ლექცია 1. (კონსპექტი)

calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"

ილია თავხელიძე

1.1 სიმრავლის ცნება, სიმრავლეთა მაგალითები, ძირითადი ოპერაციები სიმრავლეებზე

შესაძლებელია სიმრავლის მხოლოდ აღწერითი განმარტება! რაიმე საგანთა (სიმრავლის ელემენტები) ერთობლიობა

მაგალითები:

ა.) კონტინენტებისა ან ოკეანეების სიმრავლე;

ბ.) მთების სიმრავლე რომელიმე ქედზე;

გ.) მერიდიანი ან პარალელი, როგორც წერტილთა სიმრავლე;

დ.) ზღვის დონეზე მყოფ წერტილთა სიმრავლე;

სიმრავლე, როგორც ჩამონათვალი:

ე.) A ≡ {თბილისი, ბაქო, ერევანი};

ვ.) A ≡ {1,3,5,7,. . . (2n+1). };

სიმრავლე როგორც კანონზომიერება:

ზ.) A ≡ {x | x- კავკასიის ქვეყნების დედაქალაქები};

თ.) A ≡ { a | a =2n+1, n ∈ **N**};

ი.) A ≡ {x | |x| < r} - წრის წერტილები, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსია r;

სასრული და **უსასრულო** სიმრავლეები ელემენტების რაოდენობა სიმრავლეში შესაბამისად სასრულია ან უსასრულო;

სიმრავლეები **ტოლია** თუ ისინი **ერთიდაიგივე რაოდენობისა და ერთიდაიგივე ელემენტებისაგან** შედგება (ჩამონათვალში ელემენტების მიმდევრობას მნიშვნელობა არა აქვს);

სიმრავლეები **ტოლძალოვანია** თუ ისინი **ერთიდაიგივე რაოდენობის ელემენტებისაგან** შედგება (ჩამონათვალში ელემენტების მიმდევრობას მნიშვნელობა არა აქვს);

ქვესიმრავლე B არის, რაიმე A სიმრავლის, ქვესიმრავლე, თუ მისი (B-ს) ყოველი ელემენტი A სიმრავლის ელემენტიც არის ! **B ⊆ A (B ⊂ A)**

მაგალითები:

ლ.) B ≡ { ყველა ტაიფუნის სიმრავლე} A ≡ {ქარების სიმრავლე};

მ.) B ≡ { ყველა 8000-ანის (მთები) სიმრავლე } A ≡ {ჰიმალაის მთების სიმრავლე} (სწორია?);

ნ.) **ცარიელი** სიმრავლე ≡ ∅ - ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა!

ო.) ნებისმიერი სიმრავლე თავისთავის ქვესიმრავლეა! **A ⊆ A;**

სიმრავლეების **გაერთიანება A∪B** - A და B სიმრავლეების გაერთიანება არის სიმრავლე C რომლის ელემენტებია როგორც A ისე B სიმრავლის ელემენტები (საერთო ელემენტი ჩაითვლება ერთხელ!); **C= A∪B = {c | c ∈A ან c∈B };**

სიმრავლეების **გადაკვეთა A∩B** - A და B სიმრავლეების გადაკვეთა არის სიმრავლე C რომლის ელემენტებია როგორც A ისე B სიმრავლის მხოლოდ საერთო ელემენტები! **C= A∩B = {c | c ∈A და c∈B };**

კლასები სიმრავლის არათანამკვეთ ქვესიმრავლეებს რომელთა გაერთიანება გვაძლევს მთელ სიმრავლეს კლასები ეწოდება! ასეთ დაყოფას კლასიფიკაცია! კლასიფიკაციის შედეგად არ შეიძლება რომ რომელიმე ერთი ელემენტი:

ა.) ორ სხვადასხვა კლასს ეკუთვნოდეს

ბ.) არც ერთ კლასს არ ეკუთვნოდეს;

ორი სიმრავლის **დეკარტული ნამრავლი AXB** –სიმრავლე, რომლის ელემენტებია წყვილები პირველი წევრი არის **A** სიმრავლის ელემენტი, ხოლო მეორე წევრი **A**

სიმრავლის ელემენტია. **C= AXB = {c=(a,b) | a ∈A და b∈B }**; წყვილებში მიმდებრობის აღრევა დაუშვებელია;

C = {c=(a,b) | a ∈A და b∈B } - წყვილბის სიმრავლეა.

- მაშინ სიმრავლის პირველი პროექცია ანუ **პრ$_1$C ≡ { a | a ∈A და არსებობს ისეთი წყვილი C-ში, რომ მისი პირველი ელემენტია ეს a }**;
- შესაბამისად განისაზღვრება **პრ$_2$C ≡ { b | b∈B და არსებობს ისეთი წყვილი C-ში, რომ მისი მეორე ელემენტია ეს b }**;

დეკარტული ნამრავლის მაგალითები:

პ.) A – გეოგრაფიული განედის (პარალელის) "წერტილთა რიცხვითი მნიშვნელობების სიმრავლე" **(A ≡ {a | a∈[-90^0 , 90^0]}) ;** ხშირად იხმარება ტერმინები: მაგ.: 50^0-სათვის "50^0 სამხრეთის განედი" ან "ეკვატორიდან სამხრეთით" და +50^0-სათვის - "50^0 ჩრდილოეთის განედი";

B გეოგრაფიული გრძედის (მერიდიანის) "წერტილთა რიცხვითი მნიშვნელობების სიმრავლე" **(B ≡ {b | b∈[-180^0 , 180^0]});** ხშირად იხმარება ტერმინები: მაგ.: 100^0-სათვის "100^0 გრივნიჩის მერიდიანიდან აღმოსავლეთით" და +100^0-სათვის - "100^0 გრივნიჩის მერიდიანიდან დასავლეთით;

შესაბამისად დეკარტული ნამრავლი **C = AXB ≡ {c=(a,b) | a ∈A და b∈B }** არის გლობუსზე ან რუქაზე "წერტილის კოორდინატების სიმრავლე";

ჟ.) D ალტიტუდა "გეოგრაფიული სიმაღლე ზღვის დონიდან მეტრებში" **((D ≡ {d | d∈[-12000 , + 9000]});** შესაბამისად **- C= AXBXD ≡ {c=(a,b,d) | a ∈A, b∈B და d∈D }** დედამიწაზე ობიექტის მდებარეობის რეალური კოორდინატები.

1.2 სიდიდე და რიცხვი;

დიდი "მთა", პატარა "მდინარე", ღრმა "ორმო", ძლიერი "ქარი", სუსტი "შტორმი", მაღალი "წნევა", "ეკვატორთან" ახლოს, "ჩრდილოეთ პოლუსიდან" მოშორებით და მრავალი ანალოგიური გამონათქვამი - მცდელობაა ამა თუ იმ სიდიდის მიახლოებითი აღწერის, რადგან იმავ დროულად წამოიჭრება კითხვები (რასთან შედარებით? რამდენად?). ამიტომ ბუნებრიბად უხსოვარი დროიდან შემოდის ამა, თუ იმ სიდიდის რიცხვით დახასიათების მცდელობა.

მაგ: "ეს არის ჩემგან ორმოცდაათი ნაბიჯით დაშორებული", ქალაქებს შორის მანძილი ხუთიათასი "სტადიუმია", მყავს სამი შვილი, მამონტი ჩემზე ასორმოცდაათჯერ მძიმეა და ა.შ.

ანტიკური ხანის ერთერთი უდიდესი მოაზროვნე პითაგორე მიდის აზრამდე, რომ "ყველაფერი რიცხვია"- ყველაფერი ჩაიწეროს ან აღიწეროს რიცხვებით საოცრებაა, რომ ეს განმსაზღვრელი აღმოჩნდა თანამედროვე მეცნიერული აზრის განვითარების ძირითადი მიმართულებისათვის (რეალურად ესაა საფუძველი პროცესების დამზერებისა და მონაცემების ანათვალების, ცდების შედეგების ჩანაწერების, პროცესების მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირების და სხვა)!!

1.3 ნატურალური, მთელი, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები; რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა; რიცხვთა ღერძი

- **N** (Naturalis ან Numeros) – ნატურალური რიცხვების სიმრავლე - თვლით, გადანომრვის შედეგად მიღებული რიცხვები; **N ≡ { 1,2,3,. . . n,. . };**
- **Z** (Zalh - რიცხვი) – მთელი რიცხვების სიმრავლე; ფორმალურად დადებითი და უარყოფითი ნატურალური რიცხვები და ნული. მოდელების თვალსაზრისით გათვალისწინებულია რაიმე სიდიდის ორი ვარიანტი (თვისება, მახასიათებელი). **Z ≡ {0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, . . . –n, +n, . . };**

უარყოფითი სიდიდეების შინაარსობრივი მაგალითები (მოტანილ მაგალითებში არ არის აუცილებელი მონაცემი აუცილებლად მთელი რიცხვი იყოს!):

I. 1.1 ში განხილული პ.) და ჟ.) მაგალითები გრძედების, განედებისა და სიმაღლეების დადებითობა და უარყოფითობას სხვადასხვა შინაარსი აქვს;

II. ფინანსურად ვალი და მოგება;

III. აღმოსავლეთისა და დასავლეთის ქარების ჩაწერისას შეთანხმების შედეგად, რომელი იყოს დადებითი და რომელი უარყოფითი, შესაძლებელია გათვალისწინებულ იქნას მათი მიმართულებაც;

- **Q** (Quotient - ნაწილი) – რაციონალური რიცხვების სიმრავლე, ქართულად "წილადები"; p/q – სადაც p და q მთელი რიცხვებია; **Q ≡ { p/q | p∈ Z და q ∈Z};**
- **R** (Real) – ნამრვილი რიცხვების სიმრავლე შედგება რაციონალურ რიცხვთა კლასიდან და ირაციონალურ რიცხვთა კლასიდან;

ნამდვილი რიცხვი, რომელიც რაციონალური არ არის **ირაციონალური** რიცხვია! ირაციონალური რიცხვების მაგალითებია:

- **π=3.14..** (წრეწირის სიგრზისა და დიამეტრიც შეფარდება);
- **e=2.7..** (ნეპერის რიცხვი);
- **√2=1.14..(**კვადრტის დიაგონალისა და გვერდის შეფარდება);
- **Φ= (1+√5)/2** "ოქროს კვეთის" რიცხვი;

სიმრავლეების თვალსაზრისით ცხადია, რომ **N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R ;**

რიცხვის "გეომეტრიული ინტერპრეტაცია": **"რიცხვთა ღერძი"** არის წრფე რომელსაც გააჩნია:

1.) "სათავე" ათვლის საწყისი 0;

2.) "დადებითი მიმართულება" (0 დან "ტრადიციულად მარჯვნივ →, ან ზევით ↑ ") საითაც განთავსდება დადებით ნამდვილ რიცხვეთა სიმრავლე (კლასი $\mathbf{R_+ = R^+ \equiv \{x \mid x \in R \text{ და } x > 0\}}$) საზოგადოდ ამას ირჩევს მკვლევარი, მაგრამ მერე ყოველთვის ითვალისწინებს ამ ფაქტს!;

3.) "ერთეულოვანი მონაკვეთი" "საზომი" "მასშტაბი".

აღსანიშნავია, რომ "რიცხვთა ღერძზე <u>ზუსტად</u> გადაზომვა შეიძლება ნატურალური, მთელი და რაციონალური რიცხვების", ირაციონალური რიცხვების შესაბამისი წერტილი, რა თქმა უნდა არსებობს ამავე რიცხვთა ღერძზე მაგრამ მისი "დატანა მოცემულ მასშტაბში მხოლოდ მიახლიებითაა შესაძლებელი" (მათემატიკურად ამას არათანაზომადობა ეწოდება)!

1.4 სიდიდის განზომილება; ზომის ერთეულები; მასშტაბირება

1.2 ში გამოთქმული სურვილი (მცდელობა) ყველაფერი ჩაიწეროს რიცხვებით ანუ ყველა სიდიდე აღიწეროს რიცხვებით ზუსტდება იმით, რომ რიცხვის გარდა რეალურ სიდიდეებს ანსხვავებს **"განზომილება"** (მაგ.: 160 წონისა და 160 სიმაღლის მქონე ადამიანები არასადარნი არიან, და ამიტომ მარტო რიცხვი 160 გაუგებარია!?): წარმოდგენილ კურსში ჩვენ ძირითადად ვიმუშავებთ შემდეგ სისტემებსა და ერთეულებში:

- **თვლის სისტემა ათობითი**

(ანუ რიცხვი 43647082 ≡ $4X10^7+3X10^6+6X10^5+4X10^4+7X10^3+0X10^2+8X10^1+2X10^0$) სისტემა საყოველთაოდ მიღებულია საფრანგეთის რევოლუციის შემდეგ; არის ქვეყნები სადაც გავრცელებულია თორმეტობითი სისტემა ("დუოდეციმალური" ანუ "დუჟინები"); კომპიუტერები მოქმედებენ ორობით სისტემაში (0,1 არითმეტიკული ოპერაციებისათვის ერთერთი ყველაზე მოხერხებული სისტემაა, მაგრამ რიცხვების ჩასაწერად ძალზე გრძელი გამოსახულებია);

- **კუთხის საზომი ერთეულებია "გრადუსი"** (სრული კუთხის, წრის, სამასმესამოცედი ნაწილი), ან **"რადიანი"** (1 რადიანი იმ კუთხის შესაბამისი ზომაა, როდესაც წრეწირის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია);

- **სიგრძის ერთეული მ - "მეტრი"** ("ბუნებრივი"- გრინვიჩის მერიდიანის მეოთხედი სიგრძის 1/10 000 000 ნაწილი; 1882 წლიდან შემოღებულია ე.წ. "ეტალონური") შესაბამისად ხმარებაშია "კილომეტრი" $1კმ=10^3$ მ., "დეციმეტრი" $1დმ=10^{-1}$ მ, "სანტიმეტრი" $1სმ=10^{-2}$ მ. , მილიმეტრი $1მმ.=10^{-3}$ მ., ასტრონომიაში "სინათლის წელიწადი" და ა.შ; ზოგიერთ ქვეყანაში ხმარებაშია "ფუტი", "ინჩი", "იარდი", "მილი" =1852 მეტრს (1 მილი არის დედამიწის $\mathbf{0^01'}$ (ერთი მინუტის) შესაბამისი გრინვიჩის მერიდიანის რკალის სიგრძე) და სხვ.

ფართობის ერთეული მ² - "კვადრატული მეტრი", ხმარებაშია აგრეთვე "კვადრატული კილომეტრი" $1კმ^2= 10^6$ მ², "არი", "ჰექტარი"; ზოგიერთ ქვეყანაში ხმარებაშია "აკრი";

მოცულობის ერთეული მ³ "კუბური მეტრი"; ხმარებაშია აგრეთვე "ლიტრი"≡1 $დმ^3$, "დეკალიტრი" ≡10 ლიტრს, "ბარელი" და სხვ. ;

- **მასის ერთეული გრ. "გრამი"** (1 $სმ^3$ 4^0C ტემპერატურის მქონე გამოხდილი წყლის წონა) შესაბამისად "კილოგრამი" $1კგ.=10^3$ გ.,

"მილიგრამი" და ა.შ; ზოგიერთ ქვეყანაში ხმარებაშია "ფუნტი" და (მეოცე საუკუნემდე არ იყო განსხვავება წონისა და მასის ერთეულებს შორის).

- **დროის ერთეული წმ. "წამი"** (დღედამის 1/86400=1/60X60X24 ნაწილი) შესაბამისად "წუთი" 1წთ.=60 წმ., "საათი" 1.სთ=3600წმ., "დღე-ღამე" ≡24სთ., "კვირა", "თვე", "წელიწადი", "საუკუნე", და ა.შ;
- **ტემპერატურის ერთეული ^{0}C "ცელსიუსის გრადუსი"** (0^0C- წყლის გაყინვის ტემპერატურა და 100^0C წყლის დუღილის ტემპერატურა ორივე შემთხვევაში ზღვის დონეზე); არსებობს – ფარენგეიტისა და კელვინის ერთეულები.
- **სიჩქარის, წნევის, ძალის, აჩქარების, ტენიანობისა და მრავალი სხვა ერთეული** უმეტესწილად **"ნაწარმოები ერთეულებია"!**

მასშტაბი რუქაზე, ნახაზზე ან გეგმაზე და სხვ. მოცემული ხაზების სიგრძის შეფარდება ამ ხაზებით გამოხატულ რეალურ სიგრძესთან.

ყოველ კერძო შემთხვევაში რიცხვთა ღერძსა (ან მის ნაწილში) შეიძლება სხვადასხვა შინაარსი ჩაიდოს ("მათემატიკური მოდელი"):

მაგალითები:

I. რიცხვთა ღერძი როგორც "დროითი ღერძი". ამ შემთხვევაში 0 "აწმყო", დადებითი მიმართულება "მომავალი" (უარყოფითი "წარსული"), "ერთეულის" არჩევა დამოკიდებულია ჩვენზე წამი (საათი, წელიწადი და სხვა);

II. რიცხვთა ღერძი როგორც "ცელციუსის ტემპერატურული ღერძი". ამ შემთხვევაში 0 "წყლის გაყინვის ტემპერატურა", დადებითი მიმართულება "ცხელი" (უარყოფითი "გაყინული");

III. **$A \equiv \{a \mid a \in [-90^0, 90^0]\}$** (I. 1.1 ში განხილული მაგალითი პ.)) – გეოგრაფიული განედის (პარალელის) "წერტილთა რიცხვითი მნიშვნელობების სიმრავლე". ამ შემთხვევაში 0 "ეკვატორი", დადებითი მიმართულება "ჩრდილოეთი" (უარყოფითი "სამხრეთი"), "ერთეული" "ბრტყელი კუთხის გრადუსი"; **$a = 90^0$ -** "ჩრდილოეთ პოლუსი", **$a = -90^0$ -** "სამხრეთ პოლუსი";

IV. **$B \equiv \{b \mid b \in [-180^0, 180^0]\}$** (I. 1.1 ში განხილული მაგალითი პ.)) გეოგრაფიული გრძედის (მერიდიანის) "წერტილთა რიცხვითი მნიშვნელობების სიმრავლე". ამ შემთხვევაში 0 "გრინვიჩის მერიდიანი", დადებითი მიმართულება "აღმოსავლეთით" (უარყოფითი "დასავლეთით"), "ერთეული" "ბრტყელი კუთხის გრადუსი";

V. **$D \equiv \{d \mid d \in [-12000, +9000]\}$**(I.1.1 ში განხილული მაგალითი ჟ.)) ალტიტუდა "გეოგრაფიული სიმაღლე ზღვის დონიდან მეტრებში" ამ შემთხვევაში 0 "ზღვის დონე", დადებითი მიმართულება "ზღვის დონიდან ზევით", "ერთეული" მეტრი; .

1.5. მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები

ბუნებაში ამა თუ იმ სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია სხვადასხვა გარემოებაზე - აქედან გამომდინარე აბსოლუტურად მუდმივ სიდიდეებზე, რომლებიც უცვლელია მაგალითად დროში, სხვა გარემოებებს, რომ თავი დავანებოთ საუბარი "თითქმის" შეუძლებელია.

"თითქმის" იმიტომ, რომ არსებობენ ე.წ. მათემატიკური **"აბსოლუტური" მუდმივები** მაგ.: **$\pi = 3.14..$, $e = 2.7..$, $\sqrt{2}=1.14..$, $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$** , და მრავალი სხვ. მეცნიერებაში ძირითად მუდმივებს სპეციალური ასოებით აღნიშნავენ **$\hbar$** – პლანკის მუდმივა და სხვა.

ამა თუ იმ პროცესის განხილვა-შესწავლისას დაიმზირება, რომ გარკვეული სიდიდეები "არ იცვლება" (თითქმის არ იცვლება). პროცესის მათემატიკური მოდელის შედგენა-შესწავლისას ითვლება, რომ ეს სიდიდე **მუდმივია** (ღებულობს ერთ ფიქსირებულ მნიშვნელობას)!

სხვადასხვა პოცესის შესწავისას მუდმივი სიდიდეების მაგალითებია:

I. მოცემულ ადგილას წლის განმავლობაში ყოველდღიურად ერთიდაიგივე დროს დამზერილი მთის სიმაღლე;

II. მდინარის "კალაპოტის პროფილი" (რამდენიმე დღის განმავლობაში და არა წყალდიდობისას!);

III. “წყლის ხარჯი” - მდინარის კალაპოტის კვეთაში დროის ერთ ერთეულში გავლილი წყლის მოცულობა (რამდენიმე დღის განმავლობაში და არა წყალდიდობისას),

IV. “მდინარის სიღრმე” (რამდენიმე დღის განმავლობაში და არა წყალდიდობისას).

V. ზვავების ან ღვარცოფების პროცესების შესწავლისას მოცემული მთის (ქედის, ხეობის) სიმაღლე (სიღრმე) მუდმივი სიდიდეა თუმცა რეალურად მთის სიმაღლე დროზე მაინცაა დამოკიდებული. უბრალოდ ძალიან ხანგრძლივი დროის მანძილზე მთის სიმაღლე უმნიშვნელოდ იცვლება!,

სიდიდე ცვლადია - თუ ის (სიდიდე) პროცესის დამზერა-შესწავლისას ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობებს.

მაგალითები:

VI. ადამიანის ასაკი;

VII. მოცემულ ადგილას წლის განმავლობაში ყოველდღიურად ერთიდაიგივე დროს დამზერილი ზღვის ტალღების სიმაღლე;

VIII. მდინარეში ჩაყრილი დამბინძურებლის მდებარეობა – მანძილი რაღაც ფიქსირებული წერთილიდან

IX. მდინარეში ჩაყრილი დამბინძურებლის კონცენტრაცია – მოცულობის ერთეულში დამბინძურებლის წილი;

აღსანიშნავია, რომ ამ პარაგრაფში განხილული II,III,IV მუდმივი და VIII, IX ცვლადები სიდიდეები ერთიანად მონაწილეობენ მდინარის ეკოსისტემის მოკლევადიანი პროგნოზების შესწავლისას, გრძელვადიანი პროგნოზისას ზოგიერთი მუდმივი სიდიდე შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც ცვლადი (“მდინარემ კალაპოტი შეიცვალა”, “გაჩნდა მეჩეჩები”, “ადიდდა”- შეიცვალა სიღრმე და სხვა)

ცვლადი სიდიდის ცნება მათემატიკაში შემოვიდა XVII საუკუნეში (დეკარტი, ნიუტონი, ლეიბნიცი). ამის შემდეგ მოხდა რევოლუციური ნახტომი მათემატიკურ აზროვნებაში. შესაძლებელი გახადა ბუნებაში და ტექნიკური პროცესებში დამზერილი (აღმოჩენილი) კანონზომიერებების მათემატიკური ჩაწერა ანუ პროცესის შესაბამისი მათემატიკური მოდელების აგება.

1.6. სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა; ცდომილება

ბუნებაში ამა თუ იმ სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის გაზომვა დაფიქსირება დამოკიდებულია სხვადასხვა გარემოებაზე მაგალითად: გამზომი ხელსაწყოს სიზუსტეზე, მასშტაბზე (არათანაზომადობა), გათვლების სიზუსტეზე (იმ შემთხვევაში, როდესაც სიდიდე უშუალოდ არ იზომება). ამიტომაცაა, რომ ყველაფერი ითვლება რაღაც **“ცდომილებით”.** მაგალითად ვერასდროს ზუტად ვერ ჩაიწერება 5 მეტრი რადიუსის მქონე წრეწირის სიგრძე (ის უსასრულო არაპერიოდული ათწილადია), ანუ უნდა დავკმაყოფილდეთ რაღაც გარკვეული სიზუსტით, ანუ ე.წ. “დასაშვები ცდომილებით”.

აბსოლუტური ცდომილება სიდიდის რეალური რიცხვითი მნიშვნელობისა (x) და მისი მიახლოებული მნიშვნელობის ($\bar{x}$) სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა

$$\Delta(x) \equiv |x - \bar{x}|.$$

ფარდობითი ცდომილება - აბსოლუტური ცდომილების შეფარდება სიდიდის რეალური რიცხვითი მნიშვნელობასთან.

$$\rho(x) \equiv \frac{|x - \bar{x}|}{x}.$$

1. Samner N. - Mathematics for Phtsical Geografers. “Edward Arnold”London 1978
2. (“□□981);
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике - “Наука” – 1972 г;
4. Bers Lipman - Calculus (□□– □□–1972);
5. Кудриавцев □□□□□□□□□962;
6. Courant R. - Vorlesungen uber differential und integralrechung (Р.Курант Курс Диффепенциального и интегрального исчисления Ч.№1.- ან ნებისმიერი გამოცემა, არსებობს ინგლესური ვერსიაც);
7. Марон И.А. Дифференциальыйт и интегральное исчисление в примерах и задачах; “Наука” Москва. 1970;

8. გეგელია თ. მათემატიკის სპეციალური კურსი (I და II ნაწილი“) განათლება” თბილისი 1985;
9. Calculus -From Wikibooks, the open-content textbooks collection - http://en.wikibooks.org/wiki/Calculus
10. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике; “Наука” Москва. 1971;
11. Тарасов Н.П. Курс высшей математики для техникумов “Наука” Москва 1975 ;

ლექცია 10. (კონსპექტი)

Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"

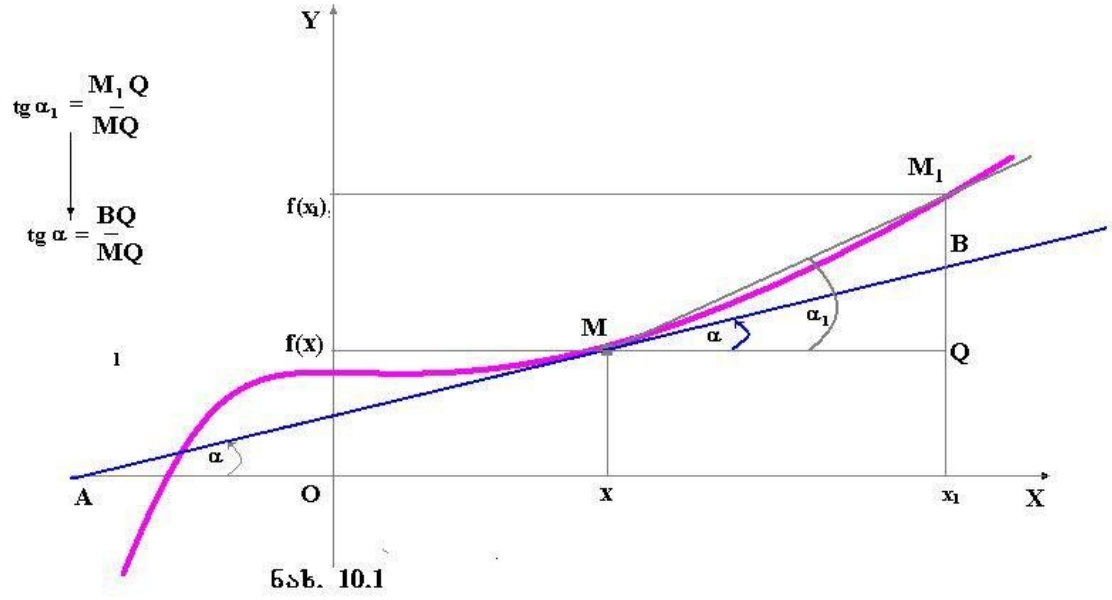
ილია თავხელიძე

10.0 წარმოებული

ცნება ისტორიულად უკავშირდება მრუდწირული საზღვრების მქონე ფიგურის რომელიმე წერტილში მხები წრფის აგებას! მეორეს მხრივ ეს ცნება მჭიდროდაა დაკავშირებული ნებისმიერი მოძრაობის სიჩქარის ცნებასთან.

1. წარმოებული როგორც წირის მხები

განვიხილოთ რაიმე წირზე (შეიძლება ეს იყოს რაიმე **f(x)** ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 10.1)) რაიმე ფისირებული **M** წერტილი. ავაგოთ ამ წერტილსა რომელიმე $\mathbf{M_1}$ წერტილზე გამავალი $\mathbf{MM_1}$ **მკვეთი.** თუ დავაკვირდებით, როდესაც $\mathbf{M_1}$ წერტილი მიისწრაფის **M** წერტილისაკენ მაშინ $\mathbf{MM_1}$ მკვეთის მდებარეობა იცვლება და ის დაიკავებს **MB** დგომარეობას. რა თქმა უნდა ეს არ არის დამოკიდებული $\mathbf{M_1}$ წერტილი მარცხნივაა თუ მარჯვნივ **M** წერტილიდან. საბოლოო მდგომარეობა ერთია! კვეთის მიერ საბოლოოდ დაკავებულ მდგომარეობას გრაფიკის ამ წერტილში გავლებული **მხები ეწოდება!** რა თქმა უნდა ჩვენ ვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევებს როდესაც მხები არსებობს!



ნახ. 10.1

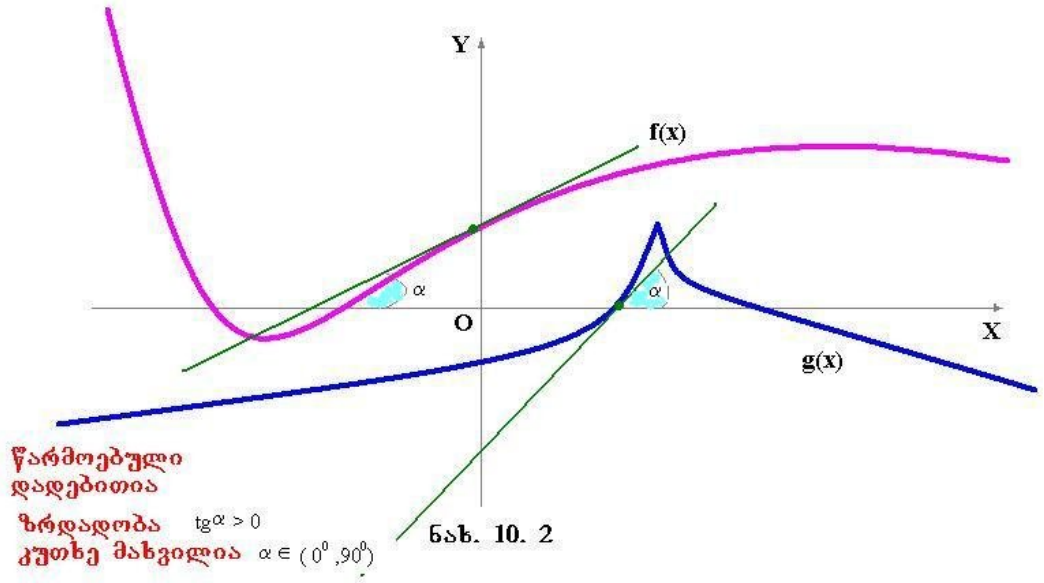
იმ შემთხვევაში, როდესაც წირი **f(x)** ფუნქციის გრაფიკია და ცნობილია **M** წერტილი, მაშინ შესაძლებელია მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტის გამოთვლა ანუ **tg α - ს პოვნა!** მართკუთხა $\mathbf{QMM_1}$ სამკუთხედიდან ცხადია რომ **მკვეთის დახრის კუთხის ტანგენსი** გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$tg\alpha_1 = \frac{M_1Q}{MQ} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}. \qquad (10.1)$$

ზღვარში კი QMB ისევ სამკუთხედი მართკუთხაა და შესაბამისად

$$tg\alpha = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}. \qquad (10.2)$$

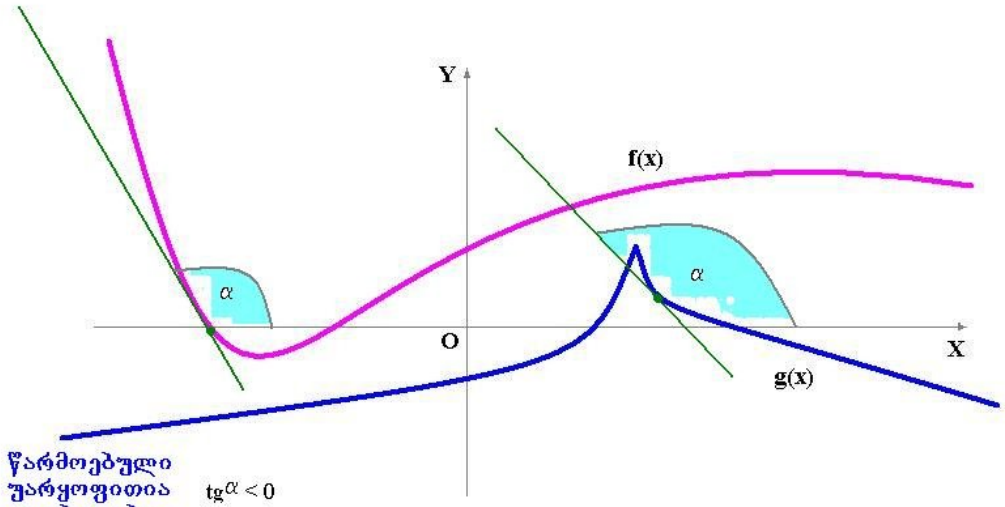
კუთხე α ყოველთვის აიზომება ორდინატთა ღერძიდან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 10. 2

შენიშვნა:

- თუ წარმოებული დადებითია $tg\alpha > 0$ მაშინ მხების გადაკვეთა ორდინატთა ღერძთან მახვილი კუთხით ხდება $\alpha \in (0^0, 90^0)$, მაგალითები იხილე ნახ. 10.2;
- თუ წარმოებული უარყოფითია $tg\alpha < 0$ მაშინ მაშინ მხების გადაკვეთა ორდინატთა ღერძთან ბლაგვი. კუთხით ხდება $\alpha \in (90^0, 180^0)$ მაგალითები იხილე ნახ. 10.3;

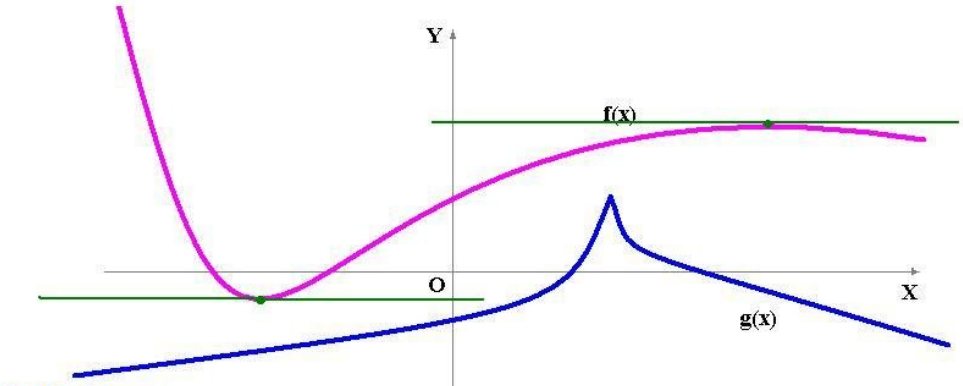


წარმოებული უარყოფითია კლებადობა კუთხე ბლაგვია $tg\alpha < 0$

$\alpha \in (90^0, 180^0)$

ნახ. 10.3

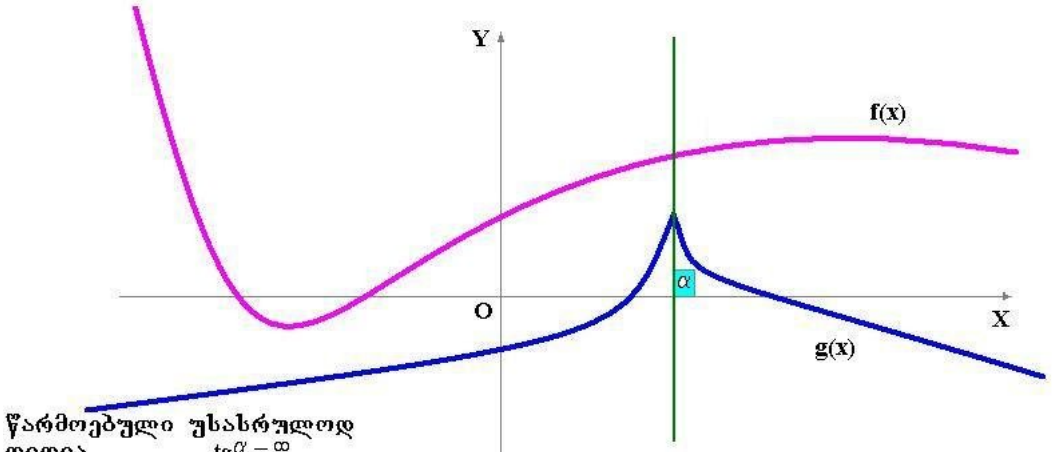
❖ **თუ წარმოებული ნულია $tg\alpha = 0$ მაშინ მხები ორდინატთა ღერძის პარალელურია $\alpha = 0^0$** მაგალითები იხილე ნახ. 10.4**;**



წარმოებული ნულის ტოლია "კრიტიკული" წერტილი მხები ორდინატთა ღერძის პარალელურია $tg\alpha = 0$

ნახ. 10.4

❖ **თუ წარმოებული უსასრულოდ დიდია $tg\alpha = \infty$ მაშინ მხები ორდინატთა ღერძის მართობულია $\alpha = 90^0$** მაგალითები იხილე ნახ. 10.5**;**



წარმოებული უსასრულოდ დიდია $tg\alpha = \infty$
"კრიტიკული წერტილი"
მხები ოორდინათა ღერძის მართობულია $\alpha = 90^0$

ნახ. 10.5

არგუმენტის ნაზრდი არის გამოსახულება

$$\Delta x \equiv x_1 - x; \tag{10.3}$$

ფუნქციის ნაზრდი არის გამოსახულება

$$\Delta y \equiv y_1 - y \equiv f(x_1) - f(x); \tag{10.4}$$

ნაზრდების ფარდობა არის გამოსახულება

$$\frac{M_1Q}{MQ} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{10.5}$$

ნაზრდების ფარდობის ზღვარს, როდესაც $x_1 \to x$ ფუნქციის წარმოებული **x** წერტილში ეწოდება. წარმოებულისათვის ისტორიულად მიღებულია შემდეგი აღნიშნები:

ლაგრანჟის აღინიშვნა:

$$\boxed{y' \equiv f'(x)} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{10.6}$$

ლეიბნიცის აღინიშვნა:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{10.6*}$$

კიდევ ერთხელ დავწეროთ ტოლობა რომელიც განსაზღვრავს წარმოებულს მოცემულ წერტილში

$$y' \equiv f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad \textbf{(10.7)}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ბოლო გამოსახულებაში ნაგულისხმებია, რომ $\mathbf{x_1 = x+h}$, სადაც **h** ნებისმიერი რიცხვია.

განსაზღვრება: როდესაც ფუნქციას მოცემული ინტერვალის ყველა წერტილში გააჩნია წარმოებული f '(x) ≠∞ (სასრული მნიშვნელობის) მაშინ იტყვიან, რომ **ფუნქცია "გლუვია".**

შესაბამისად **ფუნქციის წარმოებული ფუნქციაა!**

ფუნქციის წარმოებულ ფუნქციასაც შეიძლება გააჩნდეს თავისი წარმოებული შესაბამისად მას საწყისი ფუნქციის მეორე წარმოებული ფუნქცია ეწოდება

$$f''(x) \equiv \left(f'(x)\right)' \equiv \frac{df'(x)}{dx} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f'(x_1) - f'(x)}{x_1 - x} \qquad \textbf{(10.8)}$$

წარმოებული ფუნქციის კონკრეტული მაგალითები:

- **თუ** $f(x) = c$ **მაშინ** $f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{c - c}{x_1 - x} = 0;$ **(10.9)**
- **თუ** $f(x) = cx$ **მაშინ** $f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{cx_1 - cx}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{c(x_1 - x)}{x_1 - x} = c;$ **(10.10)**
- **თუ** $f(x) = cx^2$ **მაშინ**

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{cx_1^2 - cx^2}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{c(x_1^2 - x^2)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} c(x_1 + x) = 2x; \qquad \textbf{(10.11)}$$

2. წარმოებული როგორც მოძრაობის სიჩქარე

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც რაიმე ობიექტის **t** დროში განვლილი მანძილი მოიცემა რაიმე **f(t)** ფუნქციის სახით. ასეთ შემთხვევაში ამ ობიექტის სიჩქარე არის განვლილი მანძილის ნაზრდის შეფარდება დროის იმ მონაკვეთთან, რომელშიც განხორციელდა ეს ნაზრდი ანუ სიჩქარე - (10.7) ფორმულის თანახმად მოიცემა.

- თუ ობიექტი მოძრაობს თანაბრად ანუ მისი მოძრაობა აღიწერება წრფივი **f(t) = ct +b** ფუნქციით (**c, b** მუდმივი სიდიდეებია), მაშინ მისი სიჩქარე

$$v(t) \equiv f'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{ct_1 - ct}{t_1 - t} = c$$

მუდმივია იხილე აგრეთვე (10.10).

- თუ ობიექტი ვარდება სიცარიელეში ანუ მისი მოძრაობა აღიწერება როგორც **$f(t) = ct^2$**, მაშინ მისი სიჩქარე (10.11) თანახმად არის

$$v(t) \equiv f'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{ct_1^2 - ct^2}{t_1 - t} = 2ct,$$

და ამ ობიექტს გააჩნია აგრეთვე აჩქარება „მეორე წარმოებული" (10.8)

$$a(t) \equiv v'(t) \equiv f''(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{2ct_1 - 2ct}{t_1 - t} = 2c$$

რომელიც მუდმივია (ფიზიკაში ამ მუდმივს თავისუფალი ვარდნის აჩქარება ეწოდება, დედამიწისათვის ის g ≈9.8 მ/წმ²!).

10.3 ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებულები

- თუ $\mathbf{f(x) = x^{\alpha}}$, სადაც α რიცხვია, მაშინ $f'(x) = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{(\alpha-1)}$;
- თუ $\mathbf{f(x) = \sin x}$, მაშინ $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$;
- თუ $\mathbf{f(x) = \cos x}$, მაშინ $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$;
- თუ $\mathbf{f(x) = tg\ x}$, მაშინ $f'(x) = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$;
- თუ $\mathbf{f(x) = ctg\ x}$, მაშინ $f'(x) = (ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x$;
- თუ $\mathbf{f(x) = e^x}$, მაშინ $f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$;
- თუ $\mathbf{f(x) = a^x}$, მაშინ $f'(x) = \left(a^x\right)' = a^x \log_{10} a \equiv a^x \ln a$;

10.4 წარმოებულის ზოგიერთი თვისება

- „წრფივობა“: თუ $\mathbf{f(x) = c_1 g(x) + c_2 h(x)}$, სადაც $\mathbf{c_1}$ და $\mathbf{c_2}$ მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ
$$f'(x) = \left(c_1 g(x) + c_2 h(x)\right)' = c_1 g'(x) + c_2 h'(x). \qquad (10.12)$$
- ჯამის წარმოებული წარმოებულების ჯამის ტოლია;
- ნამრავლის წარმოებული: თუ $\mathbf{f(x) = g(x) \cdot h(x)}$, მაშინ
$$f'(x) = \left(g(x) \cdot h(x)\right)' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x). \qquad (10.13)$$
- შეფარდების წარმოებული: თუ $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, და მნიშვნელი არსად ნული არ ხდება $\mathbf{h(x) \neq 0}$, მაშინ
$$f'(x) = \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{\left(h(x)\right)^2} \qquad (10.14)$$
- კომპოზიციის (რთული ფუნქციის) წარმოებული: თუ $\mathbf{f(x) = g(\,h(x)) \equiv g \circ h\,(x)}$, მაშინ
$$f'(x) = \left(g(h(x))\right)' = g'(h(x))h'(x). \qquad (10.15)$$

10.5 განუსაზღვრელი ინტეგრალი

“წარმოებულის” პოვნის შებრუნებული ოპერაციაა **“პირველადის მოძებნა”** ანუ “განუსაზღვრელი ინტეგრალი”.

F(x) ფუნქცია არის **f(x)** ფუნქციის პირველადი, **F(x)** ფუნქციის წარმოებული **f(x)** ფუნქციაა ანუ თუ **F'(x) = f(x) .**

პირველადისათვის ისტორიულად მიღებულია შემდეგი აღნიშვნა:

$$\int F(x)dx \tag{10.16}$$

განმარტების თანახმად სამართლიანია შემდეგი იგივეობა

$$\left(\int F(x)dx\right)' = \int F'(x)dx = F(x)$$

ლექცია 2 (კონსპექტი)
calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

2.1. თანადობები;
2.2. ფუნქცია და მისი მოცემის წესები; მაგალითები.

2.1. თანადობები

თანადობა ორი ნებისმიერი **A** და **B** სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის **G** ქვესიმრავლეს თანადობა ეწოდება, **G ⊆ A X B.** თუ წყვილი **(a,b) ∈G -** ამბობენ, რომ **b** ელემენტი ეთანადება **G წესით** (თანადობით) **a** ელემენტს.

მაგალითი 1. **A ≡{a | a^{0}C – ტემპერატურული მაჩვენებლები}, B ≡{b | bსთ. – დროის მაჩვენებლები},** შესაბამისად თუ **G ≡{ (a,b) | მოცემოლი ადგილისათვის დროის გარკვეული ინტერვალით აღებული ტემპერატურული მაჩვენებლები},** რა თქმა უნდა ეს არის თანადობა (როგორაა დამოკიდებული დღე-დამის განმავლობაში ადგილობრივი გარემოს ტემპერატურა დროზე), თუმცა სრულიად დასაშვებია, რომ ის მარტივი მათემატიკური ფორმულით ვერ ჩაიწეროს! მეორეს მხრივ ცხადია, რომ **A X B** დეკარტული ნამრავლის ყველა ელემენტი ვერავითარ შემთხვევაში ვერ იქნება **G** სიმრავლის ელემენტი (შეუძლებელია ერთდროულად ორი სხვადასხვა ტემპერატურა იყოს ერთ ადგილას). ხშირად თანადობის ნაცვლად იხმარება ტერმინები:

- **A** სიმრავლის "**ასახვა**" **B** სიმრავლე**ში G** წესით (თანადობით);
- **A** სიმრავლის ელემენტები "**აისახებიან**" **B** სიმრავლე**ში G** წესით (თანადობით);
- **B** სიმრავლე "**დამოკიდებულია**" **A** სიმრავლეზე **G** წესით (თანადობით);
- **B** სიმრავლე "ფუნქციონალურადაა **დამოკიდებულია**" **A** სიმრავლეზე **G** წესით (თანადობით);

თანადობის (ასახვის) **განსაზღვრის არე D(A) ≡პრ$_1$(G) ≡ (a | a∈A და არსებობს G –ში ერთი მაინც წყვილი, რომლის პირველი ელემენტია a} ⊆ A.**

- თუ **D(A) ≡პრ$_1$(G) = A,** მაშინ ამ თანადობას ყველგან განსაზღვრული ეწოდება.

მაგალითი 2. **A ≡** {რომელიღაც კალათბურთის გუნდის შემადგენლობის გვარები}, **B ≡ N;** შესაბამისად **G –** არის გუნდის შემადგენლობა, წყვილები (გვარი, ნომერი) ცხადია, რომ **A-**ს ყოველ ელემენტს (კალათბურთელს) უნდა ჰქონდეს ნომერი ანუ თანადობა ყველგან განსაზღვრულია.

მაგალითი 3. **C = AXB ≡ {c=(a,b) | a ∈A და b∈B }** (I. 1.1 ში განხილული მაგალითი პ.)) არის გლობუსზე ან რუქაზე "წერტილის კოორდინატების სიმრავლე", მაშინ ფიქსირებული მერიდიანი **G = {(a,b)| a∈[-90^0 , 90^0], b = const.}⊆ AXB** არის ყველგან განსაზღვრული თანადობა და თანაც ყოველ წყვილში მეორე წევრი ერთიდაიგივე რიცხვია მერიდიანის მაჩვენებელი (კონკრეტულად თუ **b = 0** გრინვიჩის მერიდიანი);

- თუ **D(A) ≡პრ$_1$(G) ≠ A,** მაშინ ამ თანადობას ნაწილობრივ განსაზღვრული ეწოდება.

მაგალითი 4. ასეთი თანადობის კლასიკური მაგალითია ამ პარაგრაფის მაგალითი 1 (ტემპერატურული შკალის ყველა მნიშვნელობა ერთ დღე-დამეში შეუძლებელია დაფიქსირდეს).

მაგალითი 5. **C = AXB ≡ {c=(a,b) | a ∈A და b∈B }** (I. 1.1 ში განხილული მაგალითი პ.)) არის გლობუსზე ან რუქაზე "წერტილის კოორდინატების სიმრავლე", მაშინ ფიქსირებული პარალელი **G = {(a,b)| a = const., b∈[-180^0 , 180^0] }⊆ AXB** არის ნაწილობრივ განსაზღვრული თანადობა და თანაც ყოველ წყვილში პირველი წევრი ერთიდაიგივე რიცხვია განედის მაჩვენებელი (კონკრეტულად თუ **a = 0** ეკვატორი);

მნიშვნელობათა არე პრ$_2$(G) ≡ (b | b∈B და არსებობს G –ში ერთი მაინც წყვილი, რომლის მეორე ელემენტია b} ⊆ G.

- თუ **პრ$_2$(G) = B,** მაშინ ამ თანადობას **"სიურექციული"** ეწოდება (ასევე ამბობენ **A** სიმრავლის "**ასახვა**" **B** სიმრავლე**ზე G** წესით).

მაგალითი 5.

- **G** თანადობას (ასახვას) ეწოდება **ფუნქციონალური (ცალსახა)** თუ **(D(A) ≡პრ$_1$(G))** განსაზღვრის არის ყოველ ელემენტს შეესაბამება **მხოლოდ ერთი** ელემენტი (**პრ$_2$(G)** – დან) მნიშვნელობათა არიდან.

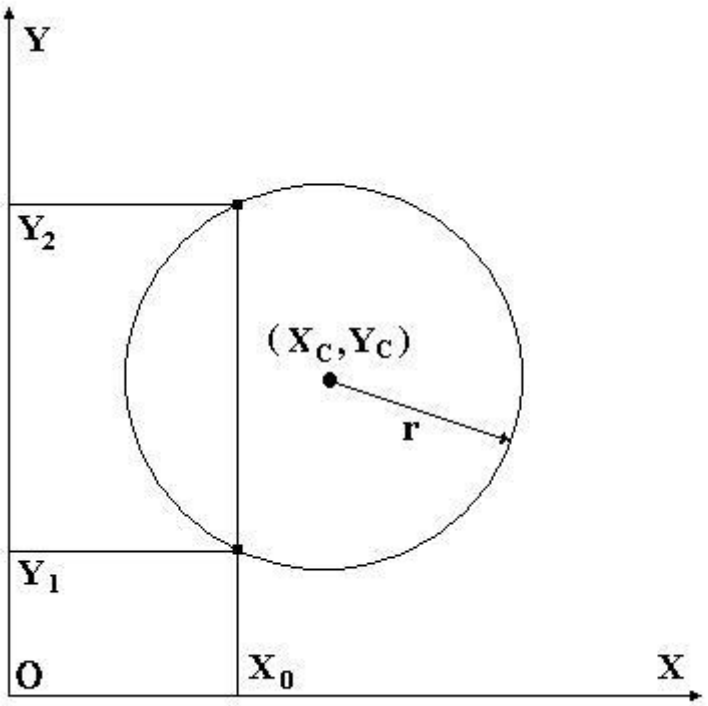
- ორ რიცხვით სიმრავლეს **(A,B ⊆ R)** შორის ფუნქციონალურ თანადობას (ასახვას) წარმოდგენილ კურსში **ფუნქციას უწოდებთ** და **y = f (x)**, მისი ჩანაწერი, საყოველთაოდაა მიღებული, **x** სიდიდეს (ცვლადს) ფუნქციის **არგუმენტი** ეწოდება, **y**-ს – ფუნქციის **მნიშვნელობა**!

მაგალითი 2. **G** ფუნქციონალურია რადგან არ შეიძლება ერთ კალადბურთელს ორი განსხვავებული ნომერი ეწეროს!

მაგალითი 3. - **G** "მერიდიანი" ფუნქციონალური თანადობაა, უბრალოდ განსაზღვრის არის ყოველ ელემენტს შეესაბამება **მხოლოდ ერთი** ელემენტი და ეს ელემენტი ყველასათვის ერთიდაიგივეა.

მაგალითი 5. - **G** "პარალელი" არ არის ფუნქციონალური თანადობა, რადგან განსაზღვრის არის მხოლოდ ერთ ელემენტს შეესაბამება **უამრავი** ელემენტი მნიშვნელობათა არიდან.

მაგალითი 6. **G** "წრეწირი" არის წერტილთა თანადობა სიბრტყეზე $\mathbf{R^2=RXR}$



ნახ. 2.1

მაგრამ ეს არ არის **ფუნქციონალური (ცალსახა) თანადობა,** რადგან **(D(A) ≡პრ1(G))** განსაზღვრის არის ნებისმიერ X_0 ელემენტს უმეტეს შემთხვევაში შეესაბამება **ორი** ელემენტი **(პრ2(G)** – დან) Y_1 და Y_2 მნიშვნელობათა არიდან. *მათემატიკურ ტერმინებში* $\mathbf{G = \{ (X,Y) | X \in R, Y \in R, |(X-X_C)^2 + (Y - Y_C)^2| = r^2 \}}$ *იმ წრეწირის წერტილთა სიმრავლე, რომლის ცენტრი არის წერტილში* $\mathbf{(X_C,Y_C)}$ *და მისი რადიუსია* **r** *! შესაბამისდ ჩანაწერი* $\mathbf{|(X-X_C)^2 + (Y - Y_C)^2| = r^2}$ ***არ არის ფუნქცია!***

მაგალითი 7. ქართულ ინგლისური ლექსიკონი არის თანადობა (ის უთანადებს გარკვეული წესით, "შინაარსობრივად", ერთმანეთს ქართულ და ინგლისურ სიტყვებს)! ეს თანადობა არ არის ფუნქციონალური ერთ ქართულ სიტყვას შეიძლება ეთანადებოდეს რამოდენიმე ინგლისური შესატყვისი; თანაც ეს არ არის ყველგან განსაზღვრული თანადობა ყოველთვის იარსებებს ქართული სიტყვა რომელიც არ მოხვდება ლექსიკონში!

- **G** თანადობას ეწოდება **ურთიერთცალსახა** თუ **(D(A) ≡პრ1(G))** განსაზღვრის არის ყოველ ელემენტს შეესაბამება **მხოლოდ ერთი** ელემენტი **(პრ2(G)** – დან) მნიშვნელობათა არიდან და პირიქით, ყოველი ელემენტისათვის **(პრ2(G)** – დან) მნიშვნელობათა არიდან არსებობს მხოლოდ ერთი ელემენტი განსაზღვრის არიდან.

მაგალითი 2. კლასიკური მაგალითია **ურთიერთცალსახა** თანადობისა ერთ კალადბურთელს ერთი ნომერი აქვს და თანაც უნომრო კალადბურთელი გუნდის განაცხადში ვერ იქნება!
მაგალითი 8. **G** თანადობა "გადანომრვა" ანუ მოცემულ **A** სიმრავლეს უთანადებთ **N** - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს ($G = \{a_n \mid a \in A$ და $n \in N\}$) ანუ ყოველ ელემენტს გაუჩნდა თავისი ნომერი, თუ ეს შესაძლებელია (ხანდახან შეიძლება არ გვეყოს ნომრები ასეთ სიმრავლეებს "არათვლადი სიმრავლეები" ეწოდებათ).

2.2 ფუნქციის მოცემის ხერხები; მაგალითები

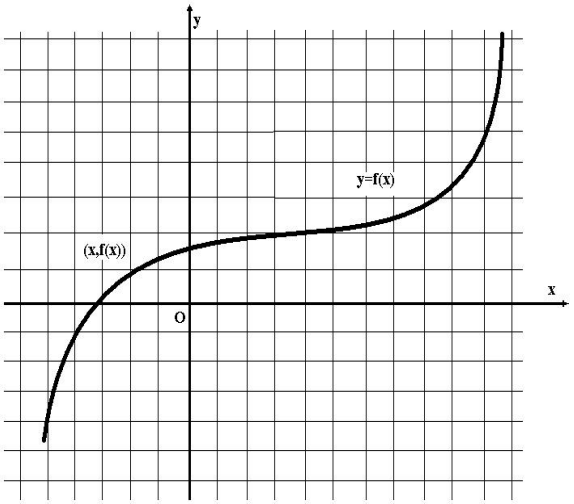
1. **ცხრილი** ფუნქცია მოცემულია (x, f(x)) წყვილების სახით, ანუ წყვილის პირველი ელემენტია არგუმენტის მნიშვნელობა, ხოლო წყვილის მეორე ელემენტია ამ არგუმენტის შესაბამისი მნიშვნელობა. ასეთი წესით სრულად მოიცემა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეებზე განსაზღვრული ფუნქციები.

მაგალითი 9. ლოგარითმული ან ტრიგონომეტრიული ცხრილები!
- ლოგარითმული ცხრილების შემთხვევაში (x, ln(x)) ან (x, lg(x)) წყვილების პირველი წევრი არის **x რიცხვი** (გააჩნია რა ბიჯითაა მოცემული ცხრილი), მეორე წევრი ამ რიცხვის შესაბამისი **"ნატურალური" (ln(x))** ან **"ათობითი" (lg(x))** ლოგარითმის მნიშვნელობაა (თავიდან დათქმული სიზუსტით)
- ტრიგონომეტრიული ცხრილების შემთხვევაში (x, sin(x)), (x, cos(x)),(x, tg(x)), (x,ctg(x)), (x, sec(x)) და სხვა - წყვილების პირველი წევრი არის **x რიცხვი ნოლიდან ოთხმოცდაათამდე** (გააჩნია რა ბიჯითაა მოცემული ცხრილი), მეორე წევრი ამ რიცხვის შესაბამისი **"სინუსი", "კოსინუსი", "ტანგენსი", "კოტანგენსი" ,"სეკანსი"** ან **და სხვა** ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობაა (თავიდან დათქმული სიზუსტით);
მაგალითი 10. ფულადი ლატარეის მოგებების ცხრილები - (x, f(x)) წყვილის პირველი წევრია x - მომგებიანი ბილეთის ნომერი, ხოლო მეორე წევრი f(x) – ამ ნომრის შესაბამისი მოგებული თანხა!

2. **ფორმულა** (**y = f(x)**) ფუნქციის მოცემის ერთერთი ყველაზე ცნობილი ხერხია, **f** გამოთვლის წესია, რომელიც მათემატიკური ფორმულის სახითაა მოცემული (ანალიზურადაა ჩაწერილი).

- ცხრილისაგან განსხვავებით ამ შემთხვევაში ნებისმიერი (x, f(x)) ასეთი წყვილის ჩაწერა შესაძლებელია, მაგრამ არა ყველას ამოწერა!
მაგალითი 11. წრფივი ფუნქცია **y = f(x) ≡ kx + d;** სადაც x არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის **y = f(x)** ფუნქციის მნიშვნელობა გამოითვლება **kx + d** წესით თანაც საგულისხმოა, რომ **k** და **d** - რიცხვები მოცემული მუდმივი სიდიდეებია ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში!
მაგალითი 9. ლოგარითმული **y = f(x) ≡ lnx, y = f(x) ≡ lgx**
ან ტრიგონომეტრიული **y = f(x) ≡sin(x) , y = f(x) ≡ cos(x)** ფუნქციების ჩანაწერები ფორმულის სახით. ჩხრილები მოცემულია კონკრეტული სასრული რაოდენობა x რიცხვებისათვის, ხოლო ამ შემთხვევაში დაფიქსირებულია ზოგადი წესი, სამართლიანი x არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის!
მაგალითი 12.
ა.) ხარისხოვანი ფუნქცია $y = f(x) \equiv x^k$, სადაც x არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის **y = f(x)** ფუნქციის მნიშვნელობა გამოითვლება x არგუმენტის **k** ხარისხში აყვანით;
ბ.) მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y = f(x) \equiv k^x$, სადაც x არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის **y = f(x)** ფუნქციის მნიშვნელობა გამოითვლება **k რიცხვის** x არგუმენტის ხარისხში აყვანით, **k** - რიცხვი მოცემული მუდმივი სიდიდეა ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში! ეს ორი წესი პრინციპულად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან!
მაგალითი 10. ფულადი ლატარეის მოგებების ცხრილები რაიმე ცნობილი ფორმულის სახით რა თქმა უნდა ვერ მოიცემა, ჩანაწერი **y = f(x)** , მიგვანიშნებდა რა **f** წესითაა **x** (ლატარეის ნომრი) დამოკიდებული **y** -ზე (მოგების თანხა), ჩვეულებრივი ტერმინებით, რომ ვთქვათ რომელი ნომერი რას იგებს! "ფანტასტიკაა"!

3. **გრაფიკი** ფუნქცია მოცემულია **“წირის”** სახით (**“გრაფიკულად”**),



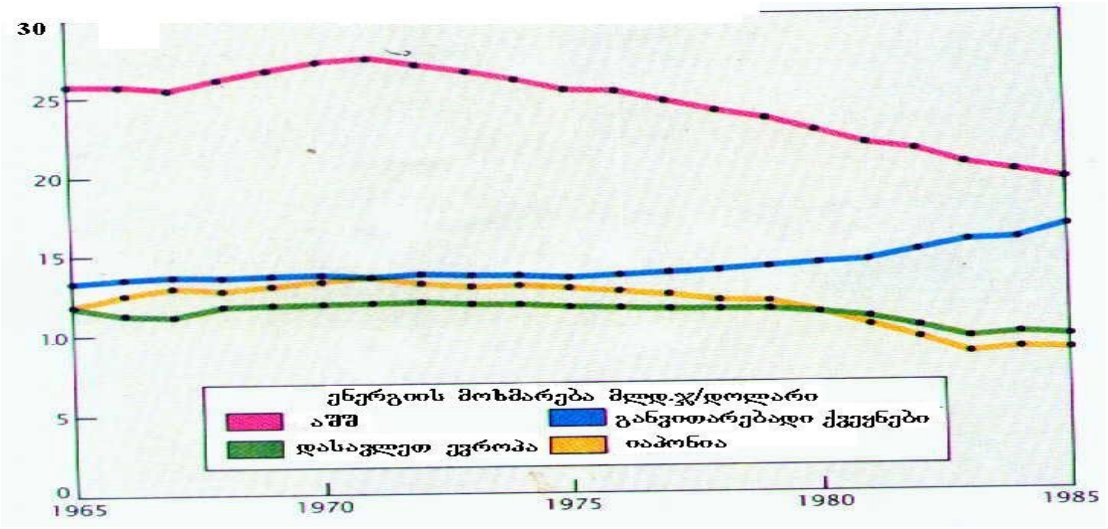
ნახ. 2.2

წირის ყოველი წერტილი არის (x,f(x)) – წყვილის გრაფიკული სახე , რიცხვითი მნიშვნელობების პოვნისას წირიდან უნდა დაუშვათ მართობები x და y ღერძებზე. შესაბამისად მანძილი სათავიდან მართობის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილამდე იქნება წყვილის პირველი რიცხვითი მნისვნელობა, ხოლო მანძილი სათავიდან მართობის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილამდე იქნება წყვილის მეორე რიცხვითი მნისვნელობა (რიცხვითი მნიშვნელობები გამოითვლება რა თქმა უნდა რაღაც სიზუსტით).

მაგალითი 13. კარდიოგრამა! არგუმენტი x – დრო წამებში, f(x) – გადახრის სიდიდე!

ნახ. 2.3

მაგალითი 14. ენერგეიის მსოფლიო მოხმარება (რეალური მონაცემები ჟურნალი “Scientific America”)! არგუმენტი x - წლები, f(x) –ენერგიის მოხმარება იმ წელს (გაზომილია წერმოებული ენერგია გაყოფილი მისი წარმოების დანახარჯზე)



ნახ. 2.4

რა თქმა უნდა კარდიოგრამისაგან განსხვავებით ეს გრაფიკი აგებულია ცხრილური მონაცემების (შავი წერტილების "კოორდინატები" ნახატზე) საფუძველზე და წარმოადგენს უფრო ცხრილური მოცემის მაგალითს და არა გრაფიკულისას. შავი წერტილების შემაერთებელი ფერადი ხაზები გვეუბნება , რომ დროის ამ მონაკვეთში მონაცემი არ გაზომილა და "სავარაუდოდ" ასე იცვლებოდა.

4. **რეკურსია** $\mathbf{Y_{(n+1)} = f(Y_{(n)})}$ ფუნქციის ყოველი შემდეგი (n+1) თე მნიშვნელობა მოცემულია რაღაც წესით მისი წინა n მნიშვნელობისა, ანუ ასე განსაზღვრული ფუნქციის $\mathbf{(n,Y_{(n+1)})}$ წყვილის განსაზღვრა შეუძლებელია თუ არ არის ცნობილი ყველა წინა **n -** ცალი წყვილი.

მაგალითი 15. ფაქტორიალი **n! = 1X2X3X…(n-1)Xn –** ანუ **(n+1)! = n! X (n+1)** . კონკრეტულად **15!** რომ გამოვთვალოთ უნდა მანმადე გამოვთვალოთ **14!,** მანმადე **13!** და ასე შემდეგ.

5. **არამკაფიო** x - არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობა უნდა შემოწმდეს, თუ ის აკმაყოფილებს გარკვეულ თვისებას (ანუ ეკუთვნის გარკვეულ სიმრავლეს) მაშინ მის მნიშვნელობას დაითვლიან f_1 – წესით, თუ არა და მაშინ მას გამოითვლიან f_2 – წესით:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & if \quad x \in M \\ f_2(x) & if \quad x \notin M \end{cases},$$

მაგალითი 16. კონკრეტულად ფუნქციის მაგალითს მე აქ არ მოვიტან, მაგრამ თანადობის მოტანა უპრიანია. M ={ადამიანთა სიმრავლე ვინც ამ მომენტისათვის ჩაიდინა დანაშაული} , $M \subseteq A$ = {საერთოდ ადამიანების სიმრავლე}, x – კონკრეტული ადამიანია. $f_1(x)$ – მიესაჯოს იმდენი წელი (ან ჯარიმა) რაც კანონითაა გათვალისწინებული , თუ $x \in M$ (ანუ თუ ის დამნაშავეა), $f_2(x)$ – არ შევაწუხოთ , თუ $x \notin M$ (ანუ თუ ის არ არის დამნაშავე). ასეთი "ფუნქციის აგება" შეუძლებელია იმიტომ, რომ დადგენა იმისა $x \in M$ თუ $x \notin M$ "ფაქტობრივად" შეუძლებელია!

ლექცია 3 (კონსპექტი)

Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"

ილია თავხელიძე

3.1. - დეკარტის კოორდინატთა სისტემა სიბრტყესა და სივცეში;
3.2 - კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომა; ძირითადი ტრიგონომეტრიული თანადობები;
3.3 პოლარულ კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე,.

3.1. - დეკარტის კოორდინატთა სისტემა სიბრტყესა და სივცეში;

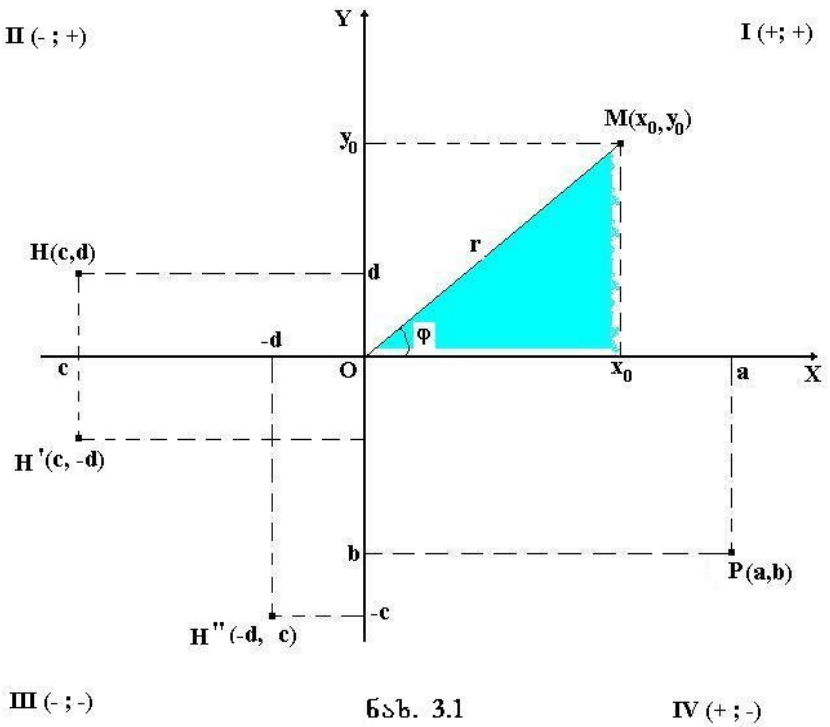
პირველ ლექციაზე მოტანილი იქნა რიცხვის "გეომეტრიული ინტერპრეტაცია": **"რიცხვთა ღერძი"** არის წრფე რომელსაც გააჩნია:

1.) "სათავე" ათვლის საწყისი 0;
2.) "დადებითი მიმართულება" (0 დან "ტრადიციულად მარჯვნივ →, ან ზევით ↑ ") საითაც განთავსდება დადებით ნამდვილ რიცხვეთა სიმრავლე (კლასი $\mathbf{R_+ = R^+ \equiv \{x \mid x \in R \text{ და } x > 0\}}$);
3.) "ერთეულოვანი მონაკვეთი" "საზომი" "მასშტაბი".

"წერტილი სიბრტყეზე" შესაძლებელია თუ არა ასეთი წერტილების აღწერა რიცხვით ან რიცხვებით?

პასუხი ამ კითხვაზე, შესაძლებელი გახდა გამოჩენილი მოაზროვნის რენე დეკარტის 1596-1560 მოღვაწეობის შედეგად, **ერთი რიცხვით შეუძლებელია, ხოლო "დალაგებული წყვილით" შესაძლებელი და თანაც ცალსახად**!

პირველ ლექციაზე 1.1-ში მოტანილი იქნა ორი **A** და **B** სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ცნება - $\mathbf{AXB = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ და } b \in B \}}$. თუ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევას როდესაც ორივე **A** და **B** სიმრავლე რიცხვთა ღერძია ($\mathbf{A = B = R}$), მაშინ ამ ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი მოგვცემს საშუალებას აღვწეროთ სიბრტყის ყოველი წერტილი. მარტივად, რომ ვთქვათ დავადოთ ორი რიცხვთა ღერძი ერთმანეთს ისე, რომ დავამთხვიოთ სათავეები და ამ ორმა ღერძმა ერთმანეთთან შეადგინოს მართი კუთხე (ზოგად შემთხვევაში რაიმე კუთხე, რომელიც არ იქნება 0^0 ან 180^0) იხილე ნახ. 3.1



ნახ. 3.1

მოცემული წერტილის შესაბამის რიცხვთა წყვილს წერტილის კოორდინატები ეწოდება; წყვილის პირველ ელემენტს "აბსცისა" , მეორეს "ორდინატა"

1. მოცემული წერტილიდან დაუშვათ მართობები შესაბამისად **OX** და **OY** ღერძებზე და გადაკვეთის წერტილიდან **O** სათავემდე გადავზომოთ მანძილები შესაბამისად **OX** –ისა და **OY** – ის მაშსტაბებში;
   - **OX** ღეძს "**აბსცისათა ღერძი**", ხოლო **OY** ღეძს "**ორდინატთა ღერძი**" ეწოდება;
   - **OX** და **OY** ღერძებს კოორდინატთა ღერძები ეწოდება;
   - **"აბსცისა"- a** არის **OX** ღეძზე, მანძილი გადაკვეთის წერტილიდან **O** სათავემდე,
   - **"ორდინატა" - b** არის **OY** ღეძზე, მანძილი გადაკვეთის წერტილიდან **O** სათავემდე,
2. **Fig.** 3.1 ზე მოცემული P წერტილისათვის **a -** აბსცისა დადებითი რიცხვია, ხოლო **b -** ორდინატა უარყოფითი;
3. წერტილის აგება მოცემული წყვილით, პირიქითა ალგორითმით ხდება წყვილის პირველი რიცხვი დატანილ უნდა იყოს **OX** ღეძზე და ამ წერტილზე გავლებულ იქნას **OY** ღეძის პარალელური წრფე; წყვილის მეორე რიცხვი დატანილ უნდა იყოს **OY** ღეძზე და ამ წერტილზე გავლებულ იქნას **OX** ღეძის პარალელური წრფე; გადაკვეთის წერტილი არის მოცემული წყვილის შესაბამისი წერტილი სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში;
4. **Fig.** 3.1 ზე მოცემული **H, H'** და **H"** წერტილები და მისი შესაბამისი წყვილები ნათელი მაგალითებია, თუ რას იწვევს წყვილში რიცხვისათვის ნიშნის შეცვლა **(H** და **H')** ან წყვილში რიცხვებისათვის ადგილის შეცვლა **(H"** და **H')**;
   - **OX** და **OY** კოორდინატთა ღერძები სიბრტყეს ოთხ ნაწილად ყოფენ ამ ნაწილებს **"კვადრანტები"** ეწოდებათ და თითოეულ კვადრანტში მარტივად განისაზღვრება საკოორდინატო წყვილში შემავალი რიცხვების ნიშნები; იხილე **Fig.** 3.1 ;
5. **მანძილი კოორდინატთა სათავესა და წერტილს შორის მარტივად განისაზღვრება პითაგორეს თეორემის თანახმად** მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია , ანუ ნებისმიერი წერტილის კოორდინატების კვადრატების ჯამი ტოლია მანძილისა ამ წერტილსა და კოორდონატთა სათავეს შორის;
6. შესაბამისად, დაუშვათ **r** არის მანძილი მოცემული წერტილი **M** –დან **O** სათავემდე **(**მაგალითად **Fig.** 3.1 ზე მოცემულია წერტილი **M (x₀ , y₀)** და მისი დაშორება სათავემდე არის **|OM| = r,** შესაბამისად **OMx₀** მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაა **OM** და როგორც უკვე ვთქვით **r** მისი სიგრძეა; კათეტების სიგრძე კოორდინატების რიცხვითი მნიშვნელობის ტოლია, ანუ **|Ox₀| = |x₀|** და **| Mx₀ | = |y₀|;**

პითაგორეს თეორემის თანახმად

$$|OM|^2 = |Ox_0|^2 + |Mx_0|^2;$$

ანუ

$$r^2 = |x_0|^2 + |y_0|^2; \qquad (3.1)$$

3.2 - კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომა; ძირითადი ტრიგონომეტრიული თანადობები;

ხშირია შემთხვევები როდესაც საკმარისად ძნელია მოცემული წერტილისათვის დეკარტული წყვილის დადგენა! განსაკუთრებით ეს სიძნელე თავს იჩენდა და იჩენს დიდი მასშტაბის გაზომვების (ეზოს, ზღვის რაიმე უბნის, უდაბნოს ნაწილისა და სხვა (უგულვებელყოფილია სიმაღლე!)) ჩატარებისას; ამავე დროს შედარებით მარტივია გაიზომოს მანძილი ორ წერტილს შორის;

უძველესი დროიდან კაცობრიობამ სიგრძის საზომი ერთეულებისა და ხელსაწყოების პარალელურად შემოიტანა კუთხის საზომი ერთეულები და რა თქმა უნდა კუთხის სიდიდის გამზომი ხელსაწყოები;

პირველ ლექციაზე 1.4 ში მოტანილ იქნა კუთხის სიდიდის საზომი ერთეულები:

- **"გრადუსი"** (სრული კუთხის, წრის, სამასმესამოცედი ნაწილი);
- **"რადიანი"** (1 რადიანი იმ კუთხის შესაბამისი ზომაა, როდესაც წრეწირის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია);

1 "რადიანი"-ს შესაბამისი კუთხე $57^0 17' 44''$- ია.
1^0 ერთი "გრადუსი" იყოფა 60 "მინუტად", ანუ $1^0 = 60'$;
$1'$ ერთი "მინუტი" იყოფა 60 "სეკუნდად", ანუ $1' = 60''$;

მართკუთხა სამკუთხედში დავაფიქსიროთ რომელიმე არამართი კუთხე; მაშინ ამ **კუთხის მოპირდაპირე** კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან არის ამ **კუთხის "სინუსი";**

მართკუთხა სამკუთხედში დავაფიქსიროთ რომელიმე არამართი კუთხე; მაშინ ამ **კუთხის მიმდებარე** კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან არის ამ **კუთხის "კოსინუსი";**

მართკუთხა სამკუთხედში დავაფიქსიროთ რომელიმე არამართი კუთხე; მაშინ ამ **კუთხის მოპირდაპირე** კათეტის შეფარდება ამავე **კუთხის მიმდებარე** კათეტთან არის ამ **კუთხის "ტანგენსი";**

მაგალითისათვის **Fig.** 3.1 ზე მოცემულ მართკუთხა სამკუთხედში დაფიქსირებულია კუთხე $\angle \mathbf{MOx_0} = \boldsymbol{\varphi}$ შესაბამისად უკვე შემოღებულ აღნიშვნებში

$$\sin \angle \mathbf{MOx_0} \equiv \sin \boldsymbol{\varphi} \equiv \frac{|Mx_0|}{|OM|} \equiv \frac{y_0}{r}; \qquad \mathbf{(3.2)}$$

$$\cos \angle \mathbf{MOx_0} \equiv \cos \boldsymbol{\varphi} \equiv \frac{|Ox_0|}{|OM|} \equiv \frac{x_0}{r}; \qquad \mathbf{(3.3)}$$

$$\operatorname{tg} \angle \mathbf{MOx_0} \equiv \operatorname{tg} \boldsymbol{\varphi} \equiv \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \equiv \frac{|Mx_0|}{|Ox_0|} \equiv \frac{y_0}{x_0}; \qquad \mathbf{(3.4)}$$

- აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ ასეთი განმარტება სამართლიანია როდესაც კუთხე $\boldsymbol{\varphi}$ იცვლება 0^0 გრადუსიდან 360^0 მდე; განმსაზღვრელ (3.2) და (3.3) ფორმულებში კოორდინატები $\mathbf{x_0}$ და $\mathbf{y_0}$ მონაწილეობენ თავისი როგორც რიცხვითი მნიშვნელობით აგრეთვე ნიშნის გათვალისწინებით; რიცხვი $\mathbf{r}$ არის "მანძილი" და რა თქმა უნდა დადებითი სიდიდეა;
- პრაქტიკაში მიღებულია თუ ცნობილია კუთხე შესაბამისად ცხრილებისა და ეხლა უკვე კალკულატორებისა თუ კომპიუტერის საშუალებით შესაძლებელია ამ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების "მიახლოებითი" განსაზღვრა;
- პრაქტიკაში მიღებულია თუ ცნობილია კუთხის რომელიმე ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობა შესაბამისად ცხრილებისა და ეხლა უკვე კალკულატორებისა თუ კომპიუტერის საშუალებით შესაძლებელია თვით ამ კუთხის "მიახლოებითი" განსაზღვრა;
- მართკუთხა სამკუთხედში თუ ცნობილია ერთი არამართი კუთხე და რომელიმე გვერდი შესაბამისად (3.2 3.3 და 3.4) ფორმულებიდან შესაძლებელია დანარჩენი ორი გვერდის განსაზღვრა.
- თუ ავიყვანთ (3.2 და 3.3) ფორმულების ორივე მხარე კვადრატში და ერთმანეთს მიუმატებთ გვექნება

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left(\frac{y_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2 = 1, \qquad (3.5)$$

ბოლო ტოლობა პითაგორეს თეორემის თანახმადაა დაწერილი (იხილე (3.1));

- ცხადია, რომ ნებისმიერი კუთხის სინუსი და კოსინუსი 0 სა და 1-ს შორის ღებულობს მნიშვნელობებს (ფორმულები (3.2) და (3.3) კათეტი ყოველთვის ნაკლებია ჰიპოტენუზაზე!);
- ტოლფდერდა ("ტოლკათეტა") მართკუთხა სამკუთხედში არამართი კუთხეების სინუსი და კოსინუსი ტოლებია ხოლო ტაქნგენსი ერთიანის ტოლია;

3.3 პოლარულ კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

დაუბრუნდეთ წერტილს სიბრტყეზე და შესაძლებლობას მისი აღწერისა რიცხვთა წყვილებით კოორდინატებით!

დეკარტული კოორდინატების პარალელურად შესაძლებელია მრავალი საკოორდინატო სისტემის შემოტანა, მაგრამ ჩვენ ყურადღებას შევაჩერებთ **"პოლარულ კოორდინატთა სისტემაზე".**

"პოლარულ კოორდინატთა სისტემის განსაზღვრისათვის .

1. უნდა აირჩეს **"პოლუსი"** სათავე **O**;
2. **"პოლარული ღერძი"** დადებითი რიცხვთა ღერძი **Op** (მასშტაბითა და დადებითი მიმართულებით)**;**

მოცემული წერტილის შესაბამის რიცხვთა წყვილს წერტილის პოლარული კოორდინატები ეწოდება;

- **წყვილის პირველ ელემენტს წარმოადგენს მანძილი პოლუსიდან წერტილამდე "პოლარული რადიუსი";**
- **წყვილის მეორე ელემენტს წარმოადგენს კუთხე პოლარული ღერძიდან პოლუსსა და წერტილს შორის შემაერთებელ მონაკვეთამდე "პოლარული კუთხე"; კუთხე იზომება პოლაპული ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით;**

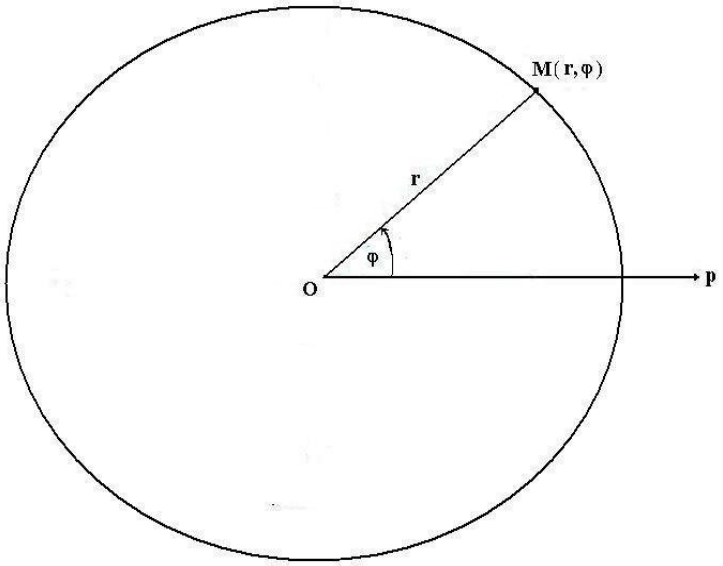
მაგალითის სახით თუ მოცემულია წერტილი **M** მაშინ მისი შესაბამისი პოლარულ კოორდინატთა **(r, φ)** წყვილის დასადგენად უნდა გაიზომოს **|OM| = r** მანძილი ამ წერტილიდან პოლუსამდე და ეს არის წყვილის პირველი ელემენტი; შემდეგ უნდა გაიზომოს **φ** -კუთხე **Op** პოლარულ ღერძსა და **OM** მონაკვეთს შორის (კუთხე იზომება პოლაპული ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით) და ეს არის წყვილის მეორე ელემენტი**;** (იხილე fig. 3.2);

მაგალითის სახით თუ მოცემულია წერტილის **(r, φ)** პოლარული კოორდინატები, მაშინ **O** პოლუსზე უნდა აიგოს **r** რადიუსის წრე და მერე მოიზომოს პოლარული ღერძიდან კუთხე **φ** (იხილე fig. 3.2);

ცხადია, რომ არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება წყვილში ადგილების შენაცვლება წყვილის პირველი ელემენტი იზომება სიგრძის ერთეულებში, ხოლო მეორე კუთხის ზომის ერთეულებში!]

აგრეთვე ცხადია, რომ პოლარული კოორდინატების ორივე ელემენტი დადებითი რიცხვია: პირველი მანზილია!; მეორე კუთხე **$(0^0, 360^0)$;**

ძალზე მნიშვნელოვანი საკითხია როგორ გავიგოთ დეკარტის კოორდინატები თუ ვიცით პოლარული კოორდინატები? და პირიქით როგორ გავიგოთ პოლარული კოორდინატები, თუ ცნობილია დეკარტული კოორდინატები?



ნახ. 3.2

პასუხი დასმულ ორივე შეკითხვაზე პითაგორეს თეორემასა (ფორმულა (3.1)) და (3.2)-(3.4) ფორმულებშია!

1. ცნობილია **M** წერტილის დეკარტის კოორდინატები **(x_0 , y_0)** მაშინ ფორმულა (3.1) დან განისაზღვრება პოლარული რადიუსი, ხოლო (3.4) ფორმულიდან პოლარული კუთხე

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\varphi = arctg\,\frac{y_0}{x_0} \tag{3.6}$$

რადგან თავიდან ნებისმიერი წერტილია განხილული ფორმულა (3.6) სამართლიანია ნებისმიერი წერტილისათვის! (იხილე fig. 3.1).

2. ცნობილია **M** წერტილის პოლარული კოორდინატები **(r, φ)** მაშინ ფორმულა (3.2) და (3.3) ცალსახად განსაზღვრავს დეკარტის კოორდინატებს

$$\mathbf{x_0 = r\cos\varphi\ ,\ \ y_0 = r\sin\varphi\ ;} \tag{3.7}$$

მაგალითები:

ა.) თუ (3.7) ფორმულაში **r** მუდმივი სიდიდეა და **φ** ცვლადი**,** მაშინ **{(x_0 , y_0)}** წერტილთა სიმრავლე არის **r –** რადიუსის მქონე წრე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში:

ბ.) თუ (3.7) ფორმულაში **φ** მუდმივი სიდიდეა და **r** ცვლადი**,** მაშინ **{(x_0 , y_0)}** წერტილთა სიმრავლე არის იმ სხივის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც კუთხითაა დახრილი პოლარულ ღერძთან.

ლექცია 4. (კონსპექტი)

Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"

ილია

4.1. - დეკარტის კოორდინატთა სისტემა სივცეში;
4.2 ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა;
4.3 სფერულ კოორდინატთა სისტემა.

4.1. - დეკარტის კოორდინატთა სისტემა სივცეში;

პირველ ლექციაზე მოტანილი იქნა რიცხვის "გეომეტრიული ინტერპრეტაცია": **"რიცხვთა ღერძი"** არის წრფე რომელსაც გააჩნია:

1.) "სათავე" ათვლის საწყისი 0;
2.) "დადებითი მიმართულება" (0 დან "ტრადიციულად მარჯვნივ →, ან ზევით ↑ ") საითაც განთავსდება დადებით ნამდვილ რიცხვეთა სიმრავლე (კლასი $\mathbf{R_+ = R^+ \equiv \{x \mid x \in R \text{ და } x > 0\}}$);
3.) "ერთეულოვანი მონაკვეთი" "საზომი" "მასშტაბი".

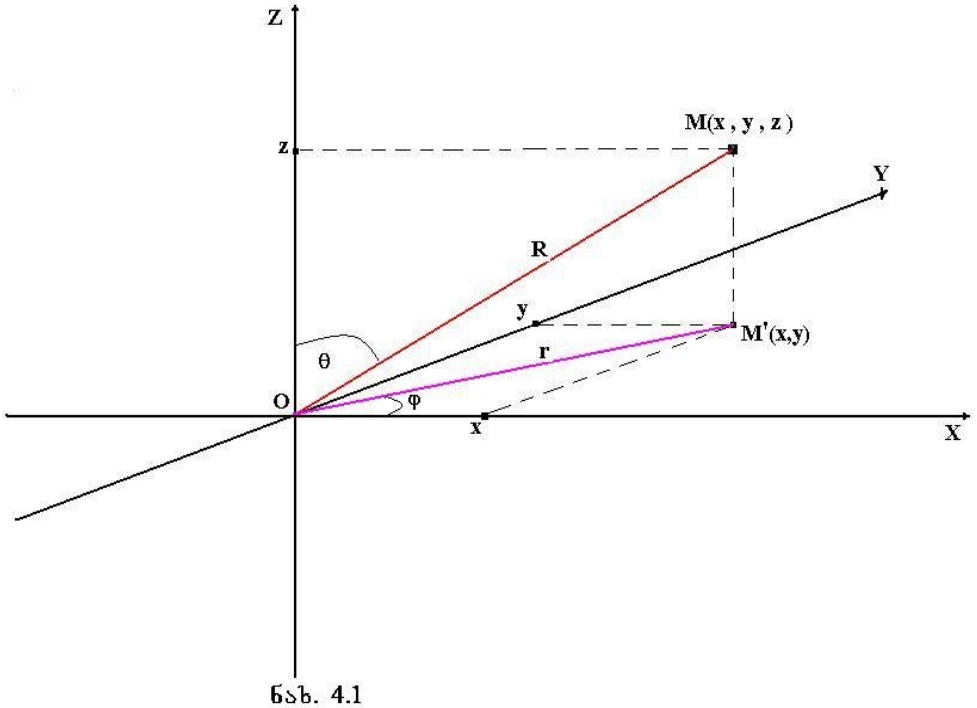
მესამე ლექცია მთლიანად მიეძღვნა "წერტილი სიბრტყეზე"! რეალობაში საჭიროა წერტილის აღწერა სივრცეში!

წრფეზე წერტილის აღწერა ერთი რიცხვითაა შესაძლებელი – "რიცხვთა ღერძი" !
სიბრტყეზე წერტილის აღწერა "დალაგებული წყვილითაა" შესაძლებელი!
სივრცეში წერტილის აღწერა "დალაგებული სამეულითაა" ("ტრიადა") შესაძლებელი"

პირველ ლექციაზე 1.1-ში მოტანილი იქნა ორი **A** და **B** სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ცნება - $\mathbf{AXB = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ და } b \in B \}}$. თუ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევას როდესაც **A** სიმრავლე სიბრტყეა (იხილე ლექცია 3.) და **B** სიმრავლე რიცხვთა ღერძია, მაშინ ამ ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი მოგვცემს საშუალებას აღვწეროთ სივრცის ყოველი წერტილი ანუ

$$\mathbf{R^3 \equiv AXB = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ და } b \in B \} \equiv \{ (a,b,c) \mid a \in R,\ b \in R \text{ და } c \in R \}}$$

მარტივად, რომ ვთქვათ დავადოთ სამი რიცხვთა ღერძი ერთმანეთს ისე, რომ დავამთხვიოთ სათავეები და ამ სამმა ღერძმა ერთმანეთთან შეადგინოს მართი კუთხე იხილე ნახ. 4.1



ნახ. 4.1

მოცემული წერტილის შესაბამის რიცხვთა დალაგებულ სამეულს წერტილის კოორდინატები ეწოდება; (მაგალითი იხილე ნახ. 4.1)

მოცემული წერტილიდან დაუშვათ **მართობი** შესაბამისად **OXY სიბრტყის** გადაკვეთამდე და შემდეგ ამ წერტილიდან დაუშვათ მართობები **OX** და **OY** ღერძების გადაკვეთამდე. Fig. 4.1 მოცემულ ნახაზზე მიღებულ აღნიშვნებში:

- **OX, OY** და **OZ** ღერძებს კოორდინატთა ღერძები ეწოდება;
- **OXY, OYZ** და **OXZ საკოორდინატო** სიბრტყეებია;
- **M (x, y, z) -** მოცემული წერტილია;
- **M' (x, y) -** მოცემული წერტილის **გეგმილია OXY** სიბტრტყეზე;
- **|MM'| -** მანძილი მოცემილი წერტილიდან თავის გეგმილამდე **OXY** სიბრტყეზე;
- მოცემული წერტილის **"აბსცისა" - x** არის წერტილი **OX** ღეძზე, შესაბამისად გააჩნია რიცხვითი მნიშვნელობა **- |Ox|** და ნიშანი;
- მოცემული წერტილის **"ორდინატა" - y** არის წერტილი **OY** ღეძზე, შესაბამისად გააჩნია რიცხვითი მნიშვნელობა **- |Oy|** და ნიშანი;
- მოცემული წერტილის სიმაღლე **- z** არის წერტილი **OZ** ღეძზე, შესაბამისად გააჩნია რიცხვითი მნიშვნელობა **- |Oz|= |MM'|** და ნიშანი;

2. **Fig.** 4.1 ზე მოცემული M წერტილისათვის **x, y** და **z -** დადებითი რიცხვებია;
3. წერტილის აგება მოცემული **(x, y, z)** ტრიადით, პირიქითა ალგორითმით ხდება ტრიადის პირველი რიცხვი **x** დატანილ უნდა იყოს **OX** ღეძზე და ამ წერტილზე გავლებულ იქნას **OY** ღეძის პარალელური წრფე; ტრიადის მეორე რიცხვი **y** დატანილ უნდა იყოს **OY** ღეძზე და ამ წერტილზე გავლებულ იქნას **OX** ღეძის პარალელური წრფე; გადაკვეთის წერტილი არის მოცემული წერტილის **OXY** სიბრტყეზე გეგმილის შესაბამისი წერტილი **M' (x, y)** და ამ წერტილიდან **OZ** ღერძის პარალელურ წრფეზე გადაიზომოს **z** სიდიდე შედეგად მივიღებთ სივრცეში **M (x, y, z)** წერტილის გეომეტრიულ ადგილს;
4. **მანძილი კოორდინატთა სათავესა და მოცემულ წერტილს შორის მარტივად განისაზღვრება პითაგორეს თეორემის თანახმად** წინა ლექციიდა განსხვავებით ეს დებულება ორჯერ ზედიზედ უნდა იქნეს გამოყენებული; **შესაბამისად ნებისმიერი წერტილის კოორდინატების კვადრატების ჯამი ტოლია მანძილისა ამ წერტილსა და კოორდონატთა სათავეს შორის;**
5. შესაბამისად, დაუშვათ **R** არის მანძილი მოცემული წერტილი **M** –დან **O** სათავემდე **(**მაგალითად **Fig.** 4.1 ზე მოცემულია წერტილი **M (x, y, z),** მისი დაშორება სათავემდე **|OM| = R** და მისი **OXY** სიბრტყეზე გეგმილი **M' (x, y,),** შესაბამისად **OM'x** მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაა **OM' = r ,** ხოლო **OMM'** მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაა **OM = R ;** შესაბამისად:

$$|Ox| = |x| = |M'y| \,;\; |M'x| = |y_0| = |Oy| \quad \text{და} \quad |MM'| = |z| = |Oz| \;;$$

პითაგორეს თეორემის თანახმად

$$|OM'|^2 = |Ox_0|^2 + |Mx_0|^2 \quad \text{და} \quad |OM|^2 = |OM'|^2 + |MM'|^2;$$

ანუ

$$r^2 = |x|^2 + |y|^2 \tag{4.1}$$

და

$$R^2 = |z|^2 + r^2 \qquad \text{ანუ} \qquad R^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \;; \tag{4.2}$$

4.2 ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა

დაუბრუნდეთ წერტილს სივრცეში და შესაძლებლობას მისი აღწერისა რიცხვთა ტრიადის (კოორდინატების) საშუალებით !

დეკარტული მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის პარალელურად შესაძლებელია მრავალი საკოორდინატო სისტემის შემოტანა, მაგრამ ჩვენ ყურადღებას შევაჩერებთ **"ცილინდრულ** და **სფერულ** კოორდინატთა სისტემებზე".

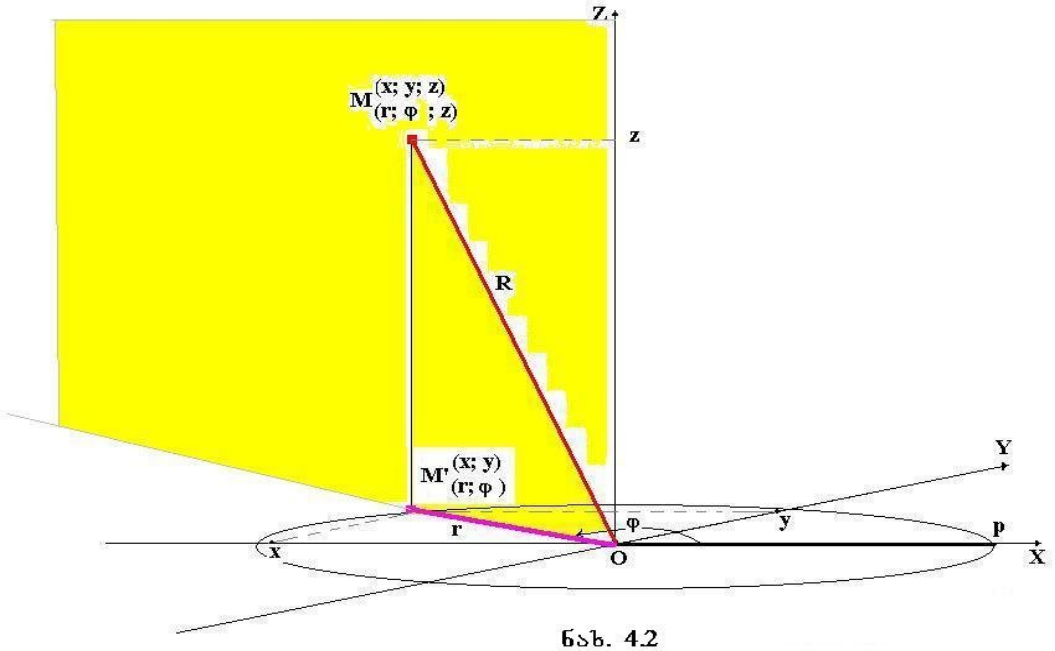
"ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემის განსაზღვრისათვის .

1. "არჩეულია" სიბრტყე და მასზე შემოღებულია პოლარული კოორდინატთა სისტემა (იხილე ლექცია 3.2) ანუ
   - **"პოლუსი"** სათავე **O** ;
   - **"პოლარული ღერძი"** დადებითი რიცხვთა ღერძი **Op** (მასშტაბითა და დადებითი მიმართულებით);
2. არჩეული სიბრტყის პერპენდიკულარულად (მართობულად) გავლებულია რიცხვთა ღერძი რომლის **სათავე** ემთხვევა **"პოლუსს"!**
3. **განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც დეკარტის მართკუთხა OXYZ სისტემათა კოორდინატების სისტემა და ცილინდრულ კოორდინატთა OpZ სისტემის:**
   - **სათავეები ემთხვევიან O;**
   - **OXY** სიბრტყე ემთხვევა "არჩეულ" სიბრტყეს;
   - **OX** ღერძი და **Op** პოლარული ღერძები ერთმანეთს ემთხვევიან;
   - **OZ** ღერძი ორივე სისტემას საერთო აქვთ. **(Fig. 4.2)**
4. მოცემულია წერტილი **M (x, y, z),** მაშინ ცხადია, რომ მისი **OXY** სიბრტყეზე გეგმილია **M' (x, y).** გავიხსენოთ ლექცია **3.2** შევნიშნოთ, რომ **M' (x, y)** წერტილის პოლარული კოორდინატები **(r, φ),** (3.6) ფორმულებით განისაზღვრებიან, ანუ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad z = z\,; \tag{4.3}$$

5. მოცემულია წერტილი **M(r, φ , z),** მაშინ ცხადია, რომ მისი **OXY** სიბრტყეზე გეგმილია **M' (r, φ).** გავიხსენოთ ლექცია **3.2** შევნიშნოთ, რომ **M' (r, φ)** წერტილის დეკარტული კოორდინატები **(x, y)** (3.7) ფორმულებით განისაზღვრებიან, ანუ

$$\mathbf{x = r\cos\varphi\ ,\ \ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z;} \tag{4.4}$$



ნახ. 4.2

მაგალითები:

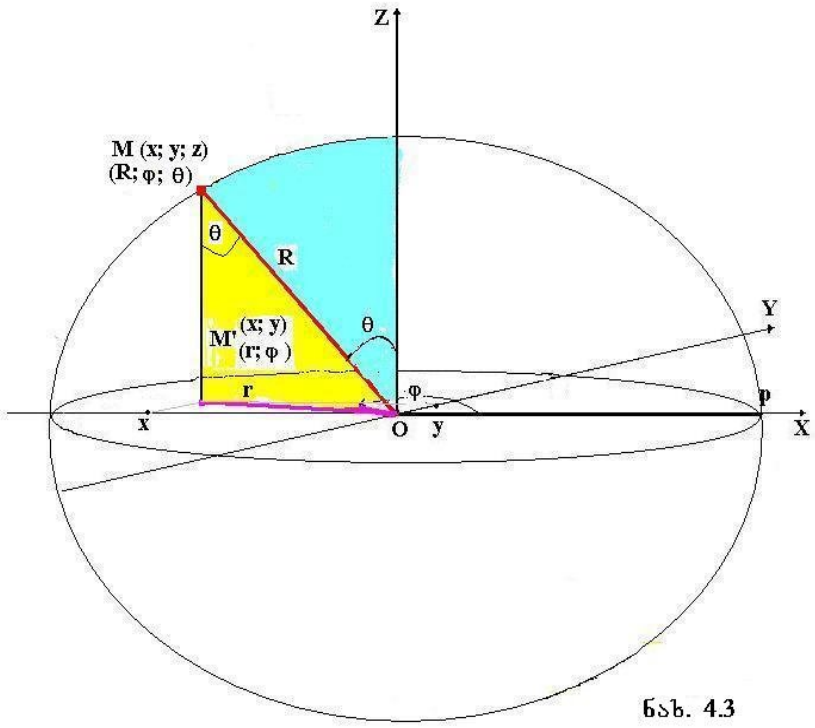
I. თუ (4.4) ფორმულაში **r = const.** მუდმივი სიდიდეა და **φ** ცვლადი, მაშინ წერტილთა **{(x , y, z)}** სიმრავლე არის **r –** რადიუსის მქონე წრის განივი კვეთის მქონე ცილინდრი (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში) (**Fig. 4.2 –**ზე განივი კვეთი **r = |OM'|** რადიუსის წრე, მსახველი MM'**)**;

II. თუ (4.4) ფორმულაში **φ = const.** მუდმივი სიდიდეა და **r** ცვლადი**,** მაშინ **{(x , y, z)}** წერტილთა სიმრავლე არის იმ ნახევარსიბრტის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ადგენს **φ** კუთხეს **OXZ** დსნახევარსიბრტყესთან; (**Fig. 4.2 –**ზე **OM'M** სამკუთხედზე მოჭიმული ნახევარსიბრტყე , საზღვარი **OZ -** ღერძი**)**;

III. თუ (4.4) ფორმულაში **z = const.** მუდმივი სიდიდეა, მაშინ **{(x , y, z)}** წერტილთა სიმრავლე არის იმ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც გადის **M** წერტილზე და **OXZ** სიბრტყის პარალელურია;

4.3 სფერულ კოორდინატთა სისტემა

"სფერულ კოორდინატთა სისტემის განსაზღვრისათვის . როგორც წინა შემთხვევაში



ნახ. 4.3

1. "არჩეულია" სიბრტყე და მასზე შემოღებულია პოლარული კოორდინატთა სისტემა:
"პოლუსი" სათავე **O** და **"პოლარული ღერძი"** დადებითი რიცხვთა ღერძი **Op;**
2. არჩეული სიბრტყის პერპენდიკულარულად (მართობულად) გავლებულია რიცხვთა ღერძი **OZ,** რომლის **სათავე** ემთხვევა **"პოლუსს"!**

დეკარტის მართკუთხა OXYZ სისტემათა კოორდინატების სისტემა და სფერულ კოორდინატთა სისტემის (აღნიშვნები და გრაფიკული სურათი, სიმარტივისათვის იხილე მაგ. **Fig. 4.3 -**ზე**) :**

- **სათავეები ემთხვევიან O;**
- **OXY** სიბრტყე ემთხვევა "არჩეულ" სიბრტყეს;
- **OX** ღერძი და **Op** პოლარული ღერძები ერთმანეთს ემთხვევიან;

- **R = |OM| - სფერული რადიუსია (მანძილი წერტილიდან სათავემდე სივრცეში;**
- **r = |OM'| - პოლარული რადიუსია (**მანძილი **M (x, y, z)** წერტილის **OXY** სიბრტყეზე **M' (x, y)** გეგმილიდან სათავემდე;
- **φ - პოლარული კუთხე ("გრძედი") - Op** პოლარული ღერძსა და **OM'** გეგმილის რადიუსვექტორს შორის;
- **θ - კუთხე - OZ** ღერძსა და **OM - სფერული რადიუსს შორის**;
- **"გეოგრაფიული განედი" Θ ≡** $\frac{\pi}{2} - \theta$ **- კუთხე OXY** სიბრტყესა და **OM** სფერული რადიუსს შორის;
- მართკუთხა სამკუთხედ **OMM'** ში კუთხე

$$\angle \mathbf{M'MO} = \theta \text{ და } \angle \mathbf{MO\,M'} = \Theta \equiv \frac{\pi}{2} - \theta; \qquad (4.5)$$

6. მოცემულია წერტილი **M (R, φ , θ),** მაშინ ცხადია, რომ მისი **OXY** სიბრტყეზე გეგმილია **M' (r, φ)** და სამკუთხედი **OMM'**-ში (4.1), (4.2) და (4.5) თანადობების თანახმად

$$\mathbf{x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta;} \qquad \mathbf{(4.6)}$$

ან "გეოგრაფიულ კოორდინატებში"

$$\mathbf{x = r\cos\varphi\cos\Theta\ ,\ \ y = r\sin\varphi\cos\Theta\ ,\ \ z = r\sin\Theta\ ;} \qquad \mathbf{(4.6^*)}$$

7. მოცემულია წერტილი **M (x, y, z),** მაშინ ცხადია, რომ მისი **OXY** სიბრტყეზე გეგმილია **M' (x, y).** შესაბამისად (4.1), (4.2), (4.3) და (4.5) თანადობების თანახმად წერტილის სფერული **(R, φ, Θ)** კოორდინატები შემდეგი ფორმულებით განისაზღვრებიან:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad \Theta = arctg\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \mathbf{(4.7)}$$

მაგალითები:

- თუ სფერულ კოორდინატთა სისტემაში **R = const.** მუდმივია და **φ, Θ -** ცვლადები, მაშინ წერტილთა **{(x , y, z)}** - სიმრავლე არის მუდმივი რადიუსის სფერული ზედაპირი. შესაბამისად ამ საკოორდინატო სისტემას უდიდესი პრაქტიკული გამოყენება ჰქონდათ და აქვთ გეოგრაფიაში! პირველ მიახლოებაში დედამიწა სფეროა და მისი რადიუსი ფიქსირებულია (**R ≈ 6400 კმ.)** ცვლადები **Θ - განედები** და **φ - გრძედები.** (იხილე ლექცია **1.1. ა**.).
- თუ სფერულ კოორდინატთა სისტემაში **R** და φ მუდმივი სიდიდეებია და იცვლება მხოლოდ **Θ,** მაშინ წერტილთა **{(x , y, z)}** - სიმრავლე არის - **გრძედი**, (მართლაც, როდესაც ვამბობთ "გრივნიჩის მერიდიანი" ვაფიქსირებთ, რომ **φ** = 0;
- თუ სფერულ კოორდინატთა სისტემაში **R** და **θ** მუდმივი სიდიდეებია და იცვლება მხოლოდ **φ,** მაშინ წერტილთა **{(x , y, z)}** - სიმრავლე არის - **განედი**, (მართლაც, როდესაც ვამბობთ: "ეკვატორი" ვაფიქსირებთ, რომ **Θ** = 0, ან "სამხრეთ პოლუსი" **Θ = - 90⁰ ;**

ლექცია 5. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

5.0. სკალარული სიდიდეები;

სკალარულია სიდიდე, თუ მისი სიდიდე ხასიათდება მხოლოდ მისი რიცხვითი მნიშვნელობით. სკალარები ლათინური ასოებით აღინიშნებიან.

სკალარული სიდიდეების მაგალითებია: ტემპერატურა, წნევა, ასაკი, სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, მასა, ტენიანობა და მრავალი სხვა.

მოქმედებები სკალარებზე იგივეა რაც მოქმედებები რიცხვით სიდიდეებზე.

სკალარული სიდიდე სივრცეში "მიბმულია" წერტილზე, რომელიც მოიცემა დეკარტული კოორდინატებით **M(x,y,z,) .**

სივრცეში ორ M(x,y,z,) და $M_1(x_1,y_1,z_1,)$ წერტილს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$|MM_1| \equiv |M - M_1| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \qquad \textbf{(5.0)}$$

5.1. - ვექტორული სიდიდეები

ვექტორი მიმართული მონაკვეთი, რომლის ერთ ბოლოს საწყისი, ხოლო მეორეს ბოლო ეწოდება. ვექტორები ლათინური ასოების წყვილებით აღინიშნებიან **AB** ან $\overrightarrow{AB}$, თანაც პირველი ასო A - საწყისია და მეორე B – ბოლო. ხშირად ვექტორები ერთი ლათინური ასოთი აღინიშნებიან **a, b, A, B.**

ვექტორული სიდიდე ხასითდება

1. არაუარყოფითი რიცხვითი სიდიდით (სიგრძე ან ვექტორის მოდული) |AB|;
2. მიმართულებით, ვექტორი მიმართულია A წერტილიდან B წერტილისაკენ.

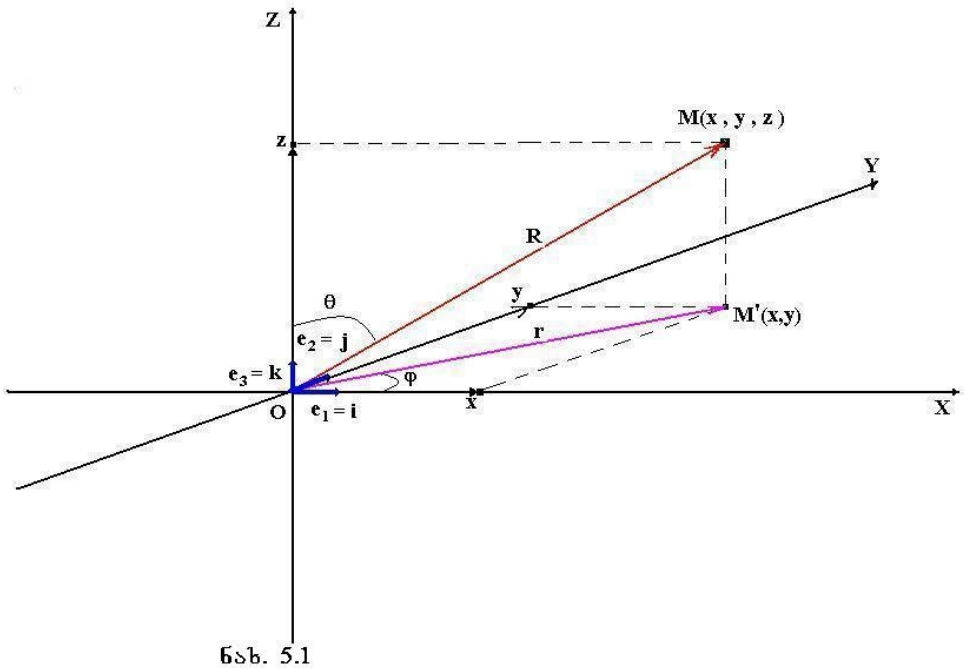
- **ერთეულოვანია ვექტორი**, თუ მისი სიგრძე ერთიანის ტოლია;
- **ნულოვანი ვექტორის** სიგრძე ნულია და მას მიმართულებაც არ გააჩნია;
- ორი ვექტორი **ტოლია** თუ პარალელური გადატანის შედეგად ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან;
- ორი ვექტორი **ტოლია** თუ მათი მოდულები და მიმართულებები ემთხვევიან; **-** მაშინ მათ **თავისუფალი ვექტორები** ეწოდებათ;
- ვექტორები, რომლებიც ერთი ვექტორიდან წრფის გასწვრივ პარალელური გადატანის შედეგად მიიღებიან **მოსრიალე ვექტორები** ეწოდებათ;
- თუ ვექტორის გადატანა ფიზიკური მოსაზრების გამო დაუშვებელია (ვექტორს გააჩნია **მოდების წერტილი**) მაშინ მას **დაბმულ ვექტორს** უწოდებენ.
- დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მიღებულია , რომ ერთეულოვანი ვექტორები, რომლებიც ღერძების გასწვრივ არიან განთავსებულნი ძირითადი "მგეზავები" ან "ორტები" ეწოდებათ

$$\mathbf{i \equiv e_1 = (1,0,0,) \in OX, \quad j \equiv e_2 = (0,1,0,) \in OY, \quad k \equiv e_3 = (0,0,1,) \in OZ;} \qquad \textbf{(5.1)}$$

- **(e_1, e_2, e_3) - სისიტემას მარჯვენა სისტემა ჰქვია; $(e_1, e_2, -e_3)$ მარცხენა სისტემაა (იხილე fig.5.2);**

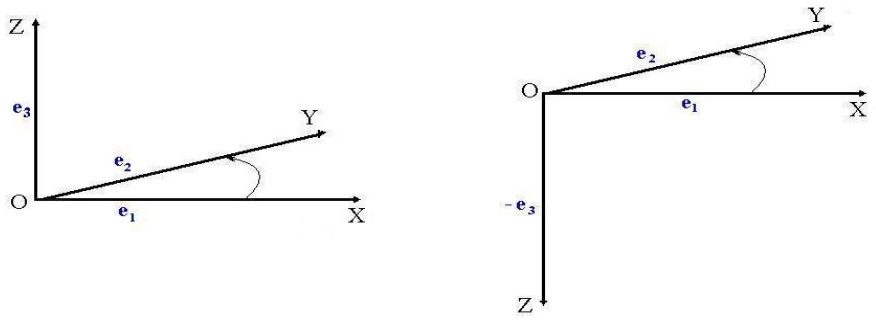
მარჯვენა და მარცხენა სისტემები მეცნიერებაში წარმოიშვება შეთანხმების საფუძველზე! შემდგომ ყველა ვექტორული სიდიდე ამ შეთანხმების შედეგად განისაზღვრება!

მაგალითისათვის: განვიხილოთ ფიგ. 5.1-ზე გამოსახული **M** წერტილის კოორდინატები **(x, y, z)** და მაშინ ვექტორი **OM** განმარტების თანახმად ჩაიწერება შემდეგი **(0,0,0; x,y,z)** სახით**.**



ნახ. 5.1

შეთანხმება: როდესაც ვექტორი კოორდინატთა სათავეშია "მოდებული" მაშინ იწერება მწოლოდ "წვეროს" კოორდინატები , ანუ შეთანხმების თანახმად ვექტორი OM = (x, y, z). ამას გარკვეული გამართლებაც აქვს და ახსნაც! სფერულ კოორდინატებში OM რადიუსვექტორია, ანუ M წერტილის დეკარტული კოორდინატებია (x, y, z), ანუ რადიუსვექტორის წვეროს კოორდინატები (4.7).



ნახ. 5.2

5.2. მოქმედებები ვექტორებზე

1. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება α AB.

AB ვექტორის ნამრავლი α რიცხვზე - α AB არის ვექტორი, რომლის:

- **სიგრძე** არის **|α AB| = |α| |AB|;**

- **მიმართულება ემთხვევა AB** ვექტორის მიმართულებას, თუ რიცხვი დადებითია $\alpha>0$ და არის **AB** ვექტორის მიმართულების **საწინააღმდეგო**, თუ რიცხვი უარყოფითია **$\alpha<0$.**

მაგალითისათვის: განვიხილოთ fig. 5.1-ზე გამოსახული OM ვექტორის კოორდინატები (x, y, z) და მათ შესაძლოა თითოეულს შევხედოთ როგორც ვექტორს, ანუ მოცემულია სამი ვექტორი:

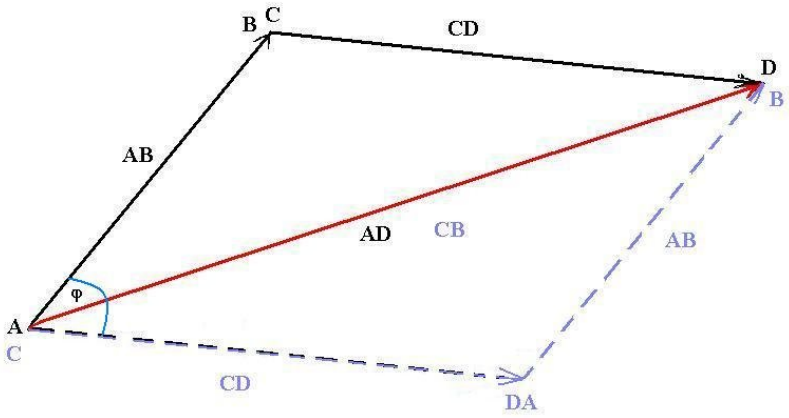
$$\overrightarrow{Ox} = \vec{x} = x\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{Oy} = \vec{y} = y\vec{e}_2, \quad \overrightarrow{Oz} = \vec{z} = z\vec{e}_3; \tag{5.2}$$

შენისვნა: AB ვექტორის საპირისპირო ვექტორია **AB.**

2. ვექტორების ჯამი AB + CD.

AB და **CD** **ვექტორების ჯამი არის ვექტორი AD, რომელიც მიიღება ე.წ. პარალელოგრამის დიაგონალის სახით** (იხილე Fig.5.3). ასევე განმარტების თანახმად **CD** და **AB** ვექტორების ჯამი არის ვექტორი **CB** (იხილე Fig.5.3 – ციფერი ნაწილი), ამიტომ ცხადია, რომ ზოგადად (კერძო შემთხვევა იხილე Fig.5.3)

$$\mathbf{CB = CD + AB = AB + CD = AD} \tag{5.3}$$



ნახ. 5.3

მაგალითისათვის: განვიხილოთ fig. 5.1-ზე გამოსახული OM' ვექტორი. ის განმარტების თანახმად წარმოადგენს Ox და Oy ვექტორების ჯამს; ხოლო **OM** ვექტორი წარმოადგენს Oz და OM' ვექტორების ჯამს. აქედან გამომდინარე სამართლიანია წარმოდგენა

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{Oz} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{5.4}$$

წარმოდგენა (5.4) კიდევ ერთი გამართლებაა, რომ რადიუსვექტორი **OM** ჩაიწეროს მხოლოდ წვეროს კოორდინატებით.

წარმოდგენა (5.4)-ზე დაყრდნობით სამართლიანია, რომ თუ:

$$\overrightarrow{AB} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \qquad \text{და} \qquad \overrightarrow{CD} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \tag{5.5}$$

მაშინ მათი ჯამი

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}\,, \tag{5.6}$$

ხოლო მათი სხვაობა წარმოდგება, როგორც CD –ს საპირისპირო ვექტორთან ჯამი:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}\,. \tag{5.7}$$

3. ვექტორების სკალარული ნამრავლი (AB,CD).
AB და **CD** ვექტორების სკალარული ნამრავლი არის <u>რიცხვი</u> (სკალარი)

$$(AB,CD) = |AB||CD|\cos\varphi\,, \qquad (5.8)$$

სადაც **|AB|** და **|CD|** ვექტორების სიგრძეებია და **φ** - მათშორის მდებარე კუთხე. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, როდესაც ვექტორები მოიცემა (5.5) თანადობით, მაშინ სკალარული ნამრავლი არის

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \ . \qquad (5.9)$$

წარმოდგენა (5.9)-ზე დაყრდნობით, მარტივად დავინახავთ, რომ **სკალარული ნამრავლი კომუტატიურია,** ანუ

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right) \ . \qquad (5.10)$$

შენიშვნა: თუ ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია ე.ი. ეს ვექტორები ურთიერთმართობულები, ანუ "ორთოგონალურები" არიან!
მაგალითები: 1. გამოთვალეთ საბაზისო ვექტორების სკალარული ნამრავლი და შეავსეთ ცხრილი

(e_n,e_m)				
e_1				
e_2				
e_3				

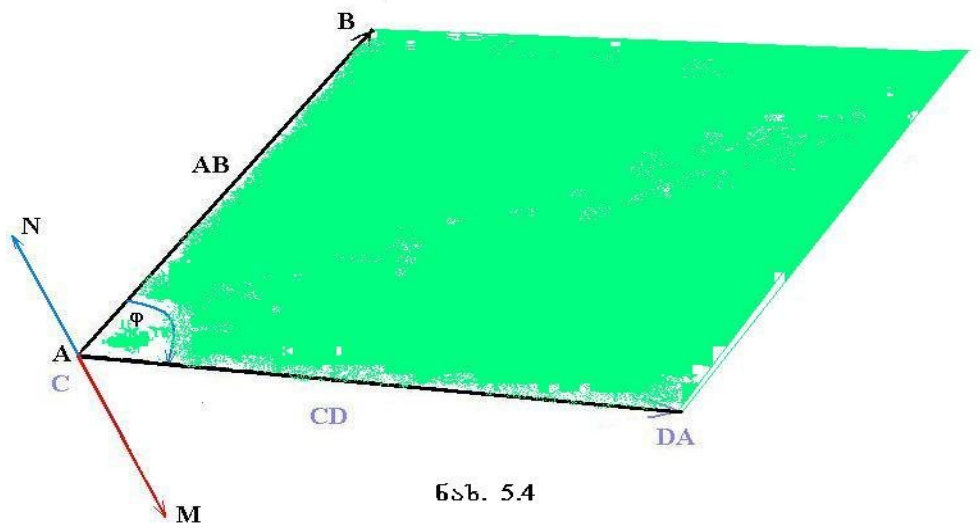
4. ვექტორების ვექტორული ნამრავლი AB X CD.
AB და **CD** ვექტორების ვექტორული ნამრავლი **AB X CD** არის <u>ვექტორი</u> რომლის:

1. სიგრძე არის

$$|ABXCD| = |AB||CD|\sin\varphi\,, \qquad (5.11)$$

ამ ორ ვექტორზე მოჭიმული პარალელოგრამის ფართობი (იხილე Fig.5.4) ;

2. **AB, CD** და **AB X CD** ვექტორების სამეულმა უნდა შეადგინოს მართკუთხა მარჯვენა სისტემა.



ნახ. 5.4

მაგალითად: Fig.5.4 ზე მოცემული **AB, CD** და **AB X CD** ვექტორების სამეული ადგენს მარჯვენა სისტემას, როდესაც **AB X CD** მიმართულია **CM** ვექტორის გასწვრივ, ხოლო მისი სიგრძე დაშტრიხული პარალელოგრამის ფართობის ტოლია!
ცხადია, რომ

$$\mathbf{AB\ X\ CD} \neq \mathbf{CD\ X\ AB}, \qquad \textbf{(5.12)}$$

ეს ორი ვექტორი სიგრძით ტოლები არიან და მათ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ (მაგ. Fig.5.4 ზე მოცემული შემთხვევისათვის **AB X CD** მიმართულია **CM** ვექტორის გასწვრივ, **ხოლო CD X AB - AN** ვექტორის გასწვრივ **)!**
როდესაც ვექტორები მოიცემა (5.5) თანადობით, მაშინ ვექტორული ნამრავლი არის ვექტორი

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\vec{i}+\left(x_2z_1-x_1z_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\vec{k}\ . \qquad \textbf{(5.13)}$$

ამ ფორმულის დამახსოვრება მოსახერხებელია როგორც მატრიცი 3X3 დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა (6.7)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{bmatrix}=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\vec{i}+\left(x_2z_1-x_1z_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\vec{k} \qquad \textbf{(5.14)}$$

(5.13) და (5.14)-ზე დაყრდნობით ნათელია (5.12), რომ ვექტორული ნამრავლი არაკომუტატიურია ანუ

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{AB}.$$

შენიშვნა: თუ ორი არანულოვანი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია ე.ი. ეს ვექტორები პარალელურები ("კოლინეარულები", ანუ ერთ წრფეზე განთავსებულები,) არიან!

ლექცია 6. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

6.0. მატრიცები;

მატრიცი მართკუთხა ცხრილი, რომლის ელემენტები შეიძლება იყოს სკალარები, ვექტორები ან თვით მატრიცებიც. მატრიცი ზოგადად მოიცემა, როგორც

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (6.0)$$

წარმოდგენილ მატრიცს **m** სტრიქონი და **n** -სვეტი აქვს, **m** და **n** ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია. როდესაც **m=n**, მატრიცს **კვადრატული (mxm)-ზე** მატრიცი ეწოდება. $\mathbf{a_{ij}}$ მატრიცის ელემენტებია და ქვედა ინდექსებიდან პირველი **i –** აღნიშნავს სტრიქონის ნომერს, ხოლო მეორე **j-** სვეტის ნომერია. ხშირად მატრიცს (6.0) წარმოდგენის მაგივრად ჩაწერენ, როგორც

$$\mathbf{(a_{ij})\ ,\ i=1,\dots m;\ j=1,\dots,n.} \qquad (6.1)$$

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ მატრიცის $\mathbf{a_{ij}}$ ელემენტები ნებისმიერი ბუნების სიდიდეები (თვით მატიცებიც) შეიძლება იყოს.
ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ (2x2)-ზე და (3x3)-ზე მატრიცებს და მათ ძირითად თვისებებს.

მატრიცის $\mathbf{a_{ii}}$ ელემენტებს, ელემენტებს რომელთა ინდექსები ერთნაირი რიცხვებია **მთავარი დიაგონალის** ელემენტები ეწოდება.

- **ერთეულოვანია მატრიცი**, თუ მისი **მთავარი დიაგონალის** ელემენტები ერთიანებია, ხოლო დანარჩენი ელემენტები ნულები;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

- **ნულოვანია მატრიცი**, თუ მისი **ყველა** ელემენტი ნულია;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.3)$$

- ორი $\mathbf{(a_{ij})}$ და $\mathbf{(b_{ij})}$ **მატრიცი ტოლია,** თუ მათი ყველა შესაბამისი ელემენტი (ანუ $\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$ ყველა **i=1,…m; j=1,…,n –** ისათვის);

6.1 მოქმედებები მატრიცებზე

1. მატრიცის რიცხვზე გამრავლება $\alpha\,(a_{ij})$.
რის მატრიცი რომლის ყველა ელემენტ გამრავლებულია ამ რიცხვზე

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} & \dots & \alpha a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

შენიშვნა: მატრიცის გამრავლება ნოლზე გვაძლევს ნულოვან მატრიცს.

2. ორი მატრიცის ჯამი არის მატრიცი რომლის ელემენტები შესაკრები მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს წარმოადგენენ
$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, ანუ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

3. (2x2) და (3x3) მატრიცების დეტერმინანტები.
(2x2)-ზე მატრიცის დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,; \tag{6.6}$$

(3x3)-ზე მატრიცის დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

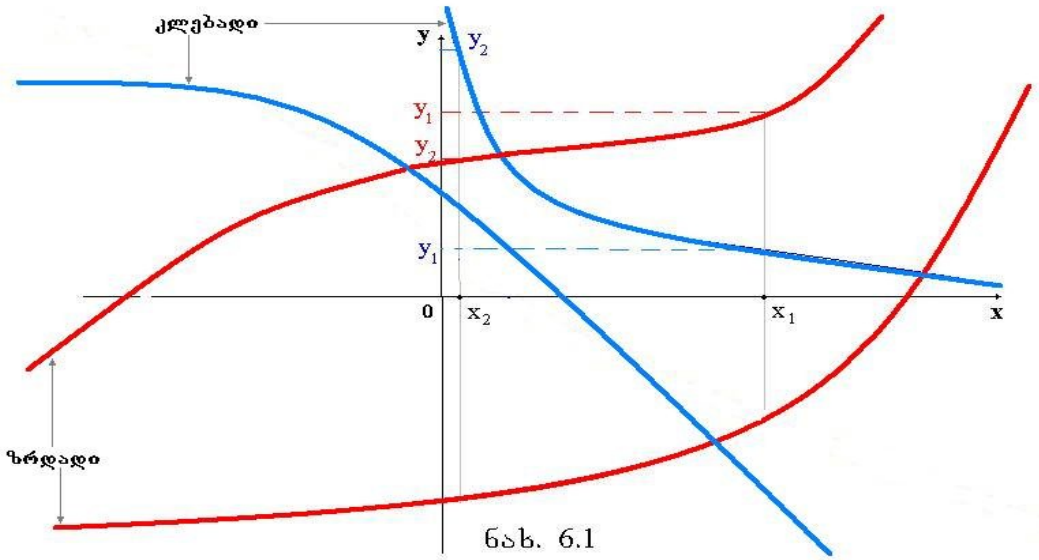
ყვითელი ფონით მოცემულია სქემა რომელიც ამარტივებს ფორმულის დამახსოვრებას, ცისფერი ხაზებით შეერთებულია დეტერმინანტის დადებითი წევრები , ხოლო წითელი ხაზებით უარყოფითი წევრები.
დეტერმინანტი მატრიცის რიცხვითი მახასიათებელია!

6.2 y=f(x) ფუნქციები და მათი ზოგიერთი ელემენტარული თვისება

ლექცია 2 მთლიანად მიეძღვნა ზოგადად ფუნქციის განმარტებასა და მისი მოცემის სხვადასხვა ხერხს.

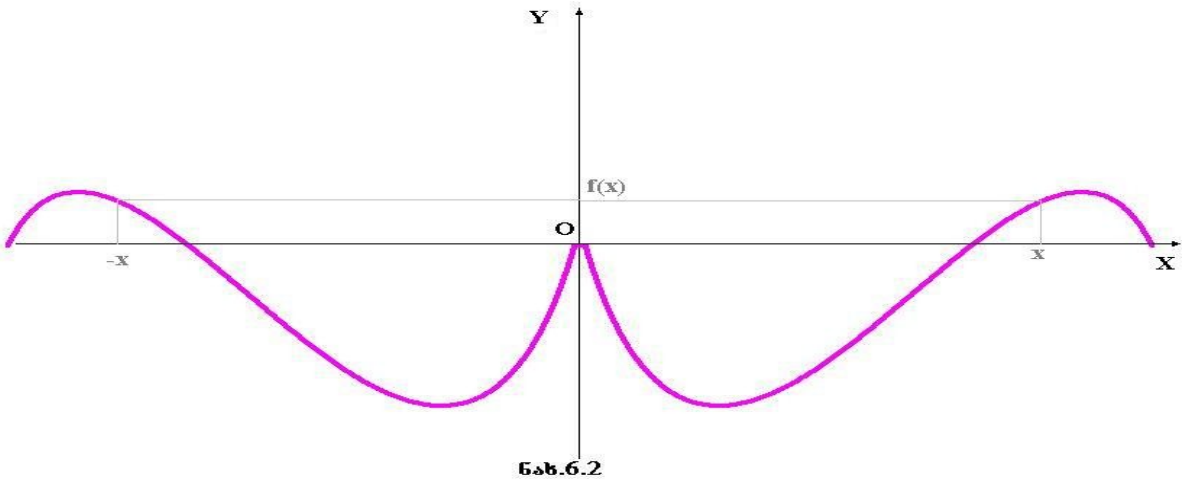
ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია რომელიმე ინტერვალზე თუ **x** არგუმენტის დიდ მნიშვნელობას ამ ინტერვალში **y** – ფუნქციის დიდი მნიშვნელობა შეესაბამება ანუ როდესაც $x_1 > x_2$ შესაბამისად $f(x_1)=y_1 \geq f(x_2)=y_2$ (მაგ. იხილე ნახ.6.1 წითელი გრაფიკები).

ფუნქცია მონოტონურად კლებადია რომელიმე ინტერვალზე თუ **x** არგუმენტის დიდ მნიშვნელობას ამ ინტერვალში **y** – ფუნქციის მცირე მნიშვნელობა შეესაბამება ანუ ($x_1 > x_2$ შესაბამისად $f(x_1) =y_1 \leq f(x_2)) =y_2$ (მაგ. იხილე ნახ.6.1 ცისფერი გრაფიკები).



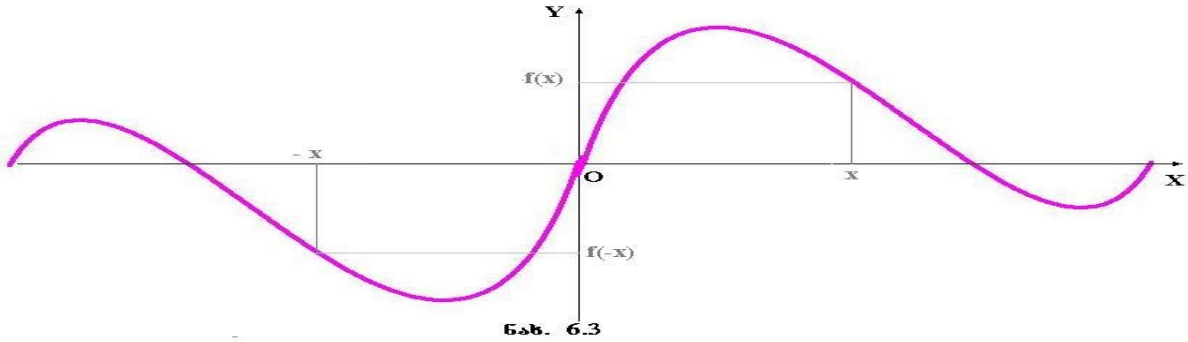
ნახ. 6.1

ფუნქცია ლუწია თუ **f(-x) = f(x)** (სარკულად სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ; მაგალითი იხილე ნახ. 6.2)



ნახ.6.2

ფუნქცია კენტია თუ **f(-x) = - f(x)** (სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ მაგალითი იხილე ნახ. 6.3)



ნახ. 6.3

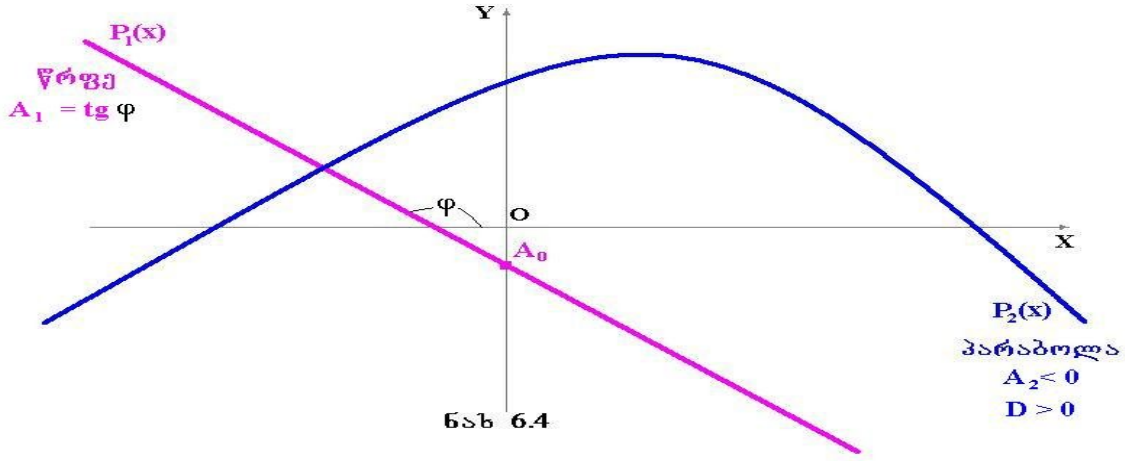
პოლინომიალური ფუნქციები $P_n(x)$

მეორენაირად ასეთ ფუნქციებს **მთელ რაციონალურ ფუნქციებსაც** უწოდებენ. ზოგადად ასეთი ფუნქციების სახეა

$$y = P_n(x) \equiv A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n = \sum_{i=1}^{n} A_i x^i , \qquad (6.8)$$

სადაც A_i - კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, **x** - ცვლადი სიდიდეა, **n** - პოლინომის რიგია.

სკოლის კურსში განხილულია პოლინომიალური ფუნქციის ორი მაგალითი:



ნახ 6.4

ა). **n = 1** **წრფივი ფუნქცია** $y = P_1(x) \equiv A_0 + A_1x$ (გრაფიკი წრფე, A_1 - დახრის კუთხის ტანგენსი და A_0 - თავისუფალი წევრი; იხილე ნახ. 6.4 **);**

ბ). **n = 2** **კვადრატული ფუნქცია** $y = P_2(x) \equiv A_0 + A_1x + A_2x^2$ (გრაფიკი პარაბოლა, იხილე ნახ. 6.4 ამ მაგალითში $A_2 < 0$ და **D** - დისკრიმინანტი დადებითია**);**

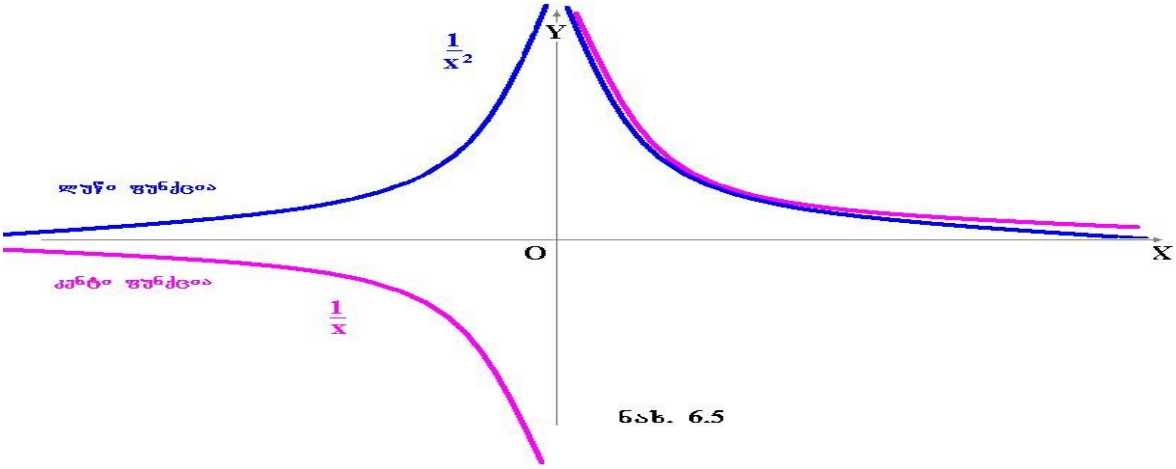
ზოგადი რაციონალური ფუნქციები R(x)

ზოგადად ასეთი ფუნქციების სახეა

$$y = R(x) \equiv \frac{P_n(x)}{P_m(x)} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x^i}{\sum_{j=1}^{m} B_j x^j} \equiv \frac{A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n}{B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m}, \qquad (6.9)$$

სადაც $\mathbf{A_i}$ და $\mathbf{B_j}$ - კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, **x** - ცვლადი სიდიდეა, ეს ფუნქციები განსაზღვრულნი არიან ყველგან სადაც მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან.

ასეთი სახის ფუნქციების უმარტივესი მაგალითებია: $\frac{1}{x}$ და $\frac{1}{x^2}$



ნახ. 6.5

სპეციალური სახის $\sqrt[n]{R(x)}$ "ალგებრული ფუნქციები"

n – ური ხარისხის ფესვი რაციონალური ფუნქციიდან განსაზღვრის არეა არგუმენტის ის მნიშვნელობები, როდესაც რაციონალური ფუნქცია არაუარყოფითია, თუ n - ლუწია !

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

y = sin x , cos x – განსაზღვრულნი არიან არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის,
tg x - განსაზღვრულია x არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარდა $x = \pi k + \pi/2$, **k∈Z;**
ctg x - განსაზღვრულია x არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარდა $x = \pi k$, **k∈Z.**

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

$y = a^x$ – მაჩვენებლიანი ფუნქცია, (a > 0) ფუძით - განსაზღვრულია x არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის;
$y = \log_a x$ - ლოგარითმული ფუნქცია, (a > 0) ფუძით - განსაზღვრულია არგუმენტის ნებისმიერი დადებითი x >0 მნიშვნელობისათვის.

ლექცია 7. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

7.0 მიმდევრობები;
7.1 მიმდევრობის ზღვარი;
7.2 ზოგადი განმარტება და მოქმედებები ზღვრებზე.

7.0 მიმდევრობები

ფუნქციებს რომლთა არგუმენტი ნატურალური რიცხვებია **მიმდევრობები** ეწოდებათ. თუ შესაძლებელია მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის ერთი გამოსახულებით მოცემა, მაშინ ამ გამოსახულებას **ზოგადი წევრის** ფორმულა ეწოდება და ეს მიდევრობა შეიძლება ჩაწერილ იქნას როგორც $\{a_n\}$. მიმდევრობების კლასიკური მაგალითებია:

- პირველი n ნატურალური რიცხვის ჯამი, ანუ
$$f(n) = 1+2+3+\ldots + n = n(n+1)/2 \; ; \tag{7.1}$$
- პირველი n ნატურალური რიცხვის კვადრატების ჯამი, ანუ
$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots + n^2 \; ; \tag{7.2}$$
- პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლი - **ფაქტორიალი**, ანუ
$$f(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n! \; ; \tag{7.3}$$
- **ბინომიალური კოეფიციენტები** (k მუმივია n ცვლადი)
$$C_k^n \equiv \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \; ; \tag{7.4}$$
- **ფიბონაჩის მიმდევრობა**
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \; ; \tag{7.5}$$
- **არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრი** (მიმდევრობის ყოველი წევრი ტოლია წინა წევრს დამატებული **d** - მუდმივი "პროგრესიის სხვაობა")
$$a_n \equiv a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \tag{7.6}$$
და პირველი n წევრის ჯამი
$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \left[a_1 + \frac{d(n-1)}{2} \right] n \; ; \tag{7.7}$$
- **გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრი** (მიმდევრობის ყოველი წევრი ტოლია წინა წევრი გამრავლებული **q** - მუდმივზე)
$$b_n \equiv b_{n-1} \times q = b_1 \times q^{(n-1)}; \tag{7.8}$$
და პირველი n წევრის ჯამი
$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_1 q^{i-1} = b_1 \left(1 + q + q^2 \cdots q^{n-1}\right) = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \; ; \tag{7.9}$$

7.1 მიმდევრობის ზღვარი

ანტიკურ ხანიდან მოყოლებული ადამიანი ხვდებოდა, რომ ყველაზე დიდ რიცხვს ვერ დაასახელებდა! ყოველთვის შეიძლება ერთით მეტი რიცხვის დასახელება! ამიტომ სხვადასხვა დროს გაჩნდა ტერმინები **უთვალავი და უსასრულოდ დიდი რიცხვი!** შემოტანილი იქნა აღნიშვნა **- ∞** (ხაზს უსვამთ იმ გარემოებას, რომ არავითარ შემთხვევაში **ეს რიცხვი არ არის!**) .

1. თუ დავაკვირდებით მიმდევრობას $a_n \equiv F(n) = \frac{1}{n}$, შევამჩნევთ , რომ **n** არგუმენტის გაზრდასთან ერთად მცირდება ფუნქციის მნიშვნელობა $\mathbf{a_n}$ და ის უახლოვდება **0**-ს, **მაგრამ ნული არასოდეს არ გახდება - "მიისწრაფის ნოლისაკენ" !** მათემატიკურად ეს ჩაიწერება შემდეგნაირად
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7.10}$$

ანუ **(lim) ზღვარი a_n მიმდევრობისა, როდესაც n მიისწრაფის უსასრულობისაკენ ნულის ტოლია!**

2. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+n+1}\right\}$ მიმდევრობების შესწავლა გვარწმუნებს, რომ მიმდევრობის ზღვარი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. ამ კონკრეტულ შემთხვევაში, რადგან სამართლიანია შემდეგი იგივეობები

$$a_n = \frac{n}{n+1} \equiv 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{და} \quad a_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1} \equiv 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1},$$

ნათელია, რომ ნომრის ზრდასთან ერთად $\frac{1}{n+1}$ და $\frac{n+2}{n^2+n+1}$ გამოსახულებები (7.10) ს თანახმად მიისწრაფიან ნოლისაკენ და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \qquad \text{და} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1. \tag{7.11}$$

ანუ **(lim) ზღვარი a_n მიმდევრობისა, როდესაც n მიისწრაფის უსასრულობისაკენ ერთიანის ტოლია!**

3. მიმდევრობისათვის, რომლის ზოგადი წევრია $a_n = \sqrt[n]{p}$, სადაც p - ნებისმიერი დადებითი მუდმივი სიდიდეა, დამტკიცებულია, რომ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

4. რამოდენიმე შემთხვევას მოიცავს მაგალითი, რომელშიც განვიხილულია მიდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $\mathbf{a_n = \alpha^n}$, სადაც $\boldsymbol{\alpha}$ **-** მუდმივი სიდიდეა:

- ✓ თუ $\mathbf{0 < \alpha < 1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
- ✓ თუ $\mathbf{-1 < \alpha < 0}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 0$;
- ✓ თუ $\boldsymbol{\alpha = 0}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 0$;
- ✓ თუ $\boldsymbol{\alpha = 1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 1$;
- ✓ თუ $\boldsymbol{\alpha = -1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}\alpha^n$ (ზღვარი) არ არსებობს,

რადგან ყოველი ლუწი ნომრის მქონე წევრი $\mathbf{a_{2n}} = +1$ და კენტი ნომრის მქონე წევრი $\mathbf{a_{2n+1}} = -1$, ხოლო $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 1$;

- ✓ თუ $\mathbf{|\alpha| > 1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = \infty$;

მიმდევრობა განშლადია(კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ არავითარ შემთხვევაში **∞ - რიცხვი არ არის!**.)

განხილული შემთხვევის ანალიზი უჩვენებს, რომ თუ გეომეტრიული პროგრესიის $0 < q < 1$, მაშინ შეიძლება ასეთი გეომეტრიული პროგრესიის **"ყველა"** წევრი შეიკრიბოს ანუ (7.9) ფორმული თანახმად

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{1-q}. \tag{7.12}$$

5. მნიშვნელოვანი მაგალითები:

- ❖ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1;$
- ❖ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0;$

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ და $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e;$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0.$

7.2 ზოგადი განმარტება და მოქმედებები ზღვრებზე

დაუშვათ მოცემულია რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა $\{a_n\}$. თუ არსებობს ისეთი რიცხვი G, რომ G რიცხვის ნებისმიერ, რაგინდ მცირე მიდამოში, განლაგებულია მიმდევრობის თითქმის ყველა a_n რიცხვი, გარდა სასრული რაოდენობისა, მაშინ ვიტყვით, რომ G რიცხვი არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი და დავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = G$$

ანდა ვიტყვით, რომ მიმდევრობა **კრებადია G- სკენ!**
ხანდახან უფრო მოსახერხებელია განსაზღვრების უფრო მათემატიკური ფორმულირება: თუ ნებისმიერი (რაგინდ მცირე) $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს ისეთი ნომერი $\mathbf{N=N(\varepsilon)}$ (ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებული ε- დან), რომ როდესაც $\mathbf{n>N}$ მაშინ $|G - a_n| < \varepsilon$. თუ მიმდევრობას **ზღვარი არ აქვს**, ვიტყვით, რომ მიმდევრობა **არ არის კრებადი** ან მიმდევრობა **განშლადია.**

მოქმედებები ზღვრებზე:

დაუშვათ მოცემულია ორი კრებადი $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობა, შესაბამისად $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ხოლო $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

- მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $\mathbf{c_n = a_n + b_n}$, კრებადია და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B \ . \tag{7.13}$$

- მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $\mathbf{c_n = a_n \cdot b_n}$, კრებადია და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B \ . \tag{7.14}$$

- მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ხოლო $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$ **განსხვავებულია ნულისაგან**, კრებადია და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} \ . \tag{7.15}$$

(7.13 15) თანადობები უჩვენებენ, რომ შესაძლებელია ჯერ **ზღვარზე გადასვლა და მერე არითმეტიკული ოპერაციის ჩატარება და პირიქით**!

ლექცია 7. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

7.0 მიმდევრობები;
7.1 მიმდევრობის ზღვარი;
7.2 ზოგადი განმარტება და მოქმედებები ზღვრებზე.

7.0 მიმდევრობები

ფუნქციებს რომლთა არგუმენტი ნატურალური რიცხვებია **მიმდევრობები** ეწოდებათ. თუ შესაძლებელია მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის ერთი გამოსახულებით მოცემა, მაშინ ამ გამოსახულებას **ზოგადი წევრის** ფორმულა ეწოდება და ეს მიდევრობა შეიძლება ჩაწერილ იქნას როგორც $\{a_n\}$. მიმდევრობების კლასიკური მაგალითებია:

- პირველი n ნატურალური რიცხვის ჯამი, ანუ
$$f(n) = 1+2+3+\ldots + n = n(n+1)/2 \; ; \tag{7.1}$$
- პირველი n ნატურალური რიცხვის კვადრატების ჯამი, ანუ
$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots + n^2 \; ; \tag{7.2}$$
- პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლი - **ფაქტორიალი**, ანუ
$$f(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n! \; ; \tag{7.3}$$
- **ბინომიალური კოეფიციენტები** (k მუმივია n ცვლადი)
$$C_k^n \equiv \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \; ; \tag{7.4}$$
- **ფიბონაჩის მიმდევრობა**
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \; ; \tag{7.5}$$
- **არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრი** (მიმდევრობის ყოველი წევრი ტოლია წინა წევრს დამატებული **d** - მუდმივი "პროგრესიის სხვაობა")
$$a_n \equiv a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \tag{7.6}$$
და პირველი n წევრის ჯამი
$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \left[a_1 + \frac{d(n-1)}{2} \right] n \; ; \tag{7.7}$$
- **გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრი** (მიმდევრობის ყოველი წევრი ტოლია წინა წევრი გამრავლებული **q** - მუდმივზე)
$$b_n \equiv b_{n-1} \times q = b_1 \times q^{(n-1)}; \tag{7.8}$$
და პირველი n წევრის ჯამი
$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_1 q^{i-1} = b_1 \left(1 + q + q^2 \cdots q^{n-1}\right) = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \; ; \tag{7.9}$$

7.1 მიმდევრობის ზღვარი

ანტიკურ ხანიდან მოყოლებული ადამიანი ხვდებოდა, რომ ყველაზე დიდ რიცხვს ვერ დაასახელებდა! ყოველთვის შეიძლება ერთით მეტი რიცხვის დასახელება! ამიტომ სხვადასხვა დროს გაჩნდა ტერმინები **უთვალავი და უსასრულოდ დიდი რიცხვი!** შემოტანილი იქნა აღნიშვნა **- ∞** (ხაზს უსვამთ იმ გარემოებას, რომ არავითარ შემთხვევაში **ეს რიცხვი არ არის!**) .

1. თუ დავაკვირდებით მიმდევრობას $a_n \equiv F(n) = \frac{1}{n}$, შევამჩნევთ , რომ **n** არგუმენტის გაზრდასთან ერთად მცირდება ფუნქციის მნიშვნელობა $\mathbf{a_n}$ და ის უახლოვდება **0**-ს, **მაგრამ ნული არასოდეს არ გახდება - "მიისწრაფის ნოლისაკენ" !** მათემატიკურად ეს ჩაიწერება შემდეგნაირად
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7.10}$$

ანუ **(lim) ზღვარი a_n მიმდევრობისა, როდესაც n მიისწრაფის უსასრულობისაკენ ნულის ტოლია!**

2. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+n+1}\right\}$ მიმდევრობების შესწავლა გვარწმუნებს, რომ მიმდევრობის ზღვარი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. ამ კონკრეტულ შემთხვევაში, რადგან სამართლიანია შემდეგი იგივეობები

$$a_n = \frac{n}{n+1} \equiv 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{და} \quad a_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1} \equiv 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1},$$

ნათელია, რომ ნომრის ზრდასთან ერთად $\frac{1}{n+1}$ და $\frac{n+2}{n^2+n+1}$ გამოსახულებები (7.10) ს თანახმად მიისწრაფიან ნოლისაკენ და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \qquad \text{და} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1. \tag{7.11}$$

ანუ **(lim) ზღვარი a_n მიმდევრობისა, როდესაც n მიისწრაფის უსასრულობისაკენ ერთიანის ტოლია!**

3. მიმდევრობისათვის, რომლის ზოგადი წევრია $a_n = \sqrt[n]{p}$, სადაც p - ნებისმიერი დადებითი მუდმივი სიდიდეა, დამტკიცებულია, რომ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

4. რამოდენიმე შემთხვევას მოიცავს მაგალითი, რომელშიც განვიხილულია მიდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $\mathbf{a_n = \alpha^n}$, სადაც $\boldsymbol{\alpha}$ **-** მუდმივი სიდიდეა:

- ✓ თუ $\mathbf{0 < \alpha < 1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;
- ✓ თუ $\mathbf{-1 < \alpha < 0}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 0$;
- ✓ თუ $\boldsymbol{\alpha = 0}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 0$;
- ✓ თუ $\boldsymbol{\alpha = 1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 1$;
- ✓ თუ $\boldsymbol{\alpha = -1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}\alpha^n$ (ზღვარი) არ არსებობს,

რადგან ყოველი ლუწი ნომრის მქონე წევრი $\mathbf{a_{2n}} = +1$ და კენტი ნომრის მქონე წევრი $\mathbf{a_{2n+1}} = -1$, ხოლო $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = 1$;

- ✓ თუ $\mathbf{|\alpha| > 1}$ - მაშინ $\lim_{n\to\infty}|\alpha|^n = \infty$;

მიმდევრობა განშლადია(კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ არავითარ შემთხვევაში **∞ - რიცხვი არ არის!**.)

განხილული შემთხვევის ანალიზი უჩვენებს, რომ თუ გეომეტრიული პროგრესიის $0 < q < 1$, მაშინ შეიძლება ასეთი გეომეტრიული პროგრესიის **"ყველა"** წევრი შეიკრიბოს ანუ (7.9) ფორმული თანახმად

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{1-q}. \tag{7.12}$$

5. მნიშვნელოვანი მაგალითები:

- ❖ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1;$
- ❖ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0;$

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ და $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e;$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0.$

7.2 ზოგადი განმარტება და მოქმედებები ზღვრებზე

დაუშვათ მოცემულია რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა $\{a_n\}$. თუ არსებობს ისეთი რიცხვი G, რომ G რიცხვის ნებისმიერ, რაგინდ მცირე მიდამოში, განლაგებულია მიმდევრობის თითქმის ყველა a_n რიცხვი, გარდა სასრული რაოდენობისა, მაშინ ვიტყვით, რომ G რიცხვი არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი და დავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = G$$

ანდა ვიტყვით, რომ მიმდევრობა **კრებადია G- სკენ!**
ხანდახან უფრო მოსახერხებელია განსაზღვრების უფრო მათემატიკური ფორმულირება: თუ ნებისმიერი (რაგინდ მცირე) $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს ისეთი ნომერი $\mathbf{N=N(\varepsilon)}$ (ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებული ε- დან), რომ როდესაც $\mathbf{n>N}$ მაშინ $|G - a_n| < \varepsilon$. თუ მიმდევრობას **ზღვარი არ აქვს**, ვიტყვით, რომ მიმდევრობა **არ არის კრებადი** ან მიმდევრობა **განშლადია.**

მოქმედებები ზღვრებზე:

დაუშვათ მოცემულია ორი კრებადი $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობა, შესაბამისად $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ხოლო $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

- მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $\mathbf{c_n = a_n + b_n}$, კრებადია და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B \ . \tag{7.13}$$

- მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $\mathbf{c_n = a_n \cdot b_n}$, კრებადია და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B \ . \tag{7.14}$$

- მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ხოლო $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$ **განსხვავებულია ნულისაგან**, კრებადია და შესაბამისად

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B} \ . \tag{7.15}$$

(7.13 15) თანადობები უჩვენებენ, რომ შესაძლებელია ჯერ **ზღვარზე გადასვლა და მერე არითმეტიკული ოპერაციის ჩატარება და პირიქით**!

ლექცია 8. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

8.0 ფუნქციის ზღვარი

აქმდე ჩვენ განვიხილავდით ფუნქციებს რომლთა არგუმენტი ნატურალური რიცხვებია და შესაბამისად მათ ყოფაქცევას, როდესაც არგუმენტი "უსასრულოდ იზრდება". ამ ლექციაში განიხილება ზღვრის ცნება, რომელიც წარმოიშვება ისეთ შემთხვევაში, როდესაც არგუმენტი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია **"უწყვეტი არგუმენტი"**.

ექვივალენტურია გამონათქვამები (ჩანაწერები):

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n, \ldots$ მიმდევრობა მიისწრაფის x_0 –საკენ;
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$;
- x_n წერტილების მიმდევრობა კრებადია x_0 წერტილში;
- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$;
- $x_n \to x_0$.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც $x_n \to x_0$ - შესაბამისად ფუნქცია **f(x)** – „წარმოშობს" $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6), \ldots, f(x_n), \ldots$ მიმდევრობას, რომელიც როგორც მიმდევრობა შეიძლება იყოს კრებადი და შეიძლება იყოს განშლადი (მაგალითად ნახ. 8.1, მიმდევრობა კრებადია)!

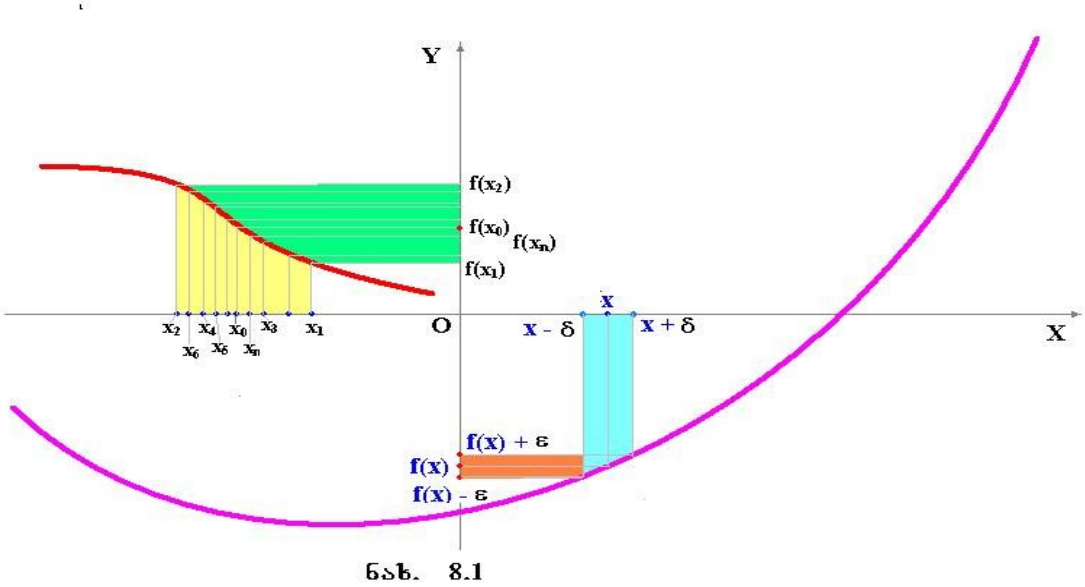
განსაზღვრება (ჰეინე). ვიტყვით, რომ G არის f(x) ფუნქციის ზღვარი, როდესაც არგუმენტი x მიისწრაფის x_0 -ისაკენ და დავწერთ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = G \tag{8.1}$$

მაშინ როდესაც ნებისმიერი x_0 საკენ კრებადი $\{x_n\}$ მიმდევრობის ($\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$) **შესაბამისი $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობის ზღვარია G, ანუ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = G$.**

განსაზღვრება (კოში). თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ დადებითი რიცხვი (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე), **რომ როდესაც** $|x - x_0| < \delta$ (ცვლადი x არის x_0 არგუმენტის δ მიდამოში) **მაშინ** $|f(x) - G| < \varepsilon$ ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ **არის f(x) ფუნქციის ზღვარი, როდესაც არგუმენტი x მიისწრაფის x_0 ისაკენ.**

მოტანილი ორივე განსაზღვრება ექვივალენტურია, მაგრამ ჩვენ არ შეუდგებით აქ ამის დამტკიცებას!



ნახ. 8.1

8.1 უწყვეტობა

ინტუიტიურ დონეზე უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს როგორც არსად „არ გაწყვეტილი“ გრაფიკის მქონე ფუნქცია!

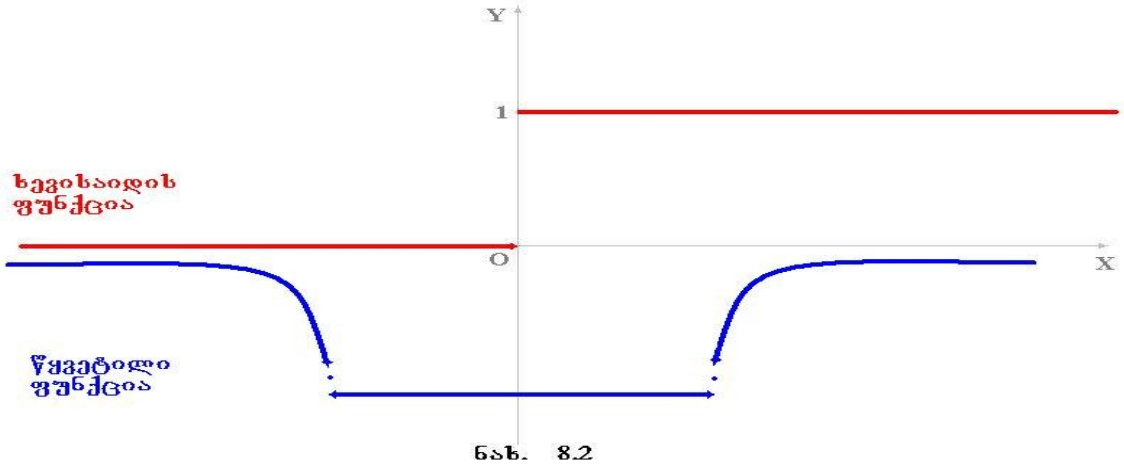
<u>განსაზღვრება</u> ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ მისი ზღვარი ამ წერტილში ემთხვევა მის მნიშვნელობას ამ წერტილში ანუ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = G = f(x_0). \tag{8.2}$$

ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალზე (სეგმენტზე, . . .), თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის (სეგმენტის, . . .) ყველა წერტილში.

ნახ.8.1-ზე მოცემული ორივე შემთხვევა არის უწყვეტი ფუნქციის მაგალითი. მეორეს მხრივ ცხადია, რომ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ზღვარი რომელიმე წერტილში და ეს ზღვარითი მნიშვნელობა განსხვავებული იყოს ფუნქციის მნიშვნელობიდან მოცემულ წერტილში. ასეთი ფუნქციის კლასიკური მაგალითია - **ხევისაიდის ფუნქცია** (იხილე ნახ.8.2)

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \tag{8.3}$$



ნახ. 8.2

ცხადია, რომ როდესაც არგუმენტი ნაკლებია ნულზე და უახლოვდებით სათავეს (ნულს) მარცხნიდან ("მარცხენა ზღვარი"), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველთვის ნულია და შეასბამისად ზღვარი ნულის ტოლია ანუ $\lim_{x\to -0} f(x)=0$, მაგრამ თუ ჩვენ მიუახლოვდებით სათავეს მარჯვნიდან ("მარჯვენა ზღვარი"), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველთვის იქნება ერთიანი ანუ $\lim_{x\to +0} f(x)=1$. ნათელია, რომ მნიშვნელობა აქვს წერტილ ნულთან მიახლოება რომელი მხრიდან ხდება, შედეგიც სხვადასხვაა. შესაბამისად, ეს **ფუნქცია ნულში წყვეტილია,** რადგან ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, განმარტების თანახმად, მიმდევრობას მნიშვნელობა არა აქვს.

ანალოგიური წყვეტილი ფუნქციის მაგალითია დახაზული ლურჯი ფერით ნახ. 8.2-ზე, უბრალოდ ამ სემთხვევაში ფუნქციას ორი წყვეტის წერტილი აქვს!

უწყვეტი ფუნქციების მაგალითები:

- $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ წერტილში $x=0$;
- $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$;

8.2. უწყვეტი ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

- **ნებისმიერი [a,b] მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია ერთხელ მაინც მიაღწევს თავის უდიდეს $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ და შესაბამისად უმცირეს $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ მნიშვნელობას** (სხვა სიტყვებით **ფუნქციას გააჩნია უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა)!**

- **თუ ნებისმიერი [a,b] მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია x = a წერტილში ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობას (f(a) < 0) და x = b წერტილში ღებულობს დადებით მნიშვნელობას (f(b) > 0) ან პირიქით (f(a) > 0 და f(b) < 0) მაშინ არსებობს ერთი მაინც წერტილი ξ ∈ (a,b) სადაც ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია f(ξ)=0.**

- ნებისმიერი [a,b] მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია ერთხელ მაინც მიიღებს ყველა მნიშვნელობას თავის უდიდესა უმცირეს ნიშვნელობებს შორის ანუ

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \le \quad f(x) \quad \le \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

- უწყვეტი ფუნქციების ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა;
- უწყვეტი ფუნქციების სხვაობა უწყვეტი ფუნქციაა;
- უწყვეტი ფუნქციების ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციაა;
- უწყვეტი ფუნქციების შეფარდება უწყვეტი ფუნქციაა, თუ მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან;

ლექცია 8. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

8.0 ფუნქციის ზღვარი

აქმდე ჩვენ განვიხილავდით ფუნქციებს რომლთა არგუმენტი ნატურალური რიცხვებია და შესაბამისად მათ ყოფაქცევას, როდესაც არგუმენტი "უსასრულოდ იზრდება". ამ ლექციაში განიხილება ზღვრის ცნება, რომელიც წარმოიშვება ისეთ შემთხვევაში, როდესაც არგუმენტი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია **"უწყვეტი არგუმენტი"**.

ექვივალენტურია გამონათქვამები (ჩანაწერები):

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n, \ldots$ მიმდევრობა მიისწრაფის x_0 –საკენ;
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$;
- x_n წერტილების მიმდევრობა კრებადია x_0 წერტილში;
- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$;
- $x_n \to x_0$.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც $x_n \to x_0$ - შესაბამისად ფუნქცია **f(x)** – „წარმოშობს" $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6), \ldots, f(x_n), \ldots$ მიმდევრობას, რომელიც როგორც მიმდევრობა შეიძლება იყოს კრებადი და შეიძლება იყოს განშლადი (მაგალითად ნახ. 8.1, მიმდევრობა კრებადია)!

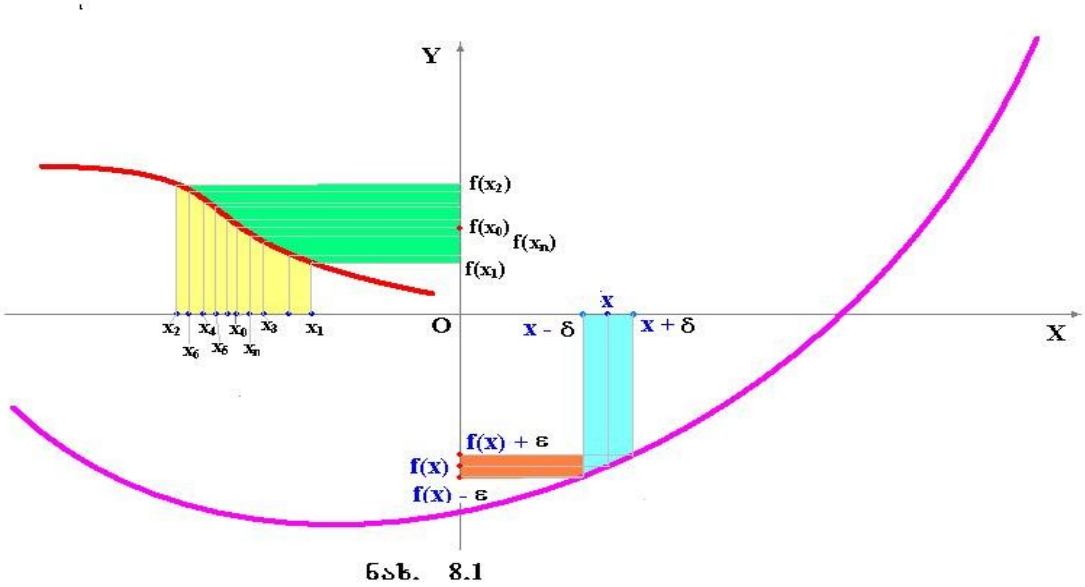
განსაზღვრება (ჰეინე). ვიტყვით, რომ G არის f(x) ფუნქციის ზღვარი, როდესაც არგუმენტი x მიისწრაფის x_0 -ისაკენ და დავწერთ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = G \tag{8.1}$$

მაშინ როდესაც ნებისმიერი x_0 საკენ კრებადი $\{x_n\}$ მიმდევრობის ($\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$) **შესაბამისი $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობის ზღვარია G, ანუ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = G$.**

განსაზღვრება (კოში). თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ დადებითი რიცხვი (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე), **რომ როდესაც** $|x - x_0| < \delta$ (ცვლადი x არის x_0 არგუმენტის δ მიდამოში) **მაშინ** $|f(x) - G| < \varepsilon$ ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ **არის f(x) ფუნქციის ზღვარი, როდესაც არგუმენტი x მიისწრაფის x_0 ისაკენ.**

მოტანილი ორივე განსაზღვრება ექვივალენტურია, მაგრამ ჩვენ არ შეუდგებით აქ ამის დამტკიცებას!



ნახ. 8.1

8.1 უწყვეტობა

ინტუიტიურ დონეზე უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს როგორც არსად „არ გაწყვეტილი“ გრაფიკის მქონე ფუნქცია!

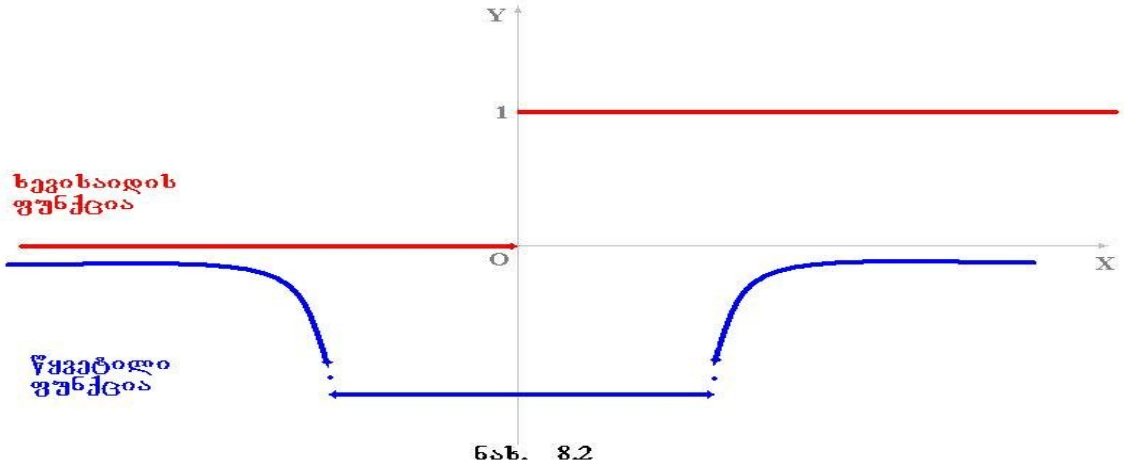
<u>განსაზღვრება</u> ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ მისი ზღვარი ამ წერტილში ემთხვევა მის მნიშვნელობას ამ წერტილში ანუ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = G = f(x_0). \tag{8.2}$$

ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალზე (სეგმენტზე, . . .), თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის (სეგმენტის, . . .) ყველა წერტილში.

ნახ.8.1-ზე მოცემული ორივე შემთხვევა არის უწყვეტი ფუნქციის მაგალითი. მეორეს მხრივ ცხადია, რომ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ზღვარი რომელიმე წერტილში და ეს ზღვარითი მნიშვნელობა განსხვავებული იყოს ფუნქციის მნიშვნელობიდან მოცემულ წერტილში. ასეთი ფუნქციის კლასიკური მაგალითია - **ხევისაიდის ფუნქცია** (იხილე ნახ.8.2)

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \tag{8.3}$$



ნახ. 8.2

ცხადია, რომ როდესაც არგუმენტი ნაკლებია ნულზე და უახლოვდებით სათავეს (ნულს) მარცხნიდან ("მარცხენა ზღვარი"), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველთვის ნულია და შეასბამისად ზღვარი ნულის ტოლია ანუ $\lim_{x\to -0} f(x)=0$, მაგრამ თუ ჩვენ მიუახლოვდებით სათავეს მარჯვნიდან ("მარჯვენა ზღვარი"), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველთვის იქნება ერთიანი ანუ $\lim_{x\to +0} f(x)=1$. ნათელია, რომ მნიშვნელობა აქვს წერტილ ნულთან მიახლოება რომელი მხრიდან ხდება, შედეგიც სხვადასხვაა. შესაბამისად, ეს **ფუნქცია ნულში წყვეტილია,** რადგან ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, განმარტების თანახმად, მიმდევრობას მნიშვნელობა არა აქვს.

ანალოგიური წყვეტილი ფუნქციის მაგალითია დახაზული ლურჯი ფერით ნახ. 8.2-ზე, უბრალოდ ამ სემთხვევაში ფუნქციას ორი წყვეტის წერტილი აქვს!

უწყვეტი ფუნქციების მაგალითები:

- $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ წერტილში $x=0$;
- $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$;

8.2. უწყვეტი ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

- **ნებისმიერი [a,b] მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია ერთხელ მაინც მიაღწევს თავის უდიდეს $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ და შესაბამისად უმცირეს $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ მნიშვნელობას** (სხვა სიტყვებით **ფუნქციას გააჩნია უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა)!**

- **თუ ნებისმიერი [a,b] მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია x = a წერტილში ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობას (f(a) < 0) და x = b წერტილში ღებულობს დადებით მნიშვნელობას (f(b) > 0) ან პირიქით (f(a) > 0 და f(b) < 0) მაშინ არსებობს ერთი მაინც წერტილი ξ ∈ (a,b) სადაც ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია f(ξ)=0.**

- ნებისმიერი [a,b] მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია ერთხელ მაინც მიიღებს ყველა მნიშვნელობას თავის უდიდესა უმცირეს ნიშვნელობებს შორის ანუ

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \le \quad f(x) \quad \le \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

- უწყვეტი ფუნქციების ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა;
- უწყვეტი ფუნქციების სხვაობა უწყვეტი ფუნქციაა;
- უწყვეტი ფუნქციების ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციაა;
- უწყვეტი ფუნქციების შეფარდება უწყვეტი ფუნქციაა, თუ მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან;

ლექცია 9. (კონსპექტი)
Calculus – 5 – "მათემატიკა გეოგრაფებისათვის"
ილია თავხელიძე

9.0 განსაზღვრული ინტეგრალი;
9.1 მაგალითები;
9.2 ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა

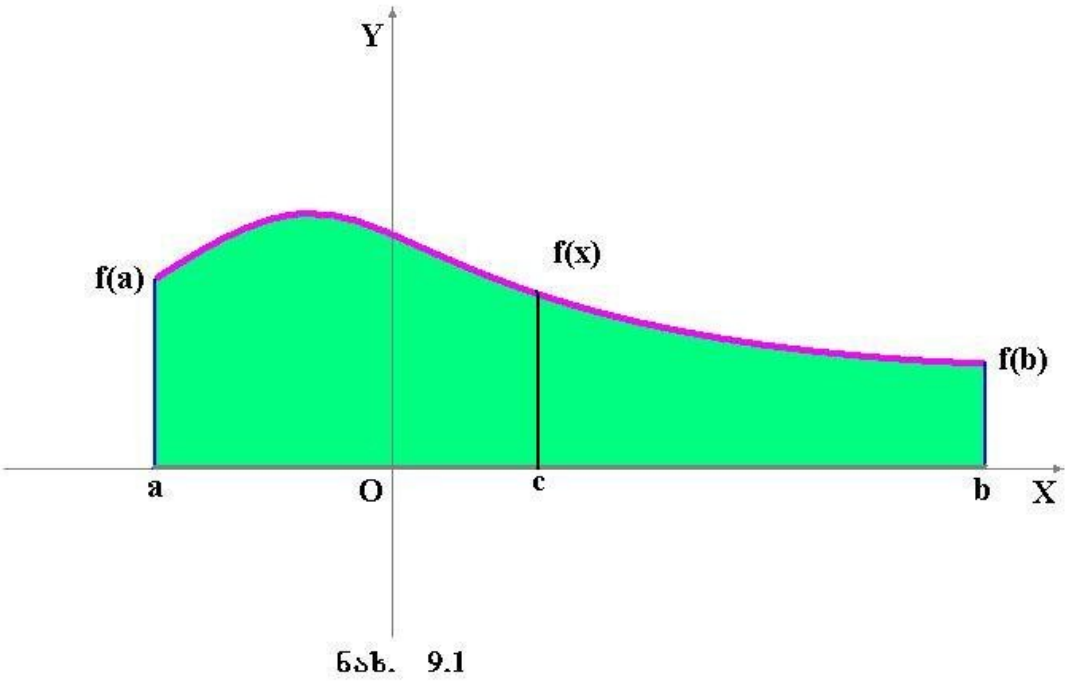
9.0 განსაზღვრული ინტეგრალი როგორც ფართობი

ცნება ისტორიულად უკავშირდება მრუდწირული საზღვრების მქონე ფიგურის ფართობის განსაზღვრას. ართალია შესაძლებელია ამ ცნების წმინდა ანალიზური გზით შემოტანა მაგრამ ჩვენ ამ გზას ვირჩევთ.

დაუშვათ რომელიღაც **[a, b]** ინტერვალზე მოცემულია **დადებითი ფუნქცია f(x)** და საჭიროა გამოთვლილ იქნას **ფართობი**

S (a, b, f(x)) **(9.1)**

- ისეთი მრუდწირული ოთხკუთხედისა რომელიც შემოსაზღვრულია ქვემოდან **[a, b]** – მონაკვეთით, მარჯვნიდან **[b, f(b)]** - მონაკვეთით, მარცხნიდან **[a, f(a)]** მონაკვეთით ხოლო ზემოდან **f(x)** ფუნქციის გრაფიკით ნახ. 9.1.



ნახ. 9.1

ასეთი ტიპის მრუდწირული ოთხკუთხედის ფართობი **„ბუნებრივად" განისაზღვრება როგორც ზღვარი მართკუთხედების ფართობების ჯამისა, რომლებიც შემდეგნაირადაა აგებული (იხილე მაგალითად ნახ. 9.2) :**

- ონაკვეთი **[a, b]** დაყოფილია **a,x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, …, x_i, x_{i+1}, . . . , x_n,b** – ანუ **n + 2** ტოლ მონაკვეთად, რომელთა სიგრძე - $\Delta(n) = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n+2}$ - დამოკიდებულია თუ რამდენადაა დაყოფილი მონაკვეთი;
- გამოთვლილია ფუნქციის მნიშვნელობები შესაბამის წერტილებში ანუ **f(a), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6),…f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_n), f(b) ;**
- ყოველ **[x_i , x_{i+1}]** ინტერვალზე i= 0,.. n (**$x_0 \equiv a$, $x_{n+1} \equiv b$**) - ნაპოვნია ფუნქციის მაქსიმალური $\overline{f}(x_i) \equiv \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ და

მინიმალური $\underline{f}(x_i) \equiv \min_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ მნიშვნელობა;

❖ გამოთვლილია ყოველი i= 0,.. n ნომრისათვის ცალცალკე - **"პატარა" (x_i, x_{i+1}, $\underline{f}(x_i)$)** და

"დიდი" (x_i, x_{i+1}, $\overline{f}(x_i)$) მართკუთხედის ფართობი;

❖ **აჯამულია ცალკე "პატარა" (x_i, x_{i+1}, $\underline{f}(x_i)$) მართკუთხედების ფართობები "ქვედა ჯამი"**

$$\underline{S}(a,b,f(x),n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \underline{f}(x_i)(x_{i+1}-x_i), \qquad \textbf{(9.1ქ)}$$

და მათ ზღვარს $\underline{S}(a,b.f(x)) \equiv \lim_{n\to\infty} \underline{S}(a,b,f(x),n)$- **„ქვედა ზღვარი"** ეწოდება!

❖ **აჯამულია ცალკე "დიდი" (x_i, x_{i+1}, $\overline{f}(x_i)$) მართკუთხედების ფართობები "ზედა ჯამი"**

$$\overline{S}(a,b,f(x),n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \overline{f}(x_i)(x_{i+1}-x_i) \qquad \textbf{(9.1ზ)}$$

და მათ ზღვარს $\overline{S}(a,b.f(x)) \equiv \lim_{n\to\infty} \overline{S}(a,b,f(x),n)$- **„ზედა ზღვარი"** ეწოდება!

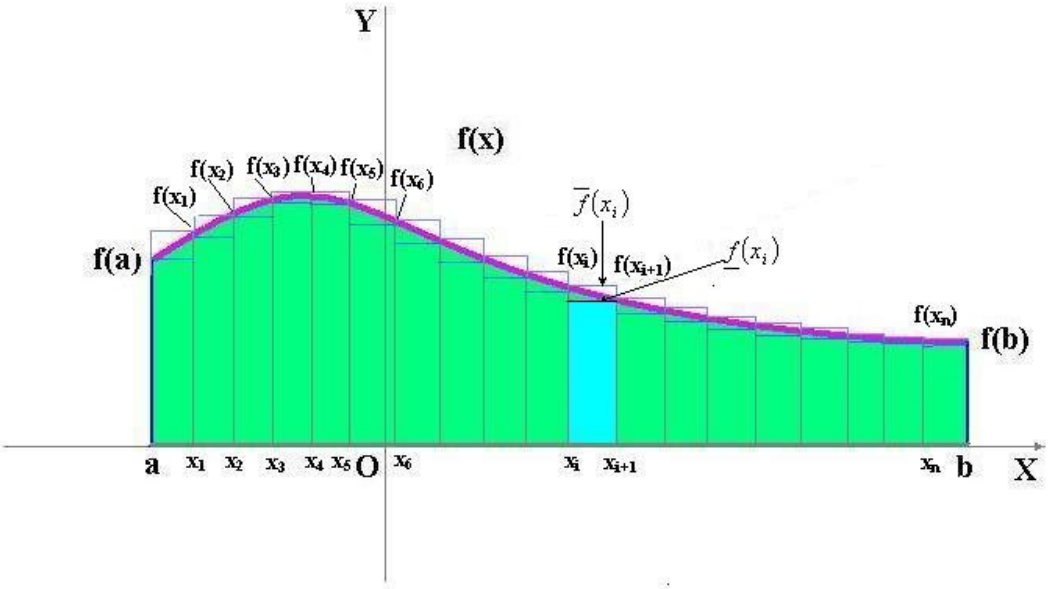
სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ მრუდწირული **S (a, b, f(x))** ოთხკუთხედის ფართობი განსაზღვრისას ნათლად ჩანს, რომ ნებისმიერი დაყოფისას

$$\underline{S}(a,b,f(x),n) \le \textbf{S (a, b, f(x))} \le \overline{S}(a,b,f(x),n) \qquad (9.2)$$

ამიტომ მრუდწირული **S (a, b, f(x))** ოთხკუთხედის ფართობი **„ბუნებრივად" განისაზღვრება როგორც ზღვარი**

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(a,b,f(x),n) = \textbf{S (a, b, f(x))} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(a,b,f(x),n) \qquad \textbf{(9.3)}$$

შენიშვნა: ფართობი არსებობს ე.ი. ზედა და ქვედა ზრვრები და ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან!



ნახ. 9.2

ფართობის გამოთვლის იდეა გამოყენებულ იქნა ზოგადად განსაზრვრული ინტეგრალის ცნების განსაზღვრისათვის:
გოტფრიდ ლეიბნიცის მიერ შემოღებულია აღნიშვნა

$$\mathbf{S\ (\ a,\ b,\ f(x)\ )} \equiv \int_a^b f(x)dx \qquad \mathbf{(9.4)}$$

ინტეგრალის $\int$ - ნიშნაკი წარმოადგენს ლათინური **S -** ასოს სტილიზებულ ჩანაწერს. **a -** ქვედა საზღვარი**, b –** ზედა საზღვარი (საიდან სადამდე ხდება ინტეგრება) ფუნქცია (რომელი ფუნქციის ინტეგრება ხდება), dx (differentia) – არის აღნიშვნა იმ ფაქტისა, რომ ინტერვალის დაყოფა ხდება უსასრულოდ მცირე მონაკვეთებად ($n \to \infty$).

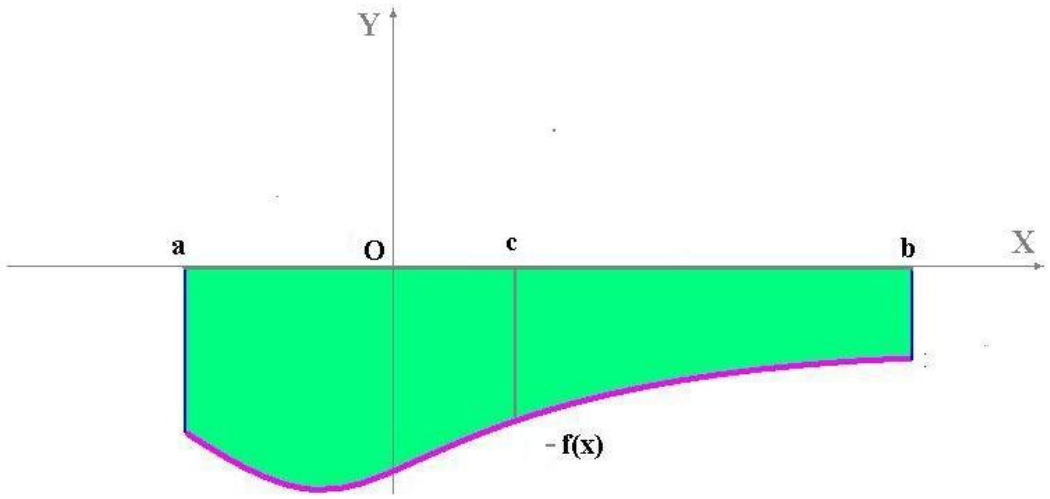
განსაზღვრული ინტეგრალი "**ორიენტირებული**" ფართობი
ზოგიერთი თვისებები

წინა შემთხვევაში ჩვენ განვიხილეთ **დადებითი** ფუნქცია და დაუშვით, რომ **b > a** . ფორმულა (9.3) რომლითაც ჩვენ განვსაზღვრეთ "განსაზღვრულკი ინტეგრალი" არაფრით არაა დამოკიდებული ამ დაშვებებზე. თუ, მაგალითად, ფუნქცია უარყოფითია მაშინ ჩვენს მერ შემოთავაზებული ალგორითმით განსაზღვრული "**მართკუთხედების ფართობები**" იქნება უბრალოდ **უარყოფითი ნიშნის** მქონე !

ამ ფაქტის ახსნა ფიგურა რომლის ფართობი გვაინტერესებს არის აბსცისათა ღერძის ქვევით! ნახ. 9.3 ამიტომ "ფართობი უარყოფითია" "ორიენტირებილი ფართობი"! აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ სამართლიანია ყველა ფუნქციისათვის

$$\int_a^b f(x)dx \equiv -\int_a^b \left(-f(x)\right)dx \qquad \mathbf{(9.5)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \equiv -\int_b^a f(x)dx \qquad \textbf{(9.6)}$$

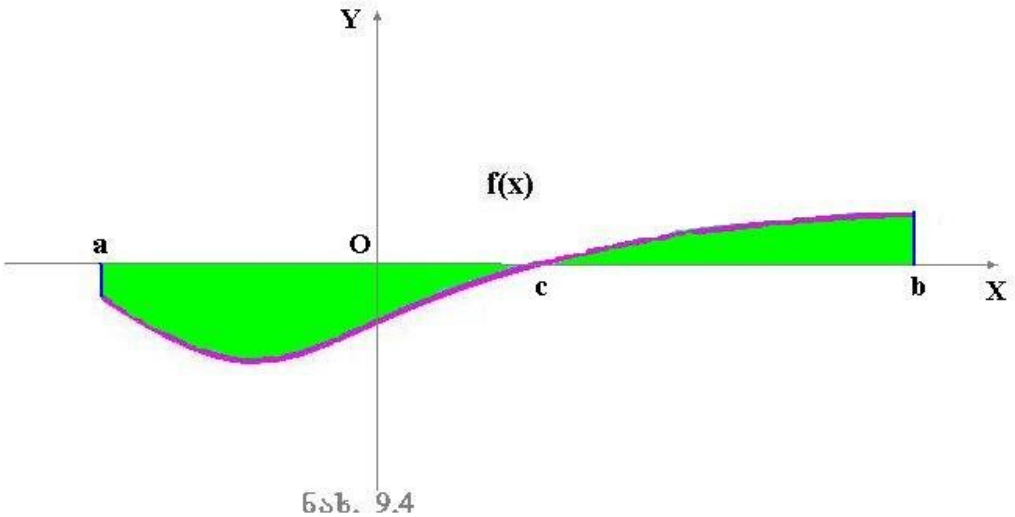


ნახ. 9.3

(9.5) და (9.6) ფორმულებიდან ცალსახად გამოდის, რომ ინტეგრალი წერტილში ნულის ტოლია ანუ

$$\int_a^a f(x)dx \equiv 0 \qquad \textbf{(9.7)}$$

რა თქმა უნდა გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნებისმიერ შემთხვევაში არის "ორიენტირებული ფართობი" ფიგურეს ფართობი აღებული იმ ნიშნით როგორი ნიშნისაც არის ფუნქცია ამ "მიკროინტერვალზე" (ინტერვალის დანაყოფზე $[x_i, x_{i+1},]$ მაგალითად. იხ ნახ. 9.4)



ნახ. 9.4

ინტეგრალის განმარტებიდან გამოდის , რომ:

- რადგან **[a , c] ∪ [c , b] = [a , c] (** ინტერვალი შეიძლება ნებისმიერად დაიყოს) შესაბამისად

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{(9.8)}$$

(შეადარე ნახ. 9.1, 9.3., და 9.4)

- **მუდმივი სიდიდე შეიძლება გამოვითანოთ „ინტეგრალიდან“** ანუ თუ c=const. მაშინ

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx \equiv c \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad (9.9)$$

- **თუ ფუნქცია $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ არის ორი ფუნქციის ჯამი , მაშინ**

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx \qquad \textbf{(9.10)}$$

(ჯამის ინტეგრების წესი);

- ანსაზღვრული ინტეგრალი არის რიცხვი და შესაბამისად არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს რა ასოთი არის აღნიშნული **„ინტეგრების ცვლადი“-** ანუ

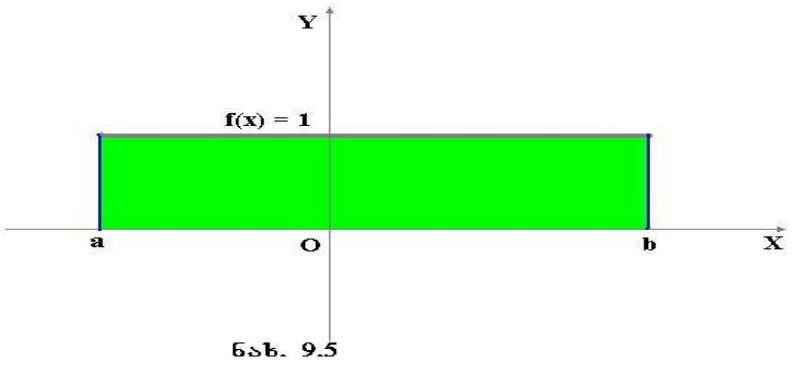
$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(v)dv \qquad \textbf{(9.11)}$$

9.1 მაგალითები

9.1.1 ფუნქციები $f(x) = x^n$, სადაც n – ნატურალური რიცხვია!

- **n=0 , f(x) = 1 – შესაბამისად ფართობი (იხილე ნახ 9.5) არის მართკუთხედის ფართობი და**

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b 1dx = (b-a)\cdot 1 = b-a \qquad \textbf{(9.12)}$$

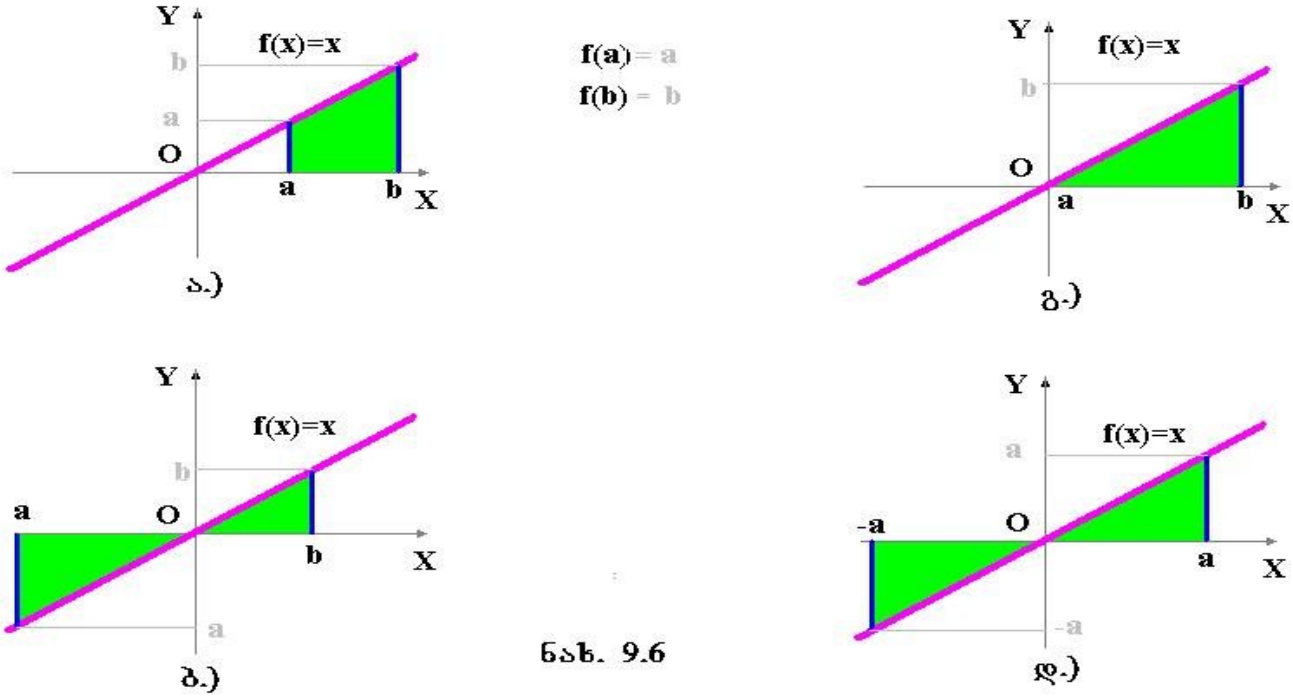


ნახ. 9.5

- **n=1, f(x) = x – შესაბამისად ფართობი:**
  1. **თუ a >0 არის ტრაპეციის ფართობი (იხილე ნახ 9.6 ა.))**
  2. **თუ a = 0 არის სამკუთხედის ფართობი (იხილე ნახ 9.6 გ.))**
  3. **თუ a < 0 და b >0 არის ორი სამკუთხედის ფართობების სხვაობა (იხილე ნახ 9.6 ბ.))**
  4. **თუ a < 0 და b >0 და - a = a = b არის ორი <u>ტოლი სამკუთხედის</u> ფართობების სხვაობა (იხილე ნახ 9.6 დ.) და შესაბამისად ნულის ტოლია!**

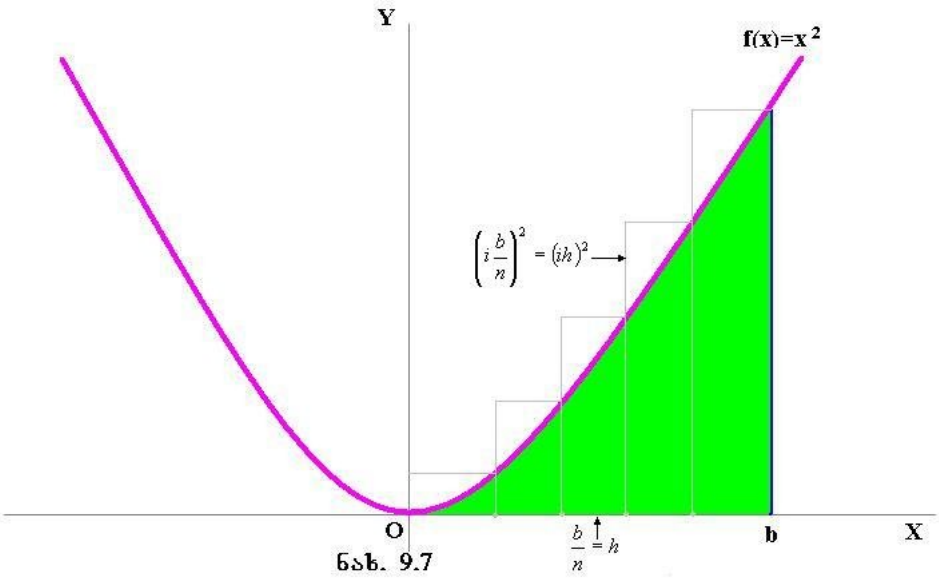
შეიძლება დამტკიცება, რომ ყველა ზემოთ მოტანილ შემთხვევაში საძიებელი ფართობი მოიცემა სკოლაში ნასწავლი ი.წ.”ტრაპეციის ფართობის” ფორმულით

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b xdx = (b-a)\cdot\frac{b+a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} \qquad \textbf{(9.13)}$$



❖ **n=2, $f(x) = x^2$ – შესაბამისად ფართობი** ზღვარი "ზედა" ჯამებისა - შეიძლება დაიწეროს, რომ ელემენტარული გეომეტრიიდან და ფორმულა (9.1ზ) - თანახმად არის

$$\overline{S}\left(o,b,x^2,n\right)=h\left(h^2+(2h)^2+(3h)^2+\cdots+(nh)^2\right)=h^3\left(1^2+2^2+\cdots n^2\right)=\frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots n^2\right)$$



ნახ. 9.7

და თუ გამოვითვლით შესაბამისი მიმდევრობის ზღვარს მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{b^3}{6}$$

საიდანაც გამოდის, რომ ნებისმიერი **b**- რიცხვისათვის

$$\int_0^b f(x)dx\equiv\int_0^b x^2dx=\frac{b^3}{3};$$

გამოვიყენებთ რა ზემოთ მოტანილ (9.8 9.11) წესებს ვაჩვენებთ,რომ ნებისმიერი **[a,b]** ინტერვალისათვის

$$\int_a^b x^2dx=\int_0^b x^2dx-\int_0^a x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3}$$

9.2 ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა

არსებობს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის მეორე საშუალება, მაგრამ წინა შემთხვევისაგან განსხვავევით ეს მეთოდი მჭიდროდაა დაკავშირებული **"წარმოებულის"** პოვნის შებრუნებულ ოპერაციასთან **"პირველადის მოძებნა"** ანუ **"განუსაზღვრელი ინტეგრალი").** ამ ცნებებზე მეათე ლექციის კონსპექტში არის საუბარი!

ნიუტონ ლეიბნიცის ფორმულა. თუ **F(x)** ფუნქცია არის **f(x)** ფუნქციის პირველადი (ე.ი. თუ **F(x)** ფუნქციის წარმოებული **f(x)** ფუნქციაა ანუ თუ **F'(x) = f(x)**) მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad \textbf{(9.14)}$$

შენიშვნა: მართალია ეს ფორმულა ერთი შეხედვით მარტივად იძლევა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის გზა, მაგრამ მისი ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველთვის შესაძლებელი არაა გამოვითვალოთ მოცემული ფუნქციის პირველყოფილი!