sup\limits_{t\in I(h)}|\Delta(h)|$. ვინაიდან f ფუნქცია x წერტილში უწყვეტია, ამიტომ $M(h)\to 0$, როცა $h\to 0$.

გვექნება

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt=\int_x^{x+h}(f(x)+\Delta(t))dt=\int_x^{x+h} f(x)dt+\int_x^{x+h}\Delta(t)dt=f(x)h+\alpha(h)h,$$

სადაც $\alpha(h)=\dfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\Delta(t)dt$.

ვინაიდან $\left|\int_x^{x+h}\Delta(t)dt\right|\le\left|\int_x^{x+h}|\Delta(t)|dt\right|\le\left|\int_x^{x+h}M(h)dt\right|=M(h)|h|,$

ამიტომ გვექნება $|\alpha(h)|\le M(h)$ და ამიტომ $\alpha(h)\to 0$, როცა $h\to 0$.

მაშასადამე ჩვენს მიერ ნაჩვენები იქნა, რომ თუ f ფუნქცია უწყვეტია x წერტილში მაშინ

$$F(x+h)-F(x)=f(x)h+\alpha(h)h, \text{ სადაც } \alpha(h)\to 0, \text{ როცა } h\to 0.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან დავასკვნით, რომ F დიფერენცირებადია x წერტილში და $F'(x)=f(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2-დან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი შედეგი

შედეგი 3. ვთქვათ ფუნქცია $f:[a,b]\to R$ უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ მას გააჩნია პირველადი, ამასთან მის ნებისმიერ პირველადს გააჩნია სახე

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+c \qquad (3)$$

სადაც c რაღაც მუდმივაა.

დამტკიცება. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$ და გამოვიყენოთ თეორემა 2.

შედეგი 4. ვთქვათ $f:[a,b] \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

სადაც $F:[a,b] \to R$ f ფუნქციის რაიმე პირველადია $[a,b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. როგორც უკვე ვაჩვენეთ f ფუნქციის ნებისმიერ პირველადს აქვს (3)სახე. (3) ტოლობიდან გვექნება $F(a) = \int_a^a f(t)dt + c = c$. ამიტომ გვექნება

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

ამ უკანასკნელ ტოლობაში თუ ავიღებთ $x = b$ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

(4) ტოლობას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულას უწოდებენ. (4) ტოლობას შემდგომში ასე ჩავწერთ

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b .$$

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ფორმულაა, იგი აკავშირებს ეღთმანეთთან ინტეგრალურ და დიფერენციალურ აღრიცხვას. ამ ფორმულას აქვს მნიშვნელოვანი განზოგადოებანი. სახელდობრ სტოკსის ფორმულის სახელწოდებით, რომელსაც მრავალგანზომილებიან ანალიზში იქნება შესწავლილი.

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში. ტეილორის ფორმულა.

თეორემა 5. ვთვათ ფუნქციები $u(x), v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია შუალედზე, რომლის ბოლოებია a და b. მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx$$

ამ ფორმულას შემოკლებით ასე გამოსახავენ

$$\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

და უწოდებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას განსაზღვრული ინტეგრალისათვის.

დამტკიცება. ფუნქციათა ნამრავლის გაწარმოების წესის მიხედვით გვაქვს

$$(u\cdot v)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

ამ ტოლობაში მონაწილე ფუნქციები ინტეგრებადი ფუნქციებია შუალედზე ბოლოებით a და b. თუ ვისარგებლებთ ინტეგრალის წრფივობის თვისებით და ნიუტონ-ლაიბნიცის თვისებით მივიღებთ

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx + \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით დავამტკიცებთ ტეილორის ფორმულას ინტეგრალური ნაშთითი წევრით.

თეორემა 6. ვთქვათ f ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი წარმოებულები n-რიგამდე ჩათვლით სეგმენტზე ბოლოებით a და x. მაშინ სამართიანია ტოლობა

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_n(a;x)$$

სადაც $$r_n(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt .$$

დამტკიცება. $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt =$

$$-f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''(t)((x-t)^2)'dt =$$

$$f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2dt =$$

$$f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f^{(3)}(t)((x-t)^3)'dt =$$

.....

$$f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_n(a;x),$$

სადაც $r_n(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt .$

თეორემა დამტკიცებულია.

ცვლადის შეცვლის ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში.

ინტეგრალური აღრიცხვის ერთ-ერთ ძირითად ფორმულას წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალში ცვლადის შეცვლის ფორმულას. ეს ფორმულა ინტეგრალის თერიაში იგივე მნიშვნელობისაა, როგორც დიფერენციალურ აღრიცხვაში კომპოზიციის დიფერენცირების ფორმულა. რომელთანაც ის გარკვეულ პირობებში შეიძლება დაკავშირებული იყოს ნიუტონ-ლაიბმიცის ფორმულასთან.

თეორემა 7. თუ $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ უწყვეტად დიფერენცირებადი სურექციული ასახვაა და $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b,$ მაშინ $[a,b]$ სეგმენტზე ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის ფუნქცია $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ უწყვეტია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

დამტკიცება. ვთქვათ F არის $[a,b]$ მონაკვეთზე f ფუნქციის პირველადი, მაშინ ფუნქციათა კომპოზიციის გაწარმოების წესის თანახმად $F(\varphi(t))$ არის $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ ფუნქციის პირველადი $[\alpha,\beta]$ მონაკვეთზე, ვინაიდან $\forall t\in[\alpha,\beta]$

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

ამიტომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

არასაკუთრივი ინტეგრალი. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი. არასაკუთრივი ინტეგრალის აბსოლიტური კრებადობა. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის შედარების ნიშანი. რიცხვითი მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი.

არასაკუთრივი ინტეგრალი

განსაზღვრება 1. ვთქვათ ფუნქცია $f:[a,+\infty)\to R$ რიმანის აზრით ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset[a,+\infty)$ სეგმენტზე. სიდიდეს

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ თუ ეს ზღვარი არსებობს უწოდებენ რიმანის არასაკუთრივ ინტეგრალს f ფუნქციიდან $[a,+\infty)$ სიმრავლეზე და მას არნიშნავენ სიმბოლოთი $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

შემდგომში ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

კრებადია თუ ზემოთ მითითებული ზღვარი არსებობს, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ კრებადობის საკითხი.

გვაქვს : როცა $\alpha\neq 1$ $\int\limits_{1}^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}x^{\alpha}\Big|_{1}^{b}$

როცა $\alpha = 1$ $\int\limits_{1}^{b}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{1}^{b}$.

ამიტომ ზღვარი $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{\alpha-1}$ არსებობს, მხოლოდ მაშინ როცა $\alpha>1$.

მაშასადამე $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{\alpha-1}$ თუ $\alpha>1$ და α პარამეტრის სხვა მნიშვნელობისათვის არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

განსაზღვრება 3. ვთქვათ ფუნქცია $f:[a,B)\to R$ რიმანის აზრით ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset[a,B)$ სეგმენტზე. სიდიდეს

$\lim\limits_{b\to B}\int\limits_a^b f(x)dx$ თუ ეს ზღვარი არსებობს უწოდებენ რიმანის არასაკუთრივ ინტეგრალს f ფუნქციიდან $[a,B)$ სიმრავლეზე და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\int\limits_a^B f(x)dx$.

ამ განმარტების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ f ფუნქცია B წერტილის ნებისმიერ რაგინდ მცირე მიდამოში შესაძლებელია აღმოჩნდეს შემოუსაზღვრელი.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ ფუნქცია $f:(A,b]\to R$ რიმანის აზრით ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset(A,b]$ სეგმენტზე. სიდიდეს

$\lim\limits_{a\to A+}\int\limits_a^b f(x)dx$ თუ ეს ზღვარი არსებობს უწოდებენ რიმანის არასაკუთრივ ინტეგრალს f ფუნქციიდან $(A,b]$ სიმრავლეზე და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\int\limits_A^b f(x)dx$.

ანალოგიურად შეგვიძლია განვმარტოთ

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

მაგალითი 5. გამოვიკვლიოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის $\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ კრებადობის საკითხი.

გვაქვს : როცა $\alpha\neq1$ $\int\limits_a^1\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha}x^\alpha\Big|_a^1$,

როცა $\alpha=1$ $\int\limits_1^b\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^b$.

ამიტომ ზღვარი $\lim\limits_{a\to0+}\int\limits_a^1\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha}$ არსებობს, მხოლოდ მაშინ როცა $\alpha<1$.

მაშასადამე $\int\limits_0^{+1}\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha}$ თუ $\alpha<1$ და α პარამეტრის სხვა მნიშვნელობისათვის არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

როგორც ვხედავთ არასაკუთრივი ინტეგრალების $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$, $\int\limits_a^B f(x)dx$ კრებადობის საკითხი ერთიდაიგივე წესითაა განმარტებული ამიტომ მათ შევისწავლით პარალელურად ვისარგებლებთ, რა შემდეგი განმარტებით

განსაზღვრება 6. ვთქვათ ფუნქცია $f:[a,\omega)\to R$ სადაც $\omega=+\infty$ ან რაიმე სასრული რიცხვია რიმანის აზრით ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset[a,\omega)$ სეგმენტზე. სიდიდეს

$\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$ თუ ეს ზღვარი არსებობს უწოდებენ რიმანის არასაკუთრივ ინტეგრალს f ფუნქციიდან $[a,\omega)$ სიმრავლეზე და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\int_a^\omega f(x)dx$.

ანალოგიურად განმარტავთ $\int_\omega^b f(x)dx$, სადაც $\omega=-\infty$ ან ის რაიმე სასრული რიცხვია.

არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი.
თეორემა 7. ვთქვათ ფუნქცია $f:[a,\omega)\to R$ სადაც რიმანის აზრით ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset[a,\omega)$ სეგმენტზე. $\int_a^\omega f(x)dx$ კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შესაძლებელია მოიძებნოს $B\in[a,\omega)$ რიცხვი ისეთი, რომ $\left|\int_n^m f(x)dx\right|<\varepsilon$, რიოცა $n,m>B$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია $F(t)=\int_a^t f(x)dx$. არასაკუთრივი ინტეგრალის $\int_a^\omega f(x)dx$ კრებადობა ტოლფასია შემდეგი $\lim_{t\to\omega}F(t)$ ზღვრის არსებობის. თუ გამოვიყენებთ ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმს და გავითვალისწინებთ, რომ $F(m)-F(n)=\int_n^m f(x)dx$ მივიღებთ დასამტკიცებულ დებულებას.

არასაკუთრივი ინტეგრალის აბსოლიტური კრებადობა

განმარტება 8. ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^\omega f(x)dx$ კრებადია აბსოლიტურად თუ კრებადია არასაკუტრივი ინტეგრალი $\int_a^\omega|f(x)|dx$.

შევნიშნოთ, რომ $\left|\int_n^m f(x)dx\right|\le\left|\int_n^m|f(x)|dx\right|$ და თუ გამოვიყენებთ თეორემა 7-ს დავასკვნით, რომ თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი აბსოლიტურად კრებადია მაშინ ის კრებადია.

თეორემა 9. ვთქვათ ფუნქცია $f:[a,\omega)\to R$ სადაც რიმანის აზრით ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset[a,\omega)$ სეგმენტზე და $\forall x\in[a,\omega)\quad f(x)\ge 0$.

არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^{\omega} f(x)dx$ კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

ფუნქცია $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ შემოსაზვრულია $[a,\omega)$-ზე.

დამტკიცება. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია F $[a,\omega)$-ზე არაკლებადია, ამიტომ მას გააჩნია ზღვარი როცა $b\to\omega$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ის შემოსაზღვრულია.

შედეგი 10. (რიცხვითი მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი) თუ ფუნქცია

$f:[1,+\infty)\to R$ არაუარყოფითი, არაზრდადი ფუნქციაა., მაშინ რიცხვითი მწკრივი

$$f(1)+f(2)+...+f(n)+...$$

და არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ერთდროულად კრებადია ან განშლადი.

დამტკიცება. $\forall n\in N$ გვაქვს

$$f(n+1)\le\int_n^{n+1} f(x)dx\le f(n)$$

ამ უტოლობების შეკრების შედეგად მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{k} f(n+1)\le\int_1^{k+1} f(x)dx\le\sum_{n=1}^{k} f(n) \qquad (1)$$

ანუ $S_{k+1}-f(1)\le F(k+1)\le S_k$, სადაც $S_k=f(1)+f(2)+....+f(k)$ და $F(t)=\int_1^t f(x)dx$.

თუ გავითვალისწინებთ (1) უტოლობას და იმ ფაქტს, რომ S_k მიმდევრობა და $F(t)$ ფუნქცია არაკლებადია მივღებთ დასამტკიცებელ დებულებას.

მაგალითი 11. თუ გავითვალისწინებთ მაგალით 2-ს დავასკვნით, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ კრებადია მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha>1$.

არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის შედარების ნიშანი

თეორემა 12. ვთქვათ მოცემულია ფუნქციები $f,g:[a,\omega)\to R$, რომლებიც ნებისმიერ $[a,b]\subset[a,\omega)$ სეგმენტზე ინტეგრებადი არიან. თუ $[a,\omega)$ სიმრავლეზე $0\le f(x)\le g(x)$

მაშინ $\int_a^{\omega} g(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს ინტეგრალის

$\int_a^{\omega} f(x)dx$ კრებადობა და სამართლიანია უტოლობა

$$\int_a^{\omega} f(x)dx\le\int_a^{\omega} g(x)dx,$$

ხოლო $\int_a^{\omega} f(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^{\omega} g(x)dx$ ინტეგრალის განშლადობა.

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით გვექნება

$$F_1(t) = \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx = F_2(t), \qquad (2)$$

ორივე $F_1(t)$ და $F_2(t)$ ფუნქციები არაკლებადია $[a,\omega)$ სიმრავლეზე, ამიტომ დასამტკიცებელი დებულება პირდაპირ გამოდის (2) უტოლობიდან და თეორემა 9-დან.

მაგალითი 13. ინტეგრალი

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ აბსოლიტურად კრებადია ვინაიდან $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, როცა $x \ge 1$ და ამიტომ

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx\right| \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

მაგალითი 14. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ კრებადია, ვინაიდან $e^{-x^2} \le e^{-x}$ როცა $x \ge 1$ და

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

მაგალითი 15. $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ განშლადია ვინაიდან საკმაოდ დიდი x-ებისათვის

$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ და $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ განშლადია.

მაგალითი 16. ეილერის ინტეგრალი $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ კრებადია, ვინაიდან, როცა

$x \to 0+$

$|\ln \sin x| \approx |\ln x| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ და $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ კრებადია.

განსაზღვრება 17. თუ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია, მაგრამ არაა აბსოლიტურად კრებადი, მაშინ ამბობენ რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი პირობით კრებადია.

მაგალითი 18. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ პირობით კრებადია.

თუ ვისარგებლებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით ნებისმიერი $b > \pi/2$ რიცხვისათვის გვექნება

$$\int_{\pi/2}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\pi/2}^{b} + \int_{\pi/2}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx \quad . \qquad (3)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეში გადავალთ ზღვარზე $b \to +\infty$ გვექნება

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

ვინაიდან $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ კრებადია ამიტომ ინტეგრალიც $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ კრებადია.

ვაჩვენოთ, რომ ეს უკანასკნელი ინტეგრალი არ არის აბსოლიტურად კრებადი. მართლაც, ნებისმიერი $b > \pi/2$ რიცხვისათვის გვექნება

$$\int_{\pi/2}^{b}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \int_{\pi/2}^{b}\frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos 2x}{x}dx \qquad (4)$$

ინტეგრალი $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ კრებადია, ეს უკანასკნელი შეგვიძლია დავამტკიცოთ ანალოგიურად როგორც ვაჩვენეთ $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ კრებადობა (იხ. (3) ტოლობა).

(4) ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე როცა $b \to +\infty$ დავასკვნით, რომ $\int_{\pi/2}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = +\infty$ (ვინაიდან $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = +\infty$ და $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ კრებადია).

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

1. ა) $\int x dx$; ბ) $\int (x+2)dx$;

   გ) $\int (-2x+3)dx$; დ) $\int (\frac{1}{4}x-5)dx$.

2. ა) $\int (x^2-2x+1)dx$; ბ) $\int (2x^3-3x^2+x-2)dx$;

   გ) $\int (2x^5-x^3+2x^2-1)dx$; დ) $\int (-5x^3-x+\frac{1}{3})dx$.

3. ა) $\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x})dx$; ბ) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{x^2})dx$;

   გ) $\int x(\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}+\sqrt[4]{x}+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}+4)dx$; დ) $\int (2x\sqrt[3]{x}-x^2)(\sqrt{x}-1)dx$.

4. ა) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$; ბ) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$;

   გ) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$; დ) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

5. ა) $\int (2\sin x+3\cos x-5)dx$; ბ) $\int (\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+2)dx$;

   გ) $\int \tan^2 x dx$; დ) $\int \cot^2 x dx$.

6. ა) $\int (\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})dx$; ბ) $\int (\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{3}{2x^2-2})dx$;

   გ) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; დ) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$.

7. ა) $\int (e^x - 2^x)dx$; ბ) $\int (2^{2x} + e^{3x})dx$;

გ) $\int \frac{2^{x+2} - 3^{x-2}}{6^x} dx$; დ) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$.

2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი ცვლადის გარდაქმნის გზით:

1. ა) $\int (2x-1)^{20} dx$; ბ) $\int (\frac{1}{3}x - 5)^{10} dx$;

გ) $\int \sqrt{3x-2} dx$; დ) $\int \sqrt[3]{4x-2} dx$.

2. ა) $\int \frac{1}{\sqrt{2-9x^2}} dx$; ბ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$;

გ) $\int \frac{1}{2-3x^2} dx$; დ) $\int \frac{1}{\sqrt{3+4x^2}} dx$.

3. ა) $\int (\cos 2x - \sin(3x+2))dx$; ბ) $\int (\frac{4}{\cos^2(4x-3)} + \frac{1}{1-\cos x})dx$;

გ) $\int (\frac{1}{1+\sin x} - \frac{1}{2x^2+1})dx$; დ) $\int (\sin^4 x - \cos^4 x)dx$.

4. ა) $\int \tan x dx$; ბ) $\int \cot x dx$;

გ) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$; დ) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

5. ა) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; ბ) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$;

გ) $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 5}$; დ) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} dx$.

6. ა) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; ბ) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$;

გ) $\int \frac{dx}{\sin x}$; დ) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

7. ა) $\int x(1-x)^{50} dx$; ბ) $\int x\sqrt{3-4x} dx$;

გ) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$; დ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$.

3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების გზით:

1. ა) $\int x \sin x dx$; ბ) $\int x \sin\frac{x}{2} dx$;

გ) $\int x \cos 3x dx$; დ) $\int x \cos\frac{x}{4}$.

2. ა) $\int xe^x dx$; ბ) $\int xe^{2x} dx$;

გ) $\int xe^{-x}$; დ) $\int x \ln x dx$.

3. ა) $\int x^2 e^{-2x} dx$; ბ) $\int x^2 \cos x dx$;

გ) $\int x^2 \sin 2x dx$; დ) $\int x^2 \cos 4x dx$.

4. ა) $\int \arctan x dx$; ბ) $\int \arcsin x$;

გ) $\int \arctan \sqrt{x} dx$; დ) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

5. ა) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$; ბ) $\int \sqrt{9+x^2}\, dx$;

გ) $\int e^x \cos x dx$; დ) $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

4. მოახდინეთ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

ა) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$ ბ) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$ გ) $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$

გ) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx$ დ) $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} dx$

5. მოახდინეთ ირაციონალური ფუნქციებიდან ინტეგრება

ა) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$ ბ) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ გ) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$

დ) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ დ) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ე) $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ვ) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ ზ) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$ თ) $\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

ი) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ კ) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}$ ლ) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

6. იპოვეთ ინტეგრალი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიდან

ა) $\int \cos^5 x dx$ ბ) $\int \sin 5x \cos x dx$ გ) $\int \sin^6 x dx$ დ) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

ე) $\int tg^5 x dx$ ვ) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$ ზ) $\int \cos^2 3x \sin^3 2x dx$

თ) $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$ ი) $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$ კ) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x}$

5. გამოთვალეთ f ფუნქციის დარბუს ზედა და ქვედა ინტეგრალური ჯამები მითითებული შუალედის n ტოლ ნაწილად დანაწილების შემთხვევაში. განიხილეთ შემთხვევები: 1) $n=2$; 2) $n=3$; 3) $n=4$; 4) $n=5$.

1. ა) $f(x)=x$, $x\in[1;2]$; ბ) $f(x)=2x+1$, $x\in[0;5]$;

გ) $f(x)=3x-2$, $x\in[1;4]$; დ) $f(x)=-x+4$, $x\in[2;3]$.

2. ა) $f(x)=x^2$, $x\in[1;2]$; ბ) $f(x)=2x^2-1$, $x\in[-3;0]$;

გ) $f(x)=x^2-2x$, $x\in[2;3]$; დ) $f(x)=-x^2-x$, $x\in[0;2]$.

6. ჩაწერეთ f ფუნქციის დარბუს ზედა და ქვედა ინტეგრალური ჯამები მითითებული შუალედის n ტოლ ნაწილად დანაწილების შემთხვევაში:

1. ა) $f(x)=x+1$, $x\in[2;3]$; ბ) $f(x)=2x+1$, $x\in[-3;0]$;

გ) $f(x)=\frac{1}{4}x-2$, $x\in[-2;2]$; დ) $f(x)=-x+\frac{1}{2}$, $x\in[0;6]$

2. ა) $f(x)=x^2-1$, $x\in[1;3]$; ბ) $f(x)=x^2+4x$, $x\in[2;3]$;

გ) $f(x)=\sqrt{x}+2$, $x\in[0;1]$; დ) $f(x)=x^3+1$, $x\in[-2;3]$.

7. გამოთვალეთ f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალური ჯამები მითითებული შუალედის n ტოლ ნაწილად დანაწილების გზით. c_i $(i = 0,1,2,...,n-1)$ არგუმენტის მნიშვნელობებად აარჩიეთ დანაწილების შუალედების შუაწერტილები. განიხილეთ შემთხვევები: 1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$.

1. ა) $f(x) = x + 1$, $x \in [-1;3]$; ბ) $f(x) = 3x + 2$, $x \in [2;3]$;
   გ) $f(x) = -x + 2$, $x \in [1;2]$; დ) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $x \in [0;4]$.
2. ა) $f(x) = x^2$, $x \in [0;2]$; ბ) $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in [2;3]$;
   გ) $f(x) = -x^2 + 1$, $x \in [-3;-1]$; დ) $f(x) = x^3$, $x \in [0;1]$.

8. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი, როგორც რიმანის ინტეგრალური ჯამების ზღვარი. ამისათვის მითითებული შუალედი დაანაწილეთ n ტოლ ნაწილად და c_i $(i = 0,1,2,...,n-1)$ არგუმენტის მნიშვნელობებად აარჩიეთ დანაწილების შუალედების შუაწერტილები:

ა) $\int_{-1}^{1}(x+3)dx$; ბ) $\int_{0}^{2}(4x+3)dx$;

გ) $\int_{-1}^{2}x^2dx$; დ) $\int_{1}^{2}(x^2-2x)dx$.

9. ინტეგრებადია თუ არა $f:[a,b \to R]$ ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე თუ

ა) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x \neq 0, \\ 4, & x = 0, \end{cases}$ $[a,b] = [1,2];[-1,1]$.

ბ) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}; & x \neq 0, \\ 4, & x = 0, \end{cases}$ $[a,b] = [1,2];[-1,1]$.

10. გამოიყენეთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტება, დაწერეთ რაიმე ფუნქციის რიმანის ჯამი და იპოვეთ $\lim_{n\to\infty} S_n$ თუ

ა) $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}$ (გამოიყენეთ ფუნქცია $f(x) = x$ [0,1] სეგმენტზე).

ბ) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$ (გამოიყენეთ ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x+1}$ [0,1] სეგმენტზე).

გ) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$ (გამოიყენეთ ფუნქცია $f(x) = \sin(\pi x)$ [0,1] სეგმენტზე).

დ) $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2}$ (გამოიყენეთ ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ [0,1] სეგმენტზე).

ე) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+2/n} + ... + \sqrt{1+n/n}\right)$ (გამოიყენეთ ფუნქცია $f(x) = \sqrt{1+x}$ [0,1] სეგმენტზე).

ვ) $S_n = \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 0$ (გამოიყენეთ ფუნქცია $f(x) = x^p$ [0,1] სეგმენტზე).

ზ) $S_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (განიხილეთ წარმოდგენა $S_n = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}$, შემდეგ კი ფუნქცია $f(x) = \ln x$ $[0,1]$ სეგმენტზე).

თ) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ (გამოიყენეთ ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის რიმანის ჯამები $[a,b]$ სეგმენტზე).

ი) ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ ინტეგრებადი ფუნქციაა (რიმანის აზრით) და $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$. ავღნიშნოთ $f_{k,n} = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, $n \in N$, $k = 1,2,...,n$.

დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1,n}\cdot f_{2,n}\cdot....\cdot f_{n,n}} = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$

ბ) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{k,n}}} = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx}$

11. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

1. ა) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$;
   ბ) $\int_{-1}^{8} (\sqrt[3]{x} + 2x - 1)dx$;
   გ) $\int_0^{\pi} (3\cos x - 2\sin x)dx$;
   დ) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$.
2. ა) $\int_0^2 |1-x|dx$;
   ბ) $\int_2^4 |x-3|dx$;
   გ) $\int_{-1}^{1} (|x| + 2x)dx$;
   დ) $\int_{-2}^{1} (x|x| - 1)dx$.
3. ა) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$;
   ბ) $\int_0^{\pi} x\sin xdx$;
   გ) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} x|\cos x|dx$;
   დ) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx$.

12. გამოთვალეთ $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, თუ:

ა) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0, \\ 2x-1, & 0 \le x < 1, \\ x^3 + 3, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$;
ბ) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \le x < 0, \\ 2x+3, & 0 \le x < 1, \\ x^2 + 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$;
გ) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \\ e^x, & 0 \le x < 1, \\ \sqrt{x} + 3, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$;
დ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & -1 \le x < 0, \\ 3^x, & 0 \le x < 1, \\ 4\sqrt{x}, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$.

13. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით:

1. ა) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
   ბ) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

გ) $y=-x^4,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2;$

დ) $y=e^x,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=\ln 5.$

2. ა) $xy=-4\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3;$

ბ) $y=\sin x,\quad y=0,\quad 0\le x\le\pi;$

გ) $y=2^x,\quad y=2x-x^2,\ x=0,\ x=2;$

დ) $y=e^{-x},\ y=0,\ x=-1,\ x=2\ ;$

3. ა) $y=x^2,\quad y=\sqrt[3]{x};$

ბ) $y=-x^2,\quad y=x^2-2x;$

გ) $y=6x-x^2\ ,\quad y=0;$

დ) $y=\frac{5}{x},\ y=6-x.$

4. ა) $y=2x-1,\quad y=0,\ -1\le x\le 4;$

ბ) $y=x^3,\ y=0,\ -1\le x\le 2;$

გ) $y=2x-x^2,\quad y=0,\ -1\le x\le 4;$

დ) $y=\sin x,\quad y=0,\quad -\frac{5\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}.$

5. ა) $y=|x-1|,\ y=3-|x|$

ბ) $y=|\lg x|,\quad y=0,\ \ x=0{,}1,\ \ x=10;$

გ) $y=x,\ y=x+\sin^2 x\quad 0\le x\le\pi;$

დ) $ax=y^2,\ ay=x^2.$

14. ცნობილია, რომ f ფუნქციას გააჩნია პირველადი $[a,b]$ სეგმენტზე. ინტეგრებადია თუ არა $[a,b]$ სეგმენტზე f ფუნქცია.

იპოვეთ f ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a,b]$ სეგმენტზე თუ

ა) $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ [a,b]=[0,1];[0,10];[0,100]$

ბ) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x;[a,b]=[-\pi,\pi]$

გ) $f(x)=\sin x;[a,b]=[-\pi,\pi],[0,\pi]$

დ) $f(x)=sigx;[a,b]=[-2,-1];[-2,1];[-1,3];[-2,2];[1,2]$

15.იპოვეთ წარმოებული $\frac{dF(x)}{dx}$, თუ

ა) $F(x)=\int_0^x\sin(t^2)dt$ ბ) $F(x)=\int_0^{x^2}\sin(t^2)dt$ გ) $F(x)=\int_0^{\cos x}\sin(t^2)dt$ დ)

$F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$ ე) $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$ ვ) $F(x)=\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

16. იპოვეთ ზღვრები

ა) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{x}$ ბ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(arctgt)^2\,dt}{\sqrt{1+x^2}}$ გ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

დ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$ ე) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{tgt}dt}{\int\limits_0^{tgx}\sqrt{\sin t}dt}$

17. ვთქვათ $[0,+\infty)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია

$F(x)=\dfrac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$ ზრდადი ფუნქციაა $[0,+\infty)$ შუალედზე.

18. ვთქვათ $f\in C[0,+\infty)$ და $f(x)\to A$, როცა $x\to+\infty$. აჩვენეთ,რომ

ა) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt=A$ ბ) $\lim\limits_{n+\infty}\int\limits_0^1 f(nt)dt=A$

19. დაამტკიცეთ, რომ $\int\limits_0^a x^3 f(x^2)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)dx$, სადაც $a>0$.

20. დაამტკიცეთ, რომ თუ f უწყვეტი ფუნქციაა $[0,1]$ სეგმენტზე, მაშინ

ა) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$;

ბ) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

21. დაამტკიცეთ, რომ $[-l,l]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი f ფუნქციისათვის

ა) $\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt=2\int\limits_0^{l} f(t)dt$, თუ f ლუწია;

ბ) $\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt=0$, თუ f კენტია.

22. ცნობილია, რომ $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$. გამომდინარეობს ამ პირობიდან თუ არა უტოლობა $f(x)\ge 0\quad \forall x\in[a,b]$?

23. ცნობილია, რომ $\int\limits_a^b f(x)dx>\int\limits_a^b g(x)dx$. გამომდინარეობს თუ არა ამ პირობიდან უტოლობა $f(x)\ge g(x)\quad \forall x\in[a,b]$?

24. ვთქვათ ფუნქცია $f(x)$ ამოზნექილია ზემოთ და შემოსაზღვრული $[a,b]$ სეგმენტზე. აჩვენეთ, რომ

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\le\int\limits_a^b f(x)dx\le(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

25. გამოვიყენეთ ფორმალურად ნიუტონ- ლაიბნიცის ფორმულა ქვემოთ მოცემულ ინტეგრალებში და დაასაბუთეთ როდისაა ეს ქმედება სამართლიანი

ა) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{d}{dx}\left(arctg\dfrac{1}{x}\right)dx$ ბ) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1+2^{1/x}}\right)dx$

26. დაადგინეთ რომელი ინტეგრალია დიდი

ა) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ და $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

ბ) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx$ და $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

გ) $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ $I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$

27. გამოიყენეთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემები დააგგინეთ ინტეგრალის ნიშანი

ა) $\int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx$ ბ) $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx$ გ) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin}{x} dx$ დ) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

28. ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით დაადგინეთ რიცხვით მწკრივთა კრებადობის ხასიათი

ა) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ბ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ გ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1/2} n}$ დ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{arctgn}{1+n^2}$ ე) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{arctgn}}{1+n^2}$

ვ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^{2/3}}$ ზ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2n}{1+3n^2+n^3}$ თ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ ი) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$