თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ინტერდისციპლინური (მათემატიკა, კომპიუტერული მეცნიერებები)
ქვემიმართულება: მათემატიკური ლოგიკა და დისკრეტული სტრუქტურები

ბაკალავრიატი

დისკრეტული სტრუქტურები

ლექციათა კურსი
დისკრეტულ სტრუქტურებში

რევაზ გრიგოლია

რედაქტორი
ვლადიმერ ოდიშარია

თბილისი
2012

შინაარსი

I
სიმრავლეები, ფუნქციები, მიმართებები

1.1 სიმრავლეები

ინტუიციურად, "სიმრავლე" არის ელემენტთა ერთობლიობა, ხოლო "ფუნქცია" – ნებისმიერი წესი, რომელიც ყოველ ელემენტს ერთი სიმრავლიდან შეუსაბამებს შესატყვის ელემენტს მეორე სიმრავლიდან.

სიმრავლის მაგალითები: სიბრტყეზე ყველა წრფეების სიმრავლე, ყველა რაციონალურ რიცხვთა **Q** სიმრავლე, ყველა კომპლექსურ რიცხვთა **C** სიმრავლე, ყველა მთელ რიცხვთა **Z** სიმრავლე. სასრული რაოდენობის სხვადასხვა ელემენტისაგან შემდგარი სიმრავლეები შესაძლებელია აღიწეროს ყველა მისი ელემენტებისაგან შემდგარი სიის საშუალებით, რომელსაც ხშირად ათავსებენ ფიგურულ ფრჩხილებში. მაშასადამე ყველა ლუწი მთელი რიცხვების სიმრავლე მოთავსებული 0-სა და 8-ს შორის, ამ რცხვების ჩათვლით, შესაძლებელია წარმოვადგინოთ როგორც {0,2,4,6,8}, ასევე 6-ის ყველა დადებითი გამყოფების სიმრავლე წარმოიდგინება შემდეგი სახით {1,2,3,6}. რიგს, რომლის მიხედვითაც დალაგებულია ამ სიმრავლის ელემენტები, არ აქვს მნიშნელობა: {1,2,3,6} = {1,3, 6,2}.

ფორმალურად, "$x \in S$" აღნიშნავს, რომ "x არის S სიმრავლის *ელემენტი*" ან, ექვივალენტურად, "x არის S სიმრავლის წევრი" ან "x ეკუთვნის S სიმრავლეს". აგრეთვე "$x \notin S$" ნიშნავს, რომ "x არ არის S სიმრავლის *ელემენტი*". ვინაიდან სიმრავლე სრულად განისაზღვრება მისი ელემენტებით, ორი სიმრავლე S და T *ტოლია* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები; სიმბოლოებში:

$$S = T \Leftrightarrow \text{ყოველი } x\text{-თვის, } x \in S \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } x \in T. \quad (1)$$

(აქ ორმხრივი ისარი "$\Leftrightarrow$" ნიშნავს "მაშინ და მხოლოდ მაშინ"). S არის T-ს *ქვესიმრავლე* (ან *ჩართულია* T-ში), ნიშნავს, რომ S–ის ყოველი ელემენტი არის T-ს ელემენტი, ასე რომ, თუ $x \in S$, მაშინ $x \in T$; სიმბოლოებში :

$$S \subset T \Leftrightarrow \text{ნებისმიერი } x\text{-თვის, } x \in S \Rightarrow x \in T.$$

(აქ, მარჯვენა მხარეს, ცალმხრივი "$\Rightarrow$" ისარი ნიშნავს "გამომდინარეობს"). ამ განსაზღვრების თანახმად, $S \subset T$ და $T \subset U$ -დან გამომდინარეობს $S \subset U$. S და T სიმრავლეების ტოლობა, როგორც ეს ზემოთ არის განსაზღვრული, შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$S = T \Leftrightarrow S \subset T \text{ და } T \subset S.$$

სიმრავლე S *ცარიელია*, თუ მას არ გააჩნია ელემენტები. ტოლობა (1)-ს თანახმად, ნებისმიერი ორი ცარიელი სიმრავლე ტოლია. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მას აგრეთვე უწოდებენ *ნულ* სიმრავლეს; ის არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე. S არის U სიმრავლის *საკუთრივი ქვესიმრავლე*, თუ $S \neq \varnothing$, $S \neq U$ და $S \subset U$.

მოცემული U სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე ხშირად აღიწერება როგორც სიმრავლე ყველა იმ x ელემენტებისა U-დან, რომელთაც გააჩნიათ რაღაც სპეციფიკური

თვისება. ასე რომ ყველა კომპლექსური z რიცხვების ქვესიმრავლე, ისეთი რომ $z^2 = -1$ ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\{z \mid z \in \mathbf{C} \text{ და } z^2 = -1\}$, ასევე ფორმულები

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ და } x = 2y \text{ რომელიმე } y \in \mathbf{Z}\}, \ \mathbf{N} = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ და } x \geq 0\}$$

აღწერენ, შესაბამისად, ყველა ლუწ მთელ რიცხვთა სიმრავლე E-ს და ყველა არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{N}$–ს. სხვადასხვა თვისებებით შესაძლებელია აღიწეროს ერთი და იგივე ქვესიმრავლე; ასე მაგალითად

$$\{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ და } 0 < n < n\} \text{ და } \{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ და } n^2 = -1\}$$

ორივე აღწერს ცარიელ სიმრავლეს $\varnothing$.

განვიხილოთ *თანაკვეთის* და *გაერთიანების* ოპერაციები სიმრავლეებზე. თუ R და S მოცემული სიმრავლეებია, მათი *თანაკვეთა* $R \cap S$ არის R და S სიმრავლეების ყველა საერთო ელემენტთა სიმრავლე:

$$R \cap S = \{x \mid x \in R \text{ და } x \in S\},$$

მაშინ როცა მათი *გაერთიანება* $R \cup S$ არის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის ან R ან S (ან ორივეს) :

$$R \cup S = \{x \mid x \in R \text{ ან } x \in S\}.$$

ეს განსაზღვრებები შემდეგნაირად შეიძლება გამოითქვას :

$$x \in (R \cap S) \Leftrightarrow x \in R \text{ და } x \in S,$$
$$x \in (R \cup S) \Leftrightarrow x \in R \text{ ან } x \in S.$$

თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციისა ეს განმარტებები ეთანადება ლოგიკურ კავშირებს “და” და “ან”.

ორი A და B სიმრავლის *სხვაობა* $A - B$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

შესატყვისი შესაბამისობა ლოგიკური კავშირისა “არა” არის “დამატების” ოპერაცია: თუ S-ი U-ს ქვესიმრავლეა, მაშინ S-ის *დამატება* $-S$ U-ში არის ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე U-დან, რომლებიც არ ეკუთვნიან S :

$$-S = \{x \mid x \in U \text{ და } x \notin S\} = U - S.$$

თანაკვეთის, გაერთიანების და დამატების ოპერაციები აკმაყოფილებენ მრავალნაირ “ტოლობებს”, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი სიმრავლეები-სათვის. ერთერთი მათგანი არის

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T), \qquad (2)$$

რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი R, S და T სიმრავლეებისათვის. (ეს ტოლობა ამტკიცებს, რომ "თანაკვეთის" ოპერაცია დისტრიბუციულია "გაერთიანების" მიმართ.) დავამტკიცოთ ეს დებულება. ზემოთ მოყვანილი $\cap$ და $\cup$ განსაზღვრების თანახმად,

$$x \in [R \cap (S \cup T)] \Leftrightarrow x \in R \text{ და } x \in S \cup T \Leftrightarrow x \in R \text{ და } (x \in S \text{ ან } x \in T).$$

ანალოგიურად,

$$x \in [(R \cap S) \cup (R \cap T)] \Leftrightarrow (x \in R \text{ და } x \in S) \text{ ან } (x \in R \text{ და } x \in T).$$

შემდეგ, "და"-ს და "ან"-ის ცნობილი თვისებების თანახმად, ეს ორი სხვადასხვა მტკიცებულებები x-ის შესახებ, ზემოთ წარმოდგენილი მარჯვენა მხარის ჩანაწერები ლოგიკურად ექვივალენტურებია. მაშასადამე ორივე წარმოდგენილ სიმრავლეს გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები და ამიტომ ტოლებია. ანალოგიურად

$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T). \qquad (3)$$

ორ სიმრავლეს, R და S-ს, ეწოდება *თანაუკვეთი*, თუ $R \cap S = \varnothing$.

თუ გვაქვს ნებისმიერი სიმრავლე, $P(U)$-თი აღვნიშნავთ U სიმრავლის ყველა S ქვესიმრავლეების სიმრავლეს, რომელსაც ვუწოდებთ U სიმრავლის *ბულეანს;* ე. ი., ინტუიციურად, "სიმრავლე" არის ელემენტთა ერთობლიობა, ხოლო "ფუნქცია" – ნებისმიერი წესი, რომელიც ყოველ ელემენტს ერთი სიმრავლიდან შეუსაბამებს შესატყვის ელემენტს მეორე სიმრავლიდან.

სიმრავლის მაგალითები: სიბრტყეზე ყველა წრფეების სიმრავლე, **Q** - ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, **C** - ყველა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, **Z**- ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე. სასრული რაოდენობის სხვადასხვა ელემენტისაგან შემდგარი სიმრავლეები შესაძლებელია აღიწეროს ყველა მისი ელემენტებისაგან შემდგარი სიის საშუალებით, რომელსაც ხშირად ათავსებენ ფიგურულ ფრჩხილებში. მაშასადამე ყველა ლუწი მთელი რიცხვების სიმრავლე მოთავსებული 0-სა და 8-ს შორის, ამ რცხვების ჩათვლით, შესაძლებელია წარმოვადგინოთ როგორც {0,2,4,6,8}, ასევე 6-ის ყველა დადებითი გამყოფების სიმრავლე წარმოიდგინება შემდეგი სახით {1,2,3,6}. რიგს, რომლის მიხედვითაც დალაგებულია ამ სიმრავლის ელემენტები, არ აქვს მნიშნელობა: {1,2,3,6} = {1,3, 6,2}.

ფორმალურად, "$x \in S$" აღნიშნავს, რომ "x არის S სიმრავლის *ელემენტი*" ან, ექვივალენტურად, "x არის S სიმრავლის წევრი" ან "x ეკუთვნის S სიმრავლეს". აგრეთვე "$x \notin S$" ნიშნავს, რომ "x არ არის S სიმრავლის *ელემენტი*". ვინაიდან სიმრავლე სრულად განისაზღვრება მისი ელემენტებით, ორი სიმრავლე S და T *ტოლია* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები; სიმბოლოებში:

$$S = T \Leftrightarrow \text{ყოველი } x\text{-თვის, } x \in S \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } x \in T. \qquad (1)$$

(აქ ორმხრივი ისარი "$\Leftrightarrow$" ნიშნავს "მაშინ და მხოლოდ მაშინ"). S არის T-ს *ქვესიმრავლე* (ან *ჩართულია* T-ში), ნიშნავს, რომ S–ის ყოველი ელემენტი არის T-ს ელემენტი, ასე რომ, თუ $x \in S$, მაშინ $x \in T$; სიმბოლოებში :

$$S \subset T \Leftrightarrow \text{ნებისმიერი } x\text{-თვის, } x \in S \Rightarrow x \in T.$$

(აქ, მარჯვენა მხარეს, ცალმხრივი "$\Rightarrow$" ისარი ნიშნავს "გამომდინარეობს"). ამ განსაზღვრების თანახმად, $S \subset T$ და $T \subset U$ -დან გამომდინარეობს $S \subset U$. S და T სიმრავლეების ტოლობა, როგორც ეს ზემოთ არის განსაზღვრული, შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$S = T \Leftrightarrow S \subset T \text{ და } T \subset S.$$

სიმრავლე S *ცარიელია*, თუ მას არ გააჩნია ელემენტები. ტოლობა (1)-ს თანახმად, ნებისმიერი ორი ცარიელი სიმრავლე ტოლია. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მას აგრეთვე უწოდებენ *ნულ* სიმრავლეს; ის არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე. S არის U სიმრავლის *საკუთრივი ქვესიმრავლე*, თუ $S \neq \varnothing$, $S \neq U$ და $S \subset U$.

მოცემული U სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე ხშირად აღიწერება როგორც სიმრავლე ყველა იმ x ელემენტებისა U-დან, რომელთაც გააჩნიათ რაღაც სპეციფიკური თვისება. ასე რომ ყველა კომპლექსური z რიცხვების ქვესიმრავლე, ისეთი რომ $z^2 = -1$ ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\{z \mid z \in \mathbf{C} \text{ და } z^2 = -1\}$, ასევე ფორმულები

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ და } x = 2y \text{ რომელიმე } y \in \mathbf{Z}\},\ \mathbf{N} = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ და } x \geq 0\}$$

აღწერენ, შესაბამისად, ყველა ლუწ მთელ რიცხვთა სიმრავლე E-ს და ყველა არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{N}$–ს. სხვადასხვა თვისებებით შესაძლებელია აღიწეროს ერთი და იგივე ქვესიმრავლე; ასე მაგალითად

$$\{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ და } 0 < n < n\} \text{ და } \{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ და } n^2 = -1\}$$

ორივე აღწერს ცარიელ სიმრავლეს $\varnothing$.

განვიხილოთ *თანაკვეთის* და *გაერთიანების* ოპერაციები სიმრავლეებზე. თუ R და S მოცემული სიმრავლეებია, მათი *თანაკვეთა* $R \cap S$ არის R და S სიმრავლეების ყველა საერთო ელემენტთა სიმრავლე:

$$R \cap S = \{x \mid x \in R \text{ და } x \in S\},$$

მაშინ როცა მათი *გაერთიანება* $R \cup S$ არის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის ან R ან S (ან ორივეს) :

$$R \cup S = \{x \mid x \in R \text{ ან } x \in S\}.$$

ეს განსაზღვრებები შემდეგნაირად შეიძლება გამოითქვას :

$$x \in (R \cap S) \Leftrightarrow x \in R \text{ და } x \in S,$$
$$x \in (R \cup S) \Leftrightarrow x \in R \text{ ან } x \in S.$$

თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციისა ეს განმარტებები ეთანადება ლოგიკურ კავშირებს “და” და “ან”.

ორი A და B სიმრავლის *სხვაობა* $A - B$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

შესატყვისი შესაბამისობა ლოგიკური კავშირისა “არა” არის “დამატების” ოპერაცია: თუ S-ი U-ს ქვესიმრავლეა, მაშინ S-ის *დამატება* $-S$ U-ში არის ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე U-დან, რომლებიც არ ეკუთვნიან S :

$$-S = \{x \mid x \in U \text{ და } x \notin S\} = U - S.$$

თანაკვეთის, გაერთიანების და დამატების ოპერაციები აკმაყოფილებენ მრავალნაირ “ტოლობებს”, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი სიმრავლეები-სათვის. ერთერთი მათგანი არის

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T), \qquad (2)$$

რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი R, S და T სიმრავლეებისათვის. (ეს ტოლობა ამტკიცებს, რომ “თანაკვეთის” ოპერაცია დისტრიბუციულია “გაერთიანების” მიმართ.) დავამტკიცოთ ეს დებულება. ზემოთ მოყვანილი $\cap$ და $\cup$ განსაზღვრების თანახმად,

$$x \in [R \cap (S \cup T)] \Leftrightarrow x \in R \text{ და } x \in S \cup T \Leftrightarrow x \in R \text{ და } (x \in S \text{ ან } x \in T).$$

ანალოგიურად,

$$x \in [(R \cap S) \cup (R \cap T)] \Leftrightarrow (x \in R \text{ და } x \in S) \text{ ან } (x \in R \text{ და } x \in T).$$

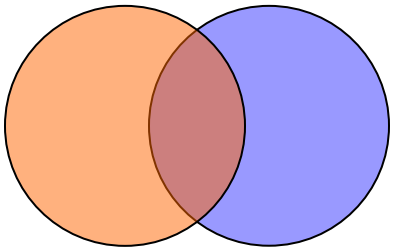
შემდეგ, “და”-ს და “ან”-ის ცნობილი თვისებების თანახმად, ეს ორი სხვადასხვა მტკიცებულებები x-ის შესახებ, ზემოთ წარმოდგენილი მარჯვენა მხარის ჩანაწერები ლოგიკურად ექვივალენტურებია. მაშასადამე ორივე წარმოდგენილ სიმრავლეს გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები და ამიტომ ტოლებია. ანალოგიურად

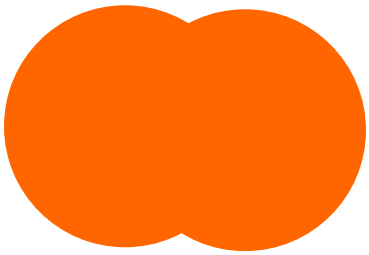
$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T). \qquad (3)$$

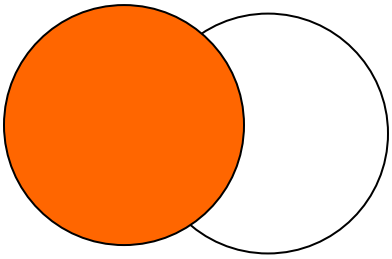
ორ სიმრავლეს, R და S-ს, ეწოდება *თანაუკვეთი*, თუ $R \cap S = \varnothing$.

თუ გვაქვს ნებისმიერი სიმრავლე U, $P(U)$-თი აღვნიშნავთ U სიმრავლის ყველა S ქვესიმრავლეების სიმრავლეს, რომელსაც ვუწოდებთ U სიმრავლის *ბულეანს;* ე. ი. , $P(U) = \{S \mid S \subset U\}$. მაგალითად, თუ U ორ ელემენტიანია, მაშინ მას გააჩნია ოთხი სხვადასხვა ქვესიმრავლე, რომლებიც არიან $P(U)$ –ს ოთხი ელემენტი. უფრო ნათლად, $P(\{1,2\}) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \varnothing\}$, სადაც $\varnothing$ არის ცარიელი სიმრავლე.

$P(U) = \{S \mid S \subset U\}$. მაგალითად, თუ U ორ ელემენტიანია, მაშინ მას გააჩნია ოთხი სხვადასხვა ქვესიმრავლე, რომლებიც არიან $P(U)$ –ს ოთხი ელემენტი. უფრო ნათლად, $P(\{1,2\}) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \varnothing\}$, სადაც $\varnothing$ არის ცარიელი სიმრავლე.







1.2 ფუნქციები

ნებისმიერი *f ფუნქცია* S სიმრავლიდან T სიმრავლეში ყოველ s ელემენტს S-დან ანიჭებს მნიშვნელობას $f(s) \in T$ (ანუ s ელემენტი გადაჰყავს $f(s)$ ელემებნტში, $f(s) \in T$). ამას აღვნიშვნით შემდეგნაირად

$$s \mapsto f(s), \qquad s \in S,\ f(s) \in T.$$

$f(s)$ ელემენტი შეიძლება აგრეთვე ჩაიწეროს როგორც fs ან f_s, ფრჩხილების გარეშე; ეს არის f-ის *მნიშვნელობა* s *არგუმენტზე*. სიმრავლე S-ს ეწოდება f-ის *დომეინი*, ხოლო T-ს - *კოდომეინი*. ისრიანი აღნიშვნა

$$f : S \to T \qquad \text{ან} \qquad S \xrightarrow{f} T$$

მიუთითებს, რომ f არის ფუნქცია S დომეინით და T კოდომეინით. ხშირად ფუნქციას უწოდებენ "ასახვას" ან "ტრანსფორმაციას".

რომ აღიწეროს კონკრეტული ფუნქცია, ნაჩვენები უნდა იყოს მისი დომეინი და მისი კოდომეინი, და ჩაწერილი უნდა იყოს მისი მოქმედების შედეგი ტიპიურ ("ცვლად") ელემენტზე დომეინიდან. ასე რომ კვადრატში აყვანის ფუნქცია $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისათვის შეიძლება აღიწეროს შემდეგი ნებისმიერი გზით: $f(x) = x^2$ ყოველი x ნამდვილი რიცხვისათვის, ან როგორც ფუნქცია $(\text{--})^2$, სადაც – გათვალისწინებულია ადგილი არგუმენტისთვის, ან როგორც ფუნქცია, რომელსაც გადაჰყავს ყოველი $x \in \mathbf{R}$ x^2-ში, ან როგორც ფუნქცია, რომელიც მოცემულია ასახვით $x \mapsto x^2$, სადაც $x \in \mathbf{R}$.

შევნიშნოთ, რომ სიმბოლო როგორიცაა f ან g აღნიშნავს ფუნქციას, მაშინ როდესაც გამოსახულება როგორიცაა $f(x)$ ან $g(x)$ აღნიშნავს ამ ფუნქციის მნიშვნელობას x ელემენტზე მისი დომეინიდან. მაგალითად გამოსახულიბა "$\sin x$" ნიშნავს რომელიღაც რიცხვს, ასე რომ ჩვენ ვლაპარაკობთ არა " ფუნქცია $\sin x$", არამედ ფუნქცია $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

ორი ფუნქცია f და g *ტოლია* (აღნიშნება, f = g), როცა მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე დომეინი, ერთი და იგივე კოდომეინი, და ერთი და იგივე მნიშვნელობა $f(s)$ = g(s) ყოველ ელემენტ s-ზე მათი საერთო დომეინიდან. მაგალითად, ასახვა $x \mapsto x + 2$ განსაზღვრავს ფუნქციას $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე **Z**-ზე; ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე **R**–ზე ეს ასახვა აგრეთვე განსაზღვრავს ფუნქციას $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; მაგრამ ეს ფუნქციები *სხვადასხვა* ფუნქციებია, ვინაიდან მათ გააჩნიათ სხვადასხვა დომეინები.

ფუნქციის $f : S \to T$ *სახე* image(f) არის ყველა $f(s)$ მნიშვნელობათა სიმრავლე $f(S)$, სადაც $s \in S$; image(f) ყოველთვის არის f-ის კოდომეინის ქვესიმრავლე.

ნებისმიერი S სიმრავლისათვის, *იგივური ფუნქცია* $1_S : S \to S$ არის ფუნქცია $s \mapsto s$, რომელიც ასახავს ყოველ ელემენტ s S-დან თავის თავში. სხვადასხვა სიმრავლეებს გააჩნიათ სხვადასხვა იგივური ფუნქციები. თუ S არის U-ს ქვესიმრავლე, მაშინ *ჩადგმა* $i : S \to U$ არის ფუნქცია S-დან U-ში, რომელსაც გადაჰყავს ნებისმიერი ელემენტი S-დან იგივე ელემენტში, რომელიც არის U-დან. შევნიშნოთ, რომ "ჩადგმა" არის ფუნქცია $S \to U$, ხოლო "ჩართვა" არის მიმართება $S \subset U$; ყოველი ჩართვის მიმართება წარმოქმნის ჩადგმის ფუნქციას.

ორი ფუნქციის *კომპოზიცია* $f \circ g = fg$ არის ისეთი ფუნქცია, რომელიც მიიღება მათი თანმიმდევრობით მოქმედების შედეგათ; პირველად g-სი და შემდეგ f-ის – რომელიც არ არის

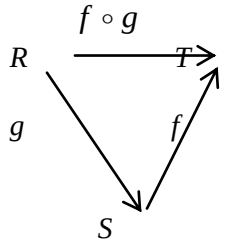
აზრს მოკლებული: ე. ი., *f*-ის დომეინი არის *g*-ს კოდომეინი. უფრო ფორმალურად, მოცემული გვაქვს რა ფუნქციები

$$g : R \to S, \qquad f : S \to T,$$

მათი *კომპოზიცია* არის ფუნქცია $f \circ g : R \to T$ რაც ნიშნავს, რომ

$$(f \circ g)(r) = f(g(r)), \quad \text{ყოველი} \quad r \in R. \qquad (4)$$

ეს განსაზღვრება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ "ასახვების დიაგრამის" საშუალებით :



რომ გადავიდეთ *R*-დან $f \circ g$ კომპოზიციით *T*-ში ეს იგივეა რაც მივაღწიოთ *T*-ს ორი ნაბიჯით *S*-ის გავლით, პირველად *g*-თი და შემდეგ *f*-ით. ამ ფაქტის აღსანიშნავად ამბობენ აგრეთვე, რომ ეს სამკუთხა დიაგრამა "კომუტირებს".

ფუნქციების კომპოზიცია აკმაყოფილებს

ასოციაციურობის კანონს : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$

როცა მათში შემავალი კომპოზიციები განსაზღვრულია. ეს ინტუიციურად ნათელია; ორივეს $(f \circ g) \circ h$ და $f \circ (g \circ h)$ გააჩნიათ მოქმედების ერთნაირი ეფექტი: ჯერ *h–ი,* შემდეგ *g,* და ბოლოს *f-ი.* ფორმალურად, მოცემული ფუნქციების $h : P \to R, g : R \to S$ და $f : S \to T$, ორივე სამეულის კომპოზიციები $(f \circ g) \circ h$ და $f \circ (g \circ h)$ არის ფუნქციები P -დან T –ში, მაშინ როდესაც პირველი კომპოზიცია ყოველ $p \in P$ ანიჭებს მნიშვნელობას

$$[(fg)h]\,p \underset{(fg)h}{=} (fg)(hp) \underset{fg}{=} f(g(hp)) \underset{gh}{=} f((gh)p) \underset{f(gh)}{=} [f(gh)]p;$$

ფუნქციებისთვის ტოლობის განსაზღვრის თანახმად მტკიცდება ასოციაციურობის კანონი $(fg)h = f(gh) : P \to T.$ შევნიშნოთ, რომ აქ (და ხშირად შემდგომ) მოსახერხებელია არ ვწეროთ სიმბოლო "∘" $f \circ g$ -ში.

კომპოზიციის მიმართ ყოველი ფუნქცია აკმაყოფილებს

იგივეობის კანონს : $f \circ 1_S = f = 1_T \circ f : S \to T.$

პირველი ტოლობა რომ დამტკიცდეს, (4)-ის თანახმად შევნიშნოთ, რომ $(f1_S)s = f(1_S s) = fs$ ყოველი $s \in S$; მაშასადამე, $f1_S = f$ ფუნქციების ტოლობის გასაზღვრის თანახმად. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ტოლობა.

ფუნქციას $r : S \to T$ ეწოდება $f : U \to V$ ფუნქციის *შეზღუდვა,* როცა $S \subset U$, $T \subset V$ და $r(s)=f(s)$ ყოველი $s \in S$. (აგრეთვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ f არის r ფუნქციის *გაფართოება*). მაგალითად, მოცემული ქვესიმრავლესთვის $S \subset U$, ჩადგმა $i: S \to U$ არის იგივეური ფუნქციის $1_U : U \to U$ შეზღუდვა.

განვიხილავთ სპეციალური ტიპის ინექციური, სურექციული ბიექციური ფუნქციები.

ფუნქცია $f : S \to T$ არის *ინექციური* ან *ინექცია,* თუ პირობიდან $a \neq b$ S –ში, გამომდინარეობს $f(a) \neq f(b)$ T-ში; ე. ი. , როცა f-ს გადაჰყავს განსხვაებული ელემენტები მისი დომეინიდან განსხვავებულ ელემენტებში მისი კოდომეინიდან. მაგალითად, ყოველი ჩადგმა არის ინექცია. ფუნქცია $h : S \to T$ არის *სურექციული* ან *სურექცია,* თუ მისი სახე ემთხვევა მთელ კოდომეინ T-ს ; ე. ი. , ყოველი $t \in T$ არსებობს ერთი მაინც $s \in S$ სადაც $t = f(s)$. და ბოლოს, *ბიექცია* ეწოდება $b : S \to T$ ფუნქციას, რომელიც ერთდროულად არის ინექციაც და სურექციაც; ე. ი., b ბიექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი t ელემენტისთვის T-დან არსებობს მხოლოდ ერთი ელემენტი s-ი S-დან $b(s) = t$ პირობით. აღნიშვნა $\cong$, ან $b : S \cong T$, უჩვენებს, რომ b არის ბიექცია S-დან T-ში.

მაგალითად, $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ ფუნქციებს შორის, ფუნქცია $n \mapsto (-n)$ არის ბიექცია, ფუნქცია $n \mapsto 2n$ არის ინექცია, მაგრამ არა სურექცია, და ფუნქცია $n \mapsto n^2$ არც ინექციაა და არც სურექცია.

თუ $\boldsymbol{R}^+$ არის ყველა არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, კვადრატში აყვანის ფუნქცია $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, რომელიც მოცემულია $g(x) = x^2$ წესით, არის სურექცია, ვინაიდან ნებისმიერი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი არის რომელიღაც ნამდვილი რიცხვის კვადრატი. მაგრამ, კვადრატში აყვანის ფუნქცია $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, რომელიც მოცემულია $f(x) = x^2$ წესით და მისი კოდომეინი არის *ყველა* ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, არ *არის* სურექცია. ეს ორი კვადრატში აყვანის ფუნქციები (მიუხედავად იმისა, რომ მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე მნიშვნელობები) ითვლებიან სხვადასხვა ფუნქციებად, ვინაიდან მათ აქვთ სხვადასხვა კოდომეინები: არის თუ არ ფუნქცია სურექცია *დამოკიდებულია მის კოდომეინზე.*

ქვემოთ მოყვანილი გვაქვს ამ ცნებების სხვა პარალელური ტერმინოლოგია

ინიექცია $S \to T$ = “ურთიერთცალსახა” ასახვა S-დან T-ში ;
სურექცია $S \to T$ = ასახვა S-დან T-ზე ;
ბიექცია $S \to T$ = “ურთიერთ ცალსახა” ასახვა S-დან T-ზე.

ნებისმიერი ფუნქცია f შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც კომპოზიცია $f = g \circ h$, სადაც g არის ინექცია, ხოლო h სურექცია. მართლაც, თუ $f : S \to T$ ფუნქციის სახე არის $U \subset T$, მისი შეზღუდვა $r : S \to U$ არის სურიექცია, ხოლო ჩადგმა $i : U \subset T$ არის ინექცია, და თვით ფუნქციაც f არის კომპოზიცია $f = i \circ r$.

ზოგიერთ ფუნქციებს გააჩნიათ “შექცეული” ფუნქციები. დავუშვათ, რომ მოცემულია $g : T \to S$ და $f : S \to T$, ისე რომ მათი კომპოზიცია $f \circ g$ განსაზღვრულია. თუ ეს კომპოზიცია არის იგივური ფუნქცია $1_T = f \circ g$, მაშინ f –ს ვუწოდებთ g-ს *მარცხენა შექცეულს,* ხოლო g-ს f-ის *მარჯვენა შექცეულს.* როდესაც კომპოზიცია ორივე მიმდევრობით არის იგივური ფუნქცია, $1_T = f \circ g$ და $1_S = g \circ f$, მაშინ f –ს ვუწოდებთ g-ს *ორმხრივ შექცეულს* (და, მაშასადამე, g არის f-ის *ორმხრივი შექცეული.*)

თეორემა 1.1. *ფუნქცია არაცარიელი დომეინით არის ინექცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მარცხენა შექცეული. ფუნქცია სურექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მარჯვენა შექცეული.*

დამტკიცება. ჯერ დავუშვათ, რომ $g : T \to S$ გააჩნია მარცხენა შექცეული $f : S \to T$. მაშინ $fg = 1_T$, ასე რომ $g(t_1) = g(t_2)$ პირობიდან გამომდინარეობს $t_1 = fg(t_1) = fg(t_2) = t_2$. ამიტომ g არის ინექცია. პირიქით, დავუშვათ, რომ $g : T \to S$ არის ინექცია არაცარიელი T დომეინით; ამოვარჩიოთ რომელიმე ელემენტი $t_0 \in T$. ვინაიდან g ინიექციაა, ნებისმიერი $s \in$ image(g) არსებობს ერთი $t \in T$, ისეთი რომ $s = g(t)$; ე. ი. , ავაგოთ ფუნქცია $f : S \to T$ შემდეგნაირად

$f(s) = t$ (სადაც t ისეთია, რომ $g(t) = s$), როცა $s \in$ image (g), და $f(s) = t_0$, სხვა შემთხვევაში.

ამ f ფუნქციას გადაჰყავს ყოველი $g(t)$ "უკან, საიდანაც ის გადმოჰყავს g-ს"; ისე, რომ $f(g(t)) = t$ ნებისმიერი t-სთვის. ეს კი ამტკიცებს, რომ $1_T = f \circ g$, ე. ი. f არის სწორედ ის მოსაძებნი g-ს მარცხენა შექცეული ფუნქცია.

შევნიშნოთ, ინექცია g-ს, რომელიც არ არის ბიექცია, შეიძლება გააჩნდეს ბევრი მარცხენა შექცეული, რომელიც დამოკიდებულია t_0 –ის არჩევაზე. ააგეთ შესაბამისი მაგალითები.

დასამტკიცებელი დაგვრჩა თეორემის მეორე ნახევარი, რომელიც ეხება სურექციას. ჯერ დავუშვათ, რომ $f : S \to T$ გააჩნია მარჯვენა შექცეული g. $1_T = f \circ g$ ნიშნავს, რომ $f(g(t)) = t$ ყოველი t-თვის, ასე რომ ყოველი $t \in T$ იმყოფება f ფუნქციის მნიშვნელობათა არეში, და f არის სურიექცია, რაც საჭიროებდა დამტკიცებას. პირიქით, დავუშვათ, რომ $f : S \to T$ არის სურიექცია; ეს ნიშნავს, რომ ყოველ $t \in T$-თვის არსებობს ერთი მაინც $s \in S$ ისეთი, რომ $f(s) = t$. ამოვარჩიოთ ერთი ასეთი s ყოველი t-თვის და განვსაზღვროთ $g : T \to S$ იმ დაშვებით, რომ $g(t)$ უდრის ამ ამორჩეულ s-ს. მაშინ $f(g(t)) = t$, ე. ი. $1_T = f \circ g$, და g არის სწორედ ის საძებნი მარჯვენა შექცეული. □

შედეგი. $g : T \to S$ *ფუნქციისათვის შემდეგი თვისებები ექვივალენტურია:*

(i) *g არის ბიექცია.*
(ii) *g-ს გააჩნია როგორც მარცხენა შექცეული f ასევე მარჯვენა შექცეული h.*
(iii) *g-ს გააჩნია ორმხრივი შექცეული.*

ამ შემთხვევაში ნებისმიერი ორი შექცეული (მარცხენა, მარჯვენა ან ორმხრივი) ტოლია. ის ერთადერთი g-ს შექცეული (რომელიც ჩაიწერება როგორც g^{-1}) არის ბიექცია, და აკმაყოფილებს პირობას

$$(g^{-1})^{-1} = g. \qquad (5)$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $T \neq \varnothing$ და $S \neq \varnothing$, ასე რომ შეგვიძლია თეორემის გამოყენება. ვინაიდან ბიექცია არის სურექციაც და ინიექციაც, თეორემა პირდაპირ გვაძლევს *(i)* და *(ii)* ექვივალენტობას. რაც შეეხება *(iii)*-ს, ყოველი ორმხრივი შექცეული, ტრივიალურად

როგორც მარცხენა ისევე მარჯვენა შექცეულია; ე. ი. *(iii)*-დან გამომდინარეობს *(ii)*. პირიქით, *(ii)*-დან გამომდინარეობს

$$f = f \circ 1_S = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = 1_T \circ h = h,$$

რაც ნიშნავს, რომ $f = h$ არის ორმხრივი შექცეული g-სი ; ე. ი. *(ii)*-დან გამომდინარეობს *(iii)*. აქედან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ g-ს ნებისმიერი მარცხენა შექცეული f-ი უნდა ემთხვეოდეს ნებისმიერ მარჯვენა შექცეულ h –ს, დაბოლოს, g-ს შექცეულს. g არის მისი ორმხრივი შექცეული, და მაშასადამე ისიც ბიექციაა და f არის მისი შექცეული. ეს ამტკიცებს (5)-ს. □

თუ $g : T \to S$ და $k : S \to R$ ორივე ბიექციაა, მაშინ მათი კომპოზიციაც ბიექციაა; მისი შექცეული გამოისახება შემდეგნაირად

$$(k \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ k^{-1} \qquad \text{(უკუდალაგება).} \qquad (6)$$

მართლაც, $k^{-1} \circ k = 1_S$ და $g^{-1} \circ g = 1_T$, ამიტომ, ასოციაციურობის კანონის თანახმად,

$$g^{-1}k^{-1}kg = g^{-1}1_S\, g = g^{-1}g = 1_T$$

და $g^{-1}k^{-1}$ არის kg-ს მარცხენა შექცეული. მსგავსი მსჯელობა უჩვენებს, რომ ის აგრეთვე არის მარჯვენა შექცეული, რაც ამტკიცებს (6)-ს.

1.3 მიმართება და ბინარული ოპერაცია

როცა ჩვენ მოგვყავს ორცვლადიანი ფუნქცია ან ორ ცვლად შორის მიმართება, ჩვენ ვიყენებთ "დალაგებულ წყვილებს". *დალაგებული წყვილი,* შემდგარი ორი ელემენტისაგან, s და t, სწორედ ამ მიმდევრობით, ჩაიწერება როგორც (s,t). ორი დალაგებული წყვილის ტოლობა განისაზღვრება შემდეგი წესით

$$(s,t) = (s',t') \quad \Leftrightarrow \quad s = s' \text{ და } t = t' \ .$$

S და T ორი სიმრავლის *დეკარტული ნამრავლი* $S \times T$ განისაზღვრება როგორც ყველა დალაგებული (s,t) წყვილების სიმრავლე, შემდგარი S და T შესაბამის სიმრავლის ელემენტებისაგან. მაშასადამე

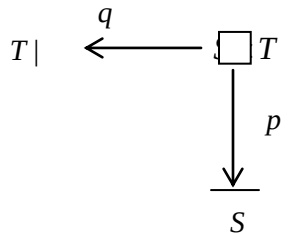
$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S, t \in T\}.$$

მაშასადამე, თუ $\boldsymbol{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ არის ყველა წერტილთა დეკარტული კოორდინატების სიმრავლე სიბრტყეზე (მოცემული კოორდინატთა ღერძების მიმართ).

ყოველი დეკარტული ნამრავლი შეიძლება “პროექცირებულ” იქნას თავის “ღერძებზე”, *S*-ზე და *T*-ზე:

$$S \xleftarrow{p} S \times T \xrightarrow{q} T .$$

ეს *პროექციები* არიან ფუნქციები p და q, განსაზღვრულები შემდეგნაირად: $p(s,t) = s$ და $q(s,t) = t$, როგორც ნაჩვენებია დიაგრამაზე



ჩვენ ამას ვუწოდებთ *დეკარტული ნამრავლის დიაგრამას.*

შევნიშნოთ, რომ ბიექცია $S \times T \cong T \times S$ მოცემულია ასახვით $(s,t) \mapsto (t,s)$.

დალაგებული სამეულები შესაძლებელია აღიწეროს დალაგებული წყვილების საშუალებით. თუ მოცემულია *r, s* და *t*, *დალაგებული სამეული* (r,s,t) იგი განისაზღვრება როგორც $(r,(s,t))$. ვწერთ $R \times S \times T$ ნაცვლად $R \times (S \times T)$ ყველა (r,s,t) სამეულის სიმრავლისა, სადაც $r \in R$, $s \in S$ და $t \in T$, და შევნიშნოთ, რომ ასახვა $(r,(s,t)) \mapsto ((r,s),t)$ არის ბიექცია $R \times (S \times T) \cong (R \times S) \times T$. დალაგებული “ოთხეულები” (r,s,t,u) და მსგავსები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

აგრეთვე შეგვიძლია ავაგოთ ფუნქციების დეკარტული ნამრავლი.
გვაქვს რა ორი ფუნქცია $u : S \to S'$ და $v : T \to T'$, მათი დეკარტული ნამრავლი $u \times v : S \times T \to S' \times T'$ განისაზღვრება შემდეგნაირად $(u \times v)(s,t) = (u(s), v(t))$.

დეკარტული ნამრავლი სასარგებლოა ჩვეულებრივ ორი ან მეტი არგუმენტიანი ფუნქციების აღსაწერად: ფუნქცია F, რომელსაც გააჩნია ორი ცვლადი $s \in S$ და $t \in T$ და მისი მნიშვნელობები ეკუთვნის *W*-ს, არის ფუნქცია

$$F : S \times T \to W$$

დეკარტული ნამრავლიდან $S \times T$-დან W სიმრავლეში. ასეთი ფუნქცია ასახავს ყოველ დალაგებულ წყვილს $(s,t) \in S \times T$ თავის მნიშვნელობაში $F(s,t) \in W$.

ნებისმიერი ორი X და Y სიმრავლისათვის, ნებისმიერ ქვესიმრავლეს $R \subset X \times Y$ ეწოდება *ბინარული მიმართება X*-დან *Y*-ში (ან, მიმართება *X*-სა და *Y* “შორის”). მაშინ $(x,y) \in R$ ჩაიწერება როგორც xRy და იკითხება : “*x* იმყოფება *R* მიმართებაში *y*-თან”, როგორც $"x \le y"$ რიცხვებისთვის ან “*x* ყოფს *y*” *x, y* მთელი რიცხვებისთვის. მაგალითად, თუ $X = \{1,3,5\}$ და $Y = \{0,2,4\}$, მაშინ სიმრავლე *R* = {{1,2}, {1,4}, {3,4}} შედგება ყველა იმ (*x*,*y*) წყვილებისგან, სადაც $x < y, x \in X$ და $y \in Y$, ამიტომ ის არის მიმართება “<” *X*-სა და *Y* –ს შორის. აგრეთვე, მაგალითად, სიმრავლური ჩართვა $S \subset T$ არის ბინარული მიმართება *U* –ს *P*(*U*) ბულეანიდან თავის თავში. *ტოლობის მიმართება* $I = I_X$ ნებისმიერი *X* სიმრავლიდან თავის თავში მოცემულია შემდეგნაირად : xIy მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = y$.

$R \subset X \times Y$ მიმართების *შებრუნება* არის მიმართება $R^{\cup} \subset Y \times X$,რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $yR^{\cup}x$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა xRy. თუ R არის მიმართება X-დან Y-ში, მაშინ მისი შებრუნებული არის მიმართება Y-დან X-ში, და $(R^{\cup})^{\cup} = R$. მაგალითად, რიცხვებისთვის, $\geq$ არის $\leq$-ს შებრუნება.

R და S მიმართებების "კომპოზიცია" $R \circ S$, მოცემული მიმდევრობით, განსაზღვრულია, როდესაც $R \subset X \times Y$ და $S \subset Y \times Z$; ეს არის მიმართება $R \circ S \subset X \times Z$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

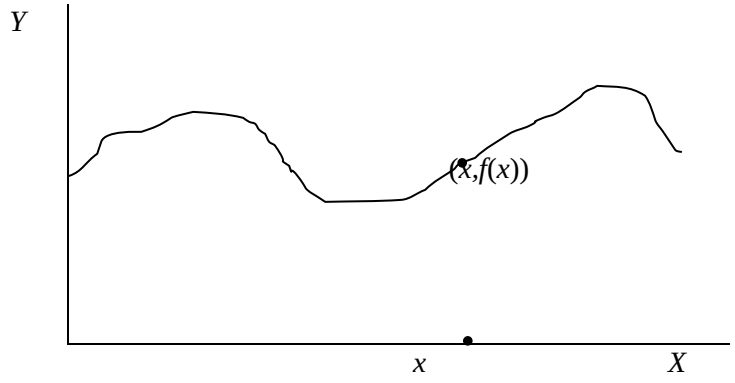
$$x(R \circ S)z \quad \Leftrightarrow \quad xRy \quad \text{და} \quad ySz, \quad \text{რომელიმე} \quad y \in Y.$$

ანალიზურ გეომეტრიაში ყოველი ფუნქციისათვის $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ აიგება მისი "გრაფიკი" როგორც $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$-ის რომელიღაც ქვესიმრავლე. იგივე კონსტრუქცია მოქმედებს ზოგად შემთხვევაშიც. თუ $f : X \to Y$ არის ფუნქცია, მაშინ მისი *გრაფიკი* არის $X \times Y$-ის ქვესიმრავლე

$$G(f) = \{(x, y) \mid x \in X \text{ და } y = f(x)\}.$$

ე. ი. გრაფიკი ფუნქციისა X-დან Y-ში არის მიმართება X-დან Y-ში. მიუხედავად ამისა, ნებისმიერი მიმართება არ წარმოადგენს რომელიმე ფუნქციის გრაფიკს; ფუნქციის გრაფიკი იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა "ვერტიკალური წრფე" გამავალი X სიმრავლის ყოველ წერტილზე თანაკვეთს სიმრავლეს $R \subset X \times Y$ ზუსტად ერთ წერტილში (იხ. ნახატი 1). ეს ფაქტი, როგორც ეს ფორმულირებულია მომდევნო თეორემაში, გვაძლევს განსხვავებულ გზას ფუნქციის განსაზღვრისათვის (ამ შემთხვევაში მიმართების საშუალებით).

თეორემა 1.2. *მიმართება $R \subset X \times Y$ არის $f : X \to Y$ ფუნქციის გრაფიკი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $x \in X$ არსებობს მხოლოდ ერთი $y \in Y$, ისეთი რომ xRy.*



ნახატი 1.

დამტკიცება. ყოველ $G(f)$ გრაფიკს გააჩნია აღნიშნული თვისება. პირიქით, თუ მიმართება $R \subset X \times Y$ გააჩნია აღნიშნული თვისება, მაშინ ყოველ x–ს X-დან ავსახავთ იმ ერთადერთ y-ში Y-დან, სადაც xRy. ასეთნაირად აგებული $f : X \to Y$ ფუნქციის გრაფიკით განისაზღვრება R მიმართება. □

ახლა განვიხილოთ მიმართებები X-დან თავის თავში. R მიმართებას X-დან X-ში ეწოდება *ექვივალენტობის მიმართება* X-ზე თუ მას გააჩნია შემდეგი სამი თვისება:

რეფლექსურობა: xRx ნებისმიერი x–თვის X-დან,
სიმეტრიულობა: xRy–დან გამომდინარეობს yRx ყოველი x,y-თვის X-დან,
ტრანზიტულობა: xRy და yRz–დან გამომდინარეობს xRz ყოველი x, y, z-თვის X-დან.

მაგალითად, დაუშვათ რომ X სიმრავლეა, რომლის ელემენტები x, y, z თავად სიმრავლეებია, ხოლო "xRy" ნიშნავს "არსებობს ბიექცია x სიმრავლიდან y სიმრავლეში". ეს განსაზღვრავს ექვივალენტობის მიმართებას X-ზე: ნებისმიერი x-თვის, იგივეობა 1_x არის ბიექცია $x \cong x$; $x \cong y$ არის ბიექცია, მაშინ იგივეა მისი შებრუნებულიც $y \cong x$; $x \cong y$ და $y \cong z$ ბიექციების კომპოზიცია გვაძლევს $x \cong z$ ბიექციას.

R მიმართებას X-დან X-ში ეწოდება *დალაგება* X-ზე თუ მას გააჩნია შემდეგი სამი თვისება:

რეფლექსურობა: xRx ნებისმიერი x–თვის X-დან,
ანტისიმეტრიულობა: xRy და yRx -დან გამომდინარეობს $x = y$,
ტრანზიტულობა: xRy და yRz–დან გამომდინარეობს xRz ყოველი x, y, z-თვის X-დან.

წრფივი დალაგება R X სიმრავლეზე არის დალაგება X-დან X-ში, რომელიც დამატებით აკმაყოფილებს *წრფივობის პირობას* :
ნებისმიერი $x,y \in X$ სრულდება ან xRy, ან yRx.

მაგალითად, ჩვეულებრივი უტოლობა $\leq$ გვაძლევს წრფივ დალაგებას $\mathbf{Z}$–ზე, $\mathbf{N}$-ზე და $\mathbf{R}$-ზე. დალაგება R-ს X-ზე ეწოდება *სრული*, თუ X-ის ყოველ ქვესიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ელემენტი.

ჯამი $(m,n) \mapsto m+n$ და გამრავლება $(m,n) \mapsto mn$ ორი m, n მთელი რიცხვებისა გვაძლევს ჯამისა და გამრავლების ფუნქციებს

$$+ : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, \quad \cdot : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$$

ყველა მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$ სიმრავლისათვის. ანალოგიური ფუნქცია გვაქვს ყველა ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლისათვის. აგრეთვე, თანაკვეთის $(S,T) \mapsto S \cap T$ და გაერთიანების $(S,T) \mapsto S \cup T$ ოპერაციები უზრუნველყოფენ ფუნქციებს

$$\cap : P(U) \times P(U) \to P(U), \quad \cup : P(U) \times P(U) \to P(U)$$

U სიმრავლის $P(U)$ ბულეანისათვის, რომელიც არის U სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. მოსახერხებელია ვიქონიოთ საერთო ტერმინოლოგია ასეთი ფუნქციების თვისებებისათვის.

ფუნქციას $X \times X \to X$ ეწოდება *ბინარული ოპერაცია* X–ზე. ე. ი. ჯამი და გამრავლება ბინარული ოპერაციებია $\mathbf{Z}$–ზე.

უფრო ზოგადად, ისეთ ფუნქციებს როგორც

$$u : X \to X, \qquad b : X^2 \to X, \qquad t : X^3 \to X$$

ეწოდებათ, შესაბამისად, *უნარული, ბინარული, და ტერნარული ოპერაციები* X–ზე. თუ n არის ნატურალური რიცხვი და $X^n = X \times \ldots \times X$ (n-ჯერ ნამრავლი) X–ის თავის თავზე n-ჯერადი დეკარტული ნამრავლი, მაშინ *n-არული ოპერაცია* X–ზე განისაზღვრება როგორც ფუნქცია $f : X^n \to X$. კერძოდ, თუ $n = 0$, განვსაზღვრავთ X^0 სტანდარტულად როგორც ერთელემენტიან სიმრავლეს $\mathbf{1} = \{1\}$. მაშინ *ნულარული ოპერაცია* X–ზე არის ფუნქცია $c : \mathbf{1} \to X$. ვინაიდან ამ ფუნქციას აქვს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა, მოცემულ c ფუნქციას შეესაბამება მოცემული ელემენტი $c(1) \in X$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი ნულარული ფუნქცია X–ზე დაიყვანება "ამორჩეულ" ელემენტზე X–დან.

დავუშვათ, რომ $\square$ აღნიშნავს ნებისმიერ ბინარულ ოპერაციას $(x, y) \mapsto x \square y$ X სიმრავლეზე. ამ ოპერაციას ეწოდება

კომუტაციური : თუ $x \square y = y \square x$,
ასოციაციური : თუ $x \square (y \square z) = (x \square y) \square z$,

ნებისმიერი ელემენტებისათვის $x,y,z \in X$. ელემენტს $u \in X$ ეწოდება (ორმხრივი) *ერთეული* $\square$ ოპერაციისათვის, როცა ყოველი x-თვის

$$x \square u = x = u \square x.$$

$\square$ ოპერაციის ერთეულს ხშირად უწოდებენ *იგივურ ელემენტს* $\square$ ოპერაციისთვის. თუ ნებისმიერი x-თვის $x = u \square x$, მაშინ u-ს ვუწოდებთ *მარცხენა ერთეულს* $\square$ ოპერაციისათვის. მეორე ბინარული ოპერაცია ∇ განსაზღვრული X–ზე არის (მარცხენა) დისტრიბუციული $\square$ მიმართ, თუ ნებისმიერი $x,y,z \in X$ ელემენტებისათვის

$$x \nabla (y \square z) = (x \nabla y) \square (x \nabla y).$$

ოპოზიტი ბინარული ოპერაციისა $\square$ X–ზე არის ოპერაცია $\square^{op}$ იმავე სიმრავლე X–ზე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად: $x(\square^{op})y = y \square x$. მაშასადამე, $\square$ არის კომუტაციური მხოლოდ მაშინ, როცა $\square^{op} = \square$.

ნებისმიერი ფიქსირებული U (U-თი აღვნიშნავთ "უნივერსს") სიმრავლისათვის განვიხილოთ ბინარული ოპერაციების $\cap$ და $\cup$ $P(U)$თვისებები ბულეანზე. ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ ((2) და (3)), რომ თანაკვეთა დისტრიბუციულია გაერთიანების მიმართ და გაერთიანება დისტრიბუციულია თანაკვეთის მიმართ. ანალოგიური დამტკიცება გვიჩვენებს, რომ ორივე (თანაკვეთაც და გაერთიანებაც) კომუტაციური და ასოციაციური ოპერაციებია. მეტიც, მათი განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\varnothing \cup S = S$ და $U \cap S = S$, ასე რომ $\varnothing$ ცარიელი სიმრავლე არის ერთეული გაერთიანებისთვის და უნივერსი U არის ერთეული

თანაკვეთისთვის. კიდევ ერთი წყვილი თვისებებისა მოცემულია “იდენპოტენტურობის” კანონის სახით :

$$S \cup S = S, \quad S \cap S = S.$$

თუ S' არის S სიმრავლის დამატება U-ში (S' = ყველა U-ს ელემენტები, რომლებიც არ ეკუთვნის S-ს), მაშინ $S \mapsto S'$ არის უნარული ოპერაცია $P(U)$-ზე. ეს ოპერაცია აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს

$$(S \cap T)' = S' \cup T', \quad (S \cup T)' = S' \cap T', \quad (S')' = S.$$

1.4 უნივერსალური ალგებრა.

“უნივერსალური ალგებრები” აყალიბებენ *ზოგად* თეორემებს *ალგებრების შესახებ* ცალსახად, ყველგან განსაზღვრული, სასრული ოპერაციებითურთ.

უნივერსალური ალგებრა ან უბრალოდ *ალგებრა* ეწოდება წყვილს (A, F), სადაც A არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო F არის f_α *ოპერაციათა* მოცემული სიმრავლე და ყოველი ამ ოპერაციათაგანი ასახავს A სიმრავლის ხარისხს $A^{n(\alpha)}$-ს A-ში, სადაც $n(\alpha)$ არის რომელიმე შესატყვისი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოპერაცია f_α უთანადებს ყოველ $n(\alpha)$ ელემენტებისაგან A-დან შემდგარ დალაგებულ მიმდევრობას $(x_1,..., x_{n(\alpha)})$ მის მნიშვნელობას $f_\alpha(x_1,..., x_{n(\alpha)})$, რომელიც ეკუთვნის A-ს, ე. ი. არის შედეგი f_α ოპერაციის გამოყენებისა $x_1,..., x_{n(\alpha)}$ მიმდევრობაზე. თუ $n(\alpha) = 1$, მაშინ f_α -ს ეწოდება *უნარული* ოპერაცია, თუ $n(\alpha) = 2$, მაშინ f_α -ს ეწოდება *ბინარული* ოპერაცია, თუ $n(\alpha) = 3$, მაშინ f_α -ს ეწოდება *ტერნარული* ოპერაცია და ა. შ. როცა $n(\alpha) = 0$, ოპერაცია f_α -ს ეწოდება *ნულარული* ; ის აფიქსირებს რომელიღაც ელემენტს A-დან. თუ F სასრული სიმრავლეა, შემდგარი k ელემენტისაგან, მაშინ ალგებრა (A, F)-ს წარმოვადგენთ როგორც $(A, f_1,..., f_m)$. ხშირ შემთხვევაში, როცა A-ზე განსაზღვრული ოპერაციები F-დან ცნობილია, ალგებრა $(A, f_1,..., f_m)$-ს წარმოვადგენთ მარტივად მხოლოდ A-ს სახით.

მაგალითი 1. $(\mathbf{Z}, +, \times)$, სადაც $\mathbf{Z}$ მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო + და × შესაბამისად არიან ბინარული ოპერაციები - ჯამი და გამრავლება.

მაგალითი 2. . $(\mathbf{Z_n}, \oplus, \otimes)$, სადაც $\mathbf{Z_n}$ n მოდულით ნაშთთა სიმრავლეა, ხოლო $\oplus$ და $\otimes$ შესაბამისად არიან ბინარული ოპერაციები n მოდულით ჯამი და გამრავლება.

A ალგებრის ქვესიმრავლე A'-ს ეწოდება A-ს ქვეალგებრა, თუ A' *დახშულია* A-ს ყველა ოპერაციების მიმართ. ე. ი. თუ $f_\alpha \in F$ და $x_1,..., x_{n(\alpha)} \in A'$, მაშინ $f_\alpha(x_1,..., x_{n(\alpha)}) \in A'$. ყოველი A-ს ქვეალგებრა A' ყოველთვის განხილული იქნება როგორც ალგებრა იგივე ოპერაციების მიმართ, რომლებიც შეზღუდულია A-ზე.

ალგებრა A-ს ნებისმიერი ქვეალგებრების კლასის თანაკვეთა აგრეთვე არის A-ს ქვეალგებრა. მაშასადამე, ნებისმიერი A-ს ელემენტთა არაცარიელი A_0 სიმრავლისათვის, არსებობს უმცირესი ქვეალგებრა A', რომელიც შეიცავს A_0-ს (ე. ი. A' არის ყველა ქვეალგებრების თანაკვეთა, რომლებიც შეიცავენ A_0). ამ უმცირეს ქვეალგებრა A' –ს ეწოდება A_0-*ს მიერ წარმოქმნილი ქვეალგებრა,* ხოლო A_0-ს A' –*ის წარმომქნელების (ანუ გენერატორების) სიმრავლე.* განსაზღვრის თანახმად, ვიტყვით, რომ სიმრავლე $A_0 \subset A$ *წარმოქმნის* A-ს ან არის A-ს *წარმომქმნელები (ანუ გენერატორები),* თუ თვით ალგებრა A არის ერთადერთი ქვეალგებრა, რომელიც შეიცავს A_0-ს.

ვიტყვით, რომ ალგებრა (A, F) *მსგავსია* ალგებრა (B, F'), თუ $F = F'$ და, ნებისმიერი $f_\alpha \in F$, f_α და f'_α ოპერაციების ცვლადების რაოდენობა ემთხვევა ერთმანეთს. სხვანაირად მსგავს ალგებრებს უწოდებენ *ერთი ტიპის* ალგებრებს.

მაგალითად, A ალგებრის ნებისმიერი A' ქვეალგებრა მსგავსია A ალგებრისა.

ხშირად მსგავსი ალგებრების ოპერაციებს აღვნიშნავთ ერთი და იგივე სიმბოლოებით.

ასახვა h-ს ალგებრა (A, F)-დან ალგებრა (B, F)-ში ეწოდება *ჰომომორფიზმი,* თუ ის ინახავს ყველა ოპერაციას, ე. ი.

$$h(f_\alpha(x_1,\dots,x_{n(\alpha)}) = f_\alpha(h(x_1),\dots,h(x_{n(\alpha)})), \text{ სადაც } x_1,\dots,x_{n(\alpha)} \in A.$$

ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1.3. *თუ A, B, C მსგსვსი ალგებრებია და*

$$h: A \to B, \quad g: B \to C$$

ჰომომორფიზმებია, მაშინ კომპოზიცია

$$gh: A \to C$$

აგრეთვე ჰომომორფიზმია.

თეორემა 1.7. *თუ h ჰომომორფიზმია ალგებრა A-დან ალგებრა B-ში, მაშინ ალგებრა A-ს სახე $h(A)$ არის B-ს ქვეალგებრა.*

ადრე განხილული განხილული $\oplus$ ჯამი და $\otimes$ ნამრავლი $\boldsymbol{Z}_n$-ში ისეთნაირადაა განსაზღვრული, რომ პროექცია $\rho: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_n$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\rho(k+m) = (\rho k) \oplus (\rho m), \qquad \rho(km) = \rho(k) \otimes \rho(m).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ρ-ს "გადააქვს" $\boldsymbol{Z}$-ში განსაზღვრული ჯამი და ნამრავლი შესაბამის ოპერაციებში $\boldsymbol{Z}_n$-ში. ადვილი დასანახია, რომ ρ არის ჰომომორფიზმი $\boldsymbol{Z}$-დან $\boldsymbol{Z}_n$-ში.

თუ $(\boldsymbol{P}^*, \times)$ ალგებრაა, სადაც $\boldsymbol{P}^*$ არის ყველა დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე და $\times$ არის ბინარული ოპერაცია გამრავლება, და $(\boldsymbol{R}, +)$ ალგებრაა, სადაც $\boldsymbol{R}$ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა და $+$ არის ბინარული ოპერაცია ჯამი, მაშინ (ნებისმიერი ფუძის) ლოგარითმი $\log : (\boldsymbol{P}^*, \times) \to (\boldsymbol{R}, +)$ არის ჰომომორფიზმი :

$$\log(xy) = \log x \quad + \quad \log y .$$

ჰომომორფიზმ $h : (A, F) \to (B, F)$ ეწოდება

მონომორფიზმი თუ ფუნქცია h ინიექციაა;
ეპიმორფიზმი თუ ფუნქცია h სურიექციაა;
იზომორფიზმი თუ ფუნქცია h ბიექციაა.

ჰომომორფიზმ $h : (A, F) \to (A, F)$, (A, F)-სა თავის თავში ეწოდება *ენდომორფიზმი*, ან , თუ ის ბიექციაა, *ავტომორფიზმი.*

კონგრუენცია

გავიხსენოთ, რომ "ექვივალენტობის მიმართება" - ეს არის ბინარული მიმართება $x\theta y$, რომელიც აგრეთვე ჩაიწერება როგორც $x \equiv y (\mathrm{mod}\, \theta)$, რომელიც არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული. A/θ აღვნიშნავთ ფაქტორსიმრავლეს, ე. ი. A –ზე ექვივალენტობის კლასთა სიმრავლეს.

კონგრუენციას (A, F) ალგებრაზე ეწოდება ექვივქლენტობის მიმართება θ-ს A –ზე ისეთს, რომ ყოველი $f_\alpha \in F$, თუ $x_i \equiv y_i (\mathrm{mod}\, \theta), \quad i = 1, ..., n(\alpha),$ მაშინ $f_\alpha(x_1, ..., x_{n(\alpha)}) \equiv f_\alpha(y_1, ..., y_{n(\alpha)}) \ (\mathrm{mod}\ \theta)$.

თეორემა 1.8. *დაუშვათ $h : (A, F) \to (B, F)$ ჰომომორფიზმია. მაშინ ექვივქლენტობის მიმართება θ ისეთი, რომ $x\theta y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $h(x) = h(y)$, არის კონგრუენცია.*

დამტკიცება. ვინაიდან ტოლობის მიმართება არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული, θ იქნება ექვივალენტობის მიმართება.
ტოლობიდან $h(f_\alpha(x_1, ..., x_{n(\alpha)}) = f_\alpha(h(x_1), ..., h(x_{n(\alpha)}))$ გამომდინარეობს, რომ თუ $x_i \theta y_i$, სადაც $i = 1, ..., n(\alpha),$ მაშინ $f_\alpha(x_1, ..., x_{n(\alpha)}) \equiv f_\alpha(y_1, ..., y_{n(\alpha)}) \ (\mathrm{mod}\ \theta)$, ე. ი. θ კონგრუენციაა. □

თეორემა 1.9. *დაუშვათ θ კონგრუენციაა ალგებრა (A, F)-ზე და $x \mapsto P_\theta(x)$ არის ასახვა, რომელიც ყოველ ელემენტს $x \in A$ შეუსაბამებს ექვივქლენტობის კლასს A/θ-დან, რომელიც ამ ელემენტს შეიცავს. მაშინ ოპერაციები $f_\alpha \in F$ A/θ-ზე, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულით*

$$f_\alpha(P_\theta(x_1), ..., P_\theta(x_{n(\alpha)})) = P_\theta(f_\alpha(x_1, ..., x_{n(\alpha)})),$$

განსაზღვრავს ალგებრას $(A/\theta, F)$, *რომელიც* A *ალგებრის მსგავსია. ამასთან, ასახვა* $x \mapsto P_\theta(x)$ *არის ჰომომორფიზმი* (A,F)*-დან* $(A/\theta, F)$*-ზე.*

დამტკიცება. კონგრუენციის თვისების თანახმად , $n(\alpha)$-ადგილიანი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია თეორემაში მოყვანილი ფორმულით, ცალსახადაა განსაზღვრული ნებისმიერი $n(\alpha)$ ელემენტისთვის A/θ-დან. □

განსაზღვრის თანახმად, ასახვა $x \mapsto P_\theta(x)$ არის ჰომომორფიზმი (A,F)-დან $(A/\theta, F)$-ზე. პირიქით, თუ $h: A \to A/\theta$ არის ეპიმორფიზმი, მაშინ ოპერაციები განისაზღვრებიან A/θ-ზე შემდეგნაირად : $f_\alpha(P_\theta(x_1),..., P_\theta(x_{n(\alpha)})) = P_\theta(f_\alpha(x_1,..., x_{n(\alpha)}))$. ამით დამტკიცდა

თეორემა 1.10. *ნებისმიერი* A *ალგებრის ჰომომორფული ანასახები ამოიწურება ფაქტორ-ალგებრებით* A/θ, *რომლებიც განისაზღვრებიან* θ *კონგრუენციებით* A*-ზე.*

1.5 ნატურალური რიცხვები

ინტუიციურად, *ნატურალურ რიცხვთა* სიმრავლე $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ შესაძლებელია აღიწეროს შემდეგნაირად: $\mathbf{N}$ შეიცავს "საწყის" რიცხვს 0; არსებობს "*უშუალოდ შემდგომი*" ფუნქცია $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგი ნახატით

$$0 \overset{\sigma}{\mapsto} 1 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \mapsto \dots ,$$

და $\mathbf{N}$ "წარმოიქმნება" 0-გან σ-ს საშუალებით. ფორმარულად, ჩვენ ავღვწერთ $\mathbf{N}$-ს აქსიომების საშუალებით, რომლებიც ჩამოყალიბებულია ჯ. პეანოს (1858 – 1932) მიერ.

პეონოს პოსტულატები. *ნატურალურ რიცხვთა სისტემა* $\mathbf{N}$ *არის სიმრავლე* $\mathbf{N}$ *და მასზე განსაზღვრული ფუნქციით* $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *და არჩეული ელემენტით* $0 \in \mathbf{N}$ (ე. ი. $(\mathbf{N}, \sigma, 0)$), *ისეთები, რომ :* (*i*) σ *არის ინიექცია ;* (*ii*) 0 *არ ეკუთვნის* σ *ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს ;* (*iii*) *ნებისმიერი ქვესიმრავლისათვის* $U \subset \mathbf{N}$, *თუ მას გააჩნია ორი თვისება*

$$(a)\ 0 \in U; \qquad (b)\ \textit{ყოველი}\ \ n \in \mathbf{N},\ n \in U \Rightarrow \sigma(n) \in U,$$

მაშინ U *ემთხვევა სიმრავლე* $\mathbf{N}$*-ს.*

ამორჩეული ელემენტი $0 \in \mathbf{N}$ იგულისხმება როგორც ნულარული ოპერაცია $\mathbf{N}$-ზე, ხოლო σ - როგორც უნარული ოპერაცია.

პოსტულატ (*iii*)-ს ეწოდება *მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.* გამონათქვამ "$n \in U$"-ს ნაცვლად ვიტყვით, რომ "n-ს აქვს თვისება U". ამ ენით პეანოს პოსტულატები იკითხება შემდეგნაირად : ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

N-ს გააჩნია ერთი უნარული ოპერაცია σ და ერთი ნულარული ოპერაცია, "არჩეული 0", ისეთები, რომ: (*i*) $\sigma(n) = \sigma(m) \Rightarrow n=m$; (*ii*) $\sigma(n)$ არასდროს არ უდრის *0*; და (*iii*) თუ ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერი თვისება, რომელიც სრულდება *0*-თვის და სრულდება $\sigma(n)$ –თვის, როდესაც ის (თვისება) სრულდება n-თვის, მაშინ ის (თვისება) სრულდება ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის.

ნატურალურ რიცხვთა ყველა თვისება შესაძლებელია გამოყვანილ იქნას მოცემული აქსიომებიდან; კერძოდ, ჯამისა და გამრავლების თვისებები. თუ ჯამი განსაზღვრულია, მაშინ უშუალოდ შემდგომი ფუნქცია σ არის შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია : $\sigma(n) = n + 1$ ყოველი n-თვის.

ბევრი სასარგებლო ფაქტი ნატურალურ რიცხვთა შესახებ შეიძლება დამტკიცებულ იქნას ინდუქციის საშუალებით. პირველად გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქცია მარტივ დამტკიცებაში, რომ თუ $n \neq 0$, მაშინ n უდრის $\sigma(k)$-ს რომელიღაც $k \in \mathbf{N}$. ამისათვის დაუშვათ, რომ $U \subset \mathbf{N}$ არის სიმრავლე

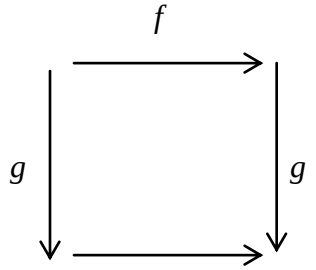
$$U = \{0\} \cup \{\mathrm{m} \mid \mathrm{m} = \sigma(k) \text{ რომელიღაც } k \in \mathbf{N}\}.$$

მაშინ $0 \in U$. აგრეთვე, თუ $n \in U$, მაშინ $\sigma(n) \in U$, თუ k უდრის n-ს. მაშასადამე, მათემატიკური ინდუქციის პოსტულატიდან, $U = \mathbf{N}$. ამით დასრულდა დამტკიცება.

ნატურალური რიცხვები გამოიყენება ნებისმიერი f უნარული ოპერაციის იტერაციის აღსაწერად. ყოველ ასეთ ოპერაციას $f : X \to X$ გააჩნია იტერაციები $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, და ა. შ., სადაც $f^1 = f$ და f^0 არის იგივეობა $1 : X \to X$. თუ $n > 1$, მაშინ n *იტერაცია* არის $f^n = f \circ \ldots \circ f$, კომპოზიცია შემდგარი f-ბის n ნამრავლისგან. n ნამრავლების ჩვენების ნაცვლად, სადაც ჩვეულებრივ გამოიყენება სამი წერტილი, შეგვიძლია ჩავწეროთ $f^{n+1} = f \circ f^n$. ეს გვაძლევს საშუალებას n იტერაცია აღვწეროთ σ ფუნქციის ტერმინებში:

$$f^0 = 1_X, \quad f^{\sigma(n)} = f \circ f^n : X \to X \qquad \text{ყოველი } n \in \mathbf{N}. \qquad (7)$$

ასეთნაირად წარმოდგენას უწოდებენ "რეკურსიულ" განსაზღვრებას, ვინაიდან ის გვაძლევს f-ის ყოველ იტერაციას f-ის და წინარე იტერაციების ტერმინებში. ორი უნარული ოპერაცია f და g, განსაზღვრული X-ზე, *კომუტირებენ*, თუ $f \circ g = g \circ f$. ეს შეიძლება წარმოდგენილ იყოს კვადრატული დიაგრამით, როგორც ეს წარმოდგენილია ნახატზე. მას უწოდებენ *კომუტაციურ დიაგრამას,* რადგან კომპოზიცია ორივე მიმართულებით – ზემო მარცხენა კუთხიდან მარცხნივ და ქვევით და ქვევით და მარჯვნივ – ტოლებია.



f

თეორემა 1.11. *თუ* $f,g : X \to X$ *კომუტირებენ, მაშინ, ნებისმიერი* $m, n \in \mathbf{N}$ *,*

$$f^n \circ g^m = g^m \circ f^n, \quad (f \circ g)^n = f^n \circ g^n . \tag{8}$$

ამ ფორმულების დამტკიცებას ვაწარმოებთ მათემატიკური ინდუქციით. ჯერ, იმის დაშვებით, რომ f და g კომუტირებენ, ვუჩვენებთ, რომ

$$f^n \circ g = g \circ f^n \tag{9}$$

ყოველი $n \in \mathbf{N}$. ეს რომ დავამტკიცოთ, განვიხილოთ სიმრავლე U შემდგარი ყველა ისეთი $n \in \mathbf{N}$, რომლისთვისაც სრულდება (9). ვინაიდან $f^0 = 1_X$ არის იგივეობა, $0 \in U$. თუ $n \in U$, მაშინ იტერაციის განსაზღვრება და (9) – რომელიც სრულდება, რადგანაც $n \in U$ – გვაძლევს

$$f^{\sigma(n)} \circ g = f \circ f^n \circ g = f \circ g \circ f^n .$$

მაგრამ, ვინაიდან f და g კომუტირებენ, $f \circ g \circ f^n = g \circ f \circ f^n = g \circ f^{\sigma(n)}$. ხოლო ეს ნიშნავს, რომ $\sigma(n) \in U$. მათემატიკური ინდუქციის (*iii*) პოსტულატის თანახმად, $U = \mathbf{N}$. ეს კი ამტკიცებს, რომ , როცა g კომუტირებს f –თან, მაშინ ის კომუტირებს f –ის ყოვლ f^n იტერაციასთან. ვინაიდან f^n კომუტირებს g-თან, ის აგრეთვე კომუტირებს g^m-თან. სხვა სიტყვებით $f^n \circ g^m = g^m \circ f^n$, რაც ამტკიცებს (8)-ს პირველ ტოლობას.

მეორე ტოლობა $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$ აგრეთვე მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციით n-ის მიმართ. ვინაიდან $f^0 = 1_X = g^0$ და $(f \circ g)^0 = 1_X$, ზემოთ აღნიშნული ტოლობა მართებულია, როცა $n = 0$. დაუშვათ, რომ მოცემული ტოლობა ჭეშმარიტია რომელიმე n-თვის. (ეს არის "ინდუქციის დაშვება".) მაშინ იტერაციის განსაზღვრების და ამ დაშვების თანახმად,

$$(f \circ g)^{\sigma(n)} = (f \circ g) \circ (f \circ g)^n = f \circ g \circ f^n \circ g^n .$$

ვინაიდან g კომუტირებს f–თან, ის კომუტირებს f^n-თან; ე. ი., $f^{\sigma(n)}$ და $g^{\sigma(n)}$ ოპერაციების განსაზღვრის გამოყენებით,

$$(f \circ g)^{\sigma(n)} = \ldots = f \circ f^n \circ g \circ g^n = f^{\sigma(n)} \circ g^{\sigma(n)} .$$

ამით სრულდება ინდუქცია.

ვინაიდან ნებისმიერი ოპერაცია f კომუტირებს თავის თავთან, ამ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი m და n-თვის $f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$. კერძოდ ეს გვაძლევს $f^{\sigma(n)} = f \circ f^n = f^n \circ f$, როგორც იტერაციის ალტერნატიულ განსაზღვრებას.

თეორემა 1.12. *ფუნქცია* $f: X \to X$ *და ნებისმიერი* $m, n \in \mathbf{N}$, *სრულდება ტოლობა* $(f^m)^n = (f^n)^m$.

დებულების დამტკიცება დაადგენს თვისებას,"ყოველი m-სათვის, $(f^m)^n = (f^n)^m$", ინდუქციის გამოყენებით n-ის მიმართ. ეს კი ნიშნავს, რომ ინდუქციის აქსიომა გამოყენებული იქნება $U \subset \mathbf{N}$, სადაც $n \in U$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(f^m)^n = (f^n)^m$ ყოველი m-სათვის $\mathbf{N}$-დან. მაგრამ, $f^0 = 1$, ასე რომ $0 \in U$. თუ $n \in U$, მაშინ, ყოველი m-სათვის, $(f^m)^{\sigma(n)} = f^m \circ (f^m)^n = f^m \circ (f^n)^m$, ინდუქციის დაშვების თანახმად ($n \in U$). ვინაიდან f და f^n კომუტირებენ (7)-ის თანახმად ბოლო გამოსახულება გარდაიქმნება შემდეგი სახით $(f \circ f^n)^m = (f^{\sigma(n)})^m$; ეს ნიშნავს, რომ $\sigma(n) \in U$ და ამით ინდუქცია დასრულებულია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ ინიექციების კომპოზიცია ინიექციაა, ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f: X \to X$ ინიექციურობიდან გამომდინარეობს f^n-ის ინიექციურობა ყოველი n-თვის $\mathbf{N}$-დან.
2. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f: X \to X$ სურიექციურობიდან გამომდინარეობს f^n-ის სურიექციურობა ყოველი n-თვის $\mathbf{N}$-დან.
3. ინდუქციით დაამტკიცეთ, რომ $\sigma^n(0) = n$ ყოველი n-თვის $\mathbf{N}$-დან.
4. ინდუქციით დაამტკიცეთ, რომ $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$.
5. ანალოგიურად, ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულები:
   (a) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. (b) $1 + 8 + 27 + \ldots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$.
   (c) $(1 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1 + 2^7 + \ldots + n^7) = 2[n(n+1)/2]^4$.
6. ააგეთ სამი სხვა და სხვა მარცხენა შექცეული ფუნქციები σ ფუნქციისათვის.
7. ინდუქციის საშუალებით დაამტკიცეთ, რომ $n^2 - n$ არის ყოველთვის ლუწი.

1.6 მთელი რიცხვები n მოდულით

მარტივი სასრული ალგებრული სისტემა წარმოიქმნება ცნობილი დაკვირვებიდან, რომ შესაძლებელია შევკრიბოთ და გავამრავლოთ "ლუწი" და "კენტი" რიცხვები – გვესმის რა ისინი როგორც ლუწი და კენტი რიცხვები – შემდეგი წესის თანახმად :

ლუწი $\oplus$ ლუწი = ლუწი = კენტი $\oplus$ კენტი, ლუწი $\oplus$ კენტი = კენტი
ლუწი $\otimes$ ლუწი = ლუწი = ლუწი $\otimes$ კენტი, კენტი $\otimes$ კენტი = კენტი.

ეს კი დაიყვანება სიმრავლეზე განსაზღვრული ჯამისა $\oplus$ და გამრავლების $\otimes$ ბინარულ ოპერაციამდე, რომელიც შედგება მხოლოდ ორი ელემენტისაგან 0 ("ლუწი") და 1 ("კენტი"), რაც განისაზღვრება შემდეგი წესით:

$$0 \oplus 0 = 0 = 1 \oplus 1, \qquad 0 \oplus 1 = 1 = 1 \oplus 0,$$

$$0 \otimes 0 = 0 = 0 \otimes 1 = 1 \otimes 0, \qquad 1 \otimes 1 = 1.$$

ამ სისტემას ეწოდება *მთელი რიცხვები მოდული 2-ით.*

ჩვეულებრივი გაყოფის პროცესი k მთელი რიცხვისა $n\,(\neq 0)$-ზე გვაძლევს *განაყოფ* q და *ნაშთს* r იმგვარად, რომ $k/n = q + r/n$. ეს შედეგი შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს ნებისმიერი "გაყოფის" გარეშე.

თეორემა 1.9 (**Z-**ის გაყოფის ალგორითმი). ნებისმიერი k და n მთელი რიცხვებისათვის, სადაც $n>0$, არსებობს ისეთი მთელი რიცხვები q და r, რომ

$$k = qn + r,\ 0 \le r < n; \qquad (1)$$

ეს თვისებები მოცემული k და n მთელი რიცხვებისათვის განსაზღვრავენ q-ს და r-ს ცალსახად.

დამტკიცება. მოსაძებნ ნაშთ r-ს გააჩნია სახე $r = k - qn$; ეს არის არაუარყოფითი სხვაობა k-სი და რომელიღაც n-ის ჯერადისა. განვიხილოთ სიმრავლე :

$$M = \{m \mid m \in \mathbf{N} \text{ და } m = k - qn \text{ რომელიმე } q \text{ მთელი რიცხვისთვის}\}.$$

სიმრავლე M არაცარიელია : თუ k არაუარყოფითია, მაშინ $k = k - 0n \in M$; ხოლო თუ k უარყოფითია, მაშინ $(-k) = (n-1) = k - kn \in M$.

ვინაიდან M არაცარიელია და $\mathbf{N}$ სრულად დალაგებულია, M-ს გააჩნია უმცირესი ელემენტი. აღვნიშნოთ ეს (უმცირესი) ელემენტი r-ით, ისე რომ $k = qn + r$ რომელიმე q-თვის. ეს ელემენტი მართლაც აკმაყოფილებს (1) პირობას. ჯერ ერთი $r \ge 0$, ვინაიდან $r \in M$, მაშასადამე არაუარყოფითია. მეორეს მხრივ, თუ $r \ge 0$, მაშინ $r = n + x$ რომელიმე $x \in \mathbf{N}$; მაშინ $x = r - n = k - (q+1)n$, ე. ი. x ნაკლებია უმცირეს $r \in M$ ელემენტზე, და მივიღეთ წინააღმდეგობა.

დასამტკიცებელი დაგვრჩა, რომ (1)-ს გააჩნია მხოლოდ ერთი ამოხსნა. დავუშვათ, რომ (1)-ს გააჩნია ორი სხვადასხვა ამონახსნი $k = qn + r$ და $k = q'n + r'$, და აგრეთვე დავუშვათ, ვინაიდან მთელი რიცხვები წრფივად დალაგებულია, რომ $r \ge r'$. მაშინ $n > r - r' \ge 0$, ხოლო $r - r' = (k - qn) - (k - q'n) = (q' - q)n$ არის ნამრავლი n-ისა და მთელი რიცხვისა, რომელიც მდებარეობს 0-სა და $n-1$ შორის. მაგრამ, ვიშველიებთ რა წინადადებას, რომ 0-სა და 1 შორის არ მდებარეობს არცერთი მთელი რიცხვი, ასეთი ნამრავლი არ არსებობს. მაშასადამე, $r = r'$ და $qn = q'n$, ე. ი. $q = q'$ და (1)-ის ნებისმიერი ორი ამონახსნი ემთხვევა ერთმანეთს, რასაც ამტკიცებს თეორემა. □

ფიქსირებული n-ისთვის მოცემული გაყოფის ალგორითმი გამოიყენება, რათა ნებისმიერი მთელი რიცხვი ავსახოთ თავისივე ნაშთში "n მოდულით". ამ n მოდულით ნაშთთა სიმრავლეში შეგვიძლია ვაწარმოოთ შეკრება და გამრავლება : ვიღებთ ჩვეულებრივ ჯამს ან ნამრავლს ; თუ შედეგი აღემატება n-ს, ვცვლით მას n-ზე გაყოფის შედეგად მიღებულ ნაშთზე. ნაშთების $\mathbf{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ სიმრავლეზე ჯამი და გამრავლება მოცემულია შემდეგი ცხრილებით :

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(2)

$\mathbf{Z}_5$ –ს ეწოდება მთელი რიცხვების ალგებრა "5-ის მოდულით".

ნებისმიერი n დადებითი მთელი რიცხვისთვის $\mathbf{Z}_n = \{0,1, \ldots, n\text{-}1\}$ იყოს ყველა r მთელი რიცხვების სიმრავლე $0 \le r < n$ პირობის გათვალისწინებით, ხოლო $\rho : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ არის ფუნქცია, რომელიც ყოველ მთელ რიცხვ k-ს ანიჭებს მისი ნაშთის $\rho(k) = r$ მნიშვნელობას n-ზე გაყოფისას. ეს ფუნქცია ρ არის სურიექცია ; ნაშთების ჯამი n მოდულით აღიწერება შემდეგნაირად.

თეორემა 1.10 თუ $\rho : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ არის ფუნქცია, რომელიც ასახავს ნებისმიერ მთელ რიცხვს თავის ნაშთში n მოდულით, მაშინ არსებობს ზუსტად ერთი ბინარული ოპერაცია $\oplus$ $\{0,1,\ldots,n-1\} = \mathbf{Z}_n$-ზე ისეთი, რომ ნებისმიერი k და m მთელი რიცხვებისათვის

$$\rho(k+m) = (\rho k) \oplus (\rho m) \qquad (3).$$

ეს ოპერაცია $\oplus$ არის კომუტაციური, ასოციაციური და გაჩნია ნული (0) ერთეულის სახით. ყოველი r-თვის $\mathbf{Z}_n$-დან არსებობს $r' \in \mathbf{Z}_n$ ისეთი, რომ $r \oplus r' = 0$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ r და s არის ნაშთები n მოდულით ; ე. ი. ისეთი მთელი რიცხვები, რომ $\rho(r) = r$ და $\rho(s) = s$. მაშინ ტოლობა (2) მიუთითებს იმაზე, რომ $r \oplus s$ უნდა უდრიდეს $\rho(r+s)$. სიტყვებით ეს შემდეგნაირად ითქმის: რომ შევკრიბოთ ორი ნაშთი $\mathbf{Z}_n$-დან, ჯერ ვასრულებთ ჩვეულებრივ შეკრებას $\mathbf{Z}$-ში და შემდეგ ვიღებთ მის ნაშთს n მოდულით.

ეს ჯამი მართლაც აკმაყოფილებს (3)-ს ნებისმიერი k და m მთელი რიცხვებისათვის. დავუშვათ, რომ k და m-ს გააჩნია ნაშთები r და s ისეთი, რომ $k = r + qn$ და $m = s + q'n$ q და q' მთელი რიცხვებისათვის. მაშინ $k + m = r + s + (q + q')n$, ესეიგი $k + m$-ის ნაშთი ტოლია $\rho(k+m) = \rho(r+s)$, რომელიც განისაზღვრება როგორც $r \oplus s$. ამიტომ $\rho(k+m) = r \oplus s = \rho(k) \oplus \rho(s)$, რაც იყო დასამტკიცებელი. □

ეხლა განვიხილოთ $\oplus$-ის კომუტაციურობის კანონი. ტოლობა (3)-ის თანახმად მტკიცდება, რომ

$$\rho(k) \oplus \rho(m) = \rho(k+m) = \rho(m+k) = \rho(m) \oplus \rho(k).$$

ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი ნაშთი კომუტირებენ $\mathbf{Z}_n$-ში. მაგრამ ნებისმიერი ელემენტი $\mathbf{Z}_n$-დან არის ნაშთი. ამიტომ ოპერაცია $\oplus$ კომუტაციურია $\mathbf{Z}_n$-ში. სხვაგვარად : $\rho : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ არის სურიექცია ; (2)-ის თანახმად + გადადის $\oplus$-ში, და, მაშასადამე, მას გადააქვს +-ის კომუტაციურობის კანონი $\oplus$-ის კომუტაციურობის კანონში. იგივე არგუმენტით მტკიცდება, რომ $\oplus$ აკმაყოფილებს ასოციაციურობის კანონს $\mathbf{Z}_n$-ში, და 0 არის $\oplus$ -ის ერთეული $\mathbf{Z}_n$-ში ვინაიდან $\rho(0) = 0$. ნებისმიერი r არანულოვანი ნაშთისთვის, მთელი რიცხვის $r + (n - r)$ ნაშთი ნულის ტოლია, და ამიტომ $r \oplus (n - r) = 0$. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულდა. □

აქვე მოგვყავს შესაბამისი შედეგი გამრავლებისათვის.

თეორემა 1.11 არსებობს მხოლოდ ერთი ბინარული ოპერაცია $\mathbf{Z}_n$-ში, რომელიც ნებისმიერი მთელი k და m რიცხვებისათვის სრულდება

$$\rho(km) = \rho(k) \otimes \rho(m) \qquad (4).$$

ეს ოპერაცია კომუტაციურია, ასოციაციურია და დისტრიბუციულია $\oplus$-ის მიმართ, და გააჩნია 1 როგორც ერთეული.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნაშთები r და s –ი. (4) გვიჩვენებს, რომ მათი ნამრავლი $r \otimes s$ უნდა უდრიდეს $\rho(rs)$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რომ გავამრავლოთ ორი ნაშთი $\mathbf{Z}_n$-ში, ვიღებთ მათ ნაშთს $\mathbf{Z}$-ში და შემდეგ მათ ნაშთს n მოდულით. ეს ნამრავლი მართლაც აკმაყოფილებს (4)-ს. ნებისმიერი $k = r + qn$ და $m = s + q'n$ მთელი რიცხვებისათვის, $km = rs + (qs + rq' + qq'n)n$ რიცხვის ნაშთი არის $\rho(rs)$; მაშასადამე (4) კმაყოფილდება. რადგან ρ არის სურიექცია, *ტოლობა,* როგორიც არის დისტრიბუციულობის კანონი, თუ სამართლიანია $\mathbf{Z}$-ში, მაშინ ის სამართლიანია $\mathbf{Z}_n$-შიც. □

ეს მსჯელობები უჩვენებს, რომ *იგივეობებიდან* , რომლებიც სამართლიანია $\mathbf{Z}$-ში, გამომდინარეობს შესაბამისი იგივეობები, რომლებიც სამართლიანია $\mathbf{Z}_n$-ში. ეს არ ნიშნავს, რომ სხვა თვისება, რომელიც სრულდება $\mathbf{Z}$-ში გადაიტანება $\mathbf{Z}_n$-ში ; მაგალითად , არანულოვანი ნამრავლი შესაძლოა შეიკვეცოს $\mathbf{Z}$-ში , მაგრამ არ არის სავალდებულო იგივე გაკეთდეს $\mathbf{Z}_n$-ში. მაგალითად, $2 \neq 0$ $\mathbf{Z}_4$-ში, მაგრამ $2 \otimes 2 = 2 \otimes 0 = 0$.

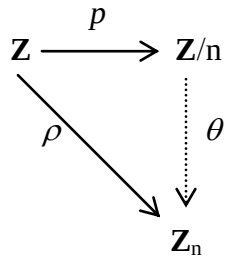
მოცემულ სასრულ ალგებრულ სისტემა $\mathbf{Z}_n$-ის კონსტრუქციაში, ის ფაქტი, რომ $\rho : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ არის სურიექცია, რომელიც აკმაყოფილებს (3)-ს და (4)-ს ჯამისა და გამრავლებისთვის , მნიშვნელოვანია. ალტერნატიულად, ხშირად ცვლიან ყოველ ნაშთ r-ს ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლით, რომელთაც გააჩნიათ ნაშთი r. ეს სიმრავლე, რომელსაც ეწოდება "რეზიდუალური კლასი" ან "მოსაზღვრე კლასი" k მთელი რიცხვისა n მოდულით, არის

$$n\mathbf{Z} + k = \{nq + k \mid \text{ყოველი } q \in \mathbf{Z}\}.$$

მაგალითად, $n\mathbf{Z} = n\mathbf{Z} + 0$ არის ზუსტად სიმრავლე ყველა n-ის ჯერადი მთელი რიცხვებისა qn. კერძოდ, თუ n =2, მაშინ გვაქვს მხოლოდ ორი მოსაზღვრე კლასი : ყველა ლუწი მთელი რიცხვების სიმრავლე $2\mathbf{Z}$ და ყველა კენტი მთელი რიცხვების სიმრავლე $2\mathbf{Z} + 1$. ნებისმიერი n-ისთვის არსებობს მხოლოდ n სხვადასხვა მოსაზღვრე კლასი.

$$n\mathbf{Z},\ n\mathbf{Z}+1,\ \dots,\ n\mathbf{Z}+(n-1). \qquad (5)$$

$\mathbf{Z}/n$ -ით აღვნიშნავთ ყველა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს, მაშინ როდესაც $p:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/n$ არის ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერ k მთელ რიცხვს შეუსაბამებს თავის მოსაზღვრე კლასს $p(k)=n\mathbf{Z}+k$. შევადარებთ რა ნაშთს n მოდულით მოსაზღვრე კლასთან n მოდულით, დავინახავთ, რომ არსებობს ბიექცია $r\mapsto n\mathbf{Z}+r$ ნაშთების $\mathbf{Z}_n$ სიმრავლიდან მოსაზღვრე კლასების სიმრავლე $\mathbf{Z}/n$–ში. მისი შებრუნებული θ არის ერთადერთი ფუნქცია $\theta:\mathbf{Z}/n\to\mathbf{Z}_n$, რომელიც ქმნის შემდეგ კომუტაციურ დიაგრამას:



უფრო ზუსტად, θ ასახავს ყოველ მოსაზღვრე კლასს $n\mathbf{Z}+k$ ნაშთ k–ში n მოდულით.

ეს ნიშნავს, რომ ნაშთების სიმრავლე შეიძლება შეიცვალოს მოსაზღვრე კლასებით, ისე რომ თეორემა 1.10 და1.11 სამართლიანია თუ შევცვლით $\rho:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n$ $p:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/n$ -თი, რომ მივიღოთ ერთადერთი ჯამი და ნამრავლი განსაზღვრული მოსაზღვრე კლასებზე :

$$(n\mathbf{Z}+h)\oplus(n\mathbf{Z}+k)=n\mathbf{Z}+(h+k): \qquad (6)$$

რომ შევკრიბოთ (ან გავამრავლოთ) ორი მოსაზღვრე კლასი, ვირჩევთ მთელ რიცხვებს ყოველი მოსაზღვრე კლასიდან, შევკრიბავთ (ან გავამრავლებთ) ამ მთელ რიცხვებს და შედეგად ავიღებთ ამ რიცხვის მოსაზღვრე კლასს; უფრო მეტიც, მიღებული შედეგი არ არის დამოკიდებული მთელი რიცხვების h და k-ს არჩევაზე შესაბამის მოსაზღვრე კლასებიდან; მართლაც, $h'=nq+h$ და $k'=nq'+k$ გვაძლევს $h'+k'\in n\mathbf{Z}+(h+k)$.

შემდგომში ამ ბინარულ ოპერაციებს $\oplus$ და $\otimes$ მოსაზღვრე კლასებში ან ნაშთებზე ჩავწერთ (წრეწირის გარეშე) როგორც + და · შესაბამისად, მაშინ როცა $\rho:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n$ და $p:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/n$ ვუწოდებთ მთელი რიცხვების *პროექციას* მთელ რიცხვებში n მოდულით.

ნაშთი n მოდულით აგრეთვე შეიძლება აღიწეროს ბინარული მიმართებით კონგრუენცია n მოდულით. თუ გვაქვს n , მაშინ მოცემული h და k მთელი რიცხვებისთვის ეს მიმართება განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$h\equiv k(\mathrm{mod}\,n)\quad\Leftrightarrow\quad h-k\in n\mathbf{Z};$$

ე. ი. $h\equiv k(\mathrm{mod}\,n)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $h-k$ იყოფა n-ზე, ან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც h და k-ს გააჩნია ერთიდაიგივე ნაშთი n-ზე გაყოფისას. ცხადია,

რომ მიმართება ≡ *კონგრუენცია* n მოდულით არის ტრანზიტული, სიმეტრიული და რეფლექსური, და მაშასადამე ის ექვივალენტობის მიმართებაა. უფრო მეტიც, მოსაზღვრე კლასები n მოდულით შესაძლებელია აღიწეროს უშუალოდ ამ კონგრუენციის მიმართების ტერმინებში შემდეგნაირად

$$n\mathbf{Z} + k = \{h \mid h \equiv k \pmod{n}\}. \qquad (7)$$

სურიექცია $p : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n$ გააჩნია შემდეგი თვისება

$$p(h) = p(k) \quad \Leftrightarrow \quad h \equiv k \pmod{n}. \qquad (8)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $h \equiv k$ და $r \equiv s \pmod{n}$, მაშინ

$$h + r \equiv k + s \pmod{n}, \quad hr \equiv ks \pmod{n}$$

1.7 ჯგუფები და სიმეტრია

ჯგუფი არის სიმრავლე G ერთი ბინარული ოპერაციით $G \times G \to G$, რომელსაც ჩავწერთ როგორც $(a,b) \mapsto ab$, ისეთი, რომ :

(i) ეს ბინარული ოპერაცია ასოციაციურია.

(ii) ნებისმიერი $a \in G$ არსებობს ელემენტი $u \in G$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $ua = a = au$.

(iii) ამ u ელემენტისთვის, ყოველი $a \in G$ ელემენტისთვის, არსებობს ელემენტი $a' \in G$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $aa' = u = a'a$.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჯგუფი არის მონოიდი, რომელშიც ყოველი ელემენტი შებრუნებადია.

ab ელემენტს ეწოდება a და b *ნამრავლი* G-ში, ხოლო u არის G-*ს ერთეული* ან *იგივეობა*, და a' არის a-ს *შებრუნებული* G–ში. მოცემულ შემთხვევაში ბინარული ოპერაცია G-ში წარმოდგენილია ნამრავლის სახით ; ხშირად ეს ოპერაცია წარმოდგენილია ჯამის სახით $(a,b) \mapsto a + b$; შესაბამისად ვიტყვით, რომ ჯგუფი არის *მულტიპლიკაციური* ან *ადიციური.*

თუ G და G' ჯგუფებია, ჯგუფის ჰომომორფიზმი $\varphi : G \to G'$ არის ფუნქცია G-დან G'-ში. როცა G და G' ორივე მულტიპლიკაციური ჯგუფია, ეს მოთხოვნა ნიშნავს, რომ $\varphi(ab) = (\varphi(a))(\varphi(b))$ ნებისმიერი $a,b \in G$.

ჯგუფის ჰომომორფიზმს $\varphi : G \to G'$, რომელიც ბიექციაა, ეწოდება *იზომორფიზმი.* მაგალითად , მთელი რიცხვების 2-ის მოდულით ადიციური ჯგუფი $\mathbf{Z}_2$ იზომორფულია მულტიპლიკაციური ჯგუფის $\{-1, +1\}$, ვინაიდან $0 \mapsto +1$, $1 \mapsto -1$ არის იზომორფიზმი $\mathbf{Z}_2 \to \{-1, +1\}$.

ჩვენ უკვე აგებული გვქონდა რიცხვთა რამოდენიმე ჯგუფი. მაგალითად, მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{Z}$ არის ჯგუფი ჯამის მიმართ; მართლაც, თეორემა I.12 ამტკიცებს, რომ ბინარული ოპერაცია + $\mathbf{Z}$-ში არის ასოციაციური და გააჩნია 0 ერთეულის სახით, და, რომ ყოველი $a \in \mathbf{Z}$ ელემენტისთვის არსებობს ელემენტი x, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $a + x = 0$ (და, მაშასადამე, $x + a = 0$). ანალოგიურად, ვამტკიცებს , რომ $\mathbf{Z}_n$

მთელი რიცხვები n მოდულით არის ჯგუფი ჯამის მიმართ და პროექცია $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ არის ჯგუფის ჰომომორფიზმი. კერძოდ, ჯგუფ $\mathbf{Z}_5$-ს გააჩნია ხუთი ელემენტი, რომლის ჯამი განსაზღვრულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

ნებისმიერი სასრული ჯგუფი G ზუსტად აღიწერება ამგვარი ცხრილის საშუალებით. თუ G არის n ელემენტიანი მულტიპლიკაციური ჯგუფი, მაშინ მისი *მულტიპლიკაციური ცხრილი* განისაზღვრება $n \times n$ ცხრილით. ნებისმიერი ასეთი $n \times n$ ცხრილი არ განსაზღვრავს ჯგუფს; მაგალითად, ქვემოთ მოყვანილი მულტიპლიკაციური ცხრილი არ განსაზღვრავს $\mathbf{Z}_5$-ს ჯგუფად გამრავლების მიმართ, ვინაიდან 1 არის (ერთადერთი) ერთეული, მაშინ როდესაც $0 \otimes r = 0$ ნებისმიერი r-თვის, ამიტომ 0-ს არ გააჩნია შებრუნებული $\mathbf{Z}_5$-ში. მეორეს მხრივ, თუ 0-ს ჩამოვაშორებთ, დარჩენილ ელემენტებს $\mathbf{Z}_5$-დან გააჩნიათ გამრავლბის ცხრილი

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

აქედან ნათლად ჩანს, რომ 1 არის ერთეული და ყოველ ელემენტს გააჩნია შებრუნებული, ხოლო ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული გამრავლება ასოციაციურია. ე. ი. , ეს ოთხი ელემენტი ქმის მულტიპლიკაციურ ჯგუფს. ამ ჯგუფ G-ში, $2^2 = 4$, $2^3 = 3$, და $2^4 = 1$, ასე რომ ყველა ელემენტს გააჩნია 2-ის ხარისხი. ეს გვაძლევს საფუძველს, რომ $\mathbf{Z}_4$ შედარებულ იქნას ამ ჯგუფ G-თან ქვემოთ მოცემული ფუნქციით :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_4 &\to G \pmod 5 \\ 0 &\mapsto 1 = 2^0 \\ 1 &\mapsto 2 = 2^1 \\ 2 &\mapsto 4 = 2^2 \\ 3 &\mapsto 3 = 2^3 ; \end{aligned}$$

ეს კი გვაძლევს, რომ აღნიშნული ფუნქცია არის იზომორფიზმი $\mathbf{Z}_4$ ადიციური ჯგუფიდან მულტიპლიკაციურ ჯგუფ G-ში.

დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{P}^*$ არის ჯგუფი ჩვეულებრივი ბინარული ოპერაცია გამრავლების მიმართ, მაშინ როდესაც *ყველა* ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{R}$ არის ჯგუფი ჯამის მიმართ. ამ შემთხვევაში ფუნქცია $\log_e: \mathbf{P}^* \to \mathbf{R}$ არის ჰომომორფიზმი,

ვინაიდან $\log_e(xy) = \log_e x + \log_e y$. ამ შემთხვევაში ეს ფუნქცია არის იზომორფიზმი: მისი შექცეული არის ფუნქცია $x \mapsto e^x$, რომელიც აგრეთვე ჰომომორფიზმია (ცნობილი თვისების გამო : $e^{x+y} = e^x e^y$).

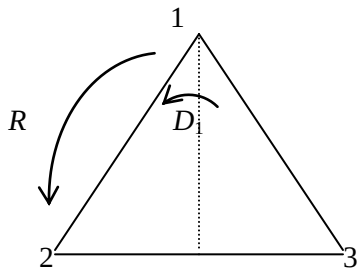
ბიექციას $X \to X$ სიმრავლე X-ზე ეწოდება *გადანაცვლება*. გადანაცვლებები წარმოადგენს ჯგუფების ელემენტებს, რომლის მულტიპლიკაციური ოპერაცია არის კომპოზიცია გადანაცვლებს შორის. მართლაც, ფუნქციების შესწავლისას ჩვენ ვიცით, რომ ორი გადანაცვლების კომპოზიცია X-ზე აგრეთვე გადანაცვლებაა, რომ კომპოზიციის ოპერაცია არის ასოციაციური, რომ 1_X არის გადანაცვლება, ისევე როგორც გადანაცვლების შექცეული. ეს თვისებები ამტკიცებენ, რომ ყველა გადანაცვლების სიმრავლე $S(X)$ X-ზე არის ჯგუფი კომპოზიციის ოპერაციის მიმართ. კერძოდ, ჯგუფს, რომელიც შედგება ყველა $\sigma : \mathbf{n} \to \mathbf{n}$ გადანაცვლებისგან განსაზღვრული სასრულ სიმრავლე $\{1,2,\ldots,n\} = \mathbf{n}$ –ზე, ეწოდება n "ხარისხის" *სიმეტრიის ჯგუფი* S_n. ნათელია, რომ ის შეიცავს $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ სხვადასხვა σ გადანაცვლებებს. ფუნქციის (გადანაცვლების) პირველი ელემენტის სახე $\sigma(1)$ შეიძლება არჩეულ იქნას n სხვადასხვა საშუალებით, მაშინ როდესაც მეორე ელემენტი შეიძლება არჩეულ იქნას $n-1$ სხვადასხვა საშუალებით იმ დარჩენილი ელემენტებისაგან, რომლებიც განსხვავებულია $\sigma(1)$-გან , და ა. შ.]

მეორე მაგალითი, განვიხილოთ სიბრტყეზე რომელიმე გეომეტრიული ფიგურის ყველა წერტილების სიმრავლე F. $f : F \to F$ გადანაცვლებას ვუწოდოთ F-ის "სიმეტრია", თუ ის ინახავს მანძილს (დისტანციას) ; ე. ი. , თუ მანძილი ორ წერტილს p და q შორის F-დან ტოლია მათი f-სახეებს $f(p)$ და $f(q)$ შორის მანძილისა. მაშინ შექცეული ფუნქცია f^{-1} აგრეთვე არის F-ის სიმეტრია. უფრო მეტიც, F-ის ორი სიმეტრიის კომპოზიცია აგრეთვე F-ის სიმეტრიაა, ისევე როგორც იგივური ფუნქცია $F \to F$. აქედან გამომდინარეობს, რომ F-ის ყველა სიმეტრიების სიმრავლე კომპოზიციის მიმართ არის ჯგუფი, რომელსაც ვუწოდებთ F-ის *სიმეტრიების ჯგუფს.*

მაგალითად, F-ი იყოს ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა წერტილების სიმრავლე T. სამი ცხადი სიმეტრიებია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვა 120°-ით, 240°-ით და 360°-ით ; აღვნიშნოთ ისენი შესაბამისად R , $R \circ R = R^2$, და $R \circ R \circ R = 1_T$. სამი სხვა სიმეტრიებია ანარეკლები D_1, D_2, D_3 შესაბამისი წვეროებიდან 1,2,3 სიმაღლეების მიმართ. ეს გვაძლევს სიმრავლე Δ_3 T-ს ექვსი სიმეტრიებისა :

$$\Delta_3 = \{1, R, R^2, D_1, D_2, D_3\};$$

ესენი იძლევიან ყველა შესაძლო გადაადგილებას სამი წვეროებისა 1, 2, 3. ვინაიდან ტოლგვერდა სამკუთხედ T-ს ნებისმიერი სიმეტრია განისაზღვრება მისი მოქმედებით სამ წვეროებზე, სიმრავლე Δ_3 შეიცავს *ყველა* T-ს სიმეტრიას. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ Δ_3 არის არის ჯგუფი კომპოზიციის მიმართ.



ანალოგიური ჯგუფები არსებობს ალგებრებისათვის. მაგალითად, G იყოს ჯგუფი, და განვიხილოთ ავტომორფიზმების (იზომორფიზმები თავის თავში) $G \to G$ ყველა სიმრავლე. ორი ასეთი ავტომორფიზმის კომპოზიცია აგრეთვე ავტომორფიზმია, და ეს კომპოზიცია ასოციაციურია. მეტიც, იგივეობა 1_G არის ავტომორფიზმი, და ყოველ ავტომორფიზმს გააჩნია ორმხრივი შექცეული , რომელიც ასევე ავტომორფიზმია. მაშასადამე, ნებისმიერი G ჯგუფის ყველა ავტომორფიზმების სიმრავლე თავის მხრივ არის ჯგუფი, რომელსაც ჩვენ ავღნიშნავთ როგორც $\mathrm{Aut}(G)$. მაგალითად, ადიციურ ჯგუფ $\mathbf{Z}_4$ გააჩნია ორი ავტომორფიზმი : იგივური ასახვა და $a \mapsto -a$; მეორე ავტომორფიზმის კვადრატი იგივეობაა, ამიტომ $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_4) \cong \mathbf{Z}_2$.

1.8 კარდინალური და ორდინალური რიცხვები

ყოველ A სიმრავლეს შევუსაბამოთ ობიექტი $|A|$, რომელსაც უწოდებენ ამ სიმრავლის *სიმძლავრეს*, ისეთნაირად, რომ $|A| = |B|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ბიექცია A და B სიმრავლეებს შორის. კერძოდ, ცარიელ სიმრავლეს $\varnothing$ შევუსაბამოთ სიმძლავრის სახით რიცხვი 0, ხოლო სიმრავლეს $\{a_1, \dots, a_n\}$, შემდგარს ელემენტიდან ($n = 1,2, \dots$), - რიცხვი n. სიმრავლის სიმძლავრეს აგრეთვე უწოდებენ *კარდინალურ რიცხვებს* ან *კარდინალებს.* ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_0$ –ით (ალეფ-ნოლი), ხოლო ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_1$ –ით (ალეფ-ერთი). სიმძლავრე $\aleph_1$–ს უწოდებენ *კონტინუუმის სიმძლავრეს.* $\aleph_0$ –ის სიმძლავრის სიმრავლეებს უწოდებენ *თვლადს.*

დავუშვათ $a = |A|$ და $b = |B|$. დავუშვათ $a \le b$, თუ არსებობს ინექცია სიმრავლე A-დან სიმრავლე B-ში. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განსაზღვრება არ არის დამოკიდებული A და B სიმრავლეების არჩევანზე, და ამიტომ გამოხატავს მიმართებას კარდინალურ რიცხვებს შორის.

თეორემა 1.13. *კარდინალურ რიცხვთა ნებისმიერ სიმრავლეზე მიმართება* $\le$ *არის წრფივი დალაგება.*

$\le$ -ს განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ის რეფლექსური და ტრანზიტულია. ამ მიმართების ანტისიმეტრიულობა გამომდინარეობს კანტორ-ბერნშტეინის თეორემიდან, რომელიც მოყვანილია ქვემოთ.

თეორემა 1.14. (კანტორ-ბერნშტეინის თეორემა). *თუ* α *არის ინექცია* A*-დან მის ქვესიმრავლე* $\alpha(A)$*–ში, მაშინ ნებისმიერი* $C \subset (A - \alpha(A))$ *სიმრავლისთვის არსებობს ბიექცია* α^* *სიმრავლე* A*-დან* $\alpha^*(A) = C \cup \alpha(A)$ *სიმრავლეზე.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\alpha^0(C) = C$, $\alpha^{n+1}(C) = \alpha(\alpha^n(C))$ და განვიხილოთ სიმრავლე

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha^n(C).$$

ასახვა

$$\begin{cases} x, & x \in S \end{cases}$$

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \\ \lfloor\ \alpha(x), \quad x \in (A - S) \end{cases}$$

იგივურია S-ზე და ემთხვევა α-ს $A - S$ სიმრავლეზე.
ვინაიდან $S = C \cup \alpha(S)$, მაშინ

$$S \cap \alpha(A - S) = (C \cap \alpha(A - S)) \cup (\alpha(S) \cap \alpha(A - S)) = \varnothing$$

და ამიტომ α^* არის ბიექცია A სიმრავლიდან
$\alpha^*(A) = S \cup \alpha(A - S) = C \cup \alpha(S) \cup \alpha(A - S) = C \cup \alpha(A)$. □

დავუშვათ, რომ $a \le b$ და $b \le a$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ბიექციები

$$\alpha : A \to \alpha(A), \ \alpha(A) \subset B, \quad \beta : B \to \beta(B), \ \beta(B) \subset A.$$

ნამრავლი $\gamma = \beta\alpha$ იქნება ბიექცია A-დან $\gamma(A) = \beta(\alpha(A))$-ზე. თეორემა 1.14-ის თანახმად არსებობს ბიექცია γ^* A სიმრავლიდან $C \cup \gamma(A)$ სიმრავლეზე ნებისმიერი $C \subset (A - \gamma(A))$. თუ $C = \beta(B) - \gamma(A)$, მაშინ $\gamma^*(A) = \beta(B)$. მაშასადამე, $\beta^{-1}\gamma$ არის ბიექცია A-დან სიმრავლე B-ზე, და ამიტომ $a = b$.

მაშასადამე, მიმართება $\le$ კარდინალური რიცხვებისთვის არის რეფლექსური, ანტისიმეტრიული და ტრანზიტული.

წრფივად დალაგებული სიმრავლე A *იზომორფულია* წრფივად დალაგებული სიმრავლე B –სი, თუ არსებობს ბიექცია φ სიმრავლე A-დან სიმრავლე B-ზე, რომელიც ინახავს წრფივ დალაგებას, ე. ი. $x \le y \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(y)$ $(x, y \in A)$. ასეთი თვისების φ ასახვას უწოდებენ *იზომორფიზმს A-დან B-ზე.*

ყოველ წრფივად დალაგებულ სიმრავლე A –ს შეუსაბამოთ ობიექტი $o(A)$, რომელსაც უწოდებენ *ორდინალურ ტიპს,* ისეთნაირად, რომ $o(A) = o(B)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წრფივად დალაგებული სიმრავლეები A და B იზომორფულებია.

ვინაიდან ორდინალური ტიპების ტოლობა $o(A) = o(B)$ იწვევს სიმრავლეების სიმძლავრის ტოლობას $|A| = |B|$, ამიტომ ყოველ ორდინალურ ტიპს შეესაბამება რომელიღაც სიმძლავრე, რომელსაც ეწოდება ამ ტიპის სიმძლავრე.

ყოველი n-ელემენტიანი სიმრავლისთვის $\{a_1, \dots, a_n\}$ $(n = 1,2, \dots)$ არსებობს $n!$ გადანაცვლება და ამიტომ წრფივად შეიძლება დალაგდეს $n!$ სხვადასხვა რაოდენობით. მაგრამ ყველა ამ შემთხვევაში მიღებული წრფივად დალაგებულ სიმრავლეებს გააჩნიათ ერთიდაიგივე ორდინალური ტიპი, რომელიც აღინიშნება n–ით. ცარიელ სიმრავლეს მიაკუთვნებენ ტიპ 0-ს. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს $N = \{0,1,2, \dots\}$, რომელიც დალაგებულია ზრდის მიხედვით, მიაკუთვნებენ ტიპ ω -ს. ხოლო სიმრავლეს $(N, \le^{-1})$, ორადული წრფივი დალაგებით $\dots \ge 3 \ge 2 \ge 1 \ge 0$, მიაკუთვნებენ ტიპ ω^*-ს.

სრულად დალაგებული A სიმრავლის ეწოდება *ორდინალური ან ტრანსფინიტური რიცხვი,* ან უბრალოდ *ორდინალი.*

აქედან გამომდინარეობს, რომ n და ω ორდინალური რიცხვებია, ხოლო ორდინალური ტიპი ω^* არ არის ორდინალური რიცხვი.

თეორემა 1.15. (კანტორის თეორემა). *A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეების სიმრავლე $P(A)$-ს გააჩნია სიმძლავრე, რომელიც მკაცრად მეტია A სიმრავლის სიმძლავრეზე.*

დამტკიცება. მართლაც, თუ ყოველ ელემენტ $a \in A$ შევუსაბამებთ A სიმრავლის ერთელემენტიან $\{a\}$ ქვესიმრავლეს, მივიღებთ ინექციას A-დან $P(A)$ –ში. ამიტომ $|A| \le |P(A)|$.

დავუშვათ, რომ არსებობს ბიექცია φ A სიმრავლიდან $P(A)$ სიმრავლეზე. დავუშვათ, რომ

$$M = \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}.$$

M არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, და ამიტომ $M \in P(A)$. მაშასადამე, უნდა არსებობდეს ელემენტი $m \in A$ ისეთი, რომ $\varphi(m) = M$. ვღებულობთ წინაამღდეგობას: თუ $m \in M$, მაშინ $m \notin \varphi(m) = M$, ხოლო თუ $m \notin M$, მაშინ $m \in \varphi(m) = M$. □

ახლა განვსაზღვროთ კარდინალურ რიცხვებზე ჯამი, ნამრავლი და ახარისხება. დავუშვათ a და b ნებისმიერი კარდინალური რიცხვებია და $a = |A|$, $b = |B|$, $A \cap B = \varnothing$. ჯამი, ნამრავლი და ახარისხება განვსაზღროთ შემდეგნაირად:

$$a + b = |A \cup B|,$$
$$a\,b = |A \times B|,$$
$$a^{\,b} = |A^B|,$$

სადაც A^B არის ყველა ასახვების სიმრავლე B-დან A-ში. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ოპერაციების შედეგი დამოკიდებულია მხოლოდ a და b-ზე და არ არის დამოკიდებული A დ B სიმრავლების არჩევანზე. გაერთიანებისა და დეკარტული ნამრავლის მარტივი თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი იგივეობები:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a\,(b\,c) = (a\,b)\,c,$$
$$a + b = b + a, \quad a\,b = b\,a,$$
$$a^{b+c} = a^b a^c, \ (ab)^{\,c} = a^{\,c} b^{\,c}, \ (a^{\,b})^{\,c} = a^{\,bc}.$$

თუ შევუსაბამებთ ნებისმიერი A სიმრავლის ყოველ ქვესიმრავლეს ამ ქვესიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას, მაშინ მივიღებთ ბიექციას $P(A)$ სიმრავლიდან $\mathbf{2}^A$ სიმრავლეზე, სადაც $\mathbf{2} = \{0,1\}$. ამიტომ A სიმრავლის $P(A)$ ყველა ქვესიმრავლის სიმძლავრე ნებისმიერი A სიმრავლისა უდრის $2^{|A|}$, ე. ი. ჭეშმარიტია შემდეგი ფორმულა:

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

კანტორის თეორემიდან ვღებულობთ

$$2^a > a$$

ნებისმიერი კარდინალური a რიცხვისთვის.

II

ალგორითმები და რეკურსიული ფუნქციები

2.1 შესავალი

მათემატიკის განვითარების ადრეულ საფეხურებზე (ძველი ეგვიპტე, ბაბილონი, ძველი საბერძნეთი) თავი იჩინა მექანიკური ხასიათის მრავალმა გამოთვლითმა პროცესმა; მათი საშუალებით თანამიმდევრულად გამოითვლებოდა დასმული ამოცანის საძებელი სიდიდეები მოცემული საწყისი სიდიდეებიდან, განსაზღვრული წესების და ინსტრუქციების მიხედვით. დროთა განმავლობაში ყველა ასეთ პროცესს მათემატიკაში მიეცა ალგორითმის სახელწოდება. გასული საუკუნის 30-იანი წლების მიჯნამდე ალგორითმის ეს ცნება ძირითადად არ იცვლებოდა, თუმცა ხდებოდა უფრო და უფრო მკაფიო. მიუხედავად ამისა, ის მაინც რჩებოდა ინტუიციურ ცნებად, რომელსაც ჰქონდა უფრო მეთოდოლოგიური, ვიდრე მათემატიკური მნიშვნელობა. მისი არსი ადვილად ირკვევა შემდეგი მაგალითებით.

გამოთვლის ათობით სისტემაში ნატურალური რიცხვები გამოისახება 0, 1, … , 9 ციფრების სასრული მიმდევრობებით. ისმის კითხვა, როგორ უნდა ვიპოვოთ რიცხვის ათობითი ჩანაწერი, რომელიც უდრის ორი რიცხვის ჯამს, სხვაობას, ნამრავლს, განაყოფს, რომლებიც მოცემულია თავიანთ ათობით ჩანაწერში? როგორც ცნობილია პროცესები, რომლის საშუალებითაც ამოიხსნება ეს ამოცანები, წარმოადგენს სწორედ ჯამის, სხვაობის, ნამრავლის და განაყოფის ალგორითმებს ათობით სისტემაში.

ალგორითმის ნათელ მაგალითს წარმოადგენს აგრეთვე ორი a_1 , a_2 დადებითი ნატურალური რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის ძებნის პროცესი. ეს პროცესი შემდეგია:

1) ვყოფთ a_1 –ს a_2 –ზე, ვპოულობთ ნაშთს a_3 და ვამოწმებთ, უდრის თუ არა ის 0-ს. თუ უდრის მაშინ პროცესი წყდება და a_2 არის საძებნი უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ $a_3 > 0$, მაშინ

2) ვყოფთ a_2 –ს a_3 –ზე, ვპოულობთ ნაშთს a_4. თუ $a_4 = 0$, მაშინ პროცესი წყდება და a_3 არის საძებნი უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ $a_4 > 0$, მაშინ

3) ვყოფთ a_3 –ს a_4 –ზე და ა. შ.

ვინაიდან $a_2 > a_3 > a_4 > \ldots \geq 0$, აღნიშნული პროცესი შეწყდება ყველაზე მეტი a_2 ნაბიჯის შემდეგ და პროცესის შეწყვეტისას ჩვენ ვიპოვით a_1 და a_2 რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს .

ახლა აღვნიშნოთ ალგორითმების საერთო თვისება.

a) ალგორითმი – ეს არის სიდიდეების თანმიმდევრული აგების პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს დისკრეტულ დროში ისეთნაირად, რომ საწყის მომენტში მოცემულია სიდიდეების საწყისი სასრული სისტემა, ხოლო ყოველ შემდგომ მომენტში სიდიდეების სისტემა მიიღება გარკვეული კანონით (პროგრამით) სიდიდეების სისტემიდან, რომლებიც მოცემული იყო წინამდებარე მომენტში (*ალგორითმის დისკრეტულობა*).

b) სიდიდეების სისტემა, რომელიც მიიღება რომელიღაც (არასაწყის) დროის მომენტში, ცალსახად განისაზღვრება სიდიდეების სისტემით, რომელიც მიღებული იყო დროის წინამდებარე მომენტში (*ალგორითმის დეტერმინირებულობა*).

c) წინა სიდიდეების სისტემიდან მომდევნო სიდიდეების სისტემის მიღების კანონი უნდა იყოს მარტივი და ლოკალური (*ალგორითმის ნაბიჯების ელემენტარულობა*).

d) თუ შემდგომი სიდიდის მიღების წესი , რომელიღაც მოცემული სიდიდიდან არ იძლევა შედეგს, მაშინ უნდა იყოს მითითებული, რა უნდა ითვლებოდეს ალგორითმის შედეგად (*ალგორითმის მიმართულობა*).

e) საწყისი სიდიდეების სისტემა შეიძლება ამორჩეულ იქნას პოტენციალურად უსასრულო სიმრავლიდან (*ალგორითმის მასობრიობა*).

ალგორითმის ცნება, რომელიც მოცემულია a) – e) მოთხოვნით, რასაკვირველია, არამკაცრია : ამ მოთხოვნების ფორმულირებაში გვხვდება სიტყვები “წესი”, “სიდიდე”, “მარტივი”, “ლოკალური”, რომლის ზუსტი აზრი არ არის დადგენილი. შემდგომში ალგორითმის ამ არამკაცრ ცნებას ჩვენ ვუწოდებთ ალგორითმის უშუალო ან ინტუიციურ ცნებას.

ალგორითმის ინტუიციური ცნება მართალია არამკაცრია, მაგრამ იმდენად მკაფიოა, რომ პრაქტიკულად არ ყოფილა სერიოზული შემთხვევები, რომ მათემატიკოსების აზრი გაყოფილიყო ამასთან დაკავშირებით, არის თუ არა ალგორითმი ესა თუ ის კონკრეტულად მოცემული პროცესი. ამით ადვილად აიხსნება თავისებური მდგომარეობა, რომელიც დამკვიდრდა მათემატიკაში ალგორითმულ პრობლემებთან დაკავშირებით XX საუკუნის დასაწყისში. ამ პრობლემებში საჭიროა მოიძებნოს ალგორითმი რომელიმე ერთგვაროვანი ამოცანების ერთობლობის ამოსახსნელად, რომლის პირობებში შედის სასრული პარამეტრების სისტემა, რომლებიც ღებულობენ ჩვეულებრივ მთელი რიცხვების მნიშვნელობებს. მაგალითად, მოითხოვება მოიძებნოს ალგორითმი , რომელიც იძლევა საშუალებას ყოველი მთელი რიცხვების a, b, c, d ოთხეულისთვის გავიგოთ, არსებობს თუ არა მთელი რიცხვები x, y, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d\ .$$

მოძებნილ იქნა პროცესი, რომლის საშუალებით, მოცემული რიცხვების გათვალისწინებით, სასრული რაოდენობის “ნაბიჯების” შემდეგ შესაძლებელი ხდება მოცემულ კითხვაზე პასუხი - “ჰო” ან “არა”. მრავალი სხვა ალგორითმული პრობლემები აგრეთვე ამოხსნილი იყო კონკრეტული ამომხსნელი პროცესების მითითების გზით. მდგომარეობა არსებითად შეიცვალა XX საუკუნეში, რომელმაც წინა პლანზე წამოწია ისეთი ალგორითმული პრობლემები, რომლის დადებითი ამოხსნის არსებობა ეჭვს იწვევდა. მართლაც, ერთია – დაამტკიცო ალგორითმის არსებობა, მეორე კი – დაამტკიცო მისი არარსებობა. პირველი შესაძლებელია გაკეთდეს პროცესის ფაქტიური აღწერით, რომელიც ხსნის ამოცანას ; ამ შემთხვევაში საკმარისია ალგორითმის ინტუიციური აღწერაც, რათა დავრწმუნდეთ იმაში, რომ აღწერილი პროცესი არის ალგორითმი. ამ გზით ალგორითმის არარსებობის დამტკიცება შეუძლებელია. ამისათვის საჭიროა ზუსტად ვიცოდეთ, რა არის ალგორითმი. გასული საუკუნის ოციან წლებში ალგორითმის ცნების ზუსტი განსაზღვრის ამოცანა გახდა ერთერთი ცენტრალური მათემატიკური პრობლემა. მისი ამოხსნა მიღებულ იქნა გასული საუკუნის ოცდაათიან წლეებში გილბერტის, გოედელის, ჩერჩის, კლინის, პოსტის და ტიურინგის შრომებში ორი ხერხით. პირველი ამოხსნა დაფუძნებული იყო რეკურსიული ფუნქციის ცნებაზე, მეორე – ზუსტად მოხაზული პროცესების კლასის აღწერაზე..

როგორც ზემოთ ავღვნიშნეთ, ალგორითმული პრობლემებისათვის ტიპიურია მდგომარეობა, როდესაც საჭიროა მოიძებნოს ალგორითმი ამოცანების ამოსახსნელად, რომლის პირობებში მოცემულია რომელიმე სასრული სისტემის პარამეტრები $x_1, \ldots, x_n$,

რომლებიც ღებულობენ მთელი რიცხვების მნიშვნელობას, ხოლო საძებნი შედეგი აგრეთვე მთელი რიცხვი y –ია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, საქმე ეხება ალგორითმის არსებობას რიცხვითი ფუნქციის y –ის გამოსათვლელად, რომელიც დამოკიდებულია $x_1, \ldots, x_n$ არგუმენტებზე, რომლებიც ღებულობენ მთელ მნიშვნელობას. რიცხვით ფუნქციებს, რომელთა მნიშნელობები შესაძლებელია გამოითვალოს რომელიმე (მოცემული ფუნქციისთვის) ალგორითმის საშუალებით, ეწოდება *გამოთვლითი ფუნქციები*. ვინაიდან ამ განსაზღვრებაში ალგორითმის ცნება აღებულია ინტუიციური აზრით, გამოთვლითი ფუნქციის ცნებაც ინტუიციურია. მიუხედავად ამისა, ალგორითმებიდან გამოთვლით ფუნქციებზე გადასვლისას ჩნდება ერთი ძალიან არსებითი გარემოება. პროცესების ერთობლიობა, რომლებიც აკმაყოფილებს a) – e) პირობებს და , მაშასადამე , ექვემდებარება ალგორითმის ინტუიციურ ცნებას, ძალიან ფართოა და განსახილველად ნაკლებად მისაწვდომია. პირიქით, გამოთვლითი ფუნქციების ერთობლიობა მრავალი პროცესების გასაგებად, რომლებიც აკმაყოფილებს a) – e) პირობებს, აღმოჩნდა ერთიდაიგივე და ამასთანავე ადვილად აღწერადი ჩვეულებრივ მათემატიკურ ტერმინებში. ამ ზუსტად აღწერილ გამოთვლითი ფუნქციების ერთობლიობას, რომელიც ემთხვევა ყველა გამოთვლითი ფუნქციების ერთობლიობას , დამყარებულს აქამდე ფართოდ ცნობილი ალგორითმის გაგებაზე, უწოდებენ *რეკურსიული ფუნქციების* ერთობლიობას.

გამომდინარე ჰილბერტის იდეებიდან, გ ო ე დ ე ლ მ ა პირველად აღწერა ყველა რეკურსიული ფუნქციების კლასი როგორც ყველა გამოთვლითი ფუნქციების კლასი, განსაზღვრული რომელიღაც ფორმალურ სისტემაში. გამომდინარე სულ სხვა წინამძღვრებიდან, 1936 წელს ჩერჩმა მიაკვლია იგივე გამოთვლითი ფუნქციების კლასს, რაც გოედელმა. იდეების ანალიზმა, რომლის საშუალებითაც მიკვლეულ იქნა აღნიშნული ფუნქციების კლასი, საშუალება მიცა ჩერჩს პირველად გამოექვეყნებინა ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ რეკურსიული ფუნქციების კლასი ემთხვევა ყველგან განსაზღვრულ გამოთვლითი ფუნქციების კლასს. ეს ჰიპოთეზა დღემდე ცნობილია *ჩერჩის თეზისის* სახელით. ვინაიდან გამოთვლითი ფუნქციის ცნება ზუსტად არ განისაზღვრება , ამიტომ ჩერჩის თეზისის დამტკიცება შეუძლებელია.

ზემოთ უკვე იყო აღნიშნული, რომ რომელიღაც $x_1, \ldots, x_n$ საწყისი მონაცემების გადამუშავებისას მოცემული ალგორითმის შესაბამისად, შესაძლოა შეგვხვდეს სიტუაცია, როდესაც გადამუშავების პროცესი არ თავდება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემული ალგორითმი გადაამუშავებს $x_1, \ldots, x_n$ რიცხვებს "განუსაზღვრელობაში". იმისათვის , რომ ეს უსასრულოდ მიმდინარე გადამუშავების პროცესების მნიშვნელოვანი შემთხვევაც აგრეთვე არ გამოვტოვოთ, კ ლ ი ნ ი მ შემოიყვანა ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციების ცნება და გამოთქვა ჰიპოთეზა, რომ ყველა ნაწილობრივ განსაზღვრული (ე. ი. არ არის აუცილებელი, რომ ფუნქცია განსაზღვრული იყოს ყველა თავისი არგუმენტების მნიშვნელობებზე) ფუნქციები, გამოთვლადი ალგორითმების საშუალებით, ნაწილობრივ რეკურსიულია. ცხადია, რომ კლინის უფრო ზოგადი ჰიპოთეზაც არ მტკიცდება, ისევე როგორც ჩერჩის ჰიპოთეზა. მიუხედავად ამისა კვლევებმა, რომლებსაც მრავალი მათემატიკოსი აწარმოებდა წლეების განმავლობაში, გამოავლინა სრული მიზანშეწონილობა, ჩაითვალოს ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციის ცნება, მეცნიერულ ექვივალენტად ნაწილობრივ განსაზღვრული გამოთვლითი ფუნქციების ინტუიციური ცნებისა.

შემდგომში ჩვენ არ განვასხვავებთ ჩერჩის და კლინის თეზისებს და ჩერჩის თეზისად ჩვენ მოვიაზრებთ ჩერჩის თეზისს იმ გაფართოებული სახით, რომელიც მიანიჭა მას კლინმა.

ჩერჩის თეზისი აღმოჩნდა საკმარისი, რომ მივანიჭოთ აუცილებელი სიზუსტე ალგორითმული პრობლემების ფორმულირებას და ზოგ შემთხვევაში შესაძლებელი გახდეს მათი არაამოხსნადობის დამტკიცება. ამის მიზეზი ისაა, რომ ჩვეულებრივ მათემატიკის ალგორითმულ პრობლემებში საუბარია არა ალგორითმებზე, არამედ ზოგიერთი სპეციალურად აგებული ფუნქციების გამოთვლებზე. ჩერჩის თეზისის საფუძველზე ფუნქციის გამოთვლის საკითხი ექვივალენტურია მისი რეკურსიულობის საკითხისა. რეკურსიული

ფუნქციის ცნება მკაცრია. ამიტომ ჩვეულებრივი მათემატიკური ტექნიკა ზოგჯერ საშუალებას იძლევა უშუალოდ დამტკიცდეს, რომ ფუნქცია რომელიც ხსნის ამოცანას შეიძლება არ იყოს რეკურსიული. სახელდობრ, ამ გზით ჩ ე რ ჩ მ ა პირველმა დაამტკიცა პრედიკატთა ლოგიკის ძირითადი ალგორითმული პრობლემის არაამოხსნადობა – ზოგადმართებულობის პრობლემა პირველი რიგის თეორიის ფორმულებისათვის.

ნაწილობრივი რეკურსიული ფუნქციების კლასის ზუსტი აღწერა ჩერჩის თეზისთან ერთად გვაძლევს ალგორითმის ცნების დაზუსტების ამოცანის ერთერთ შესაძლო ამოხსნას. მაგრამ ეს ამოხსნა არ არის სრულად პირდაპირი, ვინაიდან გამოთვლითი ფუნქციის ცნება არის მეორადი ალგორითმის ცნების მიმართ. ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა უშუალოდ დაზუსტდეს თვით ალგორითმის ცნება და უკვე შემდეგ მისი საშუალებით ზუსტად განისაზღვროს აგრეთვე გამოთვლითი ფუნქციების კლასი? ეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გააკეთეს პ ო ს ტ მ ა და ტ ი უ რ ი ნ გ მ ა თითქმის ერთდროულად ჩერჩის და კლინის შრომების გამოქვეყნებასთან ერთად. პოსტის და ტიურინგის ძირითადი აზრი მდგომარეობდა იმაში, რომ ალგორითმული პროცესები - ეს არის პროცესები, რომელსათ შეიძლება ჰქმნიდეს შესაფერისად მოწყობილი "მანქანა". ამ აზრის შესაბამისად მათ ზუსტ მათემატიკურ ტერმინებში აღწერეს მანქანების საკმარისად ვიწრო კლასი, მაგრამ ამ მანქანების საშუალებით შესაძლო გახდა განხორციელებულიყო ან იმიტირებულიყო ყველა ალგორითმული პროცესი, რომლებიც ფაქტობრივად ოდესღაც აღწერილი იყო მათემატიკოსების მიერ. შემოგვთავაზეს აღნიშნულ მანქანებზე განხორციელებული ალგორითმები განხილულიყო, როგორც მათემატიკური "წარმომადგენლები" საერთოდ ყველა ალგორითმისა. უბრალო მოსაზრებებმა უჩვენეს, რომ ფუნქციათა კლასი, რომლებიც გამოთვლადია ამ მანქანებზე, ზუსტად ემთხვევა ყველა ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციების კლასს. ამგვარად მიღებული იყო ჩერჩის თეზისის კიდევ ერთი ფუნდამენტური დადასტურება.

2.2 ძირითადი გამოთვლითი ოპერატორები

ოპერაციებს რიცხვით ფუნქციებზე მომავალში ვუწოდებთ ოპერატორებს. ამ პარაგრაფში განისაზღვრება მრავალი ოპერატორი, რომლებსაც გააჩნიათ ის თვისებები, რომ მათი გამოყენებით ფუნქციებზე, რომლებიც ინტუიციურად გამოთვლადია (იხ. შესავალი), მიიღება აგრეთვე ინტუიციურად გამოთვლადი ფუნქციები. ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციებს, რომლებიც მიიღება მარტივი ფუნქციებიდან $s(x) = x + 1$, $o(x) = 0$, $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ ამ ოპერატორების გამოყენებით, ეწოდება ნაწილობრივ რეკურსიული. ჩერჩის ძირითადი თეზისი მდგომარეობს იმაში, რომ რეკურსიული ფუნქციების კლასი ემთხვევა ფუნქციების კლასს, რომლებიც იძლევა მანქანური ან ალგორითმული გამოთვლის საშუალებას.

2.2.1. ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების სუპერპოზიცია

დავუშვათ, მოცემულია რომელიღაც n ნაწილობრივ განსაზღვრული ერთი და იგივე m რიცხვის არგუმენტიანი ფუნქციები $f_1, \ldots, f_n$, A დომეინით და B მნიშვნელობათა არით, და დავუშვათ, რომ B-ზე განსაზღვრულია n არგუმენტიანი ფუნქცია f, რომლის მნიშვნელობები ეკუთვნის რომელიმე მესამე სიმრავლე C-ს. ეხლა შემოვიღოთ ნაწილობრივ განსაზღვრული m არგუმენტიანი ფუნქცია g, განსაზღვრული დომეინ A–ზე და კოდომეინ C–თი, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

ნებისმიერი $x_1, \ldots, x_m$ A –დან. ვიტყვით, რომ ფუნქცია g მიღებულია *სუპერპოზიციის* ან *ჩანაცვლების* ოპერაციით $f, f_1, \ldots, f_n$ ფუნქციებისგან. ჩანაცვლების ოპერაცია შემდგომში

აღინიშნება $\boldsymbol{S}^{n+1}$ სიმბოლოთი. ზედა ინდექსი მიუთითებს ფუნქციების რაოდენობაზე. შემდგომში *A, B, C* სიმრავლეების ნაცვლად გამოვიყენებთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე **N**–ს. $\mathfrak{I}^n$–ით აღვნიშნოთ ყველა *n* არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე. ოპერატორი $\boldsymbol{S}^{n+1}$ ყველგან განსაზღვრული ფუნქციაა $\mathfrak{I}^n\times \mathfrak{I}^m\times \ldots \times \mathfrak{I}^m$ -დან $\mathfrak{I}^n$–ში. თუ ჩვენ განვიხილავთ ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე $\mathfrak{I}$-ს ნებისმიერი რიცხვის არგუმენტებით, მაშინ ოპერატორი $\boldsymbol{S}^{n+1}$ შეიძლება განხილულ იქნას როგორც n + 1 არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის დომეინი და კოდომეინი არის $\mathfrak{I}$. ამ შემთხვევაში ტერმს $\boldsymbol{S}^{n+1}(f, f_1, \ldots, f_n)$ გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობა (რომელიც ემთხვევა *m*-არგუმენტიან ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციას) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ცვლად *f*–ის მნიშვნელობაა *n* –არგუმენტიანი ფუნქციაა, ხოლო $f_1, \ldots, f_n$ სიმბოლოების მნიშვნელობებია ერთი და იგივე არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციები. მაგალითად, ამ აზრით $\boldsymbol{S}^3(I_1^2, I_1^3, I_2^2)$ eტერმი არ არის განსაზღვრული, ტერმ $\boldsymbol{S}^3(I_1^2, I_1^3, I_2^3)$ -ის მნიშვნელობა უდრის I_1^3, სადაც I_1^2, I_1^3, I_2^3 - მარტივი ფუნქციების სიმბოლოებია.

სისტემა $\wp=(\mathfrak{I}, \boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{S}^3, \ldots)$, შემდგარი ფუნქციების ერთობლიობა $\mathfrak{I}$-გან და მათზე განსაზღვრულ ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციებისგან $\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{S}^3, \ldots,$ არის ნაწილობრივი ალგებრა. დავუშვათ $f_1^n1, \ldots, f_s^ns$ არის ნებისმიერი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციები, შესაბამისად $n_{1,\ldots,}n_s$ არგუმენტებით ($n_{1,\ldots,}n_s$ ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია). ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციებს, რომლებიც მიიღება სუპერპოზიციით $f_1^n1, \ldots, f_s^ns$ – გან და I_m^n $(m, n =1,2, \ldots)$ ფუნქციებისგან, ეწოდება *ელემენტარული* $f_1^n1, \ldots, f_s^ns$ მიმართ. მათი ერთობლიობა წარმოადგენს ქვეალგებრას $\wp$ ალგებრაში, წარმოქმნილს $f_1^n1, \ldots, f_s^ns, I_m^n$ ელემენტებით.

დავუშვათ მოცემულია ჩვეულებრივი ფუნქციები + და ×. ფუნქცია, რომლის არგუმენტებია x_1 , x_2 , x_3 , ხოლო მისი ტერმალური წარმოდგენაა $x_1\cdot x_2 + x_3$, არის ოპერატორული ტერმის

$$\boldsymbol{S}^3(+, \boldsymbol{S}^3(\times, I_1^3, I_2^3), I_3^3)$$

მნიშვნელობა.

2.2. პრიმიტიულად რეკურსიული ოპერატორი

დავუშვათ მოცემულია რომელიღაც რიცხვითი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციები: *n* ადგილიანი *g* და (*n* + 2) ადგილიანი ფუნქცია *h*. ვიტყვით, რომ (*n* + 1) ადგილიანი ფუნქცია *f* წარმოიქმნება *g* და *h* ფუნქციებიდან *პრიმიტიული რეკურსიით*, თუ ნებისმიერი $x_1, \ldots, x_n, y$ ნატურალური მნიშვნელობებისათვის

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n), \quad (1)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)). \quad (2)$$

ამ განსაზღვრებას ჩვენ აგრეთვე გამოვიყენებთ როცა *n* = 1, ვიტყვით, რომ ერთადგილიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია *f* წარმოიქმნება პრიმიტიული რეკურსიით კონსტანტური ერთადგილიანი ფუნქციიდან, რომელიც უდრის *a*, და ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია *h*–დან, თუ

$$f(0) = a, \quad (3)$$
$$f(x + 1) = h(x, y, f(x)). \quad (4)$$

ისმის კითხვა, ყოველი n და $n+2$ არგუმენტიანი g და h ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციისთვის არსებობს თუ არა $n+1$ არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია f, რომელიც აკმაყოფილებს (1), (2) ან, შესაბამისად, (3), (4), პირობებს და იქნება თუ არა ასეთი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია ერთადერთი? ვინაიდან ფუნქციების განსაზღვრის არე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ პასუხი ამ ორ კითხვაზე, ცხადია, დადებითია. თუ ფუნქცია f არსებობს, მაშინ (1) და (2)-დან თანმიმდევრულად ვღებულობთ

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n), \\ f(x_1, \ldots, x_n, 1) &= h(x_1, \ldots, x_n, 0, g(x_1, \ldots, x_n)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_1, \ldots, x_n, m+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, m, f(x_1, \ldots, x_n, m)) \end{aligned} \qquad (5)$$

და ამიტომ f განსაზღვრულია ცალსახად. (5) –დან, კერძოდ, ჩანს, რომ თუ რომელიღაც $x_1, \ldots, x_n, t$ მნიშვნელობებისათვის $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ არ არის განსაზღვრული, მაშინ არ იქნება განსაზღვრული მნიშვნელობები $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ ყველა $y \geq t$.

იმისათვის, რომ მოცემული ნაწილობრივ განსაზღვრული g, h ფუნქციებიდან ვიპოვოთ f-ი, წარმოქმნილი პრიმიტიული რეკურსიით, საკმარისია ტოლობები (5) მივიღოთ როგორც ტოლობები, რომლებიც განსაზღვრავენ ფუნქცია f-ს. მაშასადამე, ნებისმიერი ნაწილობრივ განსაზღვრული n–ადგილიანი და $(n+2)$–ადგილიანი h $(n = 0,1,2, \ldots)$ ფუნქციებისთვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ნაწილობრივ განსაზღვრული $(n+1)$–ადგილიანი ფუნქცია f, რომელიც წარმოიქმნება g და h–დან პრიმიტიული რეკურსიით. სიმბოლურად ჩაიწერება

$$f = \boldsymbol{R}(g, h)$$

და $\boldsymbol{R}$–ს განიხილავენ როგორც ორადგილიან ნაწილობრივ განსაზღვრულ ოპერაციის სიმბოლოს, რომელიც განსაზღვრულია ყველა ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლე $\mathfrak{Z}$-ში. (5)–დან გამომდინარეობს, რომ თუ g და h ყველგან განსაზღვრულებია, მაშინ ფუნქცია f ყველგან განსაზღვრულია.

(5)–დან ჩანს აგრეთვე ჩვენთვის ფუნდამენტური გარემოება: თუ ჩვენ რაღაცნაირად "შეგვიძლია" g და h ფუნქციების მნიშვნელობების პოვნა, მაშინ f ფუნქციის მნიშვნელობები შესაძლებელია გამოითვალოს სრულიად "მექანიკური" ხასიათის პროცედურის საშუალებით. სახელდობრ, $f(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ მნიშვნელობების საპოვნელად საკმარისია თანმიმდევრულად ვიპოვოთ რიცხვები

$$\begin{aligned} b_0 &= g(a_1, \ldots, a_n), \\ b_1 &= h(a_1, \ldots, a_n, 0, b_0), \\ b_2 &= h(a_1, \ldots, a_n, 1, b_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{m+1} &= h(a_1, \ldots, a_n, m, b_m). \end{aligned}$$

$(m+1)$ ნაბიჯზე მიღებული b_{m+1} რიცხვი სწორედ იქნება ფუნქციის საძებნი მნიშვნელობა $(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ წერტილზე. $f(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ ფუნქციის გამოთვლის პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ მხოლოდ მაშინ, როცა ერთერთი გამოსახულების

$$g(a_1, \ldots, a_n), \quad h(a_1, \ldots, a_n, 0, b_0), \ldots, \quad h(a_1, \ldots, a_n, m, b_m),$$

გამოთვლის პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ, ე. ი. როცა ერთი მაინც ამ გამოსახულებებიდან მიიღებს განუსაზღვრელ მნიშვნელობას. მაგრამ მაშინ f ფუნქციის განსაზღვრის შესაბამისად $f(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ იქნება განუსაზღვრელი.

ეხლა შემოვიღოთ რეკურსიული ფუნქციების ერთერთი მთავარი ცნება. დავუშვათ მოცემულია ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების რაღაც Σ სისტემა. ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქცია f-ს ეწოდება *პრიმიტიულად რეკურსიული Σ მიმართ,* თუ f შეიძლება მიღებულ იქნას ფუნქციების Σ სისტემიდან და მარტივი ფუნქიებიდან s, o, I_m^n სასრული რაოდენობით სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციებით.

ფუნქცია f-ს ეწოდება *პრიმიტიულად რეკურსიული,* თუ f შეიძლება მიღებულ იქნას მხოლოდ მარტივი ფუნქიებიდან s, o, I_m^n სასრული რაოდენობით სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციებით.

სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციები, რომლებიც გამოყენებულია ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციებზე, შედეგად აგრეთვე გვაძლევს ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციებს. ამიტომ, თუ მოცემულია ყველგან განსაზღვრული ფუნქციების სისტემა Σ, მაშინ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები Σ-ას მიმართ აგრეთვე ყველგან განსაზღვრულია. კერძოდ, *ყველა პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები ყველგან განსაზღვრულია.*

ცხადია, რომ ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქცია f-ი, რომელიც პრიმიტიულად რეკურსიულია რომელიღაც ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციათა Σ სიტემის მიმართ, პრიმიტიულად რეკურსიულია უფრო ფართე სისტემის მიმართ. პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები შეიძლება განხილულ იქნას როგორც პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები ცარიელი სისტემის მიმართ. ამიტომ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები – ეს არის ფუნქციები, რომლებიც პრიმიტიულად რეკურსიულია ფუნციათა ნებისმიერი სისტემის მიმართ.

დაბოლოს, განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ *სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკუსიის ოპერაციები, რომლებიც გამოიყენება ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციებზე, რომლებიც პრიმიტიულად რეკუსიულია რომელიღაც Σ სისტემის მიმართ, შედეგად გვაძლევს აგრეთვე პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციებს Σ მიმართ.*

განსაზღვრის თანახმად ერთადგილიანი ფუნქციები $s(x) = x + 1$, $o^1(x) = 0$ და მრავალადგილიანი ფუნქციები $I_m^n(x_1,\ldots,x_n) = x$ $(m,n = 1,2, \ldots)$ პრიმიტიულად რეკურსიულებია.

n-ადგილიანი ფუნქციისათვის $o^n(x_1,\ldots,x_n) = 0$ გვაქვს წარმოდგენა

$$o^n = \boldsymbol{S}^2(o^1, I_1^n)$$

და ამიტომ ფუნქცია o^n პრიმიტიულად რეკურსიულია. ნებისმიერი n-ადგილიანი $f^n = a$ მუდმივი ფუნქციისათვის გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა

$$s\,(s\,(\ldots s\,(o^n(x_1,\ldots,x_n))\ldots)),$$

რომელიც ჩაწერილია პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციების და ცვლადების საშუალებით. ამიტომ ყველა მუდმივი ფუნქციები პრიმიტიულად რეკურსიულია.

ორადგილიანი ფუნქცია $f(x,y) = x + y$ აკმაყოფილებს ტოლობებს

$$x + y = x = I_1^1(x),$$
$$x + (y + 1) = (x + y) + 1 = s\,(x + y\,).$$

მაშასადამე, ფუნქცია $x + y$ წარმოიქმნება პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციებიდან I_1^1, $h\,(x, y, z\,) = z + 1$ და ამიტომ $x + y$ პრიმიტიულად რეკურსიულია.

ორადგილიანი ფუნქცია $f(x,y) = x \cdot y$ აკმაყოფილებს პრიმიტიული რეკურსიის სქემას

$$x\cdot 0 = o(x),$$
$$x\cdot (y+1) = x\cdot y + x$$

პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციებიდან $g(x) = o(x)$, $h(x, y, z) = z + x$. ამიტომ ფუნქცია $x\cdot y$ პრიმიტიულად რეკურსიულია.

განვიხილოთ ფუნქცია x^y, სადაც ვგულისხმობთ, რომ $x^0 = 1$. ტოლობები

$$x^0 = 1,$$
$$x^{y+1} = x^y x$$

წარმოადგენენ პრიმიტიული რეკურსიის სქემას საწყისი პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციებით $g(x) = 1$, $h(x, y, z) = z \cdot x$. ამიტომ ფუნქცია x^y პრიმიტიულად რეკურსიულია.

ანალიზში ზოგჯერ გვხვდება ფუნქცია $\mathrm{sg}\, x$, რომელიც უდრის +1 დადებითი ნამდვილი რიცხვებისათვის, −1 უარყოფითი რიხცვებისათვის და 0, როცა $x = 0$. ჩვენ განვიხილავთ ამ ფუნქციას ნატურალური რიცხვებზე განსაზღვრულს შემდეგნაირად

$$\mathrm{sg}\, x = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x = 0, \\ 1, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

შემოვიღოთ ფუნქცია $\neg\mathrm{sg}$, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგნაირად :

$$\neg\mathrm{sg}\, x = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x = 0, \\ 0, & \text{თუ } x > 0, \end{cases}$$

და რომელიც ემთხვევა სხვაობას $1 - \mathrm{sg}\, x$.

ფუნქციები $\mathrm{sg}\, x$ და $\neg\mathrm{sg}\, x$ აკმაყოფილებენ პრიმიტიულად რეკურსიულ სქემებს :

$$\mathrm{sg}\, 0 = 0, \qquad \neg\,\mathrm{sg}\, 0 = 1,$$
$$\mathrm{sg}\,(x+1) = 1, \qquad \neg\,\mathrm{sg}\,(x+1) = 0,$$

რომელთაც აქვთ (3), (4) სახე. ამიტომ sg და $\neg$sg პრიმიტიულად რეკურსიულებია.

ნატურალურ რიცხვებში ხვაობა $x - y$ წარმოადგენს ნაწილობრივ განსაზღვრულ ორადგილიან ფუნქციას, განსაზღვრულს როცა x მეტია ან ტოლია y–ზე. მაგრამ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები ყველგან განსაზღვრულია. ამიტომ პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციების თეორიაში ჩვეულებრივი სხვაობის ნაცვლად შემოყავთ შეკვეცილი სხვაობა, რომელსაც აღნიშნავენ $x \dot{-} y$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{თუ } x \geq y, \\ 0, & \text{თუ } x < y. \end{cases} \qquad (6)$$

ჩვეულებრივ სხვაობასგან განსხვაებით შეკვეცილი სხვაობა ნატურალურ რიცხვებზე ყველგან განსაზღვრული ფუნქციაა, და ამავე დროს ის მარტივად არის დაკავშირებული ჩვეულებრივ სხვაობასთან. ასე, მაგალითად, (6) თანახმად

$$5 \dot{-} 3 = 2,\ 3 \dot{-} 5 = 0,\ \ (x \dot{-} y) \dot{-} z = x \dot{-} (y + z).$$

ფუნქცია $x \dot{-} 1$ აკმაყოფილებს პრიმიტიულ რეკურსიულ სქემას

$$0 \dot{-} 1 = 0,$$
$$(x+1) \dot{-} 1 = x$$

პრიმიტიულად რეკურსიული საწყისი ფუნქციებით o^1 და I_1^2. ამიტომ ფუნქცია $x \dot{-} 1$ პრიმიტიულად რეკურსიულია.

მეორეს მხრივ, (6)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი x,y

$$x \dot{-} 0 = x,$$
$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1.$$

ეს ტოლობები უჩვენებს, რომ ორადგილიანი ფუნქცია $x \dot{-} y$ წარმოიქმნება პრიმიტიული რეკურსიით I_1^1 და $h\ (x,\ y,\ z\ ) = z \dot{-} 1$ ფუნქციებიდან. ორივე ეს უკანასკნელი ფუნქციები პრიმიტიულად რეკურსიულებია. ამიტომ $x \dot{-} y$ ფუნქციაც პრიმიტიულად რეკურსიულია.

დაბოლოს, ფუნქციების + და $x \dot{-} y$ პრიმიტიული რეკურსიულობიდან გამომდინარეობს ფუნქციის

$$|\ x - y\ | = (\ x \dot{-} y\ )\ +\ (\ x \dot{-} y\ )$$

პრიმიტიულად რეკურსიულობა.

2.3. მინიმიზაციის ოპერაცია

განვიხილოთ რომელიღაც n-ადგილიანი ($n \geq 1$) ნაწილობრივ განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქცია f. დავუშვათ, რომ არსებობს რაიმე "მექანიზმი" f ფუნქციის მნიშვნელობების გამოსათვლელად, ამასთანავე ფუნქცია f–ი არ არის განსაზღვრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს მექანიზმი მუშაობს უსასრულოდ, რომელიც არ იძლევა არავითარ განსაზღვრულ შედეგს. დავაფიქსიროთ $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ფუნქცია f –ის პირველი $n-1$ არგუმენტების რომელიღაც მნიშვნელობები და განვიხილოთ განტოლება

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n . \qquad (1)$$

რომ ვიპოვოთ ამ განტოლების (ნატურალური) ამოხსნა y, ზემოთ აღნიშნული მექანიზმის საშუალებით თანმიმდევრულად გამოვთვალოთ მნიშვნელობები $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ როცა $y = 0,1,2, \ldots$. უმცირესი მნიშვნელობა a, რომლისთვის ვღებულობთ

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) = x_n,$$

აღვნიშნოთ შემდეგნაირად

$$\mu_y (\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n) \qquad (2)$$

(2)-ის მნიშვნელობის ძებნის აღწერილი პროცესი გაგრძედება უსასრულოდ შემდეგ ჩამოთვლილ შემთხვევებში :

ა) $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ მნიშვნელობა არ არის განსაზღვრული ;

ბ) $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ მნიშვნელობები განსაზღვრულია როცა $y = 0,1, \dots, a-1$, მაგრამ განსხვავებულია x_n –გან, ხოლო $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$ მნიშვნელობა არ არის განსაზღვრული ;

გ) $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ მნიშვნელობები განსაზღვრულია ყველა $y =$ $0,1, \dots, a-1$, მაგრამ განსხვავებულია x_n –გან.

ყველა ამ შემთხვევებში გამოსახულება (2)-ის მნიშვნელობა ითვლება განუსაზღვრელი. დანარჩენ შემთხვევებში აღწერილი პროცესი წყდება და გვაძლევს უმცირეს ამოხსნას $y = a$. ეს ამოხსნა, როგორც აღვნიშნეთ, იქნება გამოსახულება (2)-ის მნიშვნელობა.

ზემოთ აღნიშნულიდან გვაქვს

$$x \div y \;=\; \mu_z (y + z = x). \qquad (3)$$

ანალოგიურად,

$$\mu_x (\operatorname{sg} x = 1) = 1,$$
$$\mu_y (y \div x = 0) = 0.$$

ესენი შესაბამისად წარმოადგენენ $\operatorname{sg} x = 1$ და $y \div x = 0$ განტოლებების უმცირეს ამონახსნებს.

პირიქით, გამოსახულება

$$\mu_y (y (y - (x + 1)) = 0) \qquad (4)$$

არ არის განსაზღვრული, ვინაიდან $0 \cdot (0 - (x + 1))$ გამოსახულების მნიშვნელობა არ არის განსაზღვრული. ამავე დროს განტოლებას

$$y (y - (x + 1)) = 0$$

გააჩნია ამოხსნა $y = x + 1$, მაგრამ ეს არ ემთხვევა გამოსახულება (4)-ის მნიშვნელობას. ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ნაწილობრივ განსზღვრული ფუნქციებისთვის $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ გამოსახულება (2) , თუ მკაცრად ვიმსჯელებთ, არ არის (1)-ის უმცირესი ამონახსნი. თუ ფუნქცია $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ ყველგან განსაზღვრულია და განტოლება (1) გააჩნია ამონახსნი, მაშინ (2) არის (1)-ის უმცირესი ამონახსნი.

ძირითადი განსაზღვრება. *ნაწილობრვ განსაზღვრულ ფუნქცია f-ს ეწოდება ნაწილობრივ რეკურსიული ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციათა Σ სისტემის მიმართ, თუ f შეიძლება მიღებულ იქნას Σ-დან აღებული ფუნქციებიდან და მარტივი o, s, I_m^n ფუნქციებიდან სუპერპოზიციის, პრიმიტიული რეკურსიის და მინიმიზაციის სასრული რაოდენობის ოპერაციებით.*

ნაწილობრვ განსაზღვრულ ფუნქცია f-ს ეწოდება ნაწილობრივ რეკურსიული, თუ f შეიძლება მიღებულ იქნას მარტივი ფუნქციებიდან o, s, I_m^n სუპერპოზიციის , პრიმიტიული რეკურსიის და მინიმიზაციის სასრული რაოდენობის ოპერაციებით.

ჩერჩის თეზისი. *ალგორითმულად (ან მანქანურად) გამოთვლადი ნაწილობრივ განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციათა კლასი ემთხვევა ყველა ნაწილობრივ რეკურსიულ ფუნქციათა კლასს.*

III

გამონათქვამთა აღრიცხვა

ლოგიკას ცენტრალური ადგილი უჭირავს მრავალ სფეროში, მათ შორის - მათემატიკაში. ლოგიკა აგრეთვე არსებითია კომპიუტერული პროგრამების აგებისა და ტესტირებისათვის. ზოგჯერ ჩვენი ლოგიკური მსჯელობა არ არის სრულყოფილი, რის შედეგადაც შესაძლებელია შეცდომები. ამიტომ მნიშვნელოვანია განისაზღვროს ძირეული ლოგიკური გამოყვანები. ლოგიკური გამოყვანების ძირითად კომპონენტებს წარმოადგენს გამონათქვამები, ან რაც იგივეა მტკიცებულებები (დებულებები), რომლებიც არის ან ჭეშმარიტი ან მცდარი. შესაძლებელია გამონათქვამების ჩამოყალიბება და მანიპულირება მრავილი ხერხით. ეს მანიპულაციები წარმოადგენს გამონათქვამთა აღრიცხვის საგანს.

3.1 ლოგიკური მსჯელობები და გამონათქვამები

3.1.1 შესავალი

მნიშვნელოვანია განვასხვავოთ ლოგიკურად კორექტული მსჯელობები და არაკორექტული მსჯელობები. შემდგომში ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ ასეთი მსჯელობების ძირითად სტრუქტურას. ამის გაკეთებისას ჩვენ აღმოვაჩენთ, რომ ლოგიკური მსჯელობები შედგება გამონათქვამისაგან, რომლთა შემდგომი დაყოფა შეუძლებელია. ლოგიკური მსჯელობები აიგება ამ *ატომური (დაუშლადი) გამონათქვამებისგან ლოგიკური კავშირების საშუალებით.*

3.1.2 ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ლოგიკური მსჯელობები

მაგალითის სახით მოვიყვანოთ შემდეგი მტკიცებულებები.

1. თუ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ კომპანიები ფართოვდებიან.
2. თუ კომპანიები ფართოვდებიან, მაშინ ისენი ქირაობენ მუშებს.

---

3. თუ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ კომპანიები ქირაობენ მუშებს.

ეს ლოგიკური მსჯელობა შედგება სამი სტრიქონისგან, და ყოველი სტრიქონი შეიცავს რომელიმე მტკიცებულებას. პირველი და მეორე სტრიქონები უზრუნველყოფს მოცემული მსჯელობის *წინამძღვარს*, ხოლო მესამე სტრიქონი შეიცავს დასკვნას. შეიძლება კამათი წინამძღვრების საწინააღმდეგოდ და გამოვაცხადოთ, რომ ისინი მცდარია. მაგრამ, როგორც კი წინამძღვრების მტკიცებულებას მივიღებთ, მაშინ დასკვნაც აგრეთვე მისაღებია, იმიტომ რომ, ის ლოგიკურად გამომდინარეობს წინამძღვრებისგან და, მაშასადამე, მსჯელობა კორექტულია.

ქვემოთ მოგვყავს კორექტული მსჯელობის მეორე მაგალითი.

1. კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი, ან შესავალი შეიცავს შეცდომას.
2. შესავალი არ შეიცავს შეცდომას.

---

3. კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი.

წინა შემთხვევის მსგავსად გვაქვს ორი წინამძღვარი, რომლებიც მოცემულია მსჯელობის 1 და 2 სტრიქონით. კერძო შემთხვევაში, ეს წინამძღვრები შეიძლება იყოს ან ჭეშმარიტი ან მცდარი. მაგრამ, თუ წინამძღვრები ჭეშმარიტია, მაშინ ჩვენ ვერ ავიცილებთ დასკვნას, რომ კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი. ეს დასკვნა ლოგიკურად გამომდინარეობს წინამძღვრებიდან.

ზემოთ მოყვანილის მსგავსი მტკიცებულებების გამოყენებით, არისტოტელემ განავითარა კორექტული და არაკორექტული მსჯელობების მოდელები. მან შენიშნა, რომ მრავალი მტკიცებულებები, რომლებიც გამოიყენება ლოგიკაში, რეალურად წარმოადგენენ *შედგენილ* მტკიცებულებებს; ე. ი. ისინი შედგებიან რამოდენიმე ნაწილისაგან და ამავე დროს ყოველი მათგანი მართებულია. პირველი მაგალითი შეიცავს მტკიცებულებას, როგორც ერთ-ერთ წინამძღვარს:

თუ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ კომპანიები ფართოვდებიან.

ამ მტკიცებულებას გააჩნია ორი ნაწილი, რომლებიც თავის მხრივ ორივე მართებულია. ესენია "მოთხოვნილება მატულობს" და "კომპანიები ფართოვდებიან". ეს ორი მტკიცებულება შეკავშირებულია კონსტრუქციით "თუ … მაშინ". ჩვენი მეორე მსჯელობა შეიცავს მტკიცებულებას

კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი, ან შესასავალი შეიცავს შეცდომას.

ასევე, ეს მტკიცებულება შედგება ორი ნაწილისგან: "კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი" და "შესასავალი შეიცავს შეცდომას". თავის მხრივ, ორივე ნაწილი არის მსჯელობები, და ისინი შეკავშირებულია სიტყვით "ან".

სჯელობების კორექტულობისა და არაკორექტულობის თვალნათლივ დასანახად არისტოტელემ გამოიყენა მოცემული მსჯელობების არსებითი მტკიცებულებების ასოებით შეცვლის მათოდი. ამ ხერხში, მართებული მსჯელობის მოდელი შესაძლებელია მოკლედ აღიწეროს. მივყვებით რა არისტოტელეს შეთანმხმებას, ჩვენ ვიყენებთ დიდ ლათინურ ასოებს არსებითი მტკიცებულებების აღნიშვნისათვის. ასო *P* შეიძლება გამოსახავდეს მტკიცებულებას "მოთხოვნილება მატულობს", ასო *Q* შეიძლება გამოსახავდეს მტკიცებულებას "კომპანიები ფართოვდებიან" და ასო *R* შეიძლება გამოსახავდეს მტკიცებულებას "კომპანიები ქირაობენ მუშებს". ვიყენებთ რა ამ სიმბოლოებს, ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ მოცემული მსჯელობა, რომელიც შეიცავს მოთხოვნილების მატებას, შემდეგნაირად:

1. თუ *P*, მაშინ *Q*.
2. თუ *Q*, მაშინ *R*.

---

3. თუ *P*, მაშინ *R*.

არისტოტელემ ასეთი ტიპის მსჯელობებს მისცა სახელი: მან მათ უწოდა *ჰიპოთეტური სილოგიზმი.* ამ ჰიპოთეტურ სილოგიზმში *P*, *Q* და *R*-ის ნაცვლად შესაძლებელია ჩაისვას ნებისმიერი მტკიცებულება. მაგალითად, თუ *P*-ს შეუსაბამებთ "კატა ხედავს ოქროს თევზს",

Q-ს "კატა იჭერს ოქროს თევზს", ხოლო *R*-ს "კატა ჭამს ოქროს თევზს", მაშინ მივიღებთ შემდეგ ჰიპოთეტურ სილოგიზმს

1. თუ კატა ხედავს ოქროს თევზს, მაშინ კატა იჭერს ოქროს თევზს.
2. თუ კატა იჭერს ოქროს თევზს, მაშინ კატა ჭამს ოქროს თევზს.

---

3. თუ კატა ხედავს ოქროს თევზს, მაშინ კატა ჭამს ოქროს თევზს.

მოცემული მსჯელობის წინამძღვრები შეიძლება იყოს ან მართალი ან ტყუილი. კატა შეიძლება იყოს კარგად გაწვრთნილი და არასოდეს არ ჩაიდინოს ისეთი საქციელი, როგორც ოქროს თევზის დაჭერაა. მიუხედავად ამისა, თუ კატამ მაინც დაიჭირა ოქროს თევზი, კატამ შეიძლება გადაწყვიტოს, რომ კატის საჭმელი უკეთესია ცოცხალ ოქროს თევზზე. მაგრამ, როგორც კი ჩვენ მივიღებთ წინამძღვრების მართებულობას, ჩვენ არა გვაქვს დასკვნის მართებულობისაგან განსხვაებული არჩევანის გაკეთების უფლება. მაშასადამე, მართებულია რომ, კატა ჭამს ოქროს თევზს, თუ კი ის ხედავს ოქროს თევზს.

მეორე მოდელი მართებული მსჯელობისათვის შემდეგნაირია: *P* იყოს "კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი", ხოლო *Q* - "შესასავალი შეიცავს შეცდომას". ვიყენებთ რა შემოკლებებს, მსჯელობა გამოისახება შემდეგნაირად:

1. *P* ან *Q*.
2. არა *Q*.

---

3. *P*.

ამ მსჯელობას ეწოდება *დიზიუნქციური სილოგიზმი* და ეს ფუნდამენტური მსჯელობაა ლოგიკაში. აღვნიშნოთ, კიდევ ერთხელ, რომ წინამძღვრები შეიძლება იყოს ან ჭეშმარიტი ან მცდარი, მაგრამ თუ ისენი განხილულია როგორც ჭეშმარიტი, მაშინ იგივე მნიშვნელობა აქვს დასკვნასაც.

არსებობს კიდევ განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანი ლოგიკური მსჯელობა, რომელსაც ეწოდება *მოდუს პონენსი.* მოდუს პონენსი შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

1. თუ *P,* მაშინ *Q*.
2. *P*.

---

3. *Q*.

მაგალითად, თუ *P* არის "შუქი გადაირთო წითელზე", და *Q* არის "ავტომობილი გაჩერდა", მაშინ წინამძღვრები "თუ შუქი გადაირთო წითელზე, მაშინ ავტომობილი გაჩერდა" და "შუქი გადაირთო წითელზე" გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ "ავტომობილი გაჩერდა".

იმის განსაზღვრვა თუ რომელი ლოგიკური მსჯელობის მოდელი არის კორექტული, და რომელი არა, წარმოადგენს ლოგიკის არსებით ნაწილს. პირველ რიგში ჩვენ გვესაჭიროება მსჯელობა-განსჯა, იმის შესახებ, თუ როგორ აიგება ლოგიკური მტკიცებულებანი, როგორ შეიძლება მათი მანიპულირება, და როგორ უნდა მოიძებნოს მათი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები. ამის შესახებ ვიმსჯელებთ შემდეგ პარაგრაფში.

2.1.3 გამონათქვამები

მტკიცებულებებს, რომლებიც ჩართულია ლოგიკურ მსჯელობებში, გააჩნიათ სპეციალური თვისებები: ისინი არიან ან ჭეშმარიტი ან მცდარი, და არასდროს სხვა რამ. ლოგიკაში, ასეთნაირ მტკიცებულებებს უწოდებენ *გამონათქვამებს.*

განსაზღვრება 1.1: ნებისმიერ მტკიცებულებას, რომელიც ან ჭეშმარიტია ან მცდარი, ეწოდება *გამონათქვამი.*

მაგალითად, მტკიცებულება "კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი" არის გამონათქვამი, თუ ის ან ჭეშმარიტია ან მცდარი. ჩვენ გაგვაჩნია მხოლოდ ორი არჩევანი, ან, თუ გამოვიყენებთ ტექნიკურ ტერმინს, ჩვენ გაქვს *დიქოტომია.* ეს ზოგჯერ იწვევს პრობლემებს. განვიხილოთ, მაგალითად, შემდეგი მტკიცებულება: "რიცხვი 8 საშინლად ყარს". ნორმალურია ითქვას, რომ ეს მტკიცებულება აზრს მოკლებულია. და მაშასადამე, თუ ჩვენ დავუმატებთ აზრს მოკლებული მტკიცებულების შესაძლებლობას, მაშინ ჩვენ მივიღებთ, რომ გარდა ჭეშმარიტისა და მცდარისა არსებობს მესამე კატეგორია – უაზრობა. ამ შემთვევაში ჩვენ არ გვაქვს საქმე გამონათქვამთან. რა თქმა უნდა, შეუძლებელია ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები ასოცირებულ იქნას ბრძანებასთან ან კითხვასთან: ე. ი. არც ბძანება და არც კითხვა არ არის გამონათქვამი.

ბევრი მტკიცებულება, რომლებსაც ჩვენ ვიყენებთ ყოველდღიურ ცხოვრებაში, არ არის სრულად ჭეშმარიტი, ისევე როგორც სრულად მცდარი. მაგალითად, თუ პროგრამა გვაძლევს მოულოდნელ შედეგს (გამოსავალში), ხშირად გაურკვეველია არის თუ არა ეს მიზეზი კომპიუტერის დეფექტისა ან უბრალოდ არის შედეგი ღარიბი (არასაკმარისი) სპეციფიკაციისა. მიუხედავად ამისა, ლოგიკა განიხილავს მხოლოდ შავს და თეთრს, ან, უფრო ზუსტად, ჭეშმარიტს და მცდარს და არა სხვას.

როგორც აღვნიშნეთ, იმისათვის, რომ განისაზღვროს მსჯელობის რომელი მოდელია კორექტული, არისტოტელეს მიერ შემოიტანილ იქნა ცვლადები, მაგალითად *P*, *Q* და *R*. ამ ცვლადებს ეწოდება *პროპოზიციული ცვლადები.* პროპოზიცულ ცვლადებს შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა, ჭეშმარიტი ან მცდარი. არსებობს აგრეთვე ორი *პროპოზიციული კონსტანტა,* T და F, რომლებიც წარმოადგენენ, შესაბამისად, ჭეშმარიტს და მცდარს. ჩვენ შეგვიძლია *მივანიჭოთ* ცვლად *P*-ს *მნიშვნელობა* T ან F. შესაძლო მნიშვნელობის მინიჭება ცვლად *P*-თვის არის, მაგალითად, T. სხვა მნიშვნელობის მინიჭება *P*-თვის არის, ცხადია, F. ტერმინი მნიშვნელობის მინიჭება შეიძლება გამოყენებულ იქნას გამოსახულებათა კავშირებისთვის. მნიშვნელობის მინიჭება *A* გამოსახულებისათვის შედგება ჭეშმარიტობის მნიშვნელობის მინიჭებისგან ყოველი ცვლადისთვის. მაგალითად, შესაძლო მნიშვნელობის მინიჭება გამონათქვამისათვის "*P* ან *Q*" იქნება *P* = F, *Q* = T, მაგრამ არსებობს განსხვაებულიც.

პროპოზიციული ცვლადები და პროპოზიციული კონსტანტები წარმოადგენენ *ატომურ* გამონათქვამებს; ე. ი. შეუძლებელია მათი შემდგომი დაყოფა. ატომური გამონათქვამებისაგან შესაძლებელია აიგოს *შედგენილი* გამონათქვამები. მაგალითად, "*P* ან *Q*" არის შედგენილი გამონათქვამი, და, აგრეთვე, "*P* და *Q*" და "არა *P*". "ან", "და" და "არა" სიტყვების ფუნქციაა გამონათქვამების აგება, და ამიტომ მათ ეწოდებათ *ლოგიკური კავშირები.* ზოგადად, გამონათქვამები შეიძლება დაიყოს როგორც ატომური ან შედგენილი, შემდეგი განსაზღვრის გამოყენებით:

განსაზღვრება 1.2: გამონათქვამს, რომელიც შედგება მხოლოდ ერთი პროპოზიციული ცვლადისაგან ან მხოლოდ ერთი პროპოზიციული კონსტანტისაგან, ეწოდება *ატომური გამონათქვამი.* ყველა არაატომურ გამონათქვამს ეწოდება *შედგენილი გამონათქვამი.* ყველა შედგენილი გამონათქვამი შეიცავს ერთს მაინც ლოგიკურ კავშირს.

ყოველ გამონათქვამს, და ყოველი მნიშვნელობის მინიჭებას შეესაბამება ერთადერთი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა. თუ გამონათქვამი ატომურია, მაშინ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა უზრუნველყოფილია უშუალო მნიშვნელობის მინიჭებით. სხვა შემთხვევაში, უნდა არსებობდეს წესი, როგორ გამოითვალოს შედგენილი გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა. ეს წესები მოცემულია ლოგიკური კავშირების გააზრებით (განსაზღვრით). მაგალითად, ქართული ენის თანახმად, თუ P = T და Q = F, მაშინ "P ან Q" უნდა იყოს T: თუ P ჭეშმარიტია და Q მცდარია, მაშინ "P ან Q" ჭეშმარიტია. რთული შედგენილი გამონათქვამების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობის დადგენა უფრო ძნელია. ასეთ შემთხვევაში, სასარგებლოა *ჭეშმარიტობის ცხრილის* გამოყენება:

განსაზღვრება 1.3: გამონათქვამის ჭეშმარიტობის ცხრილი პროპოზიციული ცვლადებისათვის მნიშვნელობების მინიჭების საფუძველზე გვაძლევს გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას.

ყველა ლოგიკური კავშირები "ან", "და" და "არა" განისაზღვრება ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით.

სავარჯიშოები 1.1

1. გამოიყენეთ პროპოზიციული ცვლადები P და Q შემდეგი ლოგიკური მსჯელობების ფორმალიზაციისათვის:
   (ა) თუ 10 მარტივი რიცხვია, მაშინ შეუძლებელია, რომ 10 ტოლი იყოს 2-ის 5-ზე ნამრავლისა. 10 ტოლია 2-ის 5-ზე ნამრავლისა. ამიტომ 10 არ არის მარტივი რიცხვი.
   (ბ) თუ ხშირად წვიმს, მაშინ ფერმერები ჩივიან. თუ წვიმები არ არის ხშირი, მაშინ ფერმერები ჩივიან.
2. ქვემოთ ჩამოთვლილი მტკიცებულებებიდან, რომლები წარმოადგენენ გამონათქვამებს?
   (ა) ეს მართალია?
   (ბ) დავითი სახელია.
   (გ) 8 მარტივი რიცხვია.
   (დ) 8 არ არის მარტივი რიცხვი.
3. ქვემოთ მოყვანილი მტკიცებულებებიდან რომელია ატომური და რომელია შედგენილი?
   (ა) ყოველ კატას გააჩნია შვიდი სიცოცხლე.

(ბ) თუ გია მაღალია, მაშინ გოგიც მაღალია.
(ც) გია და გოგი მაღლებია.
(დ) ავტომობილი, რომელსაც მოუვიდა ავარია, იყო მწვანე ან ლურჯი.

4. მიანიჭეთ ლოგიკური კონსტანტები T და F შემდეგ გამონათქვამებს.
(ა) 7 ლუწი რიცხვია.
(ბ) თბილისი ქალაქია.
(ც) კანადა ქალაქია.

3.2 ლოგიკური კავშირები

3.2.1 შესავალი

ლოგიკური კავშირები გამოიყენება იმისათვის, რომ გავაერთიანოთ გამონათქვამები ახალი გამონათქვამების აგებისათვის. ეს ახალი გამონათქვამები არიან *შედგენილი* გამონათქვამები, იმიტომ რომ ისინი შედგებიან რამოდენიმე კომპონენტისაგან. აქამდე, ჩვენ ვიყენებდით ქართულ სიტყვებს ლოგიკური კავშირების მომსახურებისთვის. მაგალითად, ჩვენ გამოვიყენეთ კონსტრუქციები, ისეთი როგორც "*P* ან *Q*" ან "თუ *P*, მაშინ *Q*". სამწუხაროდ, მტკიცებულებები, რომლთა ფორმულირება ხდება ბუნებრივი ენის საშუალებით ხშირად ორაზროვანია, რადგანაც სიტყვებს, რომლებიც გამოყენებულია ამ მტკიცებულებებში შესაძლებელია ჰქონდეთ ერთზე მეტი მნიშვნელობა. ჩვენ გვინდა ეს თავიდან ავიცილოთ. გარდა ამისა, მრავალი ბუნებრივი ენის კავშირები ასახავს შეხებას ისეთ რამესთან, როგორიცა მიზეზობრიობა, დაპირება, გამახვილება, მრწამსი, და დრო. მაგალითად, სიტყვა "თუ" ხშირად იწვევს რომელიმე ტიპის მიზეზობრიობას. სტანდარტულ ლოგიკას კი საქმე აქვს მხოლოდ ჭეშმარიტთან და მცდართან, რაც ნიშნავს, რომ მიზეზობრიობის ცნება გომოირიცხება. ამ მიზნით, საუკეთესოა შემოვიღოთ ახალი მათემატიკური სიმბოლოები, რომლებიც შეასრულებენ კავშირების როლს. ეს სიმბოლოები შეიძლება განისაზღვროს არაორაზროვნად.

ქართულ ენაში არსებობს ერთი შეთანხმება (დაშვება), რომელიც აგრეთვე გამოიყენება ლოგიკაში. რაიმე წინადადებას რომ გამოვთქვამთ ქართულ ენაში, ვასკვნით, რომ ეს წინადადება ჭეშმარიტია და იგი არ მოითხოვს საჭიროებას ვამტკიცოთ, რომ გამონათქვამი ჭეშმარიტია. მაგალითად, იმის მაგივრად, რომ ვთქვათ "ჭეშმარიტია, რომ კატა ჭამს თევზს", უბრალოდ ვიტყვით "კატა ჭამს თევზს". ამის მსგავსად, თუ *P* გამონათქვამია, მაშინ "*P*" ნიშნავს "*P* ჭეშმარიტია". რომ გავამახვილოთ, რომ *P* ნამდვილად ჭეშმარიტია, ჩვენ ზოგჯერ ვიყენებთ ფრაზას "*P*-ს აქვს ადგილი".

3.2.2. უარყოფა

უმარტივესი კავშირია უარყოფა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.4: P იყოს გამონათქვამი. შედგენილი გამონათქვამი $\neg P$, რომელიც გამოითქმის როგორც "არა P ", არის გამონათქვამი, რომელიც ჭეშმარიტია თუ P მცდარია, და მცდარია სხვა შემთხვევაში. $\neg P$-ს ეწოდება P-ს უარყოფა. კავშირი $\neg$ შეიძლება ითარგმნოს ქართულად როგორც "ადგილი არა აქვს, რომ", ან უბრალოდ სიტყვით "არა".

ცხრილი 1.1 წარმოადგენს ამ განსაზღვრის ცხრილისებურ ფორმას.

ცხრილი 1.1

უარყოფის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	$\neg P$
T	F
F	T

მაგალითი 1.1 P იყოს გამონათქვამი "თბილისი ქალაქია". მაშინ $\neg P$ არის გამონთქვამი "თბილისი არ არის ქალაქი".

3.2.3 კონიუნქცია

ხშირად ჩვენ გვსურს გამოვსახოთ ის ფაქტი, რომ ორივე მტკიცებულება ჭეშმარიტია. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიყენებთ კონიუნქციას, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.5: P და Q იყოს გამონათქვამები. მაშინ $P \wedge Q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე P და Q ჭეშმარიტია. $P \wedge Q$ - ს ეწოდება P და Q –ს კონიუნქცია, და კავშირი $\wedge$ გამოითქმევა როგორც "და". კავშირი $\wedge$ ითარგმნება ქართულად სიტყვით "და".

ცხრილი 1.2

კონიუნქციის ცხრილი

P	Q	$P \wedge Q$

T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

მაგალითი 1.2 *P* იყოს გამონათქვამი - "პროგრამას გააჩნია დეფექტი" და *Q* იყოს გამონათქვამი - "შესავალი შეიცავს შეცდომას". მაშინ *P* და *Q*-ს კონიუნქცია არის $P \wedge Q$, რომელიც ითარგმნება როგორც "პროგრამას გააჩნია დეფექტი და შესავალი შეიცავს შეცდომას".

ქართულ ენაში ჩვენ ხშირად ვხმარობთ შემოკლებებს, რომლებიც არ არის დასაშვები ლოგიკურ მტკიცებულებებში. მაგალითად, წინადადება "ის ჭამს და სვამს" სინამდვილეში გაიგება როგორც "ის ჭამს და ის სვამს". ანალოგიურად, მტკიცებულება "გოგა და გიგა ადიან გორაკზე" სინამდვილეში გაიგება როგორც "გოგა ადის გორაკზე და გიგა ადის გორაკზე". ლოგიკაში, ყოველ მტკიცებულებას უნდა გააჩნდეს თავისი საკუთარი ქვემდებარე და თავისი საკუთარი შემასმენელი. რომ ვთარგმნოთ "გოგა და გიგა ადიან გორაკზე", ჩვენ უნდა გარდავქმნათ მოცემული მტკიცებულება ორ სრულ წინადადებად: "გოგა ადის გორაკზე" და "გიგა ადის გორაკზე". ამ სტადიაში, ჩვენ შეგვიძლია შევუსაბამოთ *P*-ს მტკიცებულება "გოგა ადის გორაკზე", ხოლო *Q* –ს წინადადება "გიგა ადის გორაკზე". ვიყენებთ რა განსაზღვრებებს, "გოგა და გიგა ადიან გორაკზე" გარდაიქმნება $P \wedge Q$ –ში.

ზოგჯერ, ჩვენ ვიყენებთ სხვა სიტყვებს ვიდრე "და" , რომ აღვნიშნოთ კონიუნქცია ქართულ ენაში, ისეთი როგორიცაა "მაგრამ", "დამატებით", და "გარდა ამისა". აგრეთვე, სიტყვა "და" ყოველთვის არ აღნიშნავს კონიუნქციას. მაგალითად სიტყვა "და" მტკიცებულებაში "გოგი და გიგა ბიძაშვილებია" სრულიად არ არის კონიუნქცია.

მაგალითი 1.3 გარდაქმენით ლოგიკაში შემდეგი მტკიცებულება: ის გამოიმუშავებს $50,000 – ზე მეტს, მაგრამ ნაკლებს ვიდრე $80,000.

ამოხსნა. *P* იყოს გამონათქვამი "ის გამოიმუშავებს $50,000 – ზე მეტს " და *Q* იყოს გამონათქვამი "ის გამოიმუშავებს $80,000 – ზე ნაკლებს". მაშინ მოცემული მტკიცებულება გარდაიქმნება $P \wedge Q$-ში. ■

3.2.4 დიზიუნქცია

წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვიყენეთ მტკიცებულება "კომპიუტერულ პროგრამას გააჩნია დეფექტი, ან შესავალი შეიცავს შეცდომას". მტკიცებულებები, რომლებიც შეიცავენ "ან"-ს ჩვეულებრივ გარდაიქმნებიან როგორც *დიზიუნქციები.* ფორმალურად დიზიუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.6: *P* და *Q* იყოს გამონათქვამები. მაშინ $P \vee Q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როცა ორივე P და Q მცდარია. როცა ან P ან Q ან ორივე ერთად ჭეშმარიტია, მაშინ $P \vee Q$ ჭეშმარიტია. $P \vee Q$ –ს ეწოდება P და Q –ს დიზიუნქცია, და კავშირი $\vee$ გამოითქმევა როგორც "ან". კავშირი $\vee$ ითარგმნება ქართულად სიტყვით "ან".

ცხრილი 1.3

დიზიუნქციის ცხრილი

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

მაგალითი 1.4 P იყოს გამონათქვამი "პროგრამას გააჩნია დეფექტი" და Q იყოს გამონათქვამი "შესავალი შეიცავს შეცდომას". მაშინ P და Q-ს დიზიუნქცია არის $P \vee Q$, რომელიც ნიშნავს "პროგრამას გააჩნია დეფექტი ან შესავალი შეიცავს შეცდომას".

ქართული სიტყვა "ან" -ს გააჩნია ორი მნიშვნელობა. წინადადებაში "თვენ შეგიძლიათ აიღოთ სუფი ან სალათა", ვარაუდია, რომ თვენ შეგიძლიათ აიღოთ ან სუფი ან სალათა, მაგრამ არა ორივე ერთად. მოყვანილი "ან" გამოიყენება გამომრიცხავი აზრით. მეორეს მხრივ, მტკიცებულება "პროგრამას გააჩნია დეფექტი ან შესავალი შეიცავს შეცდომას" არ გომორიცხავს ორივე შესაძლებლობას: დეფექტს და შესავალში შეცდომას. რომ დავინახოთ როგორ განისაზღვრება $\vee$, გადავხედოთ ცხრილს, რომელიც გვიჩვენებს, რომ $P \vee Q$ ჭეშმარიტია, თუ ან P ან Q, ან ორივე ერთად ჭეშმარიტია. მაშასადამე, $\vee$ გამოიყენება როგორც *არაგამომრიცხავი ან*. ორაზროვნება რომ გამოირიცხოს, $P \vee Q$ უნდა აღვიქვათ როგორც "ან P ან Q ან ორივე ერთად".

როცა ორი წინადადებისგან (ან მტკიცებულებისგან) აიგება დიზიუნქცია, ყოველთვის უნდა ვიყოთ დარწმუნებული, რომ მოცემული წინადადება სრულია: ყოველ წინადადებას უნდა გააჩნდეს ქვემდებარე და შემასმენელი. მაგალითად, წინადადება "იყო შეცდომა მე-15 ან მე-16 სტრიქონში" უნდა გარდაიქმნას შემდეგნაირად: "იყო შეცდომა მე-15 სტრიქონში ან იყო შეცდომა მე-16 სტრიქონში".

3.2.5 იმპლიკაცია

ლოგიკურ მსჯელობებში ძალიან მნიშვნელოვანია კონსტრუქცია "თუ ... მაშინ". ეს კონსტრუქცია გამოსახავს იმპლიკაციას - პირობით მსჯელობას.

განსაზღვრება 1.7: P და Q იყოს გამონათქვამები. მაშინ $P \rightarrow Q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როცა P ჭეშმარიტია და Q მცდარია, და $P \rightarrow Q$ ჭეშმარიტია სხვა შემთხვევებში. $P \rightarrow Q$ –ს ეწოდება P და Q –ს *იმპლიკაცია*. იმპლიკაცია $P \rightarrow Q$ ითარგმნება ქართულად "თუ ... მაშინ" კონსტრუქციის საშუალებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $P \rightarrow Q$ ნიშნავს, რომ როცა P კორექტულია, მაშინ Q- ც კორექტულია. P მტკიცებულებას ეწოდება *ანტეცედენტი* (*წინამძღვარი*) და Q მტკიცებულებას ეწოდება *კონსეკვენტი* (*დასკვნა*).

ცხრილი 1.4

იმპლიკაციის ცხრილი

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

მაგალითი 1.5 P იყოს გამონათქვამი "მოთხოვნილება მატულობს" და Q იყოს გამონათქვამი "კომპანიები ფართოვდებიან". მაშინ P და Q-ს იმპლიკაცია არის $P \rightarrow Q$, რომელიც ითარგმნება შემდეგნაირად: "თუ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ კომპანიები ფართოვდებიან". ამ იპმლიკაციის ანტეცედენტია "მოთხოვნილება მატულობს", კონსეკვენტი კი "კომპანიები ფართოვდებიან".

თუ ანტეცედენტი ჭეშმარიტია, მაშინ იმპლიკაციის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა უდრის კონსეკვენტის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ ჭეშმარიტია, რომ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ მტკიცებულება "თუ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ კომპანიები ფართოვდებიან " ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კომპანიები ფართოვდებიან. თუ ანტეცედენტი მცდარია, მაშინ იმპლიკაცია ტრივიალურად ჭეშმარიტია. მაგალითად, თუ მოთხოვნილება არ მატულობს, მაშინ მტკიცებულება "თუ მოთხოვნილება მატულობს, მაშინ კომპანიები ფართოვდებიან" ტრივიალურად ჭეშმარიტია. ეს ზოგჯერ ეწინააღმდეგება სიტყვა "თუ"- ს გამოყენებას ქართულ ენაში. მაგალითად, დავუშვათ, გოგის არ ჰქონდა კარგი ვახშამი. ამ შემთხვევაში, მტკიცებულება "თუ გოგის ჰქონდა კარგი ვახშამი, მაშინ $4 + 4 = 9$" ნორმალური იქნებოდა მიგვეღო როგორც მცდარი ქართული ენით მოსაუბრესათვის, მიუხედავად იმისა, რომ ეს მტკიცებულება განხილული უნდა იყოს როგორც ტრივიალურად ჭეშმარიტი ლოგიკოსისათვის. ლოგიკოსისათვის, ყოველი იმპლიკაცია, სადაც ანტეცედენტი მცდარია, ტრივიალურად ჭეშმარიტია.

ზოგადად, ლოგიკას აქვს საქმე თავსებად (არაწინააღმდეგობრივ) მტკიცებულებებთან, და მტიცებულებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები იმპლიკაციისათვის მოცემული **ცხრილი 1.4** –ით თავსებადია ქართული ენის იმპლიკაციასთან. ეს რომ დავინახოთ, განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

თუ ბოთლში მჟავაა, მაშინ მას ახლავს გამაფრთხილებელი ნიშანი.

ცხადია, რომ ეს მტკიცებულება პირობითია, და ის გამოისახება როგორც იმპლიკაცია $P \rightarrow Q$, სადაც P არის "ბოთლში მჟავაა" და Q არის "ბოთლს ახლავს გამაფრთხილებელი ნიშანი". არ არსებობს შესაძლო წინააღმდეგობა მტკიცებულებაში თუ ბოთლში არ არის მჟავა. მართლაც, თუ ბოთლი არ შეიცავს მჟავას, მაგრამ, ვთქვათ, შეიცავს ძლიერ შხამს, მაშინ

მას, აგრეთვე, უნდა ახლდეს გამაფრთხილებელი ნიშანი. ეს ის მაგალითია როდესაც ანტეცედენტი მცდარია და კონსეკვენტი ჭეშმარიტი, მაგრამ ის არ გარდაქმნის მოცემულ მტკიცებულებას მცდარ წინადადებად. მეორე მაგალითი, დავუშვათ, რომ ბოთლში ვაშლის წვენია და არ გააჩნია გამართხილებელი ნიშანი. ეს ასევე თავსებადი წინადადებაა. მოყვანილი ორივე წინადადება ტრივიალურად ჭეშმარიტია. იმპლიკაციის აზრის გაგება ძალზე მნიშვნელოვანია, და რომ წავიწიოთ უფრო ღრმად, ჩამოვთვალოთ ყველა ის შესაძლებლობა, რომელიც იძლევა ჭეშმარიტ იმპლიკაციას.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
F	T	T
F	F	T

ცხრილი უჩვენებს, რომ თუ იმპლიკაციას აქვს ადგილი (ჭეშმარიტია), მაშინ P ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა Q ჭეშმარიტია. P ჭეშმარიტია უფრო ნაკლებ შემთხვევებში ვიდრე Q, ამიტომ P უფრო *ძლიერი* პირობაა. ე. ი. Q უფრო სუსტია ვიდრე P. სხვა სიტყვებით, Q მცდარია, თუ მცდარია P. ამ აზრით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $P \rightarrow Q$ გარდაიქმნება "P მხოლოდ მაშინ, თუ Q"-ში, როგორც წინადადებაში "თუ ბოთლში მჟავაა, მაშინ მას ახლავს გამაფრთხილებელი ნიშანი". თუ მას (ბოთლს) არ გააჩნია გამაფრთხილებელი ნიშანი, ის არ შეიცავს მჟავას. გამაფრთხილებელი ნიშანი არის *აუცილებელი პირობა* ბოთლისთვის, რომ შეიცავდეს მჟავას. მეორეს მხრივ, ის ფაქტი, რომ ბოთლი შეიცავს მჟავას არის *საკმარისი პირობა* იმისათვის, რომ მას (ბოთლს) ქონდეს გამაფრთხილებელი ნიშანი. შეიძლება არსებობდეს კიდევ სხვა პირობები, რომლებიც იმსახურებენ გამაფრთხილებელ ნიშანს. ეს დისკუსია გვაძლევს მრავალ გზას, რომ გამოვსახოთ იმპლიკაცია ქართულ ენაში შემდეგნაირად:

1. თუ P, მაშინ Q.
2. ყველა შემთხვევაში, როცა P, მაშინ Q.
3. P საკმარისია Q-სთვის.
4. P მხოლოდ მაშინ, როცა Q.
5. P-დან გამომდინარეობს Q.

ყველა ეს გამოსახულებები არიან ლოგიკურად ექვივალენტურები იმ აზრით, რომ ყველა ისინი ღებულობენ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას, რომელიც მოცემულია **ცხრილი 1.4** –ით.

ქართულ ენაში ჩვენ შეგვიძლია შემოვატრილოთ დალაგება ანტეცედენტისა და კონსეკვენტისა. მაგალითად, იმის მაგივრად, რომ ვთქვათ "თუ P, მაშინ Q", ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ "Q თუ P", იმის მსგავსად როგორც "ბოთლს გააჩნია გამაფრთხილებელი ნიშანი, თუ ის შეიცავს მჟავას". ანალოგიურად, ჩვენ ვწერთ $P \leftarrow Q$, $P \rightarrow Q$ –ს ნაცვლად. მაშასადამე $\leftarrow$ შეიძლება ითარგმნოს სიტყვით "თუ". $P \leftarrow Q$ გამოისახება შემდეგნაირად:

1. Q თუ P.
2. Q ყველა შემთხვევაში, როცა P.
3. Q *აუცილებელია* P-თვის.
4. Q გამომდინარეობს P-დან.

მაგალითად, “ბოთლს გააჩნია გამაფრთხილებელი ნიშანი, თუ ის შეიცავს მჟავას“ შეიძლება აგრეთვე ჩაიწეროს როგორც “ გამაფრთხილებელი ნიშანი აუცილებელია ბოთლებისთვის, რომლებიც შეიცავენ მჟავას“.

მაგალითი 1.6 ცხადია, რომ ორი მტკიცებულება “ავტომობილები ჩერდება, თუ შუქნიშანი გადართულია წითელზე“ და “ავტომობილები ჩერდება, მხოლოდ მაშინ, როცა შუქნიშანი გადართულია წითელზე“ განსხვავებულებია. პირველი წინადადება თავსებადია ავტომობილებისათვის, რომლებიც ჩერდება სხვა მიზეზების გამოც ვიდრე შუქნიშნის წითელი ფერი, მაგ. როგორიცაა სასიარულო გზის გადაკვეთა. ზოგადად, პირველი წინადადება ჭეშმარიტია. მეორე წინადადება, მეორეს მხრივ, ზოგადად მცდარია. თუ ავტომობილები ჩერდება, მხოლოდ მაშინ, როცა შუქნიშანი გადართულია წითელზე, მაშინ ფერი შუქნიშანზე უნდა გადაირთოს როგორც კი შესრულდება, რომ ავტომობილი გაჩერდა. სხვა არაფერი მიზეზი არ უნდა არსებობდეს ავტომობილის გაჩერებისა.

3.2.6 ბიიმპლიკაცია

ბიიმპლიკაცია განისაზღვრება შემდეგნაირად.

განსაზღვრება 1.8: P და Q იყოს გამონათქვამები. მაშინ $P \leftrightarrow Q$ ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა P და Q-ს გააჩნია ერთიდაიგივე ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა. გამონათქვამს $P \leftrightarrow Q$ ეწოდება *ბიიმპლიკაცია.* ან *ექვივალენტობა*, და გამოითქმევა როგორც “P მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Q“.

ბიიმპლიკაცია გამოხატულია შემდეგ მაგალითში. P იყოს გამონათქვამი “x ლუწი რიცხვია“ და “x რიცხვი იყოფა 2-ზე“. ამ შემთხვევაში, $P \leftrightarrow Q$ გამოსახავს მტკიცებულებას “x ლუწი რიცხვია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x რიცხვი იყოფა 2-ზე“

ცხრილი 1.5

ბიიმპლიკაციის ცხრილი

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

3.2.7 დამატებითი რამ კავშირების შესახებ

ჩვენ შემოვიღეთ კავშირები $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, და $\leftrightarrow$. კავშირი $\neg$ ერთადერთი *უნარული* (*ერთადგილიანი*) კავშირია.; დანარჩენები *ბინარული* (*ორადგილიანი*) *კავშირებია,* რაც ნიშნავს, რომ ისინი მოითხოვენ ორ გამონათქვამს, რომლებიც ერთიანდებიან მოცემული კავშირით. მაგალითად, ორი გამონათქვამი P და Q შეიძლება გაერთიანდეს $\wedge$ კავშირით, რომ შეიქმნას კონიუნქცია $P \wedge Q$. ბინარული კავშირები $\wedge$, $\vee$, და $\leftrightarrow$ სიმეტრიულებია, იმ აზრით, რომ შედგენილი გამონათქვამების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული მათში შემავალი გამონათ-ქვამების რიგზე. მაგალითად, $P \wedge Q$ –ს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა უდრის $Q \wedge P$ –ს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას. მეორეს მხრივ, კავშირი $\rightarrow$ არ არის სიმეტრიული: $P \rightarrow Q$ –ს და $Q \rightarrow P$ –ს გააჩნიათ სხვადასხვა ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა.

ცხრილი 1.6 ლოგიკური კავშირების ცხრილი

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T

1.6 ცხრილიში P და Q –ს უჭირავთ თავიანთი ადგილები, და ისინი შეიძლება შეიცვალონ სხვა წყვილი გამონათქვამებით. მაშასადამე, თუ P შევანაცვლეთ R-ით, და Q შევანაცვლეთ S-ით, მაშინ ვიყენებთ რა ზემოთ მოყვანილ ცხრილს, ვღებულობთ, რომ $R \wedge S$ –ის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა გვაძლევს T-ს, თუ R = T და S =T. შეიძლება აგრეთვე შეიცვალოს ერთი ან ორი ცვლადი კონსტანტებით. შეგვიძლია ჩავწეროთ, მაგალითად, T $\wedge$ Q. ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა მოცემული გამოსახულებისა შეიძლება მოძიებულ იქნას 1.6 ცხრილიში, მხოლოდ იმ სტრიქონების გამოყენებით, სადაც P-ს სვეტი შეიცავს T–ს. ამავე გზით ადვილი შესამოწმებელია, რომ T $\wedge$ Q-ს გააჩნია იგივე მნიშვნელობა, რა მნიშვნელობაც აქვს Q-ს. ორი მნიშვნელოვანი გამონათქვამია F $\rightarrow$ Q და $Q \rightarrow$ T. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორივე მოცემული წინადადება გვაძლევს T–ს.

სავარჯიშოები 1. 2

1. R და H მტკიცებულებები გამოიყენეთ, შესაბამისად, "დავითი მდიდარია" და "დავითი ბედნიერია" -სათვის, ჩაწერეთ შემდეგი წინადადებები სიმბოლოების გამოყენებით:

   (ა) დავითი არ არის მდიდარი.
   (ბ) დავითი მდიდარია და ბედნიერი.
   (ც) დავითი მდიდარია ან ბედნიერი.
   (დ) თუ დავითი მდიდარია, მაშინ ის ბედნიერია.
   (ე) დავითი ბედნიერია მხოლოდ მაშინ, როცა ის მდიდარია.

2. განიხილეთ ყველა ატომური მტკიცებულებები შემდეგ წინადადებებში, და

შეამოკლეთ ისინი P, Q და S სომბოლოების გამოყენებით. გადაიყვანეთ შემდეგი წინადადებები გამონათქვამთა აღრიცხვაში.

(ა) თუ გოგი საცხენეშია, მაშინ გიგაც აგრეთვე უნდა იყოს საცხენეში.
(ბ) სასტარტო ავტომობილები იყო წითელი ან ყავისფერი.
(ც) ახალი ამბები არ არის კარგი.
(დ) თქვენ იქნებით დროზე, თუ იჩქარებთ.
(ე) ის მოვა, თუ მას ექნება დრო.
(ფ) თუ ის იქ იყო, მაშინ ის მას მოუსმენდა.

3. შეადგინეთ ჭეშმარიტობის ცხრილი გამომრიცხავი ან –ისათვის.
4. შეადგინეთ ჭეშმარიტობის ცხრილი შემდეგი გამონათქვამებისათვის: $P \wedge P$, $P \vee P$, $P \wedge \mathrm{T}$, და $P \wedge \mathrm{F}$.

3.3 შედგენილი გამონათქვამები

3.3.1 შესავალი

ატომური ან შედგენილი გამონათქვამებისაგან ლოგიკური კავშირების გამოყენებით, შეგვიძლია შევადგინოთ ახალი გამონათქვამები. ვიდრე არ მივიღებთ წინასწარ ზომებს, მიღებული გამოსახულებები შეიძლება იყოს ორაზროვანი იმ გაგებით, რომ მათი ინტერპრეტაცია შეიძლება განხორციელდეს მრავილი გზით. ეს რომ თავიდან ავიცილოთ, შემოვიღოთ *სრულყოფილად აგებული გამოსახულების* (*საგ*) ცნება, სადაც გამოიყენება ფრჩხილები. მაშინ, მიღებული გამოსახულებები შეიძლება გაიხლიჩოს ქვეგამოსახულებებად მხოლოდ ერთი საშუალებით, ან, ტექნიკური ტერმინოლოგიის გამოყენებით, ისინი შეიძლება გარჩეულ იქნან მხოლოდ ერთადერთი ხერხით. ეს რომ იოლად განხორციელდეს, მაშასადამე რომ იკითხებოდეს ლოგიკური გამოსახულებები, ხშირად გამოიყენება *პროცედურული წესები,* რომლებიც იძლევა საშუალებას მოვაშოროთ ზოგიერთი ფრჩხილი ორაზროვნული გამოსახულების მიღების გარეშე. როდესაც არის მოცემული ატომური გამონათქვამების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა, შედგენილი გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა უნდა გამომდინარეობდეს მისი შემადგენელი ნაწილების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებიდან, რაც შემდგომში იქნება ნაჩვენები. ჩვენ ვუჩვენებთ აგრეთვე, როგორ უნდა მოვამზადოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი შედგენილი გამონათქვამებისათვის. დაბოლოს, შემოთავაზებული იქნება შედგენილი გამონათქვამების მაგალითები.

3.3.2 ლოგიკური გამოსახულებები

ნებისმიერი გამონათქვამი რაღაცნაირად უნდა გამოისახოს ზეპირი სიტყვით, გრაფიკულად ან დამახასიათებელი სიმბოლოების მიმდევრობით. წინადადებას, რომელიც გამოისახება სიმბოლოების მიმდევრობით, ეწოდება *ლოგიკური გამოსახულება* ან *ფორმულა*. მაგალითად, $P \wedge Q$ არის ლოგიკური გამოსახულება და ასეთივეა Q, იმ პირობით, რომ P და Q ლოგიკური ცვლადებია. ლოგიკური გამოსახულება შეიძლება იყოს ან *ატომური* ან *შედგენილი*. ატომური გამოსახულება შედგება ერთი პროპოზიციული ცვლადისაგან ან ერთი პროპოზიციული კონსტანტასაგან, და ისინი წარმოადგენენ ატომურ გამონათქვამებს. შედგენილი გამოსახულებები ერთ ლოგიკურ კავშირს მაინც შეიცავენ, და სწორედ ისინი წარმოადგენენ შედგენილ გამონათქვამებს. წინასწარი ზომების მიღებამდე,

ლოგიკური გამოსახულება შეიძლება იყოს ორაზროვანი. მაგალითად P იყოს "მერიმ დაასრულა თავისი მოხსენება", Q იყოს "მერი ბედნიერია", და R იყოს "მერი საღამოს მიდის კინოში". ეხლა განვიხილოთ გამოსახულება $P \rightarrow Q \wedge R$. მიღებული წესის გამოყენების გარეშე, ეს გამოსახულება შეიძლება გაგებულ იქნას ორნაირად. ეს შეიძლება ნიშნავდეს $(P \rightarrow Q) \wedge R$, რომელიც ითარგმნება შემდეგნაირად "თუ მერიმ დაასრულა თავისი მოხსენება, ის იქნება ბედნიერი, და ნებისმიერ შემთხვევაში ის საღამოს წავა კინოში". ალტერნატიულად, მოცემული გამოსახულება შეიძლება გავიგოთ როგორც $P \rightarrow (Q \wedge R)$, რომელიც ითარგმნება შემდეგნაირად "თუ მერი დაასრულებს მოხსენებას, მაშინ ის იქნება ბედნიერი და საღამოს წავა კინოში". ე. ი. გამოსახულება $P \rightarrow Q \wedge R$ არის ორაზროვანი. თავიდან რომ ავიცილოთ ორაზროვნება, წესები უნდა გვკარნახობდეს როგორ უნდა დაჯგუფდეს სხვადასხვა ქვეგამოსახულებები, ან უნდა იქნას გამოყენებული ფრჩხილები. ჯერ ჩვენ გამოვიყენებთ მეორე ალტერნატივას.

გამოსახულებები, როგორიცაა $P \wedge Q$, $P \vee Q$,, და სხვანი, ზოგჯერ ერთობლივად მონაწილეობს ჩანაწერში, და ეს რომ იქნას მითითებული, ჩვენ ხშირად ვწერთ $(P \wedge Q)$ ან $(P \vee Q)$, შესაბამისად. თუ ეს გაკეთებულია, მაშინ გაუგებრობა არ წარმოიშვება, იმ შემთხვევაშიც, თუ ეს გამოსახულებები მოგვიანებით გამოყენებულია როგორც შემადგენელი ნაწილი უფრო დიდი გამოსახულებებისა, ისეთი როგორიცაა, მაგალითად, $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$. მიღებულ გამოსახულებებს უწოდებენ *სრულყოფილად აგებულს გამოსახულებებს,* ან შემოკლებით *საგ*-ს.

ჩვენ შეგვიძლია აღვნიშნოთ გამოსახულებები რომელიმე სიმბოლოთი. მაგალითად, $(P \wedge Q)$ აღვნიშნოთ A –თი, ხოლო $(P \vee Q)$ - B-თი. შევნიშნოთ, რომ გამოსახულება A შეიცავს პროპოზიციულ ცვლადებს P–ს და Q -ს. მაგრამ, A არ არის პროპოზიციული ცვლადი, იმიტომ რომ A –ს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი პროპოზიციული ცვლადების P–ს და Q –ს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებზე. მნიშვნელოვანია, რომ გათვითცნობიერებული გვქონდეს მათი განსხვავება. კერძოდ ეს მნიშვნელოვანია *სქემების* გამოყენებისას.

განსაზღვრება 1.9: ყველა გამოსახულებას, რომლებიც შეიცავენ გამოსახულებების აღმნიშვნელ სიმბოლოებს, უწოდებენ *სქემებს.*

მაგალითი 1.7 თუ $A = (P \wedge Q)$ და $B = (P \vee Q)$, მაშინ სქემა $(A \rightarrow B)$ აღნიშნავს გამოსახულებას $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$.

იგივე სქემა შეიძლება გამოყენებულ იქნას სხვადასხვა საშუალებებით. მაგალითად, სქემა $(A \rightarrow B)$ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ როგორც $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$. მაგრამ, თუ $A = (P \vee Q)$ და $B = R$, მაშინ იგივე სქემა გვაძლევს $((P \vee Q) \rightarrow R)$. თუ A და B აღნიშნავენ გამოსახულებებს, მაშინ გვაქვს შემდეგი:

1. $(\neg A)$ სახის ნებისმიერ გამოსახულებას ეწოდება *უარყოფა.*
2. $(A \wedge B)$ სახის ნებისმიერ გამოსახულებას ეწოდება *კონიუნქცია.*

3. $(A \vee B)$ სახის ნებისმიერ გამოსახულებას ეწოდება *დიზიუნქცია.*
4. $(A \rightarrow B)$ სახის ნებისმიერ გამოსახულებას ეწოდება *იმპლიკაცია.*
5. $(A \leftrightarrow B)$ სახის ნებისმიერ გამოსახულებას ეწოდება *ექვივალენტობა.*

აქედან გამომდინარე, ყველა გამოსახულება, რომელიც განხილულ იქნება ამ თავში, უნდა იყოს ან ატომური, ან უარყოფა, ან კონიუნქცია, ან დიზიუნქცია, ან იმპლიკაცია ან ექვივალენტობა.

მაგალითი 1.8 გამოსახულება $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$ არის იმპლიკაცია, რომელიც შეიცავს $(P \wedge Q)$ კონიუნქციას და $(P \vee Q)$ დიზიუნქციას.

ადრე მოცემული პირობების თანახმად ყველა სრულყოფილად აგებული გამოსახულებები (საგ –ები) შეიძლება აგებულ იქნას შემდეგი ფორმირების წესებით:

1. ყოველი ატომური გამოსახულება არის საგი.
2. თუ A არის საგი, მაშინ $(\neg A)$ საგია.
3. თუ A და B საგებია, მაშინ იგივეს წარმოადგენს $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, და $(A \leftrightarrow B)$.
4. არცერთი სხვა გამოსახულება არ წარმოადგენს საგს.

მაშასადამე, $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$ საგია, იმიტომ რომ ორივე $(P \wedge Q)$ და $(P \vee Q)$ საგებია. გამოსახულებებს, რომლებიც განსაზღვრულია მხოლოდ ფორმირების წესებით ჩვეულებრივ უწოდებენ *სწორად აგებულ ფორმულებს*, რომელიც შემოკლებით აღინიშნება როგორც საფ.

შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრება იმისა რომელი არის და რომელი არ არის საგი *რეკურსიულია*; ე. ი. ის იყენებს ტერმინს "საგ" საკუთრივ თავის განსაზღვრებაში. ზოადად, რეკურსია წარმოადგენს მოხერხებულ საშუალებას, რომ განვსაზღვროთ უსასრულო რაოდენობა ობიექტებისა. მეორე მაგალითისთვის განვიხილოთ განსაზღვრება სიტყვისა "მემკვიდრე". ცხადია, რომ შვილი მემკვიდრეა, და ასევეა ნებისმიერი შვილის მემკვიდრე. ეს მტკიცებულება სრულად განსაზღვრავს ტერმინ "მემკვიდრე"-ს: ყოველი მემკვიდრე აკმაყოფილებს ამ განსაზღვრებას, და მხოლოდ მემკვიდრეები აკმაყოფილებენ მას.

გამოსახულებაში $(\neg A)$, A –ს ხშირად უწოდებენ უარყოფის *მიდამოს*, და კავშირს $\neg$ ეწოდება *მთავარი კავშირი* $\neg A$ გამოსახულებისა. კონიუნქციაში, ე. ი. $(A \wedge B)$ სახის გამოსახულებებში, მთავარი კავშირი არის $\wedge$, და A და B-ს უწოდებენ, შესაბამისად, კონიუნქციის *მარცხენა* და *მარჯვენა მიდამოს*. ანალოგიური განსაზღვრება გამოიყენება $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, და $(A \leftrightarrow B)$ სახის გამოსახულებებში. მიდამო ან მიდამოები შეიძლება იყოს შედგენილი, სადაც კავშირები, რომლებიც განლაგებულია მიდამოებში, ზოგადად წარმოადგენენ გამოსახულებების ქვეკავშირებს. მაგალითად, მთავარი კავშირი კონიუნქციისა $((P \vee Q) \wedge R)$ არის $\wedge$, ხოლო ქვეკავშირი მარცხენა მიდამოსი არის $\vee$. მარჯვენა მიდამოს, რომელიც არის R, არ გააჩნია ქვეკავშირი. დიზიუნქციისთვის, იმპლიკაციისთვის და ექვივალენტობისთვის სიტუაცია მსგავსია. მაგალითად, $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$ გამოსახულებაში, $\rightarrow$ არის მთავარი კავშირი, ხოლო $\wedge$ და $\vee$ ქვეკავშირებია. ცხადია, $\wedge$ არის მარცხენა მიდამოს მთავარი კავშირი, ხოლო $\vee$ არის მარჯვენა მიდამოს მთავარი კავშირი.

3.3.3 შედგენილი გამონათქვამების ანალიზი

სრულყოფილად აგებული გამოსახულებები წარმოადგენენ შედგენილი გამონათქვამების წარმოდგენის ერთ მეთოდს. მაგრამ, არსებობს სხვა მეთოდებიც. კერძოდ, არსებობს არაერთი ხერხი რომ წარმოვადგინოთ შედგენილი გამონათქვამები ქართულ ენაში.

გარდა ამისა, შეიძლება წარმოვადგინოთ შედგენილი გამონათქვამები გრაფიკულად. მნიშვნელობა არა აქვს როგორაა წარმოდგენილი გამონათქვამი, ჩვენ განვასხვავებთ უარყოფას, კონიუნქციას, დიზიუნქციას და ა. შ.. ყველა შედგენილ გამონათქვამს გააჩნია ქვეგამონათქვამები და ეს გამონთქვამები შესაძლოა, თავის მხრივ, შეიცავდნენ კონიუნქციებს, დიზიუნქციებს და ა. შ.. რომ დავინახოთ ეს, განვიხილოთ შემდეგი გამონათქვამი:

> თუ მაია გაიმარჯვებს ოლიმპიადაზე, მაშინ ყველა მას ადიდებს, და ის გახდება მდიდარი; მაგრამ თუ ის ვერ გაიმარჯვებს, მაშინ ყველა მისი მცდელობა იქნება ფუჭი.

ეს გამონათქვამი არის კონიუნქცია, და ამ კონიუნქციის მიდამოები მოცემულია შემდგი გამონათქვამებით.

> თუ მაია გაიმარჯვებს ოლიმპიადაზე, მაშინ ყველა მას ადიდებს, და ის გახდება მდიდარი.

და

> მაგრამ თუ ის ვერ გაიმარჯვებს, მაშინ ყველა მისი მცდელობა იქნება ფუჭი.

ორივე მიდამო აგრეთვე შედგენილი გამონათქვამია, და ისინი შეიძლება გაანალიზებულ იქნან მსგავსი ხერხით. მაგალითად, მარცხენა მიდამო შეიძლება დაიყოს ორ მტკიცებულებად "მაია იმარჯვებს ოლიმპიადაზე" და "ყველა მას ადიდებს, და ის გახდება მდიდარი". პირველი ამ ორი მტკიცებულებებიდან არის ატომური, და ის დაუშლადია. მეორე კი აგრეთვე შედგენილია და შეიძლება ჩაიწეროს ორი ატომური წინადადების კონიუნქციად "ყველა ადიდებს მაიას" და "მაია გახდება მდიდარი". მსგავსი ანალიზი შეიძლება გაკეთდეს მთავარი გამონათქვამის მარჯვენა მიდამოსთვის. მტკიცებულების განცალკევებას ორ კომპონენტად ეწოდება *გარჩევა* (*ანალიზი*), და შედეგი შეიძლება წარმოვადგინოთ გრაფიკულად *გარჩევის ხით* (*ხისებრი მოდელით*). გარჩევის ხე (ხისებრი მოდელი) განხილული წინადადებისა ნაჩვენებია ფიგურა 1.1 –ის საშუალებით.

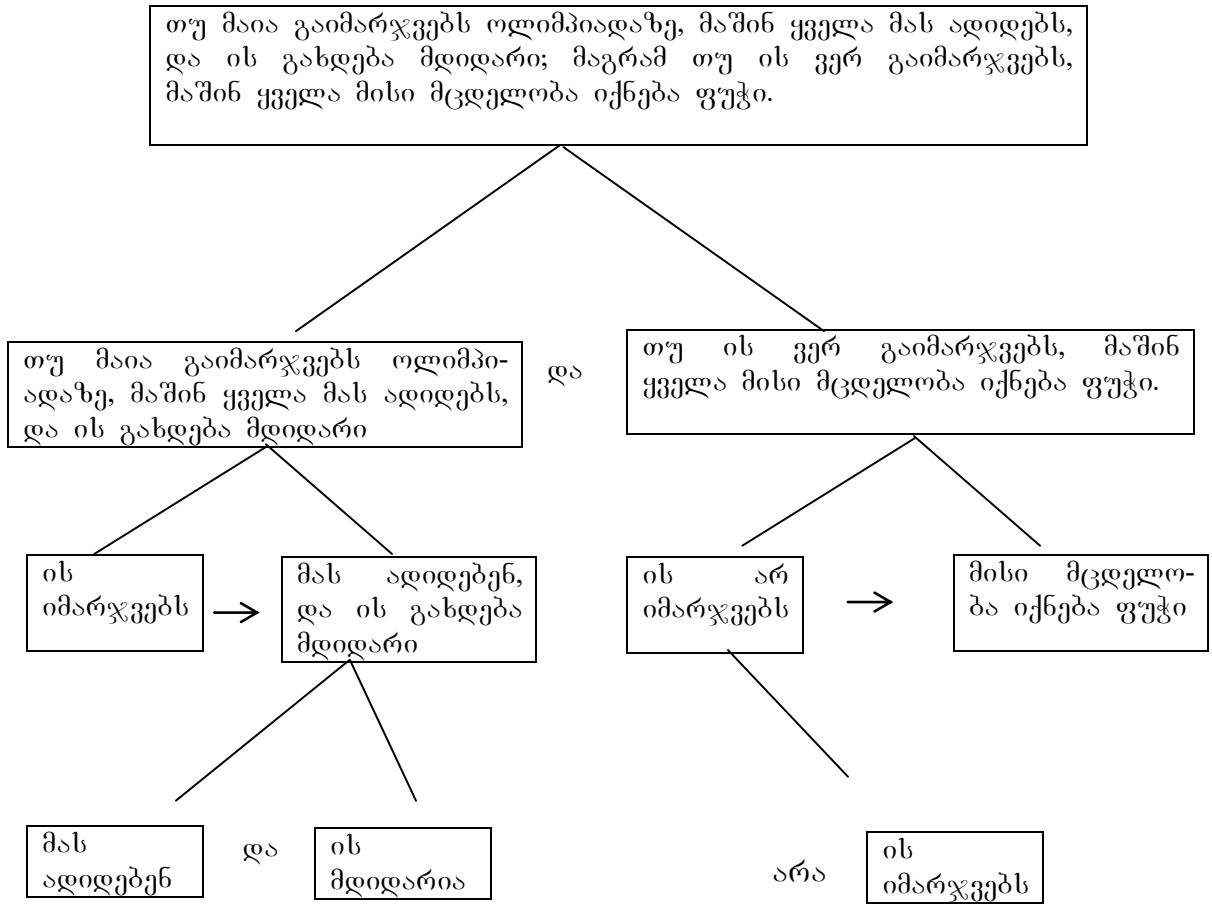
გარჩევის ხე შენდება ზემოდან ქვევით. პირველყოვლისა მთლიანად გამოსახულება გამოყენებულია ზედა კვანძის მისაღებად, ხოლო ამ გამოსახულების მიდამოები გამოიყენება, რომ ვიპოვოთ შემდეგი დონის კვანძები. ეს კვანძები იძლევა საშუალებას მომდევნო კვანძების გაჩენისა, და ეს გრძელდება სანამ არ მივაღწევთ ატომურ გამოსახულებებამდე, რომლებიც ქმნიან ხისებრი მოდელის დაბოლოებებს. გამოსახულება მოცემული გარჩევის ხით შეიძლება გარდაიქმნას სრულად აგებულ გამოსახულებად. ამისათვის განვსაზღვროთ შემდეგი პროპოზიციული ცვლადები:

> *P*: მაია იმარჯვებს ოლიმპიადაზე.
> *Q*: ყველა ადიდებს მაიას.
> *R*: მაია გახდება მდიდარი.
> *S*: მაიას მცდელობა იქნება ფუჭი

ამ გამონათქვამების დახმარებით, მიიღება შემდეგი გამოსახულება

$$((P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge ((\neg P) \rightarrow S)) \qquad (1.1)$$

გარჩევის ხის მსგავსად, სრულად აგებული გამოსხულება ასახავს რა გამოსახულებები ეკუთვნის ერთობლივად და რა არა.



ფიგურა 1.1

თუ E ნებისმიერი გამოსახულებაა, მთავარი კავშირის მიდამოები E-ში წარმოადგენენ ქვეგამოსახულებებს. მაგალითად, თუ E-ს აქვს სახე $(A \wedge B)$, მაშინ ორივე A და B-ც ქვეგამოსახულებებია. ამ გამოსახულებებს ვუწოდებთ E-ს *უშუალო ქვეგამოსახულებებს.* უფრო მეტიც, A და B-ც შეიძლება წარმოადგენდნენ შედგენილ გამოსახულებებს, რომლებსაც, თავის მხრივ, აგრეთვე შეიძლება გააჩნდეს ქვეგამოსახულებები. A და B-ს ყველა ქვეგამოსახულება აგრეთვე წარმოადგენს E–ს ქვეგამოსახულებებს. მტკიცებულება მაიას შესახებ, მაგალითად, არის $(A \wedge B)$ სახის, სადაც $A = (P \rightarrow (Q \wedge R))$ და $B = ((\neg P) \rightarrow S)$. ამ შემთხვევაში A-ს გააჩნია ქვეგამოსახულებები P და $(Q \wedge R)$, ხოლო $(Q \wedge R)$-ის ქვეგამოსახულებებია Q და R.. ყველა ეს გამოსახულებები წარმოადგენენ თავში მოცემული გამოსახულების ქვეგამოსახულებებს. ზოგადად, E გამოსახულების ქვეგამოსახულებები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

1. E არის E–ს ქვეგამოსახულება.
2. თუ E არის $(\neg A)$ სახის, მაშინ A არის E–ს ქვეგამოსახულება.
3. თუ E არის $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, ან $(A \leftrightarrow B)$ სახის, მაშინ A და B ორივე არიან E–ს ქვეგამოსახულებები. ამ ქვეგამოსახულებებს უწოდებენ *უშუალო ქვეგამოსახულებებს.*
4. თუ A არის E–ს ქვეგამოსახულება და თუ C არის A–ს ქვეგამოსახულება, მაშინ C არის E–ს ქვეგამოსახულება.

5. არ არსებობს E–ს სხვა ქვეგამოსახულება.

აღვნიშნოთ, რომ E თვითონ არის E–ს ქვეგამოსახულება. ამ ქვეგამოსახულებას ეწოდება *არასკუთრივი* ქვეგამოსახულება. სხვა დანარჩენ ქვეგამოსახულებებს უწოდებენ E–ს *საკუთრივ* ქვეგამოსახულებებს. E გამოსახულების მიდამოები ყოველთვის წარმოადგენენ E–ს უშუალო ქვეგამოსახულებებს.

ზოგადად, გამოსახულების გარჩევა დაიყვანება ყველა ქვეგამოსახულებების პოვნაში. გარჩევა წარმოდგენილია გარჩევის ხით იმ აზრით, რომ გამოსახულების ყველა ქვეგამოსახულებები წარმოდგენილია ხეში. ამ გარჩევის ხის ფესვს წარმოადგენს გამოსახულება, რომელიც უნდა გარჩეულ იქნას, და ამ ფესვის ყველა ქვემო კვანძები წარმოადგენენ საკუთრივ ქვეგამოსახულებებს. ეს ილუსტრირებული იყო 1.1 ფიგურით. მსგავსი რამ აგრეთვე შეიძლება მიღწეულ იქნას სრულად აგებული გამოსახულებების საშუალებით.

სპეციალური და მნიშვნელოვანი ტიპის გამოსახულებას წარმოადგენს *ლიტერალი*, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.10: გამონათქვამს ეწოდება *ლიტერალი*, თუ ის არის ან Q ან $\neg Q$ სახის, სადაც Q არის პროპოზიციული ცვლადი. ორ გამოსახულებას Q და $\neg Q$ –ს ეწოდება *ურთიერთგამომრიცხავი ლიტერალები.*

თუ P და Q პროპოზიზიული ცვლადებია, მაშინ P, $\neg P$, Q და $\neg Q$ ლიტერალებია, მაგრამ $\neg(P \wedge Q)$ არ არის ლიტერალი. P და $\neg P$ ურთიერთ გამომრიცხავი ლიტერალებია, ხოლო P და Q არა.

3.3.4 უპირატესობის წესები

ძალიან ცოტა ადამიანი მუშაობს სრულად აგებულ გამოსახულებებთან, რადგან გამოსახულებები გრძელია და ხშირად ძნელია მათი წაკითხვა. კერძოდ, გამოსახულების გარე ფრჩხილებს ყოველთვის არ წერენ. მაშასადამე, $(P \wedge Q)$-ს მაგივრად წერენ $P \wedge Q$, ხოლო $((P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R))$ მაგივრად წერენ $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R)$. როდესაც ასე ვაკეთებთ არ უნდა დავივიწყოთ, რომ აღდგენისას განსახილველი გამოსახულება უნდა იყოს შედგენილი რომელიმე სხვა გამოსახულებასთან. შეიძლება აგრეთვე არ დაიწეროს ფრჩხილები გამოსახულების შიგნით. სწორად რომ მოვიაზროთ შედეგად მიღებული გამოსახულება, გამოიყენება ეგრეთწოდებული *უპირატესობის წესები.* ზოგადად, ყოველ კავშირს გააჩნია რომელიღაც ხარისხის უპირატესობა, და კავშირებს უფრო მაღალი ხარისხის უპირატესობით ენიჭება უფრო ძლიერი შეკავშირება, ვიდრე უფრო დაბალი ხარისხის მქონე კავშირებს.

$\neg$ კავშირს გააჩნია უმაღლესი ხარისხის უპირატესობა. მაშასადამე, $\neg P \vee Q$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $(\neg P) \vee Q$, და არა როგორც $\neg(P \vee Q)$. ბინარული კავშირების შემთხვევაში, უმაღლესი უპირატესობა ენიჭება $\wedge$-ს, შემდეგ კი, რიგითობის მიხედვით, $\vee$, $\rightarrow$,

$\leftrightarrow$ -ს. მაგალითად, გამოსახულებაში $P \wedge Q \vee R$, $\wedge$-ს აქვს უპირატესობა ვიდრე $\vee$ ქვეგამოსახულების ფორმირებისას; ე. ი., $P \wedge Q \vee R$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $(P \wedge Q) \vee R$. ანალოგიურად, $P \rightarrow Q \vee R$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $P \rightarrow (Q \vee R)$, იმიტომ რომ $\vee$ აქვს უპირატესობა $\rightarrow$ -თან შედარებით. $\leftrightarrow$ აქვს უმცირესი უპირატესობა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $P \leftrightarrow Q \rightarrow R$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $P \leftrightarrow (Q \rightarrow R)$. უპირატესობითი წესებიდან გამომდინარე, წინადადება მაიას შესახებ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$(P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow S)$$

წესები, რომლებიც შეიცავენ უპირატესობის ცნებას ცნობილია არითმეტიკული გამოსახულებებისათვის. მაგალითად, პასკალში, * აქვს უპირატესობა + მიმართ, რომელიც ნიშნავს, რომ $a + b*c$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $a + (b*c)$.

ზოგიერთ გამოსახულებაში, უპირატესობის წესები არ არის საკმარისი იმისთვის, რომ ავიცილოთ ორაზროვნება. მაგალითად, გამოსახულება $P \rightarrow Q \rightarrow R$ შეიძლება გაგებულ იქნას როგორც $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ასევე როგორც $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$. როგორი ინტერპრეტაციით უნდა იყოს გაგებული დამოკიდებულია კავშირ $\rightarrow$ ასოციაციურობაზე. ზოგადად, $\rightarrow$ არის ოპერატორი, როგორიცაა ოპერატორები + და / პასკალში.

განსაზღვრება 1.11: ბინარულ ოპერატორს ეწოდება *მარცხნიდან ასოციაციური*, თუ ოპერატორს მარცხნიდან გააჩნია უპირატესობა მარჯვნა ოპერატორის მიმართ. ბინარულ ოპერატორს ეწოდება *მარჯვნიდან ასოციაციური*, თუ ოპერატორს მარჯვნიდან გააჩნია უპირატესობა მარცხენა ოპერატორის მიმართ.

ყველა ლოგიკური კავშირები არიან მარცხნიდან ასოციაციური. მაშასადამე, $P \rightarrow Q \rightarrow R$ უნდა იყოს გაგებული როგორც $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$. ეს თავსებადია პროგრამულ ენასთან როგორიცაა პასკალი, სადაც $a/b/c$ გაიგება როგორც $(a/b)/c$, ვიდრე $a/(b/c)$. მაშასადამე, ბინარული არითმეტიკული ოპერატორი პასკალში აგრეთვე მარცხნიდან ასოციაციურია.

შემდეგ განსაზღვრებას შემოაქვს ორი ტერმინი, რომლებიც დაკავშირებულია ჩვენს დისკუსიასთან, რომელიც სასარგებლოა ლოგიკური ოპერატორების აღწერისათვის.

განსაზღვრება 1.12: $\circ$ იყოს გამოსახულების მთავარი ოპერატორი. მაშინ, $\circ$-ს უწოდებენ, რომ ის არის *პრეფიქსულ* პოზიციაზე, თუ ის წინ უსწრებს თავის ოპერანდს, არის *ინფიქსურ* პოზიციაზე, თუ ის ჩასმულია ოპერანდებს შორის, და არის *პოსტფიქსურ* პოზიციაზე, თუ ის თან სდევს თავის ოპერანდს.

ყველა $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ კავშირები გამოიყენება ინფიქსურ პოზიციაზე. მაგალითად, ჩვენ ვწერთ $P \wedge Q$, რაც ინფიქსური აღნიშვნაა. პრეფიქსულ აღნიშვნაში, იგივე გამოსახულება

ჩაიწერებოდა როგორც $\wedge P, Q$, ხოლო პოსტფიქსურ აღნიშვნაში როგორც $P, Q \wedge$. ცხადია, რომ ლოგიკური კავშირი $\neg$ დგას თავისი მიდამოს წინ, და ამიტომ ის პრეფიქსულ პოზიციაზეა.

3.3.5 გამოსახულებების შეფასება და ჭეშმარიტობის ცხრილები

არაატომური გამოსახულებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები უნდა იყოს გამოყვანილი მასში შემავალი ატომური გამოსახულებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებიდან. ვიდრე ეს გაკეთდებოდეს, განსახილველი გამოსახულება უნდა გაირჩეს; ე. ი., უნდა მოინახოს ამ გამოსახულების ყველა ქვეგამოსახულება. როგორც არის ნაჩვენები წინა პარაგრაფში, ეს შეიძლება მოხერხდეს გარჩევის ხის საშუალებით. გარჩევის ხე იგება ზემოდან ქვევით, საწყისად გვევლინება სრული მთლიანი გამოსახულება, რომელიც რეკურსიულად იყოფა ქვეგამოსახულებებად სანამ არ მივაღწევთ ატომურ გამოსახულებამდე, რომლებიც წარმოადგენენ გარჩევის ხის ბოლო კვანძებს. მხოლოდ ატომურ გამოსახულებებს შეიძლება უშუალოდ მიენიჭოს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები. სხვა დანარჩენი ქვეგამოსახულებებისათვის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა თავის მხრივ უნდა გამოიყვანებოდეს თავისი უშუალო ქვეგამოსახულებებიდან. ეს ნიშნავს, რომ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობის შეფასება უნდა ხდებოდეს ქვევიდან-ზემოთ: პროცესი იწყება ატომური გამოსახულებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებიდან და სრულდება პირველადი გამოსახულების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობის განსაზღვრით. ჩვეულებრივ, არ არის აუცილებელი (გრამატიკული) გარჩევის ხის აგება. მართლაც, სრულად აგებული გამოსახულება გამოხატავს იგივე ინფორმაციას რასაც გარჩევის ხე, და ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას საჭიროებისამებრ. ფრჩხილებიც შეიძლება მოვაშოროთ და გამოვიყენოთ უპირატოსებითი წესები. ეს პროცედურა არსებითად ერთიდაიგივეა ყველა შემთხვევებისათვის. რომ დავინახოთ როგორ უნდა მოიძებნოს გამოსახულების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა, განვიხილოთ შემდეგი მტკიცებულება.

> თუ თქვენ მეცადინეობთ კომპიუტერებში, და თუ თქვენ არ გესმით რეკურსია, თქვენ ვერ ჩააბარებთ გამოცდას.

ჩვენ გვინდა ვიცოდეთ ზუსტად როდისაა ეს მტკიცებულება ჭეშმარიტი და როდის მცდარი. ეს რომ გავიგოთ განვსაზღვროთ

> P: თქვენ მეცადინეობთ კომპიუტერებში.
> Q: თქვენ გესმით რეკურსია
> R: თქვენ ჩააბარებთ გამოცდას.

ვიყენებთ რა ამ განსაზღვრებებს, მოცემული წინადადება გარდაიქმნება შემდეგნაირად

$$(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R.$$

აღვნიშნოთ ეს გამოსახილება A ასოთი; ე. ი., როცა ჩვენ ვწერთ A-ს, ჩვენ ვგულისხმობთ $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$. A-ს გააჩნია სახე $B \rightarrow C$, სადაც $B = (P \wedge \neg Q)$ და $C = \neg R$. B, თავის მხრივ, არის $P \wedge D$ სახის, სადაც P არის პროპოზიციული ცვლადი, ხოლო $D = \neg Q$. B, C და D ქვეგამოსახულებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები შეიძლება მოიძებნოს, როდესაც მივანიჭებთ მნიშვნელობებს P, Q და R-ს. ჭეშმარიტობის ეს მნიშვნელობები განსაზღვრავენ მთელი გამოსახულების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას. მაგალითად, ჭეშმარიტობის

მნიშვნელობები P =T, Q = F და R =T გვაძლევს $D = \neg Q$ = T, $B = P \wedge \neg Q$, რომელიც არის T, და $C = \neg R$., რომელიც გვაძლევს F. მაშასადამე, $A = B \rightarrow C$ გვაძლევს F-ს.

ჭეშმარიტობის ცხრილი გვაძლევს გამოსახულების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებს პროპოზიციული ცვლადების ყველა შესაძლო მნიშვნელობებისათვის. ვინაიდან A შეიცავს სამ პროპოზიციულ ცვლადს P, Q და R-ს და ყოველ ცვლადს ენიჭება მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა, T ან F, არსებობს $2^3 = 8$ მნიშვნელობათა რაოდენობა, რაც არაპრაქტიკულია დიდი n-სთვის. მაშინ, როდესაც, ჭეშმარიტობის ცხრილები ძალიან მოსახერხებელია პატარა n-ებისთვის.

1.7 ცხრილში ჩამოთვლილია ყველა მნიშვნელობები.

ცხრილი 1.7. $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$.

			D	B	C	A
P	Q	R	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg R$.	$(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$.
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T	T

3.3.6 შედგენილი წინადადებების მაგალითები

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვთარგმნით რამოდენიმე წინადადებას ლოგიკის ენაზე. დავიწყოთ შემდეგი წინადადებით:

> არ არის სამუშაო, არ არის ანაზღაურება.

რომ გადავიყვანოთ ეს წინადადება ლოგიკურ გამოსახულებაში, ის გადავწეროთ შემდეგნაირად: "თუ არ არის შესრულებული სამუშაო, მაშინ არ არის ანაზღაურება". გამოვიყენოთ ცვლადები P და Q, რომ გამოვსახოთ წინადადებები "სამუშაო შესრულდა" და "ანაზღაურდა", შესაბამისად, ჩვენ ვღებულობთ

$$\neg P \rightarrow \neg Q.$$

შემდეგი:

> საქონელი, რომელიც შეძენილია ამ მაღაზიაში, შეიძლება დაბრუნებულ იქნას მხოლოდ მაშინ, როცა ის კარგ მდგომარეობაშია და მხლოდ მაშინ, როცა მყიდველი მოიტანს ქვითარს.

ამ მტკიცებულების ატომური გამონათქვამები არიან P, რომელიც წარმოადგენს "საქონელი შეიძლება დაბრუნებულ იქნას", Q, რომელიც წარმოადგენს "საქონელი კარგ მდგომარეობაშია", და R, რომელიც წარმოადგენს "მყიდველს მოაქვს ქვითარი". მაშასადამე, შედეგად გვაქვს შემდეგი ლოგიკური გამოსახულება:

$$P \to (Q \wedge R).$$

ფრჩხილები შეიძლება მოვაცილოთ, იმიტომ რომ $\wedge$ აქვს უპირატესობა $\to$-ზე.

ეხლა მოვიყვანოთ მათემატიკური მაგალითი:

> თუ p მარტივი რიცხვია, მაშინ, n მთელი ლუწი რიცხვისათვის, $n^p - n$ იყოფა p-ზე.

გამოვიყენოთ შემდეგი განსაზღვრებები: P იყოს "p მარტივი რიცხვია", Q იყოს "n მთელი რიცხვია", R იყოს "n ლუწი რიცხვია", და S იყოს "$n^p - n$ იყოფა p-ზე". როცა შევკრებთ ამ მტკიცებულებებს, მივიღებთ

$$P \to (Q \wedge R \to S).$$

შემდეგი:

> სიმრავლე C არის სიმრავლე A და სიმრავლე B-ს თანაკვეთა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა C-ს ყოველი ელემენტი არის A-ს და B-ს ელემენტი.

P იყოს "სიმრავლე C არის სიმრავლე A-ს და სიმრავლე B-ს თანაკვეთა", Q იყოს "A-ს ყოველი ელემენტი არის C-ს ელემენტი", და R იყოს "B-ს ყოველი ელემენტი არის C-ს ელემენტი". შედეგად ვღებულობთ

$$P \leftrightarrow (Q \wedge R)$$

გამოსახულება $P \vee Q$ ყოველთვის ნიშნავს P ან Q ან ორივეს ერთად. სხვა სიტყვებით, $\vee$ უნდა იყოს გაგებული როგორც *არაგამომრიცხავი ან.* თუ გვინდა გამოვიყენოთ *გამომრიცხავი ან*, მაშინ ჩვენ ზუსტად უნდა აღვნიშნოთ, რომ ვგულისხმოვთ P–ს ან Q–ს მაგრამ არა ორივეს ერთად. ვინაიდან სიტყვა "მაგრამ"-ს ვთარგმნით როგორც $\wedge$, ვღებულობთ

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

სავარჯიშოები 1.3

1. გაანალიზეთ შემდეგი მტკიცებულებები გარჩევის ხის საშუალებით. დარწმუნდით, რომ მიღებული ხის ყველა ბოლოები ნამდვილად ატომური გამონათქვამებია, რომლებიც არ შეიცავენ საკუთრივ ქვეგამოსახულებებს.
   (ა) თუ კურდღელი ფრთხილია და სწრაფი, მაშინ ვერც მელია და ვერც აფთარი მას ვერ დაიჭერს.
   (b) თუ მე არ ვცდები, ის გოგო მართავდა წითელ მანქანას, მის გვერდით იჯდა მამაკაცი.
   (c) ჩვენ შეგვიძლია ან მივიღოთ შემოთავაზებული პირობები და ვიყიდოთ სახლი, ან ჩვენ დავიცადოთ და ვნახოთ როდის გამოჩნდება უკეთესი შეთანხმება.

2. ჩასვით ფრჩხილები შემდეგ გამოსახულებებში ისეთნაირად, რომ ეს გამოსახულებები არ იყოს ორაზროვანი.

(a) $P \wedge Q \wedge R \rightarrow P$ (c) $\neg(P_1 \wedge P_2) \rightarrow \neg\, Q \vee P_1$

(b) $P \wedge R \vee Q \leftrightarrow \neg\, R$ (d) $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg\, P$

3. შემოიღეთ სიმბოლური აღნიშვნა ატომური გამონათქვამებისათვის შემდეგ წინადადებებში. შემდეგ თარგმნეთ წინადადებები პროპოზიციულ აღრიცხვაში.

(a) თუ თქვენ არ წახვალთ, მე დაუძახებ პოლიციეს.

(b) ორ ბავშვს ყავს ერთიდაიგივე ბიძა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ ყავთ ერთიდაიგივე დედა და ერთიდაიგივე მამა.

(c) სასიამოვნო დღეა, თუ ის მზიანია, მაგრამ მხოლოდ მაშინ, როცა არ ცხელა.

(d) თუ $i > j$, მაშინ $i - 1 > j$, წინაამდგენ შემთხვევაში $j = 3$.

4. შემდეგი გამოსახულებიდან რომელია ლიტერალი?

(a) P (c) $\neg P_2$

(b) $\neg\neg P$ (d) $P \vee Q$

5. გადაიყვანეთ შემდეგი წინადადებები პროპოზიციულ აღრიცხვაში, პროპოზიციული ცვლადების გამოყენებით მხოლოდ ატომური გამონათქვამებისათვის.

(a) მერი მაღალია, მაგრამ დათო პატარაა და მოხერხებული.

(b) თუ x უფრო დიდია ვიდრე y, და y უფრო დიდია ვიდრე z, მაშინ x უფრო დიდია ვიდე z.

(c) ინერალის მოპოვება მომგებიანია, თუ მადნის კონცეტრაცია მაღალია, მაგრამ მხოლოდ თუ მანძილი ბაზრამდე მოკლია.

6. თუ P და Q ჭეშმარიტია და R და S მცდარია, მოიძიეთ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები შემდეგი გამოსახულებებისათვის.

(a) $P \vee (Q \wedge R)$

(b) $(P \wedge (Q \wedge R)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (R \vee S))$

(c) $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (((\neg P \wedge Q) \wedge \neg R) \wedge S)$

7. თუ P და Q ჭეშმარიტია და R და S მცდარია, მოიძიეთ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები შემდეგი გამოსახულებებისათვის.

(a) $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee ((Q \leftrightarrow S) \rightarrow (R \vee \neg S))$

(b) $(P \leftrightarrow \neg R) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

(c) $(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \leftrightarrow (Q \vee \neg S)$

8. ააგეთ ჭეშმარიტობის ცხრილი შემდეგი ფორმულებისათვის:

(a) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ **(d)** $P \wedge (Q \wedge P)$

(b) $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ **(e)** $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$

(c) $P \wedge (P \vee Q)$ **(f)** $(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

9. ხშირად, სრულად აგებული გამოსახულებები (საგ) განისაზღვრებიან ფორმირების შემდეგი წესებით.

1. ყოველი პროპოზიციული ცვლადი საგია.
2. თუ A საგია, მაშინ $\neg A$ საგია.
3. თუ A და B ორივე საგია, მაშინ საგებია $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ და $(A \leftrightarrow B)$.
4. სხვა საგები არ არსებობს.

რა განსხვავებაა ამ განსაზღვრებასა და 1.3.2 პარაგრაფში მოყვანილ განსაზღვრებას შორის? კერძოდ, არის თუ არა $\neg\neg P$ საგი აქ მოყვანილი განსაზღვრების თანახმად? არის თუ არა ეს გამოსახულება საგი თანახმად განსაზღვრებისა, რომელიც მოყვანილია 1.3.2 პარაგრაფში?

3.4 ტავტოლოგიები და წინააღმდეგობები

3.4.1 შესავალი

ჭეშმარიტობის ცხრილები გვაძლევენ საშუალებას კლასიფიცირებულ იქნას ლოგიკური გამოსახულებები შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.13: ლოგიკურ გამოსახულებას ეწოდება *ტავტოლოგია*, თუ ის ჭეშმარიტია მინიჭებულ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო განაწილებისათვის.

განსაზღვრება 1.14: ლოგიკურ გამოსახულებას ეწოდება *წინააღმდეგობა*, თუ ის მცდარია მინიჭებულ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო განაწილებისათვის.

განსაზღვრება 1.15: ლოგიკურ გამოსახულებას, რომელიც არც ტავტოლოგიაა და არც წინააღმდეგობა, ეწოდება *კონტინგენტი.*

იმის პირდაპირ ხერხს, რომ შემოწმდეს არის თუ არა ლოგიკური გამოსახულება ტავტოლოგია, წინააღმდეგობა ან კონტინგენტი, უმეტესწილად წარმოადგენს ჭეშმარიტობის ცხრილი. თუ ნებისმიერ სტრიქონში გამოსახულება იღებს მნიშვნელობა ჭეშმარიტს, მაშინ გამოსახულება ტავტოლოგიაა. თუ ნებისმიერი სტრიქონში გამოსახულება იღებს მნიშვნელობა მცდარს, მაშინ გამოსახულება წინააღმდეგობაა. როდესაც ერთ სტრიქონზე გვაქვს T, ხოლო რომელიღაც განსხვავებულზე F-ი, მაშინ გამოსახულება კონტინგენტია.

ჩვენ ადრე შევხვედრივართ გარკვეულ რაოდენობა მარტივ ტავტოლოგიებს. მაგალითად, 1.2.7 პარაგრაფში ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ $F \rightarrow Q$ და $P \rightarrow T$ ყოველთვის ჭეშმარიტია. ე. ი. ორივე გამოსახულება ტავტოლოგიაა.

3.4.2 ტავტოლოგიები

განვიხილოთ გამოსახულება $\neg(P \wedge Q) \vee Q$. არის თუ არა ეს გამოსახულება ტავტოლოგია? ეს რომ ამოვხსნათ, მოცემული გამოსახულებისათვის ვაგებთ ჭეშმარიტობის ცხრილს 1.8. შეგვიძლია დავინახოთ, რომ მნიშვნელობათა მინიჭების ყველა შესაძლო განაწილებისათვის გამოსახულება $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ ჭეშმარიტია, რაც ნიშნავს, რომ ის ტავტოლოგიაა.

ცხრილი 1.8. ტავტოლოგიის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q) \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

ვინაიდან ტავტოლოგიები საკმაოდ მნიშვნელოვანია, შეიქმნა სპეციალური აღმნიშვნელი სიმბოლო, რომ ლოგიკური გამოსახულება ტავტოლოგიაა. ნაცვლად ჩანაწერისა, რომ A არის ტავტოლოგია, ვწერთ $\models A$. მაშასადამე, ჩვენ ზემოდ დავამტკიცეთ, რომ

$$\models \neg(P \wedge Q) \vee Q$$

ამ მომენტიდან, ჩვენ უნდა ვუჩვენოთ მნიშვნელოვანი განსხვავება. პროპოზიციული აღრიცხვა შეიძლება მოიაზრებოდეს როგორც წინადადებათა ფორმულირების ენა. როცა ჩვენ ვლაპარაკობთ ამ ენის შესახებ, ჩვენ ვიყენებთ ქართულ ენას, რომ აღიწეროს საინტერესო ფაქტები ამ ენის შესახებ. ზოგადად, ენას, რომელიც გამოიყენება მეორე ენის აღსაწერად, ეწოდება *მეტაენა*. მაგალითად, თუ ქართულ ენას ასწავლიან ინგლისელ სტუდენტს, მაშინ ქართული ენის ფაქტები აიხსნება ინგლისურად, და ამ შემთხვევაში ინგლისური ენა არის მეტაენა, რომელიც გამოიყენება, რომ ისწავლებოდეს ქართული. ცხადია, ინგლისური ტერმინები, რომლის საშუალებით აღიწერება ქართული გრამატიკის არსი, არ ეკუთვნის ქართულ ენას, არამედ ეკუთვნის მეტაენას, რომელიც ინგლისურია.

როცა ჩვენ ვლაპარაკობთ, რომ გამონათქვამი ყოველთვის ჭეშმარიტია, მაშინ ეს მტკიცებულება გვეუბნება რაღაცას პროპოზიციული აღრიცხვის ენის შესახებ, და, მაშასადამე, ის არ არის პროპოზიციული აღრიცხვის ნაწილი, მსგავსად იმისა როგორ გამოიყენება ინგლისური სიტყვები, რომლებიც არ ეკუთვნიან ქართულ ენას, რომ აღიწეროს ქართული ენის არსი. ამ აზრით, ჩვენ ვასკვნით, რომ $\models$ არ არის პროპოზიციული აღრიცხვის ნაწილი. მოგვიანებით ჩვენ შემოვიღებთ სხვა მეტასიმბოლოებს. არსებობს რამოდენიმე ძალიან მარტივი, მაგრამ მნიშვნელოვანი ტავტოლოგია. პირველი მათგანია მესამის გამორიცხვის კანონი. ეს კანონი ამტკიცებს, რომ $P \vee \neg P$ ტავტოლოგიაა. სხვა სიტყვებით, Pან ჭეშმარიტია ან მცდარი, და ნებისმიერი სხვა რამ გამორიცხულია. ცხრილი 1.9 ამტკიცებს ამ კანონს, იმის ჩვენებით, რომ ის ჭეშმარიტია ნებისმიერი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა მინიჭებისთვის. დამატებით კიდევ გვაქვს ორი ტავტოლოგიაა: $F \rightarrow P$ და $P \rightarrow T$. ჩვენ უკვე ვიმსჯელეთ ამის შესახებ 1.2.7 პარაგრაფში.

ცხრილი 1.9
მესამის გამორიცხვის კანონის დამტკიცება

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

თუ A ტავტოლოგიაა, რომელიც შეიცავს ცვლად P-ს, შეიძლება განისაზღვროს ახალი გამოსახულება ნებისმიერი გამოსახულებით ჩანაცვლებით P-ს ადგილას. შედეგად მიღებული გამოსახულება A' აგრეთვე ტავტოლოგიაა. მაგალითად, $P \vee \neg P$ ტავტოლოგიაა. ჩვენ შეგვიძლია ყველა P-ს შენაცვლება ნებისმიერი გამოსახულებით, ვთქვათ $P \wedge Q$ –თი. შედეგად მიღებული გამოსახულება $A' = (P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$ აგრეთვე ტავტოლოგიაა. მსგავსი ჩასმები შეიძლება გაკეთდეს ნებისმიერ სხვა ტავტოლოგიაში. ეს მართებულია, რადგან ნებისმიერი გამოსახულების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობის შეფასებისას, მხოლოდ უშუალო ქვეგამოსახულებების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებს გააჩნიათ ეფექტი. ეს არის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა მიღებული პირდაპირი ჭეშმარიტობის მინიჭებით თუ სხვა ტიპის შეფასებებით, არ აქვს მნიშვნელობა. მაშასადამე, თუ A გამოსახულებაა, რომელიც შეიცავს P-ს, A-ს მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ P შეიცვლება გამოსახულებით, რომელსაც გააჩნია იგივე ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა როგორიც P-ს. თუ A ტავტოლოგიაა, მაშინ A რჩება ტავტოლოგიად, მიუხედავად იმისა P ჭეშმარიტია, თუ მცდარი, და P-ს ჩანაცვლება სხვა გამოსახულებით არ ცვლის სურათს. შეიძლება აგრეთვე ყველა პროპოზიციული ცვლადების ნაცვლად ჩაისვას ნებისმიერი გამოსახულებები, და ამ შემთხვევაში ტავტოლოგია გადაიქცევა სქემად. მას მივყავართ შემდეგ თეორემამდე:

თეორემა 1.1. დავუშვათ, რომ A ტავტოლოგიაა, და $P_1, \ldots, P_n$ A-ს პროპოზიციული ცვლადები. დავუშვათ $B_1, \ldots, B_n$ ნებისმიერი ლოგიკური გამოსახულებებია. ამ შემთხვევაში, გამოსახულება, რომელიც მიიღება P_1-ს ჩანაცვლებით B_1-თ, P_2-ს B_2-თ, … , P_n-ს B_n-თ არის სქემა, და ყოველი კერძო შემთხვევა ამ სქემისა არის ტავტოლოგია.

მაგალითი 1.9 გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ ტავტოლოგიაა, და დაამტკიცეთ, რომ $\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee R$ არის ტავტოლოგია.

ამოხსნა. B და C იყოს ნებისმიერი გამოსახულებები. თეორემა 1.1 გვაძლევს საშუალებას გარდავქმნათ $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ სქემად $\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee R$. თუ $B = P \vee Q$ და $C = R$, მაშინ სქმა გვაძლევს გამოსახულებას $\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee R$, რომელიც აგრეთვე უნდა იყოს ტავტოლოგია. ■

3.4.3 ტავტოლოგიები და კორექტული მსჯელობა.

ლოგიკური მსჯელობა კორექტულია, თუ დასკვნა ლოგიკურად გამომდინარეობს წინამძღვრებიდან. თუ ყველა წინამძღვარი ჭეშმარიტია (ე. ი. ყველა წინამძღვრების კონიუნქცია გვაძლევს ჭეშმარიტ მნიშვნელობას), მაშინ დასკვნაც უნდა იყოს ჭეშმარიტი. მაშასადამე, წინამძღვრების კონიუნქცია არის A და თუ დასკვნა არის C, მაშინ $A \rightarrow C$ უნდა იყოს ჭეშმარიტი მნიშვნელობათა მინიჭების ყველა შესაძლო განაწილებისათვის: ე. ი. უნდა იყოს ტავტოლოგია. მაგალითად, დიზიუნქციური სილოგიზმი უჩვენებს, რომ როგორც კი $P \vee Q$ და $\neg P$ ორივე ჭეშმარიტია, Q უნდა იყოს ჭეშმარიტი. ე. ი. $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ უნდა იყოს

ტავტოლოგია. ეს იდეა გამოყენებულია 1.10 ცხრილში, იმისათვის, რომ დამტკიცდეს, რომ დიზიუნქციური სილოგიზმი კორექტულია. დამტკიცებისთვის უნდა ვუჩვენოთ, რომ $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ ყოველთვის ჭეშმარიტია, და ეს ნაჩვენებია ბოლო სვეტში. ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი ლოგიკური მსჯელობების კორექტულობა.

ცხრილი 1.10 დიზიუნქციური სილოგიზმის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

ყოველი ტავტოლოგიისათვის დასაშვებია პროპოზიციული ცვლადების ჩანაცვლება გამოსახულებებით. მაშასადამე, ნებისმიერი კორექტული მსჯელობა შეიძლება გარდაიქმნას სქემად.

მაგალითი 1.10 უჩვენეთ, რომ $P \wedge Q$ და $P \wedge Q \rightarrow \neg R$ -დან გამომდინარეობს $\neg R$.

ამოხსნა. მოდუს პონენსის თანახმად, P და $P \rightarrow Q$ -დან გამოიყვანება Q. ეს გამოსახულება შეიძლება გარდაიქმნას სქემად, იმის მითითებით, რომ ნებისმიერი A, B და $A \rightarrow B$ გამოსახულებებისათვის, როგორც ლოგიკურ დასკვნას, ვღებულობთ B-ს. იმის დაშვებით, რომ $A = P \wedge Q$ და $B = \neg R$, ვასკვნით, რომ $\neg R$ ლოგიკურად გამომდინარეობს $P \wedge Q$ და $P \wedge Q \rightarrow \neg R$ წინამძღვრებიდან. ■

3.4.4 წინააამღდეგობრიობა

გამოსახულება წინააამღდეგობრიობაა, თუ ის ღებულობს მნიშვნელობა F-ს მნიშვნელობათა მინიჭების ყველა შესაძლო განაწილებისათვის. შეიძლება შემოწმდეს, ცხრილის გამოყენებით, არის თუ არა მოცემული გამოსახულება ჭეშმარიტი. მაგალითისთვის, დავამკიცოთ, რომ $P \wedge \neg P$ წინააამღდეგობრიობაა. ეს გაკეთებულია 1.11 ცხრილის საშუალებით, რომელიც გვიჩვენებს, რომ მნიშვნელობათა მინიჭების ყველა შესაძლო განაწილებისათვის $P \wedge \neg P$ მცდარია.

წინააამღდეგობრიობა მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტავტოლოგიასთან. მართლაც, თუ A ტავტოლოგიაა, მაშინ $\neg A$ წინააამღდეგობრიობაა, და პირიქით. ტავტოლოგიების მსგავსად, წინააამღდეგობრიობები შეიძლება გარდაიქმნან სქემად. ეს ნიშნავს, მაგალითად, რომ $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ წინააამღდეგობრიობაა, იმიტომ, რომ ის გამომდინარეობს სქემიდან $A \wedge \neg A$, რომელიც, თავის მხრივ, გამოიყვანება $P \wedge \neg P$ –დან.

წინააამღდეგობრიობები შეიძლება გამოყენებულ იქნან იმის დასამტკიცებლად, რომ ლოგიკური მსჯელობა კორექტულია. ეს რომ განვახორციელოთ, შევნიშნოთ, რომ მსჯელობა არაკორექტულია თუ ყველა წინამძღვრი ჭეშმარიტია, მაგრამ დასკვნა მცდარი.

ცხრილი 1.11

წინაამდღეგობრიობის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	F
F	T	F

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეუძლებელია დასკვნის უარყოფა და წინამძღვრები იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტი. არაკორექტულ მსჯელობაში ყველა წინამძღვრის და დასკვნის კონიუნქცია უნდა იყოს ყოველთვის მცდარი, ანუ ის უნდა იყოს წინაამდღეგობრიობა. ილუსტრაციისათვის, ჩვენ ვამტკიცებთ დიზიუნქციის სილოგიზმს კიდევ ერთხელ. თუ ვსაზღვრავთ წინაამდღეგობრიობას, მაშინ მნიშვნელობათა მინიჭების ნებისმიერი შესაძლო განაწილებისათვის, $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$ უნდა იყოს მცდარი. ცხრილი 1.12–ის საშუალებით, კიდევ ერთხელ ვრწმუნდებით, რომ დიზიუნქციის სილოგიზმი კორექტულია.

ცხრილი 1.12

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F

3.4.5 მნიშვნელოვანი ტიპის ტავტოლოგიები

არსებოს ორი მნიშვნელოვანი ტიპის ტავტოლოგია, *ლოგიკური იმპლიკაცია* და *ლოგიკური ექვივალენტობა*. ისინი განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

განსაზღვრება 1.16: თუ A და B ლოგიკური გამოსახულებებია და თუ $A \rightarrow B$ ტავტოლოგიაა, მაშინ ვიტყვით, რომ A *ლოგიკურად ასკვნის* B-ს (ან B *ლოგიკურად გამომდინარეობს* A-დან), და ჩვენ ვწერთ $A \Rightarrow B$.

განსაზღვრება 1.17: თუ A და B ლოგიკური გამოსახულებებია და თუ A და B-ს აქვთ ერთიდაიგივე ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები, მაშინ A და B-ს უწოდებენ *ლოგიკურად ექვივალენტურებს*, და ჩვენ ვწერთ $A \equiv B$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $A \equiv B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \leftrightarrow B$ ტავტოლოგიაა.

მნიშვნელოვანია განვასხვაოთ სიმბოლოების წყვილი $\equiv$, $\Rightarrow$ და სიმბოლოების წყვილი $\leftrightarrow$, $\rightarrow$. არც $\equiv$ და არც $\Rightarrow$ არ წარმოადგენს კავშირებს. ორივე $\equiv$ და $\Rightarrow$ მიეკუთვნება მეტაენას. ეს ასეა, იმიტომ რომ ისინი განისაზღვრებიან $\models$ -ის ტერმინებში, რომელიც ასევე მიეკუთვნება მეტაენას. რომ განვასხვავოთ $A \equiv B$ და $A \leftrightarrow B$, ხშირად გამოიყენება ტერმინი

მატერიალური ექვივალენტობა $A \leftrightarrow B$ ექვივალენტობისათვის, განსხვავებით *ლოგიკური ექვივალენტობისგან*, რომელიც აღინიშნება $\equiv$ -ით. ანალოგიურად, ვიტყვით, რომ A *მატერიალურად ასკვნის* B-ს (ან B *მატერიალურად გამომდინარეობს* A-დან) $A \rightarrow B$ –თვის (ხოლო $\rightarrow$ -ას ეწოდება *მატერიალური იმპლიკაცია*) და A *ლოგიკურად ასკვნის* B-ს (ან B *ლოგიკურად გამომდინარეობს* A-დან) $A \Rightarrow B$ –თვის და $\Rightarrow$-ას ეწოდება *ლოგიკური იმპლიკაცია.*

არსებობს მნიშვნელოვანი კავშირი ზოგად ტავტოლოგიებსა, ლოგიკური ექვივალენტობებსა და ლოგიკურ იმპლიკაციებს შორის. ცხადია, რომ A ტავტოლოგიაა, თუ $A \equiv \mathrm{T}$, და A წინააღმდეგობრიობაა, თუ $A \equiv \mathrm{F}$. აგრეთვე იოლად საჩვენებელია, რომ თუ A ტავტოლოგიაა, მაშინ $\mathrm{T} \Rightarrow A$, და თუ A წინააღმდეგობრიობაა, მაშინ $A \Rightarrow \mathrm{F}$. დაბოლოს, $A \equiv B$ –დან ვასკვნით, რომ $A \Rightarrow B$ და $B \Rightarrow A$. მაშასადამე, ყოველი ლოგიკური ექვივალენტობა შეიძლება გამოყენებულ იქნას ორი ლოგიკური იმპლიკაციის დასამტკიცებლად. პირიქით, თუ $A \Rightarrow B$ და $B \Rightarrow A$, მაშინ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $A \equiv B$.

სავარჯიშოები 1.4

1. ააგეთ ჭეშმარიტობის ცხრილი შემდეგი გამოსახულებებისათვის. ყოველი გამოსახულებისათვის უჩვენეთ არის თუ არა ის ტავტოლოგია, წინააღმდეგობრიობა ან კონტინგენტი.
   - **(a)** $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
   - **(b)** $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
   - **(c)** $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
   - **(d)** $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
   - **(e)** $(Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P$
   - (f) $\neg(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

2. გამოიყენეთ ტავტოლოგია $P \wedge \neg P$, რათა დამტკიცდეს, რომ შემდეგი გამოსახულებები ტავტოლოგიებია.
   - **(a)** $(P \rightarrow Q) \vee \neg(P \rightarrow Q)$
   - **(b)** $\neg P \vee \neg\neg P$
   - **(c)** $((P \wedge S) \vee Q) \vee \neg((P \wedge S) \vee Q)$

3. უჩვენეთ, რომ $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ ტავტოლოგიაა. გარდაქმენით ეს ტავტოლოგია სქემად A-ს ჩანაცვლებით P-ს მაგივრად და B-ს ჩანაცვლებით Q -ს მაგივრად. გამოიყენეთ ეს სქემა, რომ დაამტკიცოთ

$$(\neg P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg\neg P \rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg Q$$

4. რა განსხვაებაა ლოგიკურ იმპლიკაციასა და მატერიალურ იმპლიკაციას შორის?
5. დილემა არის მსჯელობა, რომელიც იძლევა საშუალებას დავასკვნათ R-ი, მოცემული წინამძღვრებიდან $P \vee Q, P \rightarrow R$ და $Q \rightarrow R$.
   - **(a)** გარდაქმენით ეს დილემა ტავტოლოგიაში და დაამტკიცეთ ეს ჭეშმარიტობის ცხრილის გამოყენებით.
   - **(b)** გარდაქმენით ეს დილემა წინააღმდეგობრიობაში და დაამტკიცეთ ეს ჭეშმარიტობის ცხრილის გამოყენებით.

3.5 ლოგიკური ექვივალენტობები და მათი გამოყენება

3.5.1 შესავალი

განვიხილოთ ორი მტკიცებულება:

პროგრამა კარგად დაწერილია და კარგად დოკუმენტირებულია.

პროგრამა კარგად დოკუმენტირებულია და კარგად დაწერილია.

ცხადია, რომ ორივე მტკიცებულებას გააჩნია ერთიდაიგივე ჭეშმარიტობის ცხრილი, და ამიტომ ისინი, განსაზღვრის თანახმად, ლოგიკურად ექვივალენტურებია. ეს ცნება რომ გავხადოთ უფრო ზუსტი, ვთარგმნოთ ისინი ლოგიკის ენაში. თუ P გამოსახავს გამონათქვამს " პროგრამა კარგადაა დაწერილი" და Q გამოსახავს გამონათქვამს " პროგრამა კარგადაა დოკუმენტირებული", მაშინ პირველი მტკიცებულება ითარგმნება როგორც $P \wedge Q$, ხოლო მეორე მტკიცებულება ითარგმნება როგორც $Q \wedge P$. პირველი შეხედვით, თანახმად $\wedge$ კავშირის განსაზღვრისა, დასტურდება, რომ ორივე გამოსახულებას გააჩნია ერთიდაიგივე ჭეშმარიტობის ცხრილი მნიშვნელობათა მინიჭების ყველა შესაძლო განაწილებისათვის; ე. ი. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$ არის ტავტოლოგია. ეს კი ამტკიცებს იმას, რომ მოყვანილი ორი გამოსახულება ლოგიკურად ექვივალენტურია. მტკიცებულებები, რომლებიც ლოგიკურად ექვივალენტურებია, შეიძლება შევანაცვლოთ ერთმანეთთან ჭეშმარიტობის ცრილის გამოყენების გარეშე. უფრო მეტიც, ვინაიდან ლოგიკური ექვივალენტობები ტავტოლოგიებია, ისენი შეიძლება გარდაიქმნან სქემად და გამოყენებულ იქნან როგორც სქემა. ჩვენ ვუჩვენებთ, როგორ შეიძლება ეს ორი თვისება გამოყენებულ იქნას როგორც ალგებრული აქსიომები ლოგიკური გამოსახულებებისათვის.

3.5.2 ლოგიკური ექვივალენტობების დამტკიცება ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით

განვიხილოთ შემდეგი ორი მტკიცებულება:

ის ან არ არის კარგად ინფორმირებული, ან ის არ არის პატიოსანი.

არ არის მართალი, რომ ის კარგად ინფორმირებულია და პატიოსანია.

ინტუიციურად, ეს ორი მტკიცებულება ლოგიკურად ექვივალენტურია. ამას ეხლა ჩვენ დავამტკიცებთ. განვსაზღვროთ P და Q , რომ წარმოვადგინოთ მტკიცებულებები: ის კარგად ინფომირებულია და ის არის პატიოსანი, შესაბამისად. პირველი მტკიცებულება ჩაიწერება როგორც $\neg P \vee \neg Q$, ხოლო მეორე როგორც $\neg(P \wedge Q)$. ჩვენი მტკიცებაა, რომ ეს ორი გამოსახულება ლოგიკურად ექვივალენტურია; ე. ი. $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ ტავტოლოგიაა. ეს დამტკიცებულია 1.13 ცხრილის საშუალებით. სწორედ ბოლო სვეტი უჩვენებს, რომ მოცემული გამოსახულება ტავტოლოგიაა, რაც ნიშნავს, რომ ორი მოცემული მტკიცებულება, მართლაც, ლოგიკურად ექვივალენტურებია. იგივე შედეგი მიიღება, თუ შევადარებთ წინა ორ სვეტს ერთმანეთს და შევამოწმებთ არიან თუ არა ისინი ერთნაირები. ლოგიკური ექვივალენტობა, რომელიც დამტკიცებულია 1.13 ცხრილის საშუალებით, მნიშვნელოვანია. მას უწოდებენ *დე მორგანის კანონს.*

ცხრილი 1.13 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

განვიხილოთ შემდეგი წყვილი მტკიცებულებებისა:

თუ საქონელი არ არის მიღებული, მაშინ ბაჟი არ გადაიხდება.

თუ ბაჟი არის გადახდილი, მაშინ საქონელი იქნება მიღებული.

თუ P და Q აღნიშნავენ, შესაბამისად, " საქონელი იყო მიღებული" და " ბაჟი გადახდილია", მაშინ ეს ორი მტკიცებულება ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\neg Q \rightarrow \neg P$ და $P \rightarrow Q$. $P \rightarrow Q$ და $\neg Q \rightarrow \neg P$ უწოდებენ *კონტრაპოზიციებს* ერთმანეთის მიმართ. ცხრილი 1.14 – დან ჩანს, რომ კონტრაპოზიციები ლოგიკურად ექვივალენტურებია; ე. ი.

$$\neg Q \rightarrow \neg P \ \leftrightarrow P \rightarrow Q$$

ლოგიკურად ექვივალენტურობა მტკიცდება ბოლო ორი სვეტით, რომლებიც ერთნაირია.

ცხრილი 1.14 $\neg Q \rightarrow \neg P \ \leftrightarrow P \rightarrow Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$P \rightarrow Q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

შემდეგი ლოგიკური ექვივალენტობა ძალიან მნიშვნელოვანია, რომელიც უკვე გამოყენებული იყო ჩვენს დისკუსიებში.

P და Q –ს აქვთ ერთიდაიგივე ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა.

თუ P, მაშინ Q, და თუ Q, მაშინ P.

მეორე მტკიცებულება სხვა სიტყვებით შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად "P მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Q ". პირველი მტკიცებულება გვაძლევს $P \ \leftrightarrow Q$, ხოლო მეორე $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$. ცხრილი 1.15 გვიჩვენებს, რომ ეს ორი გამოსახულება ლოგიკურად ექვივალენტურია; ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა ორი სვეტი, შესაბამისი ორი გამოსახულებისა, იდენტურია.

ცხრილი 1.15

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

3.5.3 გამონათქვამთა ალგებრა

ჩვეულებრივ ალგებრაში გამოსახულებები, რომლებიც ჩაწერილია ცვლადების საშუალებით, ექვემდებარებიან მისაღებ გარდაქმნებს. გამონათქვამთა ალგებრაში, ლოგიკური გამოსახულებები, ე. ი. ლოგიკური გამოსახულებები, რომლებიც შეიცავენ კონსტანტებს და ცვლადებს, აგრეთვე ექვემდებარებიან გარკვეულ გარდაქმნებს. სანამ შევუდგებოდეთ გამონათქვამთა ალგებრის განხილვას, გადავხედოთ ჩვეულებრივ ალგებრას და ვნახოთ როგორ გარდაიქმნებიან გამოსახულებები. მაგალითად, განვიხილოთ გამოსახულება

$$(a + b) – b$$

ერთი შეხედვით ჩანს, რომ ეს გამოსახულება უნდა გვაძლევდეს a-ს. მართლაც, ჩვენ ისე ვართ შეჩვეული ისეთი ალგებრული გარდაქმნების წარმოდგენაში, რომ დარწმუნებული ვართ ყოველი მომდევნო ნაბიჯის გაკეთებაში. მოდით, მივადევნოთ თვალი ყველა ნაბიჯს დეტალურად. პირველყოვლისა ჩვენ გაგვაჩნია შემდეგი ტოლობები:

$$(x + y) – z = x + (y – z) \quad (1.2)$$
$$y – y = 0 \quad (1.3)$$
$$x + 0 = x \quad (1.4)$$

მოცემულ სამივე კანონში, ცვლადები x, y და z შეიძლება ჩანაცვლდეს ნებისმიერი გამოსახულებებით; ე. ი. მოცემული კანონები შეიძლება ვიგულისხმოთ როგორც სქემები. მაშასადამე, ნებისმიერი ალგებრული ტოლობა არის სქემა. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ (1.2)-ში $x = a, y = b$ და $z = b$, რომელიც იძლევა შედეგს

$$(a + b) – b = a + (b – b)$$

შემდეგ (1.3)-დან გამოგვყავს, რომ $b – b = 0$. ეს ნიშნავს, რომ $b – b$ და 0 ექვივალენტურებია იმ აზრით, რომ ნებისმიერი გამოსახულების მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ ერთს შევანაცვლებთ მეორეთი. მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$(a + b) – b = a + (b – b) = a + 0$$

მარჯვნა წევრი, ე. ი. $a + 0$, შეგვიძლია გავამარტივოთ (1.4)-ის გამოყენებით, რომელიც გვაძლევს

$$(a + b) – b = a$$

ეხლა განვიხილოთ შემდეგი ლოგიკური გამოსახულება:

$$(P \wedge Q) \wedge \neg Q$$

ეს ლოგიკური გამოსახულება შეიძლება გამარტივდეს მსგავსი გზით, იმ განსხვავებით, რომ ლოგიკური ექვივალენტობები ენაცვლებიან ალგებრულ ტოლობებს. სახელდობრ, გამოიყენება შემდეგი სქემები:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \quad (1.5)$$
$$A \wedge \neg A \equiv \mathrm{F} \quad (1.6)$$
$$A \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F} \quad (1.7)$$

ეხლა ჩვენ ვიყენებთ (1.5), სადაც $A = P, B = Q$ და $C = \neg Q$, რომ მივიღოთ

$$(P \wedge Q) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (Q \wedge \neg Q)$$

სქემა (1.6) გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ $Q \wedge \neg Q$ ლოგიკურად ექვივალენტურია F-სა, რაც იძლევა საშუალებას შევანაცვლოთ $Q \wedge \neg Q$ F-ით. მაშასადამე,

$$(P \wedge Q) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (Q \wedge \neg Q) \equiv P \wedge \mathrm{F}$$

დაბოლოს, (1.7)-დან, ვასკვნით, რომ მარჯვენა გამოსახულება არის F. ამიტომ,

$$(P \wedge Q) \wedge \neg Q \equiv \mathrm{F} \tag{1.8}$$

შევნიშნოთ, რომ ალგებრაში სინამდვილეში არ ვანსხვავებთ სქემას და გამოსახულებას. მიზეზი ის არის, რომ ნებისმიერი გამოსახულება შეიძლება გარდაიქმნას სქემად, და პირიქით. ამავე მიზეზით, ჩვენ არ განვასხვავებთ ლოგიკურ ექვივალენტობებს და სქემებს, რომლებიც მათ წარმოქმნიან.

გამონათქვამთა ალგებრას აქვს ბევრი გამოყენება. აქ ჩვენ ვიყენებთ გამონათქვამთა ალგებრას, რათა დამტკიცდეს, რომ კერძო მსჯელობა კორექტულია. ამ შემთხვევაში ძალზე ადვილია ჩვენება იმისა, რომ შეუძლებელია ყველა წინამძღვრი იყოს ჭეშმარიტი, ხოლო დასკვნა მცდარი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მტკიცდება, რომ კონიუნქცია წინამძღვრებისა და უარყოფა დასკვნისა, შეუძლებელია ერთდროულად იყოს ჭეშმარიტი.

მაგალითი 1.11 დაამტკიცეთ, რომ როგორც კი $P \wedge Q$ დადასტურებულია, შეგვიძლია დავასკვნათ Q.

ამოხსნა. მოცემული მსჯელობა კორექტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(P \wedge Q) \wedge \neg Q$ წინააღმდეგობრიობაა. ეს გამომდინარეობს (1.8)-დან. სხვათაშორის, კანონი $P \wedge Q \equiv\!> Q$ ცნობილია როგორც *გამარტივების კანონი* . ■

3.5.4 იმპლიკაციისა და ბიიმპლიკაციის მოშორება

ვინაიდან იმპლიკაციის და ბიიმპლიკაციის სიმბოლიკის გააზრება ცოტა რთულია, ჩვეულებრივ მათ იცილებენ თავიდან, სანამ გამოიყენებენ შემდგომ ალგებრულ გარდაქმნებს. თავიდან რომ მოვიცილოთ იმპლიკაცია, იყენებენ შემდეგ ლოგიკურ ექვივალენტობას. მკითხველს შეუძლია დაამტკიცოს ეს ექვივალენტობა ჭეშმარიტობის ცხრილის მეთოდით.

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q \tag{1.9}$$

არსებობს ორი ხერხი ბიიმპლიკაციის წარმოდგენისა:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \tag{1.10}$$
$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P) \tag{1.11}$$

ვერსია, რომელიც მოცემულია (1.10)-ით, გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ ორი გამოსახულება არის ექვივალენტური, თუ მათ გააჩნიათ ერთნაირი ჭეშმარიტობის ცხრილი. ვერსია, რომელიც მოცემულია (1.11)-ით, ამახვილებს ყურადღებას იმ ფაქტზე, რომ ორი გამოსახულება ექვივალენტურია, თუ პირველიდან გამომდინარეობს მეორე და მეორედან გამომდინარეობს პირველი. ვინაიდან ჩვენ გვსურს ყველა იმპლიკაციის მოშორება, ჩვენ ვიყენებთ (1.9)-ს, რომ გადაიწეროს (1.11) შემდეგნაირად:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \qquad (1.12)$$

მაშასადამე, არსებობს ორი ტოლობა, რომელიც იძლევა საშუალებას მოვაშოროთ $\leftrightarrow$, (1.10) და (1.12)-ით. ვიყენებთ იმ ტოლობას, რომელიც ვითარებისამებრ უფრო მოსახერხებელია.

მაგალითი 1.12 მოაშორეთ $\leftrightarrow$ და $\rightarrow$ შემდეგი გამოსახულებიდან:

$$(P \rightarrow Q \wedge R) \vee ((R \leftrightarrow S) \wedge (Q \vee S))$$

ამოხსნა. (1.9) ტოლობა გვაძლევს საშუალებას $P \rightarrow Q \wedge R$ შევცვალოთ $\neg P \vee (Q \wedge R)$ –ით

$$(P \rightarrow Q \wedge R) \vee ((R \leftrightarrow S) \wedge (Q \vee S)) \equiv (\neg P \vee Q \wedge R) \vee ((R \leftrightarrow S) \wedge (Q \vee S))$$

შემდგომ, ვიყენებთ (1.12)-ს, რომ ის გარდავქმნათ შემდეგი ექვივალენტური გამოსახულებით:

$$(\neg P \vee Q \wedge R) \vee ((\neg R \vee S) \wedge (R \vee \neg S)) \wedge (Q \vee S)) \qquad \blacksquare$$

3.5.5 ძირითადი კანონები გამონათქვამთა ალგებრისათვის

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვიმსჯელებთ რიგ მნიშვნელოვან ექვივალენტობებზე, რომლებიც სასარგებლოა ლოგიკური გამოსახულებების გამარტივებისათვის, სხვა სიტყვებით, მანიპულირებისათვის. ჩვენ დავიწყებთ მსჯელობას ცხრილი 1.16-ში მოყვანილი კანონების შესახებ. ზოგი მათგანი დამტკიცებული იყო ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით. ამ მეთოდის გამოყენება შეიძლება სხვა კანონების დასამტკიცებლადაც. შევნიშნოთ, რომ, ორმაგი უარყოფის კანონის გამოკლებით, ცხრილი 1.16-ში მოყვანილი ყველა კანონი წარმოდგენილია ორი გამოსახულებით (ფორმულით), რომლებსაც უწოდებენ *დუალურ წყვილს*. ყოველი გამოსახულებისათვის არსებობს მისი დუალური თუ T-ს შევცვლით F-ით და ყველა $\wedge$ შევცვლით $\vee$-ით და ყველა $\vee$-ს $\wedge$-ით. მაგალითად, მესამის გამორიცხვის კანონის დუალურს წარმოადგენს წინაამდღეგობრიობის კანონი. მისი დუალური მიიღება $\vee$-ს შეცვლით $\wedge$-ით, შედეგად ვღებულობთ $P \wedge \neg P$, რომელიც ლოგიკურად ექვივალენტურია F-ის, რომელიც შეესაბამება T-ს მესამის გამორიცხვის კანონში. ერთი შეხედვით ჩანს, რომ ორმაგი უარყოფის კანონს არ გააჩნია მისი დუალი. მიუხედავად ამისა, თუ ყურადღებით დავაკვირდებით, ეს კანონი თავის თავის დუალურია. ამ აზრით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ცხრილი 1.16-ში მოყვანილ ყველა კანონს გააჩნია თავისი დუალი, და იგივე შეგვიძლია ვთქვათ ყველა იმ ფორმულებზე, რომლებიც გამოიყვანება მოყვანილი კანონების საშუალებით.

ცხრილი 1.16-ში მოყვანილი კანონები იძლევა საშუალებას გავამარტივოთ გამოსახულებები. განვიხილოთ, მაგალითად, გამოსახულება $\neg\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)$. ორმაგი უარყოფის კანონი გვაძლევს საშუალებას ის გადაიწეროს როგორც $P \wedge (Q \vee \neg Q)$, და მესამის გამორიცხვის კანონის გამო, ის გარდაიქმნება $P \wedge \mathrm{T}$ –ს გამოსახულებად. იგივეობის კანონი გვიჩვენებს, რომ ის არის P, და ჩვენ ვასკვნით, რომ

$$\neg\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \equiv P$$

კომუტაციურ, ასოციაციურ და დისტრიბუციულ კანონებს გააჩნიათ თავიანთი ექვივალენტი სტანდარტულ ალგებრაში. მართლაც, კავშირი $\vee$ ხშირად მოიაზრება როგორც $+$, ხოლო

კავშირი $\wedge$ - როგორც $\times$. მაგალითად, გამოსახულებას $P \vee Q \equiv Q \vee P$ შეესაბამება კომუტაციურობის კანონი $a + b = b + a$ სტანდარტულ ალგებრაში. ბევრია ანალოგია სტანდარტულ ალგებრასა და გამონათქვამთა ალგებრას შორის. ზოგ შემთხვევაში ანალოგია არ მოქმედებს. კერძოდ, $(a + b) \times (a + c) \neq a + (b \times c)$, მაგრამ $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv P \vee (Q \wedge R)$.

ცხრილი 1.16-ში მოყვანილი კანონებიდან გამოიყვანება სხვა კანონები. გარკვეულად მნიშვნელოვანია *შთანთქმის* კანონები

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P \tag{1.13}$$
$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \tag{1.14}$$

ცხრილი 1.16. კონიუნქციის, დიზიუნქციის და უარყოფის კანონები

კანონი	სახელი
$P \vee \neg P \equiv \mathrm{T}$ $P \wedge \neg P \equiv \mathrm{F}$	მესამის გამორიცხვის კანონი წინააღმდეგობრიობის კანონი
$P \vee \mathrm{F} \equiv P$ $P \wedge \mathrm{T} \equiv P$	იგივეობის კანონი
$P \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$ $P \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$	დომინირების კანონი
$P \vee P \equiv P$ $P \wedge P \equiv P$	იდენპოტეტურობის კანონი
$\neg(\neg P) \equiv P$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	კომუტაციურობის კანონი
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	ასოციაციურობის კანონი
$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv P \vee (Q \wedge R)$ $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv P \wedge (Q \vee R)$	დისტრიბუციულობის კანონი
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	დე მორგანის კანონი

(1.13) ექვივალენტობა მტკიცდება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &\equiv (P \wedge \mathrm{T}) \vee (P \wedge Q) && \text{იგივეობის კანონი} \\ &\equiv P \wedge (\mathrm{T} \vee Q) && \text{დისტრიბუციულობის კანონი} \\ &\equiv P \wedge \mathrm{T} && \text{დომინირების კანონი} \\ &\equiv P && \text{იგივეობის კანონი} \end{aligned}$$

ანალოგიურად მტკიცდება (1.14). ძალიან სასარგებლოა შთანთქმის კანონები, როდესაც გამოსახულება მოითხოვს გამარტივებას. კიდევ ორი მნიშვნელოვანი კანონია

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv Q \tag{1.15}$$
$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \equiv Q \tag{1.16}$$

რომ დავამტკიცოთ (1.15), ვიყენებთ დისტრიბუციულობის კანონს, რომ მივიღოთ $(P \vee \neg P) \wedge Q$, რომელიც თავის მხრივ მარტივდება $\mathrm{T} \wedge Q$ –ით მესამის გამორიცხვის კანონის გამო. შემდეგ ვიყენებთ იგივეობის კანონს, რომელიც გვაძლევს Q –ს, რაც ასრულებს დამტკიცებას. ანალოგიურად მტკიცდება (1.16).

3.5.6 შემოკლებები გამოსახულებების მანიპულირებისათვის

წინა პარაგრაფში, ცხრილი 1.16-ის კანონები გამოყენებული იყო ზუსტად ისე როგორცაა ისინი მოცემული. პრაქტიკული მიზნებისათვის, ხშირად ეს მოუხერხებელია, და ამიტომ შემოკლებები დასაშვებია. რომ დავინახოთ თუ როგორ მუშაობს, განვიხილოთ კონიუნქცია

$$((P_1 \wedge P_3) \wedge P_2) \wedge (\mathrm{T} \wedge P_1) \qquad (1.17)$$

ვინაიდან $\mathrm{T} \wedge P_1 \equiv P_1$, შეგვიძლია მოვაშოროთ T. ასოციაციურობის კანონის გამო ადვილი დასანახია ფრჩხილების განლაგება. ამიტომ შეიძლება ისინიც ჩამოვაშოროთ. უფრო მეტიც, კომუტაციურობის კანონი იძლევა საშუალებას თავისუფლად გადავაწყოთ წევრები. მაშასადამე

$$((P_1 \wedge P_3) \wedge P_2) \wedge P_1) \equiv P_1 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$$

ეხლა კი ცხადია, მეორე ადგილას მყოფი P_1 შეგვიძლია მოვაშოროთ იდემპოტენტურობის კანონის გამო. ამიტომ (1.17) მარტივდება $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ -ით.

შემდეგ განვიხილოთ გამოსახულება

$$P \wedge \mathrm{F} \wedge Q$$

დომინირების კანონის ორჯერ გამოყენებით ვასკვნით, რომ მოცემული გამოსახულება დაიყვანება F –მდე. ზოგადად, ნებისმიერი კონიუნქცია, რომელიც შეიცავს F წევრს გვაძლევს F –ს. იგივეს იძლევა თუ კონიუნქცია შეიცავს ურთიერთ გამომრიცხავ ლიტერალებს. მაგალითად, $P \wedge Q \wedge \neg P$ გვაძლევს F –ს. ეს რომ დავინახოთ, გადავწეროთ $P \wedge Q \wedge \neg P$ როგორც $P \wedge \neg P \wedge Q$, ვიყენებთ წინააღმდეგობის კანონს, რომ მივიღოთ $\mathrm{F} \wedge Q$, რომელიც არის F –ი.

ყველაფერი რომ შევაჯამოთ, კონიუნქციის გამარტივებისათვის, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ლიტერალებს, ჩვენს ხელთ არის შემდეგი წესები. სანამ გამოვიყენებთ ამ წესებს, უკეთესია დავალაგოთ ლექსიკოგრაფიკულად, ცვლადების სახელების მიხედვით.

1. თუ კონიუნქცია შეიცავს ურთიერთგამომრიცხავ ლიტერალებს ან თუ ის შეიცავს ლოგიკურ კანსტანტა F–ს, მაშინ ის ყოველთვის გვაძლევს F–ს; ე. ი. წინააღმდეგობრიობას.
2. ყველა შემავალი ლოგიკური კონსტანტა T და ყველა დუბლირებული კოპიოები ნებისმიერი ლიტერალებისა, შეიძლება მოშორებულ იქნას.

თუ საქმე გვაქვს დიზიუნქციასთან, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დუალური წესები.

1. თუ დიზიუნქცია შეიცავს ურთიერთგამომრიცხავ ლიტერალებს ან თუ ის შეიცავს ლოგიკურ კანსტანტა T–ს, მაშინ ის ყოველთვის გვაძლევს T–ს; ე. ი. ტავტოლოგიას.

2. ყველა შემავალი ლოგიკური კონსტანტა F და ყველა დუბლირებული კოპიოები ნებისმიერი ლიტერალებისა, შეიძლება მოშორებულ იქნას.

მაგალითად, $P \vee Q \vee \neg P$ გვაძლევს T–ს, ხოლო $P \vee Q \vee P \vee \mathrm{F}$ გვაძლევს $P \vee Q$ –ს. აღვნიშნოთ განსხვავება კონიუნქციასა და დიზიუნქციას შორის. დიზიუნქცია გამომრიცხავი ლიტერალებით ან დიზიუნქცია, რომელიც შეიცავს T–ს, ყოველთვის გვაძლევს T–ს. ე. ი. ის ტავტოლოგიაა. კონიუნქცია გამომრიცხავი ლიტერალებით ან კონიუნქცია, რომელიც შეიცავს ლოგიკურ კონსტანტა F–ს, ყოველთვის არის წინააღმდეგობრიობა.

არსებობს კონიუნქციები ოთხი, სამი ან ორი წევრით. მაგალითად, $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$ არის ოთხწევრიანი კონიუნქცია, ხოლო $P \wedge Q$ ორწევრიანი კონიუნქციაა. გამოსახულება შემდგარი ერთი პროპოზიციული ცვლადისგან შეგვიძლია მოვიაზროთ როგორც ერთწევრიანი კონიუნქცია. უფრო მეტიც, მოხერხებულია განვსაზღვროთ T როგორც ნულწევრიანი კონიუნქცია. ეს შესაძლებელია გავამართლოთ, მაგალითად, შემდეგი ოთხი გამოსახულებების განხილვით:

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \mathrm{T}$
$P_1 \wedge P_2 \wedge \mathrm{T}$
$P_1 \wedge \mathrm{T}$
T

თუ T–ს გამოვრიცხავთ, მაშინ პირველი გამოსახულება გახდება სამწევრიანი გამოსახულება, მეორე ორწევრიანი კონიუნქცია, მესამე ერთწევრიანი კონიუნქცია. ეს კი უშვებს იმას, რომ მეოთხე გამოსახულება გახდება ნულწევრიანი კონიუნქცია. ნულწევრიანი კონიუნქციები სასარგებლოა, როცა ვადასტურებთ მოდელის კორექტულობას დამტკიცებისათვის. ამ შემთხვევაში, უნდა აიგოს წინამძღვრების კონიუნქცია, და თუ ნულწევრიანი კონიუნქციები დასაშვებია, შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ დასკვნები, რომლებიც მართებულია ნებისმიერი წინამძღვრის გამოყენების გარეშე. მართლაც, ნებისმიერი ტავტოლოგია შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნას როგორც დასკვნა, რომელიც არ მოითხოვს წინამძღვრებს. ნულწევრიანი კონიუნქციის განსაზღვრით, რომელიც გვაძლევს T–ს, ყველა ტავტოლოგია შეიძლება განხილულ იქნას როგორც სპეციალრი შემთვევა კორექტული ლოგიკური მსჯელობისა. მის შესახებ დისკუსია გვექნება მოგვიანებით. აგრეთვე არსებობს ნულწევრიანი დიზიუნქციები. მაგრამ, ნულწევრიანი დიზიუნქციები ყოველთვის გვაძლევს F–ს.

მაგალითი 1.13 გაამარტივეთ

$$(P_3 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \vee (P_1 \wedge P_3 \wedge \neg P_1)$$

ამოხსნა. მოცემული გამოსახულება არის ორი კონიუნქციის დიზიუნქცია. პირველ რიგში, გავამარტივოთ კონიუნქციები. პირველ კონიუნქციაში P_3 გვხვდება ორჯერ, ამიტომ ერთი P_3 შეგვიძლია მოვაშოროთ. მეორე კონიუნქცია შეიცავს როგორც P_1 ასევე $\neg P_1$, და ის ამიტომ გვაძლევს F–ს. მაშასადამე,

$$(P_3 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \vee (P_1 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \equiv (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee \mathrm{F} \equiv (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \qquad \blacksquare$$

3.5.7 ნორმალური ფორმები

ზოგადად სასარგებლოა, რომ გამოსახულებებისათვის გვქონდეს სტანდარტული ფორმები, იმიტომ, რომ ეს აადვილებს ვაწარმოოთ ორი გამოსახულების იდენტიფიცირება და შედარება. არსებობს აგრეთვე სტანდარტული ფორმები ლოგიკური გამოსახულებებისათვის, და მათ უწოდებენ *ნორმალურ ფორმებს.* არსებობს ნორმალური ფორმების ორი ტიპი, *დიზიუნქციური ნორმალური ფორმები* და *კონიუნქციური ნორმალური ფორმები.* ორივე შემთხვევაში გაგვაჩნია *სრულყოფილი ფორმები,* ე. ი., შესაბამისად, სრულყოფილი დიზიუნქციური და კონიუნქციური ნორმალური ფორმები, რომლებიც განისაზღვრებიან ცალსახად. მიუხედავად ამისა, ხშირად უფრო მოსახერხებელია ნორმალური ფორმების გამოყენება, რომლებიც არ წარმოადგენენ სრულყოფილ ფორმას, რადგანაც ისინი უფრო მოკლეა.

განსაზღვრება 1.18. ლოგიკურ გამოსახულებას უწოდებენ *დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმას,* თუ ის ჩაწერილია როგორც დიზიუნქცია, სადაც ყველა წევრი წარმოადგენს ლიტერალების კონიუნქციას. ანალოგიურად, ლოგიკურ გამოსახულებას უწოდებენ *კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმას,* თუ ის ჩაწერილია როგორც კონიუნქცია, სადაც ყველა წევრი წარმოადგენს ლიტერალების დიზიუნქციას.

დიზიუნქციური ნორმალური ფორმების მაგალითს წარმოადგენენ $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$, $P \vee (Q \wedge R)$ და $\neg P \vee \mathrm{T}$. მეორეს მხრივ, დიზიუნქცია $\neg (P \wedge Q) \vee R$ არ არის ჩაწერილი ნორმალურ ფორმაში, იმიტომ რომ ის შეიცავს არაატომური გამოსახულების უარყოფას. მხოლოდ ატომური ქვეგამოსახულებები შეიძლება უარყოფილ იქნან, და უარყოფილი ატომური ქვეგამოსახულებები წარმოადგენენ ლიტერალებს. კონიუნქციური ნორმალური ფორმების მაგალითს წარმოადგენენ $P \wedge (Q \vee R)$ და $P \wedge \mathrm{F}$. მაგრამ, $P \wedge (R \vee (P \wedge Q))$ არ არის კონიუნქციური ნომალური ფორმა, ვინაიდან დიზიუნქცია $(R \vee (P \wedge Q))$ შეიცავს კონიუნქციას როგორც ქვეგამოსახულებას. კონიუნქციური ნორმალური ფორმა რომ გვქონდეს, არცერთი დიზიუნქცია არ უნდა შეიცავდეს კონიუნქციას ქვეგამოსახულების სახით. ლიტერალები, როგორიცაა P ან $\neg P$, ორივე ერთდროულად წარმოადგენენ კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმას და დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმას, და ასეთივე არიან T და F.

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვიმსჯელებთ როგორ უნდა მივიღოთ კონიუნქციური ნორმალური ფორმები ალგებრული მანიპულაციების გამოყენებით. დიზიუნქციური ნორმალური ფორმები მიიღება ანალოგიური გზით. უფრო მეტიც, 1.5.8 პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება როგორ მიიღება დიზიუნქციური ნორმალური ფორმები ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით. სამი ბიჯი მოითხოვება, რომ მივიღოთ კონიუნქციური ნორმალური ფორმები ალგებრული მანიპულაციების გამოყენებით.

1. უნდა მოვაცილოთ ყველა $\rightarrow$ და $\leftrightarrow$.
2. თუ მოცემული გამოსახულება შეიცავს ნებისმიერ უარყოფილ შედგენილ ქვეგამოსახულებას, ან უნდა მოვაცილოთ უარყოფა ორმაგი უარყოფის კანონის გამოყენებით ან დე მორგანის კანონის გამოყენებით, რომ შევამციროთ უარყოფის მიდამო.
3. როგორც კი მოინახება შედგენილი გამოსახულება უარყოფის გარეშე, რომ შევამციროთ $\vee$-ის მიდამო, გამოყენებულ უნდა იქნას შემდეგი ორი კანონი

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (1.18)$$
$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (1.19)$$

(1.18) და (1.19) კანონები გამომდინარეობენ კომუტაციურობის და დისტრიბუციულობის კანონებიდან.

მაგალითი 1.14 გარდაქმენით შემდეგი გამოსახულება ნორმალურ ფორმაში.

$$\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$$

ამოხსნა. კონიუნქციური ნორმალური ფორმა მოძებნება შემდეგი გარდაქმნებით:

$$\begin{aligned}
\neg((P \vee \neg Q) \wedge \neg R) &\equiv \neg(P \vee \neg Q) \vee \neg\neg R && \text{დე მორგანის კანონი}\\
&\equiv \neg(P \vee \neg Q) \vee R && \text{ორმაგი უარყოფის კანონი}\\
&\equiv (\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee R && \text{დე მორგანის კანონი}\\
&\equiv (\neg P \wedge Q) \vee R && \text{ორმაგი უარყოფის კანონი}\\
&\equiv (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) && (1.19)\text{–ით} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ამ მეთოდით მოძიებული ნორმალური კონიუნქციური ფორმა ყოველთვის მიღწევადია. მართლაც, თუ შედგენილი გამოსახულება იწყება უარყოფით, მაშინ გამოიყენება ან ორმაგი უარყოფის კანონი ან დე მორგანის კანონი. ბოლოსდაბოლოს, ყველა უარყოფა უნდა იყოს ლიტერალების ნაწილი. ანალოგიურად, თუ ნებისმიერი ქვეგამოსახულება შეიცავს კონიუნქციას, მაშინ ვიყენებთ ან (1.18) ან (1.19). საბოლოოდ, ყველა დიზიუნქცია მოთავსდება რომელიღაც კონიუნქციის მიდამოში, და ამავე დროს მოცემული გამოსახულება იქნება ნორმალურ ფორმაში.

მაგალითი 1.15 გარდაქმენით შემდეგი გამოსახულება კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში.

$$(P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5))$$

ამოხსნა.

$$\begin{aligned}
&(P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5))\\
&\equiv (P_1 \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5)))\\
&\wedge (P_2 \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5))) && (1.19)\text{-ით}\\
&\equiv (P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_4 \vee P_5) && (1.18)\text{-ით}\\
&\wedge (P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4 \vee P_5) && (1.18)\text{-ით}
\end{aligned}$$

ყველა $\vee$-ას უკვე გააჩნია უმცირესი შესაძლო მიდამო, და გამოსახულება ჩაწერილია კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში.

როგორც კი მიღებულია კონიუნქციური ნორმალური ფორმა, შესამოწმებელია, შესაძლებელია თუ არა შემდგომი გამარტივება. მაშასადამე, უნდა შემოწმდეს, შეიძლება თუ არა გამოყენებულ იქნას (1.13) – (1.16) ექვივალენტობები. სხვა წყარო იგივეობებისა, რომლებიც შეიძლება გამოყენებულ იქნას გამარტივების მიზნით პირველ რიგში არის ცხრილი 1.16 –ის კანონები. კერძოდ, ყველა დიზიუნქცია, რომლებიც შეიცავენ ურთიერთგამომრიცხავ ლიტერალებს შეიძლება უბრალოდ მოვაცილოთ. უფრო მეტიც, ნებადართულია ამოვიღოთ ლიტერალები, რომლებიც გვხვდება ერთზე მეტად ერთსადაიმავე დიზიუნქციაში.

მაგალითი 1.15 გაამარტივეთ შმდეგი ნორმალური ფორმა.

$$(P \vee Q) \wedge P \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$

ამოხსნა. ბოლოდან მეორე დიზიუნქცია შეგვიძლია მოვაშოროთ, იმიტომ რომ ის გვაძლევს T-ს. უფრო მეტიც, შტანთქმის კანონით მოვაცილებთ $(P \vee Q)$, რომელსაც შტანთქავს P. დაბოლოს, (1.16)-ის თანახმად, $(Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ გვაძლევს R–ს.

$$(P \vee Q) \wedge P \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \equiv P \wedge R \qquad \blacksquare$$

კანონები, რომლებიც აღიწერა ამ პარაგრაფში, ხშირად სასარგებლოა გამოსახულებების გასამარტივებლად. განხილული გამარტივებები შეიძლება აგრეთვე მიღებულ იქნან დე მორგანის კანონების გამოყენებით, იმიტომ რომ ისინი იძლევიან საშუალებას გადაიწეროს ექვივალენტობები ისეთნაირად, რომ ორმაგი უარყოფის კანონი იყოს გამოყენებადი. ასევე, გამოსახულებები, რომლებიც შეიცავენ არაუარყოფილ შედგენილ ქვეგამოსახულებებს, უფრო მოქნილია, რომელიც ამაღლებს გამარტივების შესაძლებლობას.

3.5.8 ჭეშმარიტობის ცხრილები და ნორმალური დიზიუნქციური ფორმები

აქამდე ჩვენ ვუჩვენეთ თუ როგორ უნდა აიგოს ჭეშმარიტობის ცხრილი ლოგიკური გამოსახუ-ლებისათვის. შესაძლებელია აგრეთვე ვიმოქმედოთ შებრუნებით. შესაძლებელია ნებისმიერი ჭეშმარიტობის ცხრილი გარდაიქმნას ლოგიკურ გამოსახულებად. გამოსახულება, რომელიც მიიღება ამ გზით, ჩაწერილი იქნება ნორმალურ დიზიუნქციურ ფორმაში. ნამდვილად, კონცეპტუალურად უადვილესი მეთოდი, რომ აიგოს გამოსახულების ნორმალური ფორმა, ჭეშმარიტობის ცხრილის გამოყენებაა. სამწუხაროდ, ჭეშმარიტობის ცხრილი იზრდება ექსპონენციალურად ცვლადების რიცხვთან ერთად, რომელიც ხდის ამ მეთოდს ყურადსაღებ მეთოდად მრავალ ცვლადიან გამოსახულებებისათვის.

ზოგადად, ჭეშმარიტობის ცხრილი გვაძლევს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებს რომელიღაც გამონათქვამისათვის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა მინიჭებისათვის. ცხრილი 1.17 გვაძლევს მაგალითს ჭეშმარიტობის ცხრილისა რომელიღაც f გამონათქვამისათვის. f-ის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა დამოკიდებულია სამ ცვლადზე P, Q და R. ეს გარდაქმნის f-ს ჭეშმარიტობის P, Q და R არგუმენტების მქონე ფუნქციად.

რომ გარდავქმნათ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია ჭეშმარიტობის ცხრილით ლოგიკურ გამოსახულებად, იყენებენ *მინტერმებს.*

ცხრილი 1.17
ჭეშმარიტობის ფუნქციის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	R	f
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

განსაზღვრება 1.19: *მინტერმი* არის ლიტერალების კონიუნქცია, სადაც ყოველი ცვლადი წარმოდგენილია მხოლოდ ერთხელ.

მაგალითად, თუ ჭეშმარიტობის ფუნქციას გააჩნია P, Q და R ცვლადები, მაშინ $P \wedge \neg Q \wedge R$ არის მინტერმი, მაგრამ $P \wedge \neg Q$ და $P \wedge P \wedge \neg Q \wedge R$ არა. $P \wedge \neg Q$ -ში აკლია R-ი, ხოლო $P \wedge P \neg Q \wedge R$ –ში ცვლადი P გვხდება ორჯერ.

ყოველი მინტერმი ჭეშმარიტია მხოლოდ ერთი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა მინიჭებისათვის. მაგალითად, $P \wedge \neg Q \wedge R$ ჭეშმარიტია თუ P -ს მინიჭებულია აქვს მნიშვნელობა T, Q -ს - F, და R -ს - T. სხვა დანარჩენი (განსხვაებული) ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები ხდიან მოცემულ მინტერმს მცდარს. მინტერმების დიზიუნქცია ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როცა ერთი მაინც მისი შემადგენელი მინტერმი ჭეშმარიტია. მაგალითად, $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$ მხოლოდ მაშინ არის ჭეშმარიტი, როცა ერთი მაინც $(P \wedge Q \wedge R)$, $(P \wedge \neg Q \wedge R)$ ან $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$ ჭეშმარიტია. თუ f ფუნქცია წარმოდგენილია ჭეშმარიტობის ცხრილით, ჩვენ ვიცით ზუსტად ჭეშმარიტობის რომელი მნიშვნელობების მინიჭებისათვის არის ის ჭეშმარიტი. აქედან გამომდინარე, ჩვენ შეგვიძლია ამოვარჩიოთ მინტერმები ისეთნაირად, რომელიც ხდის მოცემულ ფუნქციას ჭეშმარიტად და ვქმნით დიზიუნქციას ამ მინტერმებით. ფუნქცია f–ი, მაგალითად, ჭეშმარიტია სამი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობების მინიჭებისათვის:

1. P, Q, R ყველა ჭეშმარიტია.
2. $P, \neg Q, R$ ყველა ჭეშმარიტია.
3. $\neg P, \neg Q, R$ ყველა ჭეშმარიტია.

შესაბამისი მინტერმების მოცემული დიზიუნქცია ლოგიკურად ექვივალენტურია f-ისა, რაც ნიშნავს, რომ ჩვენ გვაქვს f-ის შემდეგი ლოგიკური გამოსახულება:

$$f \equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

ვინადან მინტერმები წარმოადგენენ კონიუნქციას, ჩვენ გამოვსახეთ მოცემული ფუნქცია დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში. სინამდვილეში, მივიღეთ ნორალური ფორმის სპეციალური ტიპი, *სრულყოფილი ნორმალური ფორმა.*

განსაზღვრება 1.20: თუ ჭეშმარიტობის ფუნქცია გამოსახულია როგორც მინტერმების დიზიუნქცია, მას ეწოდება *სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა.*

3.5.9 ბულის ფუნქციები

ამ პარაგრაფში T-ს მაგივრად ჩავწერთ 1, ხოლო F-ის მაგივრად 0.

ნებისმიერ ფუნქციას $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ვუწოდებთ n *ადგილიან ბულის ფუნქციას.* ამ შეთანხმების თანახმად განვსაზღვროთ მნიშვნელოვანი ბულის ფუნქციები შემდეგნაირად:

$x \vee y = \max(x,y)$, $x \wedge y = \min(x,y)$, $x \to y = \min(1, 1 - x + y)$, $\neg x = 1 - x$. ქვემოთ, ცხრილის საშუალებით, მოყვანილია რამოდენიმე ცნობილი ბულის ფუნქცია.

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს n რაოდენობის m ადგილიანი ოპერაციები $f_1,..., f_n$ განსაზღვრული X სიმრავლეზე. აგრეთვე დავუშვათ, რომ X -ზე განსაზღვრულია n

x_1 x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \otimes x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
1 1	1	1	1	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0	0
1 0	1	0	0	1	0	0
0 0	0	0	1	0	0	1

ადგილიანი ოპერაცია f. განვსაზღვროთ X –ზე m ადგილიანი ოპერაცია g შემდეგნაირად

$$g(x_1,..., x_m) = f(f_1(x_1,..., x_m),..., f_n(x_1,..., x_m))$$

ნებისმიერი $x_1,..., x_m \in X$. ვიტყვით, რომ ოპერაცია g მიღებულია $f, f_1,..., f_n$ ოპერაციებისაგან *სუპერპოზიციით (ან ჩასმით).* სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, g *გამოისახება* $f, f_1,..., f_n$ ოპერაციების საშუალებით. $n+k$ ცვლადიან $f(x_1,..., x_n, x_{n+1},..., x_{n+k})$ ფუნქციაში ცვლადებს $x_{n+1},..., x_{n+k}$ ეწოდება *ფიქტიური,* თუ f ფუნქციის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული $x_{n+1},..., x_{n+k}$ ცვლადების მნიშვნელობებზე. ამ განსაზღვრიდან გამომდინარე, ნებისმიერი n ადგილიანი ფუნქცია შეგვიძლია ვიგულისხმოთ როგორც $n + k$ ადგილიანი ფუნქცია, სადაც $k>0$.

ისმის კითხვა: როგორი ბულის ფუნქციები გამოისახება $\vee, \wedge, \neg$ ფუნქციების საშუალებით? ვიდრე ამ კითხვაზე ვუპასუხებდეთ, შემოვიღოთ განსაზღვრება: დავუშვათ F არის რაღაც ფუნქციების სიმრავლე X–ზე და $f_1,..., f_n$ არის ფუნქციები F –დან. ვიტყვით, რომ სისტემა $\{f_1,..., f_n\}$ არის *სრული F-ში,* თუ ნებისმიერი ფუნქცია F –დან გამოისახება $f_1,..., f_n$ ფუნქციების საშუალებით.

$\mathbb{F}$ -ით აღვნიშნოთ ყველა ბულის ფუნქციების სიმრავლე.

თეორემა (*სისრულის თეორემა*). *სისტემა* $\{\vee, \wedge, \neg\}$ *არის სრული ყველა ბულის ფუნქციების* $\mathbb{F}$ *სიმრავლეში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნებისმიერი ბულის ფუნქცია გამოისახება* $\vee, \wedge, \neg$ *ფუნქციების საშუალებით.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $f(x_1,..., x_n)$ არის ნებისმიერი ბულის ფუნქცია. ნათელია, რომ f შეიძლება წარმოვადგინოთ ცხრილის საშუალებით 2^n სტრიქონით, სადაც ყოველი სტრიქონი შეიცავს $x_1,..., x_n$ ცვლადების მნიშვნელობების განაწილებას 0-ით და 1-ით და შესაბამისი $f(x_1,..., x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს. გადავნომროთ სტრიქონები

N	$x_1 \dots x_n$	$f(x_1,\dots,x_n)$
1	11 … 1	δ_1
2	01 … 0	δ_2
…	……	…
i	$\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$	δ_i
…	……	…
2^n	00 … 0	δ_{2^n}

ნატურალური რიცხვებით 1,2,3,…,2^n. მოყვანილ ცხრილში $\varepsilon_j \in \{0.\ 1\}$ ($j = 1, \dots, n$), $\delta_k \in \{0, 1\}$ ($k = 1, \dots, 2^n$). ყოველი i-თვის, სადაც $1 \le i \le 2^n$, D_i-თ აღვნიშნოთ მრავალწევრი $x_1^{\varepsilon_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\varepsilon_n}$, სადაც $x_j^{\varepsilon_j}$ არის x_j, თუ x_j ცვლადის მნიშვნელობა i-ურ სტრიქონზე ტოლია 1, ხოლო $x_j^{\varepsilon_j}$ არის $\neg x_j$, თუ x_j ცვლადის მნიშვნელობა i-ურ სტრიქონზე ტოლია 0. ადვილი დასანახია, რომ D_i არის n ადგილიანი ბულის ფუნქცია $D_i(x_1,\dots,x_n)$. აღვნიშნოთ D-თი შემდეგი ბულის ფუნქცია

$$\bigvee_{\delta_i=1} D_i,$$

ე. ი. ისეთი D_i ფუნქციების ბულის ჯამი ($\vee$), რომ ფუნქცია f –ი i-ურ სტრიქონზე ღებულობს მნიშვნელობა 1. თუ ასეთი სტრიქონი არ არსებობს, მაშინ ფუნქცია f –ის მნიშვნელობა ყოველთვის 0-ს ტოლია, და მაშინ ჩვენ თეორემას აკმაყოფილებს ბულის ფუნქცია $x_1 \wedge \neg x_1$. ბულის ფუნქცია $D(x_1,\dots,x_n)$ ემთხვევა ფუნქცია $f(x_1,\dots,x_n)$-ს. მართლაც, დავუშვათ მოცემულია ცვლადების $x_1 \dots x_n$ მნიშვნელობების 0-ით და 1-ით რაღაც განაწილება და ეს განაწილება წარმოდგენილია k-ური სტრიქონით და ამ სტრიქონზე f ღებულობს მნიშვნელობა 1. ფუნქცია D_k ამ შემთხვევაში (განსაზღვრის თანახმად) ღებულობს მნიშვნელობა 1, ხოლო თუ $i \neq k$, მაშინ D_i k-ურ სტრიქონზე ღებულობს მნიშვნელობა 0. ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ფუნქცია $x_j^{\varepsilon_j}$ (რომელიც D_i-ს შემადგენელი ნაწილია) ღებულობს მნიშვნელობა 1 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_j-ს მნიშვნელობა ემთხვევა ε_j-ს. ხოლო ამ შემთხვევაში ფუნქცია D_k არის ფუნქცია D-ს (როგორც ბულის ფუნქციების ჯამის) შემადგენელი ნაწილი და მისი მნიშვნელობა k-ურ სტრიქონზე 1-ს ტოლია. თუ k-ურ სტრიქონზე ფუნქცია f ღებულობს მნიშვნელობა 0, მაშინ D_k არ არის ფუნქცია D-ს (როგორც ბულის ფუნქციების ჯამის) შემადგენელი ნაწლი და მისი (D ფუნქციის) მნიშვნელობა k-ურ სტრიქონზე 0-ს ტოლია. აქედან ვასკვნით, $D = f$. ■

მაგალითი.

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

ამ შემთხვევაში $D(x_1, x_2) = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$.

შედეგი. *ყოველი სისტემა შემდგარი ორი ფუნქციისაგან* $\{\vee, \neg\}, \{\wedge, \neg\}$ *და* $\{\rightarrow, \neg\}$ *არის სრული ყველა ბულის ფუნქციების* F *სიმრავლეში.*

დამტკიცება. შევნიშნით, რომ ბულის ფუნქცია $x_1 \vee x_2$ ტოლია $\neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)$-სა. ეს ადვილი შესამოწმებელია ცხრილის საშუალებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $\vee$ გამოისახება $\wedge$ და $\neg$ ფუნქციების საშუალებით. ე. ი. , წინა თეორემის თანახმად, $\{\wedge, \neg\}$ სისტემა სრულია. საკმარისია ნებისმიერ ბულის ფუნქციაში გამოსახულება $x_1 \vee x_2$ შეიცვალოს $\neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)$ გამოსახულებით. დარჩენილი დასამტკიცებელი ნაწილი გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან :

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

$$x_1 \wedge x_2 = \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2),$$
$$x_1 \vee x_2 = \neg x_1 \rightarrow x_2,$$
$$x_1 \wedge x_2 = \neg(x_1 \rightarrow \neg x_2).$$

ჩვენ ახლა ვნახეთ, რომ არსებობს წყვილი ბულის ფუნქციებისა, მაგალითად $\wedge$ და $\neg$, რომლის საშუალებით შეიძლება გამოისახოს ნებისმიერი ბულის ფუნქცია.შესაძლებელია აგრეთვე მივაღწიოთ იმავე ეფექტს ერთი ფუნქციის საშუალებით $\downarrow$, რომლის ცხრილი შემდეგია

$x_1 \downarrow x_2$ ტოლია 1 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_1 და x_2 ორივე ტოლია 0. ადვილი დასანახია, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობები : $\neg x_1 = x_1 \downarrow x_1$ და $x_1 \wedge x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$. ამიტომ, სისრულის თეორემის თანახმად, ერთი ბულის ფუნქცია $\downarrow$ საკმარისია რათა გამოისახოს ყველა ბულის ფუნქცია.

მეორე ბულის ფუნქცია, რომელიც საკმარისია ამ მიზნისთვის, არის ფუნქცია |, რომლის ცხრილი შემდეგია

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

$x_1 \mid x_2$ ტოლია 0 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_1 და x_2 ორივე ტოლია 1. რომ ფუნქცია | საკმარისია ყველა ბულის ფუნქციების მისაღებად, გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობების ჭეშმარიტობიდან: $\neg x_1 = x_1 \mid x_1$ და $x_1 \vee x_2 = (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2)$.

3.5.10 კონიუნქციური ნორმალური ფორმები და დამატებები

ამ პარაგრაფში, შემოღებული იქნება *დამატების* ცნება, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული დუალობასთან, და ის გამოიყენებული იქნება კონიუნქციური ნორმალური ფორმების მისაღებად ჭეშმარიტობის ცხრილების საშუალებით. თუ A ნებისმიერი გამოსახულებაა, A-ს დამატებას ვღებულობთ, პირველ რიგში A-ს დუალურის ფორმირებით და შემდეგ ყველა ლიტერალის მათი უარყოფებით შეცვლით. ე. ი., A-ს დამატება არის ყოველთვის ლოგიკურად ექვივალენტური A-ს უარყოფისა.

მაგალითი 1.17 უარყავით გამოსახულება $A = (P \wedge Q) \vee \neg R$ დამატების გამოყენებით.

ამოხსნა. A-ს დუალი არის $(P \vee Q) \wedge \neg R$. დამატება რომ ვიპოვოთ, ყოველი ლიტერალი შევცვალოთ მისი უარყოფით, რომელიც გვაძლევს $(\neg P \vee \neg Q) \wedge R$. აქედან ვასკვნით, რომ

$$\neg A \equiv \neg ((P \vee Q) \wedge \neg R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge R$$ ■

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ დამატება არის უარყოფა. დავუშვათ, რომ comp A აღნიშნავს A-ს დამატებას. თუ A შედგება მხოლოდ ერთი ლიტერალისგან, ვთქვათ $A = P$, მაშინ comp $A = \neg P$, და ის არის A-ს უარყოფა. ანალოგიურ შედეგს ვღებულობთ, თუ $A = \neg P$. აგრეთვე, თუ A = T, მისი დამატება არის F-ი, და comp $A \equiv \neg A$, და იგივე სრულდება თუ A = F. ახლა განვიხილოთ ლიტერალების კონიუნქცია. თუ $A = (P \wedge Q)$, მაშინ მისი დამატება არის $(\neg P \vee \neg Q)$, და ის, დე მორგანის კანონის თანახმად, ლოგიკურად ექვივალენტურია $\neg (P \wedge Q)$. ანალოგიურად, $(P \vee Q)$-ს დამატება, რომელიც არის $(\neg P \wedge \neg Q)$, ლოგიკურად ექვივალენტურია დიზიუნქცია $(P \vee Q)$-ს უარყოფისა. უფრო მეტიც, A და B წევრების კონიუნქციას და დიზიუნქციას გააჩნიათ დამატებები, რომლებიც ლოგიკურად

ექვივალენტურებია, შესაბამისად, $\neg(A \vee B)$ და $\neg(A \wedge B)$, იმ პირობით, რომ $\neg A \equiv \text{comp } A$ და $\neg B \equiv \text{comp } B$. იგივე მტკიცება გამოიყენება უარყოფებისათვის. მაშასადამე, ყველა მტკიცებულება, რომელიც აგებულია გამოსახულებებისაგან, რომლთათვისაც დამატება ნიშნავს უარყოფას ინახავს მოყვანილ თვისებას: მისი დამატება, აგრეთვე, ლოგიკურად ექვივალენტურია მისი უარყოფისა. არ არის ძნელი დასანახი, ეს იწვევს იმას, რომ ნებისმიერი გამოსახულების დამატება ლოგიკურად ექვივალენტურია უარყოფისა. ეს განხილული იქნება მოგვიანებით.

დამატებები არის აგრეთვე მიზეზი, რატომ ჩნდებიან ცხრილ 1.16-ში ყველა ლოგიკური ექვივალენტობები დუალური წყვილის სახით. თუ ორი გამოსახულება A და B ლოგიკურად ექვივალენტურებია, მაშინ ასეთივეა მათი უარყოფები და, მათთან ერთად, მათი დამატებები. A-ს დუალის მოსანახად მისი დამატებიდან საჭიროა მხოლოდ შეიცვალოს ყველა ლიტერალი მისი დამატებით. ეს ოპერაცია გარდაქმნის ტავტალოგიებს ტავტალოგიებში. ე. ი. თუ $A \equiv B$, მაშინ $\text{comp } A \equiv \text{comp } B$, და, როგორც შედეგი, A–ს დუალი ლოგიკური ექვივალენტურია A–ს.

დამატებები შეიძლება გამოყენებულ იქნას კონიუნქციური ნორმალური ფორმის ასაგებად რომელიმე f ფუნქციის ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით. ჯერ უნდა განვსაზღვროთ $\neg f$-ის დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა. თუ შედეგად მიღებული ნორმალური დიზიუნქციური ფორმა არის A, მაშინ $A \equiv \neg f$, და A-ს დამატება, რომელიც A-ს უარყოფაა, უნდა იყოს f-ის ლოგიკურად ექვივალენტური. შემდეგი მაგალითი დეტალურად ხსნის ამ მიდგომას.

მაგალითი 1.18 მოძებნეთ სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ფორმა ფუნქცია f_1-თვის, რომელიც მოცემულია ცხრილი 1.18-ით.

ცხრილი 1.18
ჭეშმარიტობის ფუნქციის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	R	f_1
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	T

ამოხსნა. $\neg f_1$ არის ჭეშმარიტი მხოლოდ შემდეგი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა მინიჭებებისათვის:

P = T, Q = F, R = T
P = T, Q = F, R = F
P = F, Q = F, R = T

ამიტომ $\neg f_1$-ის დიზიუნქციური ნორმალური ფორმაა

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

ამ გამოსახულებას გააჩნია დამატება

$$f_1 \equiv (\neg P \vee Q \ \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \ \vee R) \wedge (P \vee Q \ \vee \neg R)$$

ეს დამატება არის სწორედ სასურველი კონიუნქციური ნორმალური ფორმა. ■

ამოცანები 1.5

1. (1.9) და (1.10) გამოყენებით მოაცილეთ $\rightarrow$ და $\leftrightarrow$ შემდეგი გამოსახულებებიდან:

   (a) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$
   (b) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow Q)$
   (c) $\neg P \rightarrow \neg Q$

2. ცხრილი 1.16 კანონების გამოყენებით, დაამტკიცეთ შემდეგი ექვივალენტობები:

   (a) $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \equiv Q \wedge (P \vee R)$
   (b) $\neg(\neg(P \wedge Q) \vee P) \equiv \mathrm{F}$
   (c) $\neg P \rightarrow \neg Q$

3. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

   (a) $(P_3 \wedge \mathrm{T}) \wedge (P_2 \wedge \mathrm{T})$
   (b) $(P_3 \wedge (P_2 \wedge (P_1 \wedge P_3)))$
   (c) $(P_3 \wedge \mathrm{T}) \wedge (P_2 \wedge \neg P_3)$

4. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

   (a) $(Q \wedge R \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge S)$
   (b) $(P \vee R) \wedge (P \vee R \vee S)$
   (c) $(P \vee (Q \wedge S)) \vee (\neg Q \wedge S)$

5. შეიტანეთ ყველა უარყოფა გამოსახულებების შიგნით შესაძლებლობისამებრ:

   (a) $\neg(P_1 \wedge \neg(P_2 \vee \neg P_3))$
   (b) $P \vee \neg(P \vee (Q \vee R))$

6. გამოიყენეთ გამონათქვამთა ალგებრას დებულებები შემდეგი გამოსახულებების გამარტივებისათვის:

   (a) $P \vee \neg Q \wedge (P \wedge Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge Q$
   (b) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg(P \vee \neg R) \wedge Q)$
   (c) $\neg((P \vee \neg Q) \wedge R) \vee Q$

7. მოძებნეთ კონიუნქციური ნორმალური ფორმა შემდეგი გამოსახულებებისათვის, გამონათქვამთა ალგებრას დებულებების გამოყენებით:

(a) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow R \vee Q)$
(b) $(P \vee Q) \wedge (P \vee (R \wedge S)) \vee (P \wedge Q \wedge S)$
(c) $\neg((P \vee \neg Q) \wedge R) \vee Q$

8. მოძებნეთ სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა ლოგიკური ფუნქციისათვის, რომელიც მოცემულია ცხრილი 1.19-ით.

ცხრილი 1.19

P	Q	R	f
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

9. მოძებნეთ f-ის სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ფორმა, რომელიც მოცემულია ცხრილი 1.19-ით.
10. დამტკიცეთ ლოგიკური ექვივალენტობები (1.14), (1.16) და (1.9).

3.6 ლოგიკური იმპლიკაციები და გამოყვანებები

3.6.1 შესავალი

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვიმსჯელებთ ლოგიკურ იმპლიკაციაზე და როგორ შეიძლება ის გამოყენებულ იქნას კორექტული მსჯელობისათვის. ცხდია არსებობენ არაკორექტული მსჯელობები, ზოგი მათგანი განხილული იქნება შემდეგ პარაგრაფში. არაკორექტულ მსჯელობებს უწოდებენ *მცდარს*. ჭეშმარიტობის ცხრილის მეთოდის გამოყენებით, შეგვიძლია განვასხვავოთ კორექტული და მცდარი მსჯელობები.

მსჯელობის მოდელები შეიძლება გამოისახოს მრავალი გზით. ქართულ ენაში, დასკვნა თან სდევს წინამძღვარს, და ის იწყება სიტყვებით როგორიცაა: "ამიტომ", "როგორც შედეგი", "ვასკვნით". მსჯელობებში, რომლებიც მოყვანილი იყო თავის დასაწყისში, ერთმანეთის მიყოლებით, ზემოდან ქვევით, ჩამოთვლილი გვქონდა წინამძღვრები. არსებობდა ჰორიზონტალური ხაზი ბოლო წინამძღვრის ქვეშ, და ამ ხაზის ქვეშ განთავსებული იყო დასკვნა. მოდუს პონენსის შემთხვევაში ის გამოიყურება შემდეგნაირად:

1. $P \rightarrow Q$
2. P

---

3. Q

თუ მსჯელობის მოდელი კორექტულია, და მხოლოდ ამ შემთხვევაში, ჩვენ ვიყენებთ სიმბოლოს $\models$, რომ გამოვყოთ წინამძღვრები დასკვნისაგან. თუ ავიღებთ კიდევ ერთხელ მოდუს პონენსის მაგალითს, ეს გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$P \rightarrow Q,\ P \models Q$$

ჩვენ უკვე გამოყენებული გვაქვს სიმბოლო $\models$ ტავტოლოგიის აღნიშვნისათვის. ეს ეთანხმება ამ სიმბოლოს ეხლანდელ გამოყენებას: ტავტოლოგია არის უბრალოდ მსჯელობის მოდელი წინამძღვრების გარეშე.

მსჯელობა კორექტულია თუ დასკვნა ლოგიკურად გამომდინარეობს, იმ პირობებში რომ წინამძღვრები მართებულია. ეს ნიშნავს, რომ ყველა წინამძღვრების კონიუნქციიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს დასკვნა. ე. ი. თუ A ყველა წინამძღვრების კონიუნქციაა და B დასკვნაა, უნდა უჩვენოთ, რომ $A \rightarrow B$ ტავტოლოგიაა. სხვა სიტყვებით, უნდა ვუჩვენოთ, რომ $A \Rightarrow B$ ან, რაც იგივეა, $A \models B$.

მრავალი მსჯელობა შეიცავს ნაბიჯების მიმდევრობას. ეს, კერძოდ, მართებულია არა მარტო მათემატიკური დამტკიცებებისათვის, არამედ აგრეთვე ლოგიკის გამოყენებათა სფეროში. ამ თავში ჩვენ ვიმსჯელებთ მსჯელობის ასეთ მიმდევრობებზე, და როგორ უნდა გამოვიყენოთ ისინი. მას მივყავართ (*სემანტიკური*) *გამოყვანის* ცნებამდე. ამ თავში ჩვენ მოკლედ მიმოვიხილავთ გამოყვანის რამოდენიმე სისტემას.

3.6.2 ლოგიკური იმპლიკაციები

$A \rightarrow B$ –ს ფორმის ნებისმიერ ტავტოლოგიას ეწოდება *ლოგიკური იმპლიკაცია.* ჩვენ უკვე გვქონდა რამოდენიმეჯერ შეხება ლოგიკურ იმპლიკაციასთან. 1.2.7 პარაგრაფში, მაგალითად, ჩვენ ვამტკიცებთით, რომ $P \rightarrow \mathrm{T}$ და $\mathrm{F} \rightarrow P$ არის გამოსახულებები, რომლებიც ჭესმარიტია P-ს ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის, რომელიც ხდის ორივე გამოსახულებას ტავტალოგიად. მაშასადამე, $P \Rightarrow \mathrm{T}$ და $\mathrm{F} \Rightarrow P$. ლოგიკური იმპლიკაციები ტავტოლოგიებია, და ნებისმიერი ლოგიკური ტავტოლოგია შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც სქემის ბაზა. უფრო ზუსტად, თუ A ნებისმიერი გამოსახულებაა, $P \Rightarrow \mathrm{T}$ ადასტურებს $A \Rightarrow \mathrm{T}$ სქემას. ანალოგიური მეთოდით მტკიცდება სქემა $\mathrm{F} \Rightarrow A$.

ლოგიკური ექვივალენტობები იქმნებიან ლოგიკური იმპლიკაციებით, როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1.2 თუ C და D ორი გამოსახულებაა და თუ $C \equiv D$, მაშინ $C \Rightarrow D$ და $D \Rightarrow C$.

ამ თეორემის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს. ამ თეორემის გამოყენების მიზნით, განვიხილოთ ექვივალენტობა $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \equiv Q$ [იხილე (1.16)]. ამ ექვივალენტობას მივყავართ შემდეგ მნიშვნელოვან ლოგიკურ იმპლიკაციასთან:

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \Rightarrow Q \qquad (1.20)$$

რასაკვირველია, ნებისმიერი ლოგიკური იმპლიკაცია შეიძლება დამტკიცდეს ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით. მართლაც, თუ გვინდა დავამტკიცოთ $A \Rightarrow B$, სადაც A და B არის ორი გამოსახულება, ჩვენ მოვამზადებთ $A \rightarrow B$ –ს ჭეშმარიტობის

ცხრილს. მაგალითად, ცხრილი 1.20 ამტკიცებს $P \equiv> (P \vee Q)$-ს, და ცხრილი 1.21 ამტკიცებს $(P \wedge Q) \equiv> P$–ს. ორივე ამ ლოგიკურ იმპლიკაციას გააჩნია სახელი: მათ, შესაბამისად, ეწოდება *აჯამვის კანონი* და *გამარტივების კანონი*. ანალოგიური გზით ადრე დამტიცებული იყო დიზიუნქციური სილოგიზმი (იხილე ცხრილი 1.10).

ცხრილი 1.20

$P \rightarrow (P \vee Q)$-ს ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ცხრილი 1.21

$(P \wedge Q) \rightarrow P$ -ს ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

3.6.3 კორექტულობის დამტკიცება ჭეშმარიტობის ცხრილით

მსჯელობა კორექტულია თუ ყველა წინამძღვრებიდან ლოგიკურად გამომდინარეობს დასკვნა. ე. ი., თუ $A_1, \ldots, A_n$ აღნიშნავენ წინამძღვრებს და C აღნიშნავს დასკვნას, მაშინ უნდა იყოს

$$A_1, \ldots, A_n \models C$$

როგორც იყო ნაჩვენები, ეს შეიძლება დამტკიცდეს ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით იმის ჩვენებით, რომ შემდეგი გამოსახულება ტავტოლოგიაა.

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow C$$

ჩვენ ეხლა გამოვიყენებთ შემოკლებებს. პირველ რიგში მოვძებნოთ წინამძღვრების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები. თუ, მოცემული მნიშვნელობებისთვის, ყველა ისინი გვაძლევს T-ს, მაშინ ვწერთ T-ს სპეციალური სვეტის ქვეშ, რომლის სათაურია "წინამძღვრები". მეორე სვეტი შემონახულია დასკვნის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობისათვის. ბოლო სვეტი, რომელიც მონიშნულია სიტყვით "მართებული", უჩვენებს გამომდინარეობს თუ არა დასკვნა წინა-

მძღვრებიდან. რომ ვუჩვენოთ, როგორ მუშაობს ეს მეთოდი, განვიხილოთ ჰიპოტეტური სილოგიზმი, რომელიც შეიძლება გამოისახოს როგორც

$$P \to Q\ ,\ Q \to R \models P \to R$$

ცხრილი 1.22 არის ჭეშმარიტობის ცხრილი ამ გამოსახულებისათვის. ვინაიდან ყველა შესაძლო ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა მინიჭებებს მივყავართ T-მდე **მართებულობის** სვეტში, ჰიპოთეტური სილოგიზმი კორექტულია.

ცხრილი 1.22 ჰიპოთეტური სილოგიზმის ჭეშმარიტობის ცხრილი

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	წინამძღვრები	$P \to R$	მართებული
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

მეორე ლოგიკური მსჯელობა აღებულია კონან დოილის "კაბინეტი წითელში"-დან, ნაწყვეტში, სადაც შერლოკ ჰოლმსი უხსნის დოქტორ უატსონს, როგორ გამოიძია მკვლელის მოტივი ლოგიკური მსჯელობის საშუალებით. ჩვენ განვიხილავთ მთლიან ნაწყვეტს მოგვიანებით. ეხლა კი მხოლოდ გავაანალიზებთ შემდეგ მსჯელობას ამ ნაწყვეტიტად.

მკვლელობა არ იქნებოდა ყაჩაღობის მიზანი, თუ არაფერი იყო წაღებული.

1. თუ ის იყო ყაჩაღი, მაშინ რაღაც უნდა წაეღო.
2. არაფერი წაუღია.

---

3. ის არ იყო ყაჩაღი.

შევნიშნოთ, რომ შერლოკ ჰოლმსი უშვებს, რომ მსმენელმა, დოქტორ უატსონმა, იცის, რომ თუ ის იყო ყაჩაღი, მაშინ მას რაღაც უნდა წაეღო, და, მართლაც ეს გამომდინარეობს ღაჩაღის განსაზღვრებიდან. მაგრამ, ლოგიკაში, ყველა ეს ფაქტები უნდა იყოს ფორმულირებული ზუსტად.

რომ გარდავქმნათ შერლოკ ჰოლმსის მსჯელობა ლოგიკაში, ვუშვებთ, რომ P წარმოადგენს მტკიცებულებას "მკვლელობის მიზანი იყო ყაჩაღობა", და Q მტკიცებულება "რაღაც იყო წაღებული". მაშასადამე, მსჯელობა გარდაიქმნება შემდეგნაირად

1. $P \to Q$
2. $\neg Q$

---

3. $\neg P$

არის თუ არა ეს მოდელი კორექტული? ცხრილი 1.23 გვიჩვენებს, რომ ეს ხერხდება ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით. თუ ყველა წინამძღვარი ჭეშმარიტია, და ეს ის შემთხვევაა, როცა P და Q ორივე F-ია, მაშინ დასკვნა $\neg P$ ჭეშმარიტია. როგორც ზემოთ იყო ნახსენები, მოცემულ მსჯელობას უწოდებენ *მოდუს ტოლენსს.* ვინაიდან ყველა ცვლადების მნიშვნელობებისათვის ჩნდება T მართებულობის სვეტში, მსჯელობა კორექტულია.

ცხრილი 1.23 ჭეშმარიტობის ცხრილი მოდუს ტოლენსის დამტკიცებისათვის

P Q	$P \rightarrow Q$ $\neg Q$	წინამძღვრები $(\neg P)$	მართებული
T T	T F	F F	T
T F	F T	F F	T
F T	T F	F T	T
F F	T T	T T	T

შემდეგი მსჯელობა არ არის კორექტული; ის მცდარია

1. $P \vee Q$

2. P

რატომ არის ეს ასე, უჩვენებს ცხრილი 1.24. არსებობბს ცვლადების მნიშვნელობები, P = F და Q = T, რომლებისთვის წინამძღვარი ჭეშმარიტია, მაგრამ დასკვნა მცდარი.

ცხრილი 1.24 მცდარობა

P Q	წინამძღვარი $P \vee Q$	დასკვნა P	მართებული $(P \vee Q) \rightarrow P$
T T	T	T	T
T F	T	T	T
F T	T	F	F
F F	F	F	T

3.6.4 დამტკიცებები

მრავალი ლოგიკური დამტკიცება რეალურად არის შედგენილი მსჯელობა იმ აზრით, რომ დასკვნა ერთი შემადგენელი მსჯელობისა წარმოადგენს მომდევნოს წინამძღვარს. ნებისმიერი დამტკიცება არის მიმდევრობა ასეთი მსჯელობებისა. პრაკტიკაში გამოყენებული მრავალი მტკიცებულება არის არაფორმალური. არსებობს აგრეთვე ფორმალური ლოგიკური დამტკიცებები, რომლებიც ცნობილია როგორც *გამოყვანები* ან *ფორმალური დამტკიცებები.* ამ მსჯელობას ვაფუძნებთ ორ მაგალითზე. პირველი მაგალითი შეიცავს if-ოპერატორის ეფექტს პასკალში, ხოლო მეორე სრულ მსჯელობას, რომელიც გამოყენებულია შერლოკ ჰოლმსის მიერ რომ მოიძიოს მკვლელობის მოტივი.

პირველი მაგალითი შეიცავს შემდეგ მტკიცებულებას:

if X > Max then X = Max

ჩვენ გვინდა დავამტკიცოთ, რომ, პროგრამის შესრულების შემდეგ, შეუძლებელია, რომ X იყოს მეტი ვიდრე Max.

დასამტკიცებლად, უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა, (1) შემთხვევა, როცა X > Max ჭეშმარიტია if-ოპერატორის შესრულებამდე, და (2) შემთხვევა, როცა ის მცდარია. ნებისმიერ შემთხვევაში, X > Max მცდარია ამ ოპერატორის შესრულების შემდეგ. პირველ შემთხვევაში, აღნიშნული მსჯელობა შესრულებადია, და X = Max ოპერატორის შესრულების შემდეგ. ეს კი, თავის მხრივ, იწვევს, რომ X > Max ხდება მცდარი. მეორე შემთხვევაში, არავითარი ოპერაცია არ ხორციელდება, და X > Max მცდარია ოპერატორის შესრულებამდე და შესრულების შემდეგ. ნებისმიერ შემთხვევაში, მცდარია ოპერატორის შესრულების შემდეგ.

ახლა გამოვსახოთ ეს მსჯელოგა ლოგიკის ენაზე. ჩვენ ვსაზღვრავთ

P : X > Max if-ოპერატორის შესრულებამდე
Q : X = Max if- ოპერატორის შესრულების შემდეგ
R : X > Max if-ოპერატორის შესრულების შემდეგ

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ უნდა განვასხვავოთ სისტემის მდგომარეობა if-ოპერატორის შესრულებამდე და შესრულების შემდეგ.

სინამდვილეში დამტკიცება შედგება ორი ნაწილისგან.. პირველი, $P \rightarrow Q$ ჭეშმარიტია, იმიტომ რომ if-ოპერატორი სრულდება: თუ X > Max ოპერაციის შესრულებამდე, მაშინ შემდგომ X = Max. შემდეგ, $Q \rightarrow \neg R$ ჭეშმარიტია, იმიტომ რომ, თუ ორი ცვლადი ტოლია, შეუძლებელია, რომ ერთი იყოს მეორეზე მეტი. მაშასადამე, $P \rightarrow Q$ და $Q \rightarrow \neg R$, და ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჰიპოთეტური სილოგიზმი და დავასკვნათ $P \rightarrow \neg R$. ფორმალურად

1. $P \rightarrow Q$
2. $Q \rightarrow \neg R$

---

3. $P \rightarrow \neg R$

ნებისმიერ ლოგიკური მსჯელობის მიმდევრობაში, წინამძღვრები შეიძლება შეიცავდეს გამოსახულებებს, რომლებიც ადრე დამტკიცებული იყო. კერძოდ, $P \rightarrow \neg R$ შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც წინამძღვარი მომდვნო მსჯელობისა. ჩვენ ახლა გამოვიყენებთ შემდეგ სქემას, რომელიც შეიძლება გამოყვანილ იქნას (1.20)-დან.

$$A \rightarrow B, \quad \neg A \rightarrow B \quad |= B \qquad (1.21)$$

ვიყენებთ ამ სქემას, იმ პირობით, რომ $A = P$ და $B = \neg R$, რათა მივიღოთ

1. $P \rightarrow \neg R$
2. $\neg P \rightarrow \neg R$

---

3. $\neg R$

ახლა ჩვენ წარმოვადგენთ ფორმალურ მსჯელობას, ანუ *გამოყვანას*, რომელიც აერთიანებს ორ მსჯელობას ერთ დამტკიცებაში. ეს დამტკიცება მოცემულია 1.2 ფიგურაში. ამ

გამოყვანის ყოველ სტრიქონში არსებობს მხოლოდ ერთი გამოსახულება. ეს გამოსახულება არის ან წინამძღვარი, ან ის გამოიყვანება წინამდებარე სტრიქონებიდან წესის გამოყენებით, რომელიც მოცემულია წესების რომელიმე სიიდან. წინა მაგალითში გამოყენებული იყო მხოლოდ ორი წესი. ერთი წესი იყო ჰიპოთეტური სილოგიზმი, რომელსაც შემოკლებით აღვნიშნავთ HS-ით. მეორე წესი არის *შემთხვევების კანონი* (*the law of cases*), რომელიც არის სქემა მოცემული (1.21)-ით. ეს სქემა შემოკლებით აღინიშნება Cs–ით. მაგალითად, მე-4 სტრიქონი მიიღება 1 და მე-2 სტრიქონებიდან ჰიპოთეტური სილოგიზმის გამოყენებით. დასკვნა მიიღება მე-3 და მე-4 სტრიქონიდან Cs–ის გამოყენებით.

დამტკიცება: $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow \neg R,\ \neg P \rightarrow \neg R \mid= \neg R.$

ფორმალური დამტკიცება	**წესი**
1. $P \rightarrow Q$	წინამძღვარი
2 $Q \rightarrow \neg R$	წინამძღვარი
3. $\neg P \rightarrow \neg R$	წინამძღვარი
4. $P \rightarrow \neg R$	1,2, HS
5. $\neg R$	3,4, Cs

ფიგურა 1.2

მეორე მაგალითია შერლოკ ჰოლმსის მსჯელობა, რომელიც ეხება მკვლელობას. ჩვენ ვახდენთ ციტირებას ნაწარმოებიდან.

> ახლა ჩვენ მივადექით მთავარ კითხვას მთავარ მიზეზთან დაკავშირებით. ყაჩაღობა არ იყო მკვლელობის მიზანი, თუ არაფერი იყო წაღებული. ის იყო მაშინ პოლიტიკოსი, თუ ის იყო ქალი? ეს ის კითხვაა, რომელიც დასმულია ჩემს წინაშე. მე ვიხრებოდი ერთი პოზიციიდან მეორეზე. პოლიტიკოსი მკვლელი დაკმაყოფილდებოდა იმით, რომ შეასრულებდა თავის საქმეს და უცებ გაუჩინარდებოდა. ამ მკვლელის მიერ, პირიქით, ყველაფერი გაკეთებული იყო აუჩქარებლად, და ბოროტმოქმედმა დატოვა თავისი კვალი ყველა ოთახში, რომელიც უჩვენებს იმას, რომ ის იყო აქ მთელი დროის განმავლობაში.

რომ გამოვსახოთ ეს ყველაფერი, ჩვენ ვიყენებთ შემდეგ პროპოზიციულ ცვლადებს.

P_1: ის იყო ყაჩაღი.
P_2: რაღაც იყო წაღებული.
P_3: ის პოლიტიკოსი იყო.
P_4: ის ქალი იყო.
P_5: მკვლელი სწრაფად წავიდა.
P_6: მკვლელმა დატოვა კვალი ყველა ოთახში.

შერლკ ჰოლმსის მსჯელობის დამტკიცება, რომელიც მოყვანილია 1.3 ფიგურაში, იყენებს მოდუს პონენს (MP), მოდუს ტოლენს (MT), და დიზიუნქციურ სილოგიზმს (DS). ამით სრულდება მსჯელობის ფორმალიზაცია, რომელიც მოცემულია შერლოკ ჰოლმსის მიერ. რა

საკვირველია, ზოგიერთი წინამძღვარი შეიძლება იყოს სადღაც მერყევი. მაგრამ, თუ ჩვენ მივიღებთ ყველა წინამძღვარს, მაშინ ჩვენ უნდა მივიღოთ დასკვნა.

დაამტკიცეთ: წინამძღვრები, როგორც არის ჩამოთვლილი $\models P_4$.

ფორმალური დამტკიცება	**წესი**	**კომენტარი**
1. $P_1 \rightarrow P_2$	წინამძღვარი	თუ ის იყო ყაჩაღი, რაღაც უნდა წაეღო
2. $\neg P_2$	წინამძღვარი	არაფერი იყო წაღებული
3. $\neg P_1$	1, 2, MT	ის არ იყო ყაჩაღი
4. $\neg P_1 \rightarrow P_3 \vee P_4$	წინამძღვარი	ის თუ არ იყო ყაჩაღი, მაშინ ის უნდა ყოფილიყო ან პოლიტიკოსი ან ქალი
5. $P_3 \vee P_4$	3, 4, MP	ის იყო ან პოლიტიკოსი ან ქალი
6. $P_3 \rightarrow P_5$	წინამძღვარი	თუ ის იყო პოლიტიკოსი, მაშინ ის სწრაფად დატოვებდა ადგილს
7. $P_6 \rightarrow \neg P_5$	წინამძღვარი	თუ მკვლელმა დატოვა კვალი ყველა ოთახში, ის ვერ წავიდოდა სწრაფად
8. P_6	წინამძღვარი	მკვლელმა დატოვა კვალი ყველა ოთახში
9. $\neg P_5$	7, 8, MP	მკვლელი არ წასულა სწრაფად
10. $\neg P_3$	6, 9, MT	ის არ იყო პოლიტიკოსი
11. P_4	5, 10, DS	მაშასადამე, ის იყო ქალი

ფიგურა 1.3

3.6.5 გამოყვანების სისტემები

ჩვენ ვუჩვენეთ, რომ ფორმალიზებული დამტკიცებები, რომლებიც მოცემული იყო წინა პარაგრაფში, ფაქტობრივად იყო გამოყვანები. ამ პარაგრაფში ჩვენ დავასაბუთებთ ამ დებულებას და განვსაზღვრავთ ზუსტად რას ნიშნავს სიტყვა გამოყვანა. არსებობს არსებითად სხვადასხვა სისტემები გამოყვანის გასაკეთებლად. ყველა სისტემას აქვს შემდეგი საერთო ნიშანი.

1. არსებობს მოცემული სია დასაშვები ლოგიკური მსჯელობებისა, რომელთაც ჰქვია *გამოყვანის წესები*. ამ სიას ჩვენ აღვნიშნავთ L-ით.
2. თვით გამოყვანა არის სია ლოგიკური გამოსახულებებისა. საწყისად, ეს სია ცარიელია. გამოსახულებები შეიძლება დაემატოს ამ სიას, თუ ეს დამატებული

გამოსახულება წინამძღვარია ან თუ ის შეიძლება მიღებულ იქნას წინარე გამოსახულებებიდან ერთერთი გამოყვანის წესის საშუალებით. ეს პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ არ მივაღწევთ დასკვნას.

თუ არსებობს გამოყვანა C დასკვნისათვის, მოცემული $A_1, \ldots, A_n$ წინამძღვრებიდან და მოცემული დასაშვები გამოყვანის წესების L სიმრავლიდან, მაშინ ჩვენ ვწერთ

$$A_1, \ldots, A_n \mid\!\!-_L C$$

ზოგჯერ, L უადგილოა დისკუსიაში, და ამ შემთხვევაში, ვხმარობთ $\mid\!\!-$ ნაცვლად $\mid\!\!-_L$-სა.

მაგალითი 1.19 უჩვენეთ, რომ ორი დამტკიცება, მოყვანილი 1.2 და 1.3 ფიგურაში, არის გამოყვანები, და გამოყენებულია გმოყვანის წესები.

ამოხსნა. 1.2 ფიგურის დამტკიცებაში გამოსახულებების სია, რომელიც შეადგენს გამოყვანას მოცემულია დამტკიცების სტრიქონებით. ყველა სტრიქონი არის ან წინამძღვარი ან ისინი მიიღება წინა სტრიქონებიდან (1.21)-ის და ჰიპოთეტური სილოგიზმის გამოყენებით. თუ ამ ორ წესს აღვნიშნავთ შესაბამისად Cs-ით და HS-ით, მაშინ L= {Cs, HS}. დამტკიცება ხდება გამოყვანა L–ის მიმართ. 1.3 ფიგურისთვის, ჩვენ ვსაზღვრავთ L_1 როგორც სიმრავლეს შემდგარს MP, MT , და DS-გან, რომლებიც აღნიშნავენ შესაბამისად მოდუს პონენს, მოდუს ტოლენს და დიზიუნქციურ სილოგიზმს. ამ შემთხვევაში, მოცემული დამტკიცება არის გამოყვანა L_1–ის მიმართ. ■

აღვნიშნოთ, რომ ფორმალური გამოყვანების მრავალ სისტემებში L-ი ფიქსირებულია. არცერთი გამოყვანის წესი არ გამოიყენება, თუ ის არ არის ჩართული L-ში როგორც დასაშვები გამოყვანის წესი. ჩვენ ნაკლებად ფორმალურები ვართ, მაგრამ, ჩვენ არსებითად შემოვიფარგლებით გამოყვანების წესებით, რომლებიც მოცემულია 1.25 ცხრილით. წესები მოცემულია სქემის სახით, და A, B, და C გამოსახულებებია.

ცხრილი 1.25 ძირითადი გამოყვანის წესები

$A, B \mid= A \wedge B$	შეერთების კანონი (კონიუნქციის შემოყვანის კანონი)
$A \wedge B \mid= B$	გამარტივების კანონი (კონიუნქციის მოშორების კანონი)
$A \wedge B \mid= A$	გამარტივების კანონის ვარიანტი
$A \mid= A \vee B$	აჯამვის კანონი (დიზიუნქციის შემოყვანის კანონი)
$B \mid= A \vee B$	აჯამვის კანონის ვარიანტი
$A, A \rightarrow B \mid= B$	მოდუს პონენსი
$\neg B, A \rightarrow B \mid= \neg A$	მოდუს ტოლენსი
$A \rightarrow B, B \rightarrow C \mid= A \rightarrow C$	ჰიპოთეტური სილოგიზმი
$A \vee B, \neg A \mid= B$	დიზიუნქციური სილოგიზმი
$A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \mid= B$	შემთხვევების კანონი
$A \leftrightarrow B \mid= A \rightarrow B$	ექვივალენტობის მოცილება
$A \leftrightarrow B \mid= B \rightarrow A$	ექვივალენტობის მოცილების ვარიანტი

$A \to B, B \to A \models A \leftrightarrow B$	ექვივალენტობის შემოღება
$A, \neg A \models B$	წინაამღდეგობრიობის კანონი

პირველი კანონი, შეერთების კანონი, ტრივიალურია და არ საჭიროებს დამატებით ახსნას. შემდგომი ექვსი კანონი და მათი ვარიანტები უკვე განხილული იყო, და ახლა ისინი უნდა იყოს ნათელი. შემთხვევების კანონი გამოყენებული იყო ფიგურა 1.2-ში. ეს კანონი ხშირად იხმარება რომ გავყოთ პრობლემა ორ უფრო პატარა პრობლემად, რათა ისინი ამოხსნილი იყვნენ დამოუკიდებლად. კერძოდ, თუ B მათემატიკური თეორემაა, შესაძლოა გაკეთდეს მისი ორი დამტკიცება, ერთ შემთხვევაში ვუშვებთ $\neg A$ –ს, მეორე შემთხვევაში A –ს. აქ A არის დაშვება, რომელიც არჩეულია, რომ გაკეთდეს უფრო იოლი ქვედამტკიცება. ექვივალენტობის კანონი გამომდინარეობს (1.11)-დან და თეორემა 1.2-დან. ბოლო კანონია წინაამღდეგობრიობის კანონი. ის გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ $A \wedge \neg A$ ყოველთვის F-ია და $F \to B$ ტრივიალურად ჭეშმარიტია. არსებობს მთავარი შედეგი წინაამღდეგობრიობის კანონიდან. თუ გამოყვანილ იქნა ერთი წინაამღდეგობრიობა წინამძღვრებიდან, მაშინ ნებისმიერი მოაზრებული ლოგიკური გამოსახულება B შეიძლება მიღებული იყოს. ამიტომ ზედმიწევნით უნდა შემოწმდეს, რომ წინამძღვრები არ იძლევიან საშუალებას გამოყვანილ იქნას წინაამღდეგობრიობა, იმიტომ, რომ წინაამღდეგ შემთხვევაში, ყველაფერი შეგვიძლია დავამტკიცოთ.

გამოყვანის წესები უნდა შეირჩეს ისეთნაირად, რომ შესაძლებელი იყოს გამოვიყვანოთ შედეგები, რომლებიც კორექტულია. ეს ნიშნავს, რომ L-ი არ უნდა შეიცავდეს არცერთ მცდარობას. აქედან მოყოლებული, ჩვენ ვუშვებთ, რომ გამოიყენება მხოლოდ კორექტული გამოყვანის წესები. ეს ნიშნავს, რომ თუ არსებობს გამოყვანა, რომელიც გამოხატულია როგორც $A \vdash B$, მაშინ ჩვენ ვასკვნით, რომ $A \models B$.

სისტემა რომელიც აკეთებს გამოყვანას არ უნდა იყოს მხოლოდ კორექტული, არამედ აგრეთვე *სრული*. მის ქვეშ ჩვენ გვესმის, რომ შესაძლებელი უნდა იყოს გამოვიყვანოთ *ყველა* დასკვნა, რომლებიც ლოგიკურად გამომდინარეობენ წინამძღვრებიდან. მაგალითად, სისტემა, რომელიც მოცემულია 1.25 ცხრილით, არ არის სრული. ეს რომ დავინახოთ, განვიხილოთ მესამის გამორიცხვის კანონი - $P \vee \neg P$. ეს კანონი სრულდება ყოველგვარი წინამძღვის გარეშე; ე. ი. , $\models P \vee \neg P$. ადვილი დასანახია, რომ ყოველგვარი წინამძღვრის გარეშე არ გამოიყენება არცერთი კანონი, რომელიც მოცემულია 1.25 ცხრილში. თუ სისტემა არის სრული და კორექტული, მაშინ $A \vdash B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \models B$.

არსებობს რამოდენიმე მნიშვნელოვანი ტიპის სისტემები, რომლებიც აგვარებენ გამოყვანას. აქ ჩვენ აღვწერთ მხოლოდ *ჰილბერტის სისტემებს* და *ბუნებრივი გამოყვანის სისტემებს*. ორივე სისტემას გააჩნია რამოდენიმე ვარიაცია. ჰილბერტის სისტემები იყენებენ მხო;ოდ ორ კავშირს, $\neg$ და $\to$. ყოველი ლოგიკური გამოსახულება ჩაიწერება ამ ორი ლოგიკური კავშირის საშუალებით. მაგალითად, $P \vee Q$ –ს ნაცვლად იწერება $\neg P \to Q$. ჰილბერტის სისტემებს გააჩნია მხოლოდ ერთი გამოყვანის წესი – მოდუს პონენსი. დამატებით ამასთან, ჰილბერტის სისტემები იყენებენ სქემებს, რომლებიც ტავტოლოგიებია. ამ სქემებს ეწოდება *აქსიომათა სქემები*. ყველაზე პოპულარული აქსიომათა სქემების სიმრავლე არის შემდეგი:

$$(A \to (B \to A))$$
$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$
$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$$

ჩვენ შემოვღებთ რიგ ტერმინებს დაკავშირებულს გამოყვანასთან. ლოგიკაში, *თეორია* ჩამოყალიბებულია წინამძღვრების მოცემული სიმრავლით, დასკვნებთან ერთად, რომლებიც გამოყვანადია წინამძღვრებიდან. თეორიის წინამძღვრებს ხშირად უწოდებენ *აქსიომებს*. დასკვნებს, რომლებიც გამოიყვანება აქსიომებიდან უწოდებენ *თეორემებს*.

მაგალითი 1.20 დავუშვათ, რომ P და $\neg Q$ აქსიომებია. რამოდენიმე თეორემა, რომლებიც გამოიყვანება ამ აქსიომებიდან არის $P \vee Q$ და $Q \rightarrow P$. $P \vee Q$ პირდაპირ გამომდინარეობს აქსიომა P–დან და ადამის კანონიდან, ხოლო $Q \rightarrow P$ მართებულია, ვინაიდან მისი კონსეკვენტი, P, აქსიომაა. მაგრამ $P \wedge Q$ არ არის ამ თეორიის თეორემა, იმიტომ რომ ის ლოგიკურად არ გამომდინარეობს აქსიომებიდან, და ამიტომ ის არ გამოიყვანება არცერთი კორექტული სისტემიდან.

3.6.6 დედუქციის თეორემა

რომ დავამტკიცოთ მათემატიკაში $A \rightarrow B$, ხშირად იყენებენ შემდგ არაფორმალურ მსჯელობას.

1. დავუშვათ A, და დავუმატოთ A წინამძღვრებს.
2. ვამტკიცებთ B–ს, A-ს გამოყენებით, თუ ეს აუცილებელია.
3. უგულვებელყოთ A, რაც ნიშნავს, რომ A არ არის აუცილებლად ჭეშმარიტი, და ვწერთ $A \rightarrow B$.

მაგალითი 1.21 წყვილს ჰყავს ბიჭი და ისინი ელოდებიან ბავშვს. დაამტკიცეთ, რომ თუ მეორე ბავშვი გოგო იქნება, მაშინ წყვილს ეყოლება გოგო და ბიჭი.

ამოხსნა. P იყოს "პირველი ბავშვი ბიჭია", ხოლო Q "მეორე ბავშვი გოგოა". ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ $Q \rightarrow P \wedge Q$, როცა P წინამძღვარია. ადრე განხილული მეთოდის თანახმად, ეს შესაძლებელია გაკეთდეს შემდეგნაირად.

1. P ჭეშმარიტია: წყვილს ყავს ბიჭი.
2. დავუშვათ Q; ე. ი. დავუშვათ, რომ მეორე ბავშვი გოგოა.
3. P და Q –დან ვასკვნით $P \wedge Q$ შეერთების კანონის თანახმად.
4. ამ სტადიაში, ნებადართულია დავასკვნათ $Q \rightarrow P \wedge Q$. Q შეგვიძლია უგულვებელყოთ; ე. ი. $Q \rightarrow P \wedge Q$ ჭეშმარიტია იმ შემთხვევაშიც კი, როცა Q მცდარია: ამ შემთხვევაში, $Q \rightarrow P \wedge Q$ ტრივიალურად ჭეშმარიტია. ■

მიზეზი ცხადია, რატომ აქვს ადგილი დამტკიცების ამ მოდელს. როცა ვამტკიცებთ $A \rightarrow B$, საჭიროა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A ჭეშმარიტია, მაშინ შესაძლებელია ის დავუმატოთ წინამძღვრებს. ეს უჩვენებს პროცედურის კორექტულობას. არსებითად, მსჯელობა ამტკიცებს, რომ დაშვება შეიძლება გარდაიქმნას იმპლიკაციის ანტეცედენტად. ეს არის შენაარსი დედუქციის თეორემისა, რომელიც ფორმულირდება შემდეგნაირად:

თეორემა 1.3. დავუშვათ C და B ორი გამოსახულებაა, და $A_1, A_2, A_3, \ldots$ წინამძღვრებია. თუ C ლოგიკურად გამომდინარეობს $B, A_1, A_2, A_3, \ldots$ -დან, მაშინ $B \rightarrow C$ ლოგიკურად გამომდინარეობს $A_1, A_2, A_3, \ldots$ -დან.

ამ თეორემასთან ერთად, გამოყვანის წესები, რომლებიც მოცემულია ცხრილი 1.25-ით, ქმნიან სრულ სისტემას.

მაგალითი 1.22 გამოიყენეთ დედუქციის თეორემა, რომ დამტკიცდეს ჰიპოთეტური სილოგიზმი. გამოიყენეთ მხოლოდ ერთი გამოყვანის წესი მოდუს პონენსი (MP).

ამოხსნა. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ დავამტკიცოთ $P \rightarrow R$, როცა მოცემულია $P \rightarrow Q$ და $Q \rightarrow R$. დედუქციის თეორემის თანახმად, ვუშვებთ, რომ გვაქვს P, რაც ნიშნავს იმას, რომ P შეიძლება დაემატოს წინამძღვრებს. როცა ეს გაკეთებულია, R მტკიცდება, რაც ძალზე ადვილია. აქედან დასაშვებია დავასკვნათ, რომ $P \rightarrow R$ და უგულვებელყოთ P; ე. ი., P არ საჭიროებს იყოს ჭეშმარიტი. ამის სრული დამტკიცება მოცემულია ფიგურა 1.4-ში. აღვნიშნოთ, რომ ნაწილი, სადაც P გამოყენებულია როგორც დაშვება, გამოყოფილია. გამოყოფილი ნაწილის გარეთ, P შეიძლება იყოს ან ჭეშმარიტი ან მცდარი, ამიტომ ის შეიძლება არ იყოს გამოყენებული. ადგილი, სადაც მოცემული იმპლიკაცია მოყვანილია და მოცემული დაშვება უგულვებელყოფილია, აღნიშნულია DT-თი, დედუქციის თეორემისათვის. ■

დაამტკიცეთ: $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash R.$

ფორმალური დამტკიცება	წესი	კომენტარი
1. $P \rightarrow Q$	წინამძღვარი	თუ ის იყო ყაჩაღი, რაღაც უნდა ვაღიარო
2. $Q \rightarrow R$	წინამძღვარი	
3. P	დაშვება	დავუშვათ P
4. Q	1, 3, MP	
5. R	2, 4, MP	R-ი უკვე დამტკიცდა
6. $P \rightarrow R$	DT	უგულვებელვყავით P, ე. ი., P შემდგომში არ გამოიყენება, და ვასკვნით, რომ $P \rightarrow R$.

ფიგურა 1.4. ჰიპოთეტური სილოგიზმის დამტკიცება

მაგალითი 1.23 დაამტკიცეთ $\vdash P \rightarrow P$

ამოხსნა. იმის მაგივრად, რომ გამოვიყვანოთ $P \rightarrow P$, დავუშვათ P და გამოვიყვანოთ P. ეს გამოყვანა ტრივიალურია. ზოგადად, ნებისმიერი წინამძღვარი შეიძლება გამოყენებულ იქნას დასკვნად. სახელდობრ, თუ P წინამძღვარია, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ P, რაც ნიშნავს $P \vdash P$. ეხლა კი უგულვებელვყოთ P და ვღებულობთ $\vdash P \rightarrow P$. ■

ექვივალენტობები ძალიან მნიშვნელოვანია ნებისმიერ თეორიაში. თუ დამტკიცდა ექვივალენტობა, მაშინ ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას ალგებრული მანიპულაციებისათვის თეორიის შიგნით. მათემატიკაში, ორი A და B გამოსახულების ექვივალენტურობისათვის იყენებენ შემდეგ ტექნიკას:

1. ვუშვებთ A-ს.
2. ვამტკიცებთ B–ს.
3. ვწერთ $A \to B$ -ს, და უგულვებელვყოფთ A-ს.
4. ვუშვებთ B-ს.
5. ვამტკიცებთ A–ს.
6. ვწერთ $B \to A$ -ს, და უგულვებელვყოფთ B-ს.
7. ვასკვნით $A \leftrightarrow B$ –ს

ბოლო ნაბიჯი გამომდინარეობს მე-3 და მე-6 სტრიქონებიდან, ექვივალენტობის შემოყვანის კანონის თანახმად (ცხრილი 1.25). რომ მივყვეთ მოცემულ მოდელს, არაფორმალური დამტკიცება იწყება სიტყვებით "დავუშვათ A", რომელიც გამოიყენება B-ს რომელიმე ტიპის დამტკიცებისთვის. ის ფაქტი, რომ ამის შედეგად ვღებულობთ $A \to B$–ს, არ იწერება. შემდეგი ნაბიჯი, რომელიც შეიცავს B-ს დაშვების შემოყვანას, ხშირად იწყება სიტყვებით " პირიქით, დავუშვათ B ", და ეს გამოიყენება A-ს დამტკიცებისათვის. ახლა ნაჩვენები იქნება ასეთი არაფორმალური დამტკიცება როგორ შეიძლება ფორმალიზებულ იქნას ლოგიკური მსჯელობებით. ეს ნაჩვენები იქნება მაგალითზე.

მაგალითი 1.24 დაამტკიცეთ, რომ $P \wedge (Q \wedge R)$ და $(P \wedge Q) \wedge R$ ლოგიკურად ექვივალენტურებია. ნებადართულია დედუქციის თეორემის, შეერთების, გამარტივების და ექვივალენტობის შემოყვანის გამოყენება. ეს კანონები მოკლედ აღინიშნებიან, შესაბამისად, როგორც DT, C, S და Equ.

ამოხსნა. სრული დამტკიცება მოცემულია ფიგურა 1.5-ში. შევნიშნოთ, რომ 1 და 7 სტრიქონებს გამოყავს $(P \wedge Q) \wedge R$ დაშვება $P \wedge (Q \wedge R)$-დან. ეს შეადგენს დამტკიცების პირველ ნახევარს. სტრიქონებს 7-დან 15-ის ჩათვლით გამოყავს შებრუნებული დებულება, გამოიყენება $(P \wedge Q) \wedge R$ დაშვება, რომ გამოვიყვანოთ $P \wedge (Q \wedge R)$. ეს გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ იმპლიკაცია, რომელიც მოცემულია მე-16 სტრიქონით დედუქციის თეორემის გამოყენებით. ბოლო სტრიქონი აერთიანებს მე-8 და მე-16 სტრიქონებს, რომ მოვიღოთ სასურველი ექვივალენტობა. ■

შემდეგი ტიპი დამტკიცებისა არის არაპირდაპირი დამტკიცება. არაპირდაპირ დამტკიცებაში, ამტკიცებენ $\neg A$-ს იმის დასანახად, რომ A-ს დაშვებას მივყავართ წინააღმდეგობრიობასთან. აქ, A ნებისმიერი გამოსახულებაა. არაფორმალურად ასეთი ტიპის დამტკიცება სიტყვებით შემდეგნაირად გამოიხატება:

1. ვუშვებთ A-ს.
2. ვამტკიცებთ, რომ ამ დაშვებას მივყავართ წინააღმდეგობრიობასთან.
3. უგულვებელვყოფთ A-ს, და ვასკვნით $\neg A$-ს.

თუმცა ეს დამტკიცება ტიპიურად გამოიყენება არაფორმალური მტკიცებულებისთვის, ჩვენ მას დავამტკიცებთ ფორმალური გზით. ფორმალურ დამტკიცებაში, წინააღმდეგობრიობა ტიპიურად $R \wedge \neg R$-ის სახისაა, სადაც R ნებისმიერი გამონათქვამია.

მაგალითი 1.25 უჩვენეთ, რომ $P \to Q$ და $P \to \neg Q$ შეიძლება გამოყენებულ იქნან, რომ გამოვიყვანოთ $\neg P$.

ამოხსნა. სრული დამტკიცება მოცემულია ფიგურა 1.6-ში. ■

დამტკიცეთ: $\vdash P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

ფორმალური დამტკიცება	**წესი**	**კომენტარი**
1. $P \wedge (Q \wedge R)$	დაშვება	ვუშვებთ, რომ $A = P \wedge (Q \wedge R)$
2. P	1, S	
3. $Q \wedge R$	1, S	
4. Q	3, S	
5. R	3, S	
6. $P \wedge Q$	2, 4, C	
7. $(P \wedge Q) \wedge R$	5, 6, C	ამით მტკიცდება, რომ $B = (P \wedge Q) \wedge R$
8. $P \wedge (Q \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	DT	A უგულვებელყოფილია, და $A \rightarrow B$ დამკიცებულია
10. R	9, S	
11. $P \wedge Q$	9, S	
12. P	11, S	
13. Q	11, S	
14. $Q \wedge R$	10, 13, C	
15. $P \wedge (Q \wedge R)$	12, 14, C	ამით დამტკიცებულია, რომ $A = P \wedge (Q \wedge R)$
16. $(P \wedge Q) \wedge R \rightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	DT	B უგულვებელყოფილია, და $B \rightarrow A$ დამკიცებულია
17. $P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	8, 16, Equ	ბოლო ნაბიჯი აერთიანებს მე-8 და მე-16 სტრიქონებს

ფიგურა 1.5. $\wedge$-ის ასოციაურობის კანონის დამტკიცება

დაამტკიცეთ: $P \rightarrow Q$, $P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$

ფორმალური დამტკიცება	**წესი**	**კომენტარი**
1. $P \rightarrow Q$	წინამძღვარი	
2. $P \rightarrow \neg Q$	წინამძღვარი	
3. P	დაშვება	ვუშვებთ P-ს იმისათვის, რომ გამოვიყვანოთ წინაამდეგობრიობა

4.	Q	1,3, MP	
5.	$\neg Q$	2, 3, MP	
6.	$Q \wedge \neg Q$	4, 5, C	მე-4 და მე-5 სტრიქონები გვაძლევენ სასურველ წინაამდღეგობრიობას
7.	$\neg P$	Neg	ვინაიდან P-ს დაშვებას მივყავართ წინაამღდეგობრიობასთან, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\neg P$.

ამოცანები 1.6

1. გამოიყენეთ ჭეშმარიტობის ცხრილის მეთოდი იმის საჩვენებლად, რომ შემდეგი მსჯელობები კორექტულია.

   (a) $P \vee Q\ ,\ \neg P \vee R \models Q \vee R$
   (b) $P \rightarrow Q\ ,\ P \rightarrow\ R \models P \rightarrow Q \wedge R$
   (c) $P, P \rightarrow Q \models P \wedge Q$
   (d) $P \vee Q\ ,\ P \rightarrow R, Q \rightarrow R \models R$

2. დაამტკიცეთ შემდეგი კანონები ჭეშმარიტობის ცხრილის მეთოდით.

   (a) მოდუს პონენსი
   (b) შემთხვევების კანონი
   (c) ექვივალენტობის მოცილება

3. განსაზღვრეთ ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობებისთვის, რომელი გამოყვანის წესია გამოყენებული, 1.25 მოცემული ცხრილიდან.

   (ა) თუ მისტერ სმითის ან მისის სმითის ხელფასი $30, 000 –ზე მეტია წელიწადში, მაშინ სმითების ოჯახს აქვს საშუალება შვებულება გაატაროს ჰავაიზე.. ვინაიდან მე ვიცი, რომ მისტერ სმითის ან მისის სმითის ხელფასი აღემატება $30, 000, ვასკვნი, რომ ოჯახს აქვს საშუალება შვებულება გაატაროს ჰავაიზე.
   (b) თუ კიმი აღმოაჩენს, რომ საქონელი, რომელიც მან მიიღო, გაფუჭებულია, მაშინ ის გაბრაზდება. სამწუხაროდ, მე ვიცი დანამდვილებით, რომ მან მიიღო გაფუჭებული საქონელი. მაშასადამე, კიმი გაბრაზდება.
   (c) თუ ჯონი გუშინ იყო კრებაზე, მას დაეძინებოდა. ჯონს არ დაეძინა. მაშასადამე ის არ იყო კრებაზე.
   (d) თუ მე ეს გავაკეთე, მე დამსჯიან, და თუ მე ეს არ გავაკეთე, მე დამსჯიან. მაშადადამე, მე დამსჯიან.
   (e) თუ სითბოა და სინოტივეა, მაშინ ცხადია თბილა.
   (f) თუ ბილი სახლშია, მაშინ ის რასაკვირველია უნდა იყოს ან სახლში, ან სამსახურში.
   (g) თუ $x \geq 0$, მაშინ $x^2 \geq 0$, და მაშინ თუ მცდარია, რომ $x \geq 0$, მაშინ $x^2 \geq 0$. მაშასადამე $x^2 \geq 0$.

4. დაამტკიცეთ შემდეგი ლოგიკური მსჯელობები შემდეგი გამოყვანის წესების გამოყენებით: მოდუს პონენსი, მოდუს ტოლენსი და შეერთების კანონი. ყოველ ნაბიჯზე მიუთითეთ, რომელი კანონი იყო გამოყენებული.

   (a) $P, P \rightarrow (Q \vee R), (Q \vee R) \rightarrow S \mid\!- S$
   (b) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \mid\!- R$
   (c) $P, P \rightarrow Q \mid\!- P \wedge Q$

5. წინამძღვრებია $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow P$. დაამტკიცეთ, რომ $P \leftrightarrow Q$. გამოიყენეთ მხოლოდ ჰიპოთეტური სილოგიზმი და ექვივალენტობის შემოყვანის კანონი.

6. დაამტკიცეთ თეორემა 1.2.

7. გამოიყენეთ დედუქციის თეორემა და ავამვის კანონი, რომ დაამტკიცოთ $\mid\!- P \rightarrow (P \vee \neg P)$ და $\mid\!- \neg P \rightarrow (P \vee \neg P)$. რა დასკვნა შეგვიძლია გავაკეთოთ $\mid\!- P \rightarrow (P \vee \neg P)$ და $\mid\!- \neg P \rightarrow (P \vee \neg P)$-დან?

8. დაამტკიცეთ, რომ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$. გამოიყენეთ დედუქციის თეორემა, გამარტივების კანონი, შეერთების კანონი და ექვივალენტობის შემოყვანის კანონი.

3.7 გამონათქვამთა აღრიცხვის აქსიომატიკა

3.7.1 შესავალი

ამ ნაწილში ჩვენ განვიხილავთ გამონათქვამთა აღრიცხვას როგორც მკაცრად ჩამოყალიბებულ მათემატიკურ (ან აქსიომატიკურ) თეორიას.

თანახმად ერთი ყველაზე გავრცელებული განმარტებისა, ლოგიკა არის მსჯელობათა მეთოდების ანალიზი. ამ მეთოდების შესწავლისას, პირველ რიგში ლოგიკას აინტერესებს ფორმა, და არა შინაარსი არგუმენტებისა ამა თუ იმ მსჯელობაში. განვიხილოთ, მაგალითად, ორი დასკვნა :

(1) ყველა ადამიანი უკვდავია. სოკრატე – ადამიანია. მაშასადამე, სოკრატე უკვდავია.
(2) ყველა ბაჭიას უყვარს სტაფილო. სევასტი – ბაჭიაა. მაშასადამე, სევასტის უყვარს სტაფილო.

ორივე დასკვნას გააჩნია ერთი და იგივე ფორმა: ყოველი A არის B; S არის A; მაშასადამე S არის B. ლოგიკოსს არ აინტერესებს ცალკეული წინამძღვრების ან დასკვნების ჭეშმარიტობა ან მცდარობა. მისი სურვილია იცოდეს, გამომდინარეობს თუ არა დასკვნის ჭეშმარიტობა წინამძღვრის ჭეშმარიტობიდან. მსჯელობის მართებული ხერხების სისტემატური ფორმალიზაცია და კატალოგიზაცია – არის ლოგიკის ერთერთი ძირითადი ამოცანა. თუ ამავე დროს ლოგიკოსი იყენებს მათემატიკურ აპარატს, და თუ მისი კვლევა პირველ რიგში მიძღვნილია მათემატიკური მსჯელობების შესასწავლად, მაშინ მისი შესწავლის საგანს შეიძლება დაერქვას მათემატიკური ლოგიკა.

3.7.2 პროპოზიციული კავშირები

გამონათქვამი არის მსჯელობა, რომელზედაც შეიძლება ითქვას: ჭეშმარიტია ის თუ მცდარი. გამონათქვამებისგან მათი სხვადასხვა შეკავშირების გზით შეიძლება შევადგინოთ ახალი, უფრო რთული გამონათქვამები.

უარყოფა, რომელიც აღინიშნება $\neg$ ნიშნით, არის გამონათქვამებს შორის ყველაზე უმარტივესი ოპერაცია. ეს ნიშანი დაიწერება გამონათქვამის წინ : თუ p გამონათქვამია, მაშინ $\neg p$ იკითხება "არა p". $\neg p$ ჭეშმარიტია, როდესაც p მცდარია; $\neg p$ მცდარია, როდესაც p ჭეშმარიტია.

მეორე კავშირი არის *კონიუნქცია :* "და". p და q გამონათქვამების კონიუნქცია აღინიშნება როგორც $p \wedge q$. გამონათქვამი $p \wedge q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი p და q ჭეშმარიტია.

დიზიუნქცია : "ან". p და q გამონათქვამების დიზიუნქცია აღინიშნება როგორც $p \vee q$. გამონათქვამი $p \vee q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი p და q მცდარია.

შემდეგი მნიშვნელოვანი კავშირი არის *იმპლიკაცია :* "თუ p , მაშინ q ", აღნიშვნაში $p \to q$. გამონათქვამი $p \to q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია და q მცდარია.

ექვივალენტობა : "p მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა q" , აღვნიშვნაში $p \leftrightarrow q$. გამონათქვამი $p \leftrightarrow q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან ორივე p და q ჭეშმარიტია, ან ორივე p და q მცდარია.

სიმბოლოებს $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ ჩვენ ვუწოდებთ *პროპოზიციულ კავშირებს.*

მარტივი გამონათქვამებისაგან (პროპოზიციებისაგან) პროპოზიციული კავშირების საშუალებით აიგება უფრო რთული გამონათქვამები, რომლებსაც ჩვენ ვუწოდებთ პროპოზიციულ ფორმულებს. უფრო ზუსტად :

(1) პროპოზიციული ასოები $p_1, p_2, p_3, \ldots$ - პროპოზიციული ფორმულებია;
(2) თუ α და β პროპოზიციული ფორმულებია, $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta)$ და $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ – პროპოზიციული ფორმულებია;
(3) სხვა პროპოზიციული ფორმულები არ არის.

ყველა პროპოზიციული ფორმულების სიმრავლე აღვნიშნოთ Φ-ით.

3.7.3 ტავტოლოგიები

განვიხილოთ ფუნქცია $\nu : \Phi \to F$ ყველა პროპოზიციული ფორმულების Φ სიმრავლიდან ბულის ფუნქციათა F სიმრავლეში , რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\nu(p_i) = x_i,$$
$$\nu(\neg) = \neg,$$
$$\nu(\wedge) = \wedge,$$
$$\nu(\vee) = \vee,$$

$$\nu(\rightarrow) = \rightarrow,$$
$$\nu(\leftrightarrow) = \leftrightarrow,$$

სადაც ν ფუნქციის არგუმენტებში არის პროპოზიციული კავშირები, ხოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეს ბულის ფუნქციები. და კიდევ ნებისმიერი α და β პროპოზიციული ფორმულებისათვის

$\nu(\neg\alpha) = \neg\nu(\alpha)$, $\nu(\alpha \wedge \beta) = \nu(\alpha) \wedge \nu(\beta)$, $\nu(\alpha \vee \beta) = \nu(\alpha) \vee \nu(\beta)$, $\nu(\alpha \rightarrow \beta) =$
$\nu(\alpha) \rightarrow \nu(\beta)$, $\nu(\alpha \leftrightarrow \beta) = \nu(\alpha) \leftrightarrow \nu(\beta)$.

ადვილი დასანახია, რომ ν ფუნქციას გადაყავს პროპოზიციული ფორმულა შესაბამის ბულის ფუნქციაში.

α პროპოზიციულ ფორმულას ეწოდება *ტავტოლოგია*, თუ მისი შესაბამისი ბულის ფუნქცია ν(α) იგივურად ტოლია 1, ე. ი. ν(α) ღებულობს მნიშვნელობას 1, მიუხედავად იმისა თუ რა მნიშვნელობებს ღებულობენ მისი არგუმენტები. თუ α ტავტოლოგიაა, მაშინ ν(α)-ს ცხრილით წარმოდგენილ ფუნქციის მნიშვნელობათა სვეტში გვხდება მხოლოდ 1.

თეორემა 1. *თუ α და $\alpha \rightarrow \beta$ - ტავტოლოგიებია, მაშინ β- ტავტოლოგიაა.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ *α* და $\alpha \rightarrow \beta$ - ტავტოლოგიებია. დავუშვათ, რომ ν(*α*) და ν(*β*) შემავალი ცვლადების რომელიღაც 1 და 0 განაწილებისათვის ν(*β*) ღებულობს მნიშვნელობა 0. ვინაიდან *α* - ტავტალოგიაა, იმავე განაწილებისათვის ν(*α*) 1-ს ტოლია. მაშინ ν(*α*) → ν(*β*) ღებულობს მნიშვნელობა 0-ს. მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $\alpha \rightarrow \beta$ - ტავტოლოგიაა. □

თეორემა 2. *თუ α ტავტოლოგიაა, რომელიც შეიცავს პროპოზიციულ ასოებს $p_1, p_2, \ldots, p_n$ და β მიიღება α- სგან α-ში პროპოზიციული ფორმულების $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ჩანაცვლებით შესაბამისად პროპოზიციული ასოების $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ნაცვლად, მაშინ β ტავტოლოგიაა, ე. ი. , ტავტოლოგიაში ჩანაცვლება ასევე გვაძლევს ტავტოლოგიას.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ *α* ტავტოლოგიაა, და დავუშვათ მოცემულია ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა ნებისმიერი განაწილება *β*-ში შემავალი პროპოზიციული ასოებისათვის. ფორმულები $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, როგორც ბულის ფუნქციები, მიიღებენ რაღაც მნიშვნელობებს $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (ყოველი ε_i *არის ან* 1 *ან* 0); თუ ჩვენ მივანიჭებთ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ მნიშვნელობებს შესაბამისად პროპოზიციულ ასოებს $p_1, p_2, \ldots, p_n$, მაშინ შედეგად მიღებული *α* -ს მნიშვნელობა ემთხვევა *β-ს* ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას *β*-ში შემავალ პროპოზიციული ასოების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა მოცემული განაწილებისათვის. ვინაიდან *α* ტავტოლოგიაა, მაშინ *β* თავისი არგუმენტების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა მოცემული განაწილებისათვის მიიღებს მნიშვნელობა 1. მაშასადამე, *β* ყოველთვის ღებულობს მნიშვნელობას 1. □

3.7.4 გამონათქვამთა აღრიცხვის აქსიომათა სისტემა

ჭეშმარიტობის ცხრილები გვაძლევს საშუალებას ვუპასუხოთ მრავალ მნიშვნელოვან კითხვაზე, რომლებიც ეხება ჭეშმარიტულ – ფუნქციონალურ საკითხებს, მათ შორის ისეთებს, როგორიცაა საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმულა ტავტოლოგია, წინააღმდეგობა ან არც პირველი და არც მეორე, გამომდინარეობს თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმულიდან მეორე ან არიან თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმულები ლოგიკურად ექვივალენტურები.

ლოგიკის უფრო რთული საკითხები შეუძლებელია ამოხსნილ იქნას ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით ან რომელიმე სხვა ეფექტური პროცედურების საშუალებით. ამიტომ ჩვენს მიერ განხილულ იქნება სხვა მეთოდი - ფორმალური თეორიების მეთოდი.

ფორმალური (*აქსიომატიკური*) *თეორია* S ითვლება განსაზღვრულად, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები :

(1) მოცემულია რომელიმე სიმბოლოების თვლადი სიმრავლე - S თეორიის სიმბოლოები. S თეორიის სიმბოლოთა სასრულ მიმდევრობებს უწოდებენ S თეორიის *გამოსახულებებს.*

(2) მოცემულია S თეორიის გამოსახულებათა სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტებს უწოდებენ S თეორიის *ფორმულებს.*

(3) გამოყოფილია ფორმულების რომელიღაც სიმრავლე, რომელთაც უწოდებენ S თეორიის აქსიომებს.

(4) მოცემულია ფორმულათა შორის მიმართებების R_1, …, R_n სასრული სიმრავლე, რომლებსაც უწოდებენ *გამოყვანის წესებს.* ყოველი R_i-სთვის არსებობს დადებითი მთელი რიცხვი j ისეთი, რომ ნებისმიერი სიმრავლისთვის, შემდგარი j-1 რაოდენობის ფორმულებისგან, და ყოველი α ფორმულისთვის ეფექტურად ამოხსნადია საკითხი იმის შესახებ, რომ იმყოფება თუ არა მოცემული j-1 ფორმულები R_i მიმართებაში ფორმულა α-თან, და თუ ასეა, მაშინ ვიტყვით, რომ α *უშუალოდ გამომდინარეობს* მოცემული j-1 ფორმულებიდან R_i წესის საშუალებით.

გამოყვანას S -ში უწოდებენ ფორმულათა ნებისმიერ სასრულ მიმდევრობას α_1, …, α_n ისეთს, რომ ყოველი i-თვის ფორმულა α_i არის ან S თეორიის აქსიომა , ან უშუალოდ გამომდინარეობს წინამდებარე ფორმულებიდან ერთერთი გამოყვანის წესის საშუალებით.

S თეორიის ფორმულა α-ს ეწოდება S თეორიის *თეორემა,* თუ არსებობს გამოყვანა S -ში, რომელშიც ბოლო ფორმულა არის α ; ასეთ გამოყვანას უწოდებენ *ფორმულა α-ს გამოყვანას.*

ვიტყვით, რომ ფორმულა α გამომდინარეობს Γ ფორმულათა სიმრავლიდან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს α_1, α_2, ... , α_n ისეთი მიმდევრობა, რომ α_n არის α , და ყოველი i –თვის α_i არის ან აქსიომა, ან ეკუთვნის Γ-ს , ან უშუალოდ გამომდინარეობს წინამდებარე ფორმულებიდან ერთერთი გამოყვანის წესის საშუალებით. ასეთ მიმდევრობას უწოდებენ α -ს *გამოყვანას* Γ-*დან.* Γ-ს წევრებს უწოდებენ *გამოყვანის ჰიპოთეზებს.* გამონათქვამის "α გამომდინარეობს Γ-დან" შესამოკლებლად გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\Gamma \vdash \alpha$. თუ გვინდა აღვნიშნოთ რომელ თეორიაში გამოიყვანება α Γ-დან გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\Gamma \vdash_S \alpha$, რომელიც მიუთითებს იმაზე, რომელ თეორიაზე მიმდინარეობს საუბარი. თუ სიმრავლე Γ სასრულია : $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, მაშინ ნაცვლად $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \alpha$ ჩვენ ჩავწერთ $\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \alpha$. თუ Γ ცარიელი სიმრავლეა , მაშინ $\Gamma \vdash \alpha$ აქვს აღგილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α თეორემაა. ჩანაწერ $\varnothing \vdash \alpha$ ნაცვლად მიღებულია ჩანაწერი $\vdash \alpha$. მაშასადამე $\vdash \alpha$ არის შემოკლება გამონათქვამისა "α თეორემაა" .

მოვიყვანოთ რამოდენიმე მარტივი თვისებები გამომდინარეობის ცნებიდან.

(1) თუ $\Gamma \subseteq \Delta$ და $\Gamma \vdash \alpha$, მაშინ $\Delta \vdash \alpha$.
(2) $\Gamma \vdash \alpha$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ-ში არსებობს სასრული ქვესიმრავლე Δ , რომლისთვის $\Delta \vdash \alpha$.
(3) თუ $\Delta \vdash \alpha$ და $\Gamma \vdash \beta$ ნებისმიერი β-სთვის Δ სიმრავლიდან, მაშინ $\Gamma \vdash \alpha$.

ეხლა ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიას L გამონათქვამთა აღრიცხვისთვის.

(1) L-ის სიმბოლოებია $\neg, \rightarrow, (,)$ და ასოები p_i დადებითი მთელი რიცხვების ინდექსებით : $p_1, p_2, p_3, \ldots$. სიმბოლოებს $\neg$ და $\rightarrow$ ეწოდება *პრიმიტიული კავშირები* , ხოლო p_i –ს – *პროპოზიციული ასოები* .
(2) (a) ყოველი პროპოზიციული ასო ფორმულაა.
(b) თუ α და β ფორმულებია, მაშინ $(\neg\alpha)$ და $(\alpha \rightarrow \beta)$ – აგრეთვე ფორმულებია. მაშასადამე, L თეორიის ყოველი ფორმულა უბრალოდ წარმოადგენს პროპოზიციულ ფორმას, აგებულს პროპოზიციული ასოებისგან კავშირების $\neg$ და $\rightarrow$ საშუალებით.

(3) L თეორიის ნებისმიერი α , β და γ ფორმულებისთვის , შემდეგი ფორმულები წარმოადგენენ L თეორიის აქსიომებს :

(A1) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$;
(A2) $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$;
(A3) $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta))$.

(4) ერთადერთი გამოყვანის წესია წესი modus ponens :

$$\frac{\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta}{\beta,}$$

α და $\alpha \rightarrow \beta$ ფორმულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულა β . ამ წესს შემოკლებით აღვნიშნავთ MP -ით.

ფორმულის განსაზღვრების მიხედვით ჩვენ ფორმულებს ვსვამთ ფრჩხილებში. შემდგომში , თუ ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ფორმულებს ჩავწერთ ფრჩხლებს გარეშე.

შევნიშნოთ, რომ L თეორიის აქსიომათა უსასრულო სიმრავლე მოყვანილია *აქსიომათა სქემის* საშუალებით, ყოველი მათგანი წარმოქმნის აქსიომათა უსასრულო სიმრავლეს. ნებისმიერი ფორმულისათვის ადვილი შესამოწმებელია არის თუ არა ის აქსიომა, და , მაშასადამე L არის ეფექტურად აქსიომატიზირებადი თეორია. ჩვენ ვისახავთ მიზნად ისეთნაირად ავაგოთ სისტემა L, რომ ყველა თეორემების კლასი ემთხვეოდეს ყველა ტავტოლოგიების კლასს.

განვსაზღვროთ შემდეგი კავშირები :

(D1) $(\alpha \wedge \beta)$ ნიშნავს $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$;
(D2) $(\alpha \vee \beta)$ ნიშნავს $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$;
(D3) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ნიშნავს $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

ლემა 3. $\vdash_L \alpha \to \alpha$ *ნებისმიერი* α *ფორმულისათვის.*

დამტკიცება. მოვიყვანოთ ფორმულის $\alpha \to \alpha$ გამოყვანა L-ში.

(1) $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$
(ჩანაცვლება (A2) აქსომათა სქემაში)
(2) $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (აქსომათა სქემა (A1))
(3) $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ ((1) და (2)-დან MP-ით)
(4) $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ (აქსომათა სქემა (A1))
(5) $\alpha \to \alpha$ ((3) და (4)-დან MP-ით) □

თეორემა 4. (დედუქციის თეორემა.) *თუ* Γ *- ფორმულების სიმრავლეა,* α *და* β *- ფორმულებია და* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, *მაშინ* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. *კერძოდ, თუ* $\alpha \vdash \beta$, *მაშინ* $\vdash \alpha \to \beta$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ არის გამოყვანა $\Gamma \cup \{\alpha\}$-დან, სადაც $\beta_n = \beta$. ინდუქციით, i –ის $(1 \le i \le n)$ მიმართ დავამტკიცოთ, რომ $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$. უპირველესად, β_1 უნდა იყოს ან Γ-ს ელემენტი, ან L სისტემის აქსიომა, ან ემთხვევოდეს α-ს. (A1) აქსიომათა სქემის თანახმად, $\beta_1 \to (\alpha \to \beta_1)$ არის აქსიომა. ამიტომ პირველ ორ შემთხვევაში $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_1$ MP –ს საშუალებით. მესამე შემთხვევაში, როცა β_1 ემთხვევა α-ს, ლემა 3 თანახმად $\vdash \alpha \to \beta_1$ და, მაშასადამე, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_1$. ე. ი., შემთხვევა, როცა $i = 1$, ამოწურულია. ახლა დავუშვათ, რომ $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_k$ ნებისმიერი $k < i$. β_i-თვის გვაქვს ოთხი შესაძლებლობა: β_i არის აქსიომა, ან $\beta_i \in \Gamma$, ან β_i არის α, ან β_i გამომდინარეობს MP-ით რომელიმე β_j და β_m-დან, სადაც $j < i$, $m < i$ და β_m-ს აქვს სახე $\beta_j \to \beta_i$. პირველ სამ შემთხვევაში $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$ მტკიცდება ისევე როგორც $i = 1$ შემთხვევაში. ბოლო შემთხვევისთვის გამოვიყენოთ ინდუქციური დაშვება, რომლის თანახმად $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_j$ და $\Gamma \vdash \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$. (A2) აქსიომათა სქემის თანახმად, $\vdash (\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)) \to ((\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i))$. მაშასადამე, MP-ის გამოყენებით, $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i)$ და ისევ MP, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$. მაშასადამე, ჩვენი დამტკიცება ინდუქციით დასრულდა, და, როცა $i = n$, ჩვენ ვღებულობთ ჩვენთვის სასურველ მტკიცებას. □

შედეგი 5.
(i) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$.
(ii) $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash \alpha \to \gamma$.

დამტკიცება. (*i*).

(a) $\alpha \to \beta$ ჰიპოთეზა
(b) $\beta \to \gamma$ ჰიპოთეზა
(c) α ჰიპოთეზა
(d) β (a), (c), MP
(e) γ (b), (d), MP

მაშასადამე, $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha \vdash \gamma$. აქედან დედუქციის თეორემის თანახმად, $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$.

მე-(*ii*) დამტკიცებას ვთავაზობთ მკითხველს.

ლემა 6. L *თეორიის ნებისმიერი* α, β *ფორმულებისთვის შემდეგი ფორმულები არის* L-*ის თეორემები* :

(a) $\neg\neg\beta \to \beta$;
(b) $\beta \to \neg\neg\beta$;
(c) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$;
(d) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$;
(e) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$;
(f) $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$;
(g) $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$.

დამტკიცება.

(a) $\vdash \neg\neg\beta \to \beta$

1. $(\neg\beta \to \neg\neg\beta) \to ((\neg\beta \to \neg\beta) \to \beta)$	აქსიომათა სქემა (A3)
2. $\neg\beta \to \neg\beta$	ლემა 3[*)]
3. $(\neg\beta \to \neg\neg\beta) \to \beta$	1, 2, შედეგი 5 (*ii*)
4. $\neg\neg\beta \to (\neg\beta \to \neg\neg\beta)$	აქსიომათა სქემა (A1)
5. $\neg\neg\beta \to \beta$	3, 4, შედეგი 5 (*i*)

(b) $\vdash \beta \to \neg\neg\beta$

1. $(\neg\neg\neg\beta \to \neg\beta) \to ((\neg\neg\neg\beta \to \beta) \to \neg\neg\beta)$	აქსიომათა სქემა (A3)
2. $\neg\neg\neg\beta \to \neg\beta$	ზემოთ დამტკიცებული პუნქტი (a)
3. $(\neg\neg\neg\beta \to \beta) \to \neg\neg\beta$	1, 2 , MP
4. $\beta \to (\neg\neg\neg\beta \to \beta)$	აქსიომათა სქემა (A1)
5. $\beta \to \neg\neg\beta$	3, 4, შედეგი 5 (*i*)

(c) $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

1. $\neg\alpha$	ჰიპოთეზა
2. α	ჰიპოთეზა
3. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	აქსიომათა სქემა (A1)
4. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	აქსიომათა სქემა (A1)
5. $\neg\beta \to \alpha$	2, 3, MP
6. $\neg\beta \to \neg\alpha$	1, 4, MP
7. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	აქსიომათა სქემა (A3)
8. $(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$	6, 7, MP

[*)] იმის ნაცვლად, რომ ამ ადგილას მოვიყვანოთ $\neg\beta \supset \neg\beta$ -ს სრული გამოყვანა, ჩვენ უბრალოდ უთითებთ ლემა 3. ვიქცევით რა ასეთნაირად, ჩვენ აღვნიშნავთ იმას, რომ ამ ადგილას შესაძლებელი იყო მოგვეყვანა გამოყვანა $\neg\beta \supset \neg\beta$ ფორმულისთვის, თუ გვექნებოდა ამის სურვილი, დრო და ადგილი. რასაკვირველია, ეს სხვა არაფერია რაც ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემების გამოყენება.

9. β 5, 8, MP

მაშასადამე, $1-9$ თანახმად, $\neg\alpha, \alpha \vdash \beta$. ამიტომ, დედუქციის თეორემის თანახმად, $\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$ და, ისევ დედუქციის თეორემის თანახმად, $\vdash \neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$.

(d) $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

1. $\neg\beta \to \neg\alpha$	ჰიპოთეზა
2. α	ჰიპოთეზა
3. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	აქსიომათა სქემა (A3)
4. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	აქსიომათა სქემა (A1)
5. $(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$	1, 3, MP
6. $\alpha \to \beta$	4, 5, შედეგი 5 (i)
7. β	2, 6, MP

$1-7$ თანახმად, $(\neg\beta \to \neg\alpha), \alpha \vdash \beta$, რის შემდეგ, ორჯერ ვიყენებთ დედუქციის თეორემას, და ვღებულობთ სასურველ შედეგს.

(e) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

1. $\alpha \to \beta$	ჰიპოთეზა
2. $\neg\neg\alpha \to \alpha$	(d) პუნქტი
3. $\neg\neg\alpha \to \beta$	1, 2, შედეგი 5 (i)
4. $\beta \to \neg\neg\beta$	(b) პუნქტი
5. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	3, 4, შედეგი 5 (i)
6. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	(d) პუნქტი
7. $\neg\beta \to \neg\alpha$	5, 6, MP

$1-7$ თანახმად, $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$, საიდანაც (e) მიიღება დედუქციის თეორემის გამოყენებით.

(f) $\vdash \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$

ცხადია, რომ α , $\alpha \to \beta \vdash \beta$. გამოვიყენებთ რა ორჯერ დედუქციის თეორემას, ვღებულობთ $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$. (e) პუნქტის თანახმად $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$. დაბოლოს, ვიყენებთ რა შედეგ (5) (i), ვღებულობთ

$$\vdash \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)) .$$

(g) $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

1. $\alpha \to \beta$	ჰიპოთეზა
2. $\neg\alpha \to \beta$	ჰიპოთეზა
3. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	(e) პუნქტი
4. $\neg\beta \to \neg\alpha$	1, 3, MP
5. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\neg\alpha)$	(e) პუნქტი
6. $\neg\beta \to \neg\neg\alpha$	2, 5, MP
7. $(\neg\beta \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \neg\alpha) \to \beta)$	აქსიომათა სქემა (A3)

8. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \beta$ 6, 7, MP
9. β 4, 8 MP

მაშასადამე, $(\alpha \to \beta)$, $\neg\alpha \to \beta \vdash \beta$. გამოვიყენებთ რა ორჯერ დედუქციის თეორემას, მივიღებთ (g) .

ჩვენი მიზანია – ვუჩვენოთ, რომ L თეორიის ფორმულა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის L თეორიის თეორემა, როცა ის არის ტავტოლოგია. ერთი მიმართულებით ეს ძალიან ადვილია.

თეორემა 7. L *თეორიის ნებისმიერი თეორემა ტავტოლოგიაა.*

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ L თეორიის ყოველი აქსიომა ტავტოლოგიაა (ეს შეიძლება გაკეთდეს როგორც სავარჯიშო). თეორემა 1 თანახმად, modus ponens, გამოყენებული ტავტოლოგიებზე , ასევე გვაძლევს ტავტოლოგიებს. ე. ი. , L თეორიის ნებისმიერი თეორემა ტავტოლოგიაა. □

შემდეგი ლემა გამოიყენება იმის დამტკიცებისთვის, რომ ყოველი ტავტოლოგია არის L თეორიის თეორემა.

ლემა 8. *დავუშვათ, რომ* α *ფორმულაა, და* $p_1, \dots, p_k$ - α*-ში შემავალი პროპოზიციული ასოები, და დავუშვათ, რომ მოცემულია რაღაც ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა განაწილება* $p_1, \dots, p_k$ *პროპოზიციული ასოებისთვის. მაშინ* p'_i *იყოს* p_i *, თუ* p_i *ღებულობს მნიშვნელობას* 1*,* $\neg p_i$ *, თუ* p_i *ღებულობს მნიშვნელობას* 0*, და ბოლოს, დავუშვათ, რომ* α' *არის* α *, თუ ამ განაწილებისას* α *ღებულობს მნიშვნელობას* 1*, და* $\neg\alpha$ *, თუ* α *ღებულობს მნიშვნელობას* 0*. მაშინ* $p'_1, \dots, p'_k \vdash \alpha'$ *.*

თუ, მაგალითად, α აღნიშნავს $\neg(\neg p_2 \to p_3)$, მაშინ ჭეშმარიტობის ცხრილია

p_2	p_3	$\neg(\neg p_2 \to p_3)$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

ლემა 8 ამტკიცებს გამოყვანის შესაბამის ფაქტს. ასე რომ, კერძოდ, მესამე სტრიქონს შეესაბამება მტკიცება $p_2, \neg p_3 \vdash \neg\neg(\neg p_2 \to p_3)$, ხოლო მეოთხე სტრიქონს $\neg p_2, \neg p_3 \vdash \neg(\neg p_2 \to p_3)$.

დამტკიცება. დამტკიცება წარმოებს ინდუქციით α-ში შემავალი პრიმიტიული კავშირების n რაოდენობის მიმართ (α ჩაწერილია შემოკლებების გარეშე). თუ $n = 0$, მაშინ α წარმოადგენს უბრალოდ პროპოზიციულ ასოს p_1 , და ლემის მტკიცება დაიყვანება $p_1 \vdash p_1$ და $\neg p_1 \vdash \neg p_1$. ახლა დაუშვათ, რომ ლემა მართებულია როცა $j < n$.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 1. α- ს აქვს უარყოფის სახე: $\neg\beta$. ცხადია, რომ პრიმიტიული კავშირების რაოდენობა β -ში ნაკლებია n –ზე.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 1ა. დავუშვათ, რომ მოცემული ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა განაწილებისას β ღებულობს მნიშვნელობა 1. მაშინ α ღებულობს მნიშვნელობა 0.

მაშასადამე, β' არის β, ხოლო α' არის $\neg\alpha$. ინდუქციის დაშვების თანახმად, β-ს მიმართ გამოყენებული, გვაქვს $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \beta$. ე. ი., ლემა 6 (b) და MP თანახმად, $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \neg\neg\beta$. მაგრამ $\neg\neg\beta$ არის სწორედ α'.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 1ბ. დავუშვათ β ღებულობს მნიშვნელობა 0. მაშინ β' არის $\neg\beta$, ხოლო α' ემთხვევა α-ს. ინდუქციის დაშვების თანახმად, $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \neg\beta$, რაც უნდა მიგვეღო, რადგან $\neg\beta$ არის α'.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 2. α-ს აქვს სახე $(\beta \to \gamma)$. მაშინ პრიმიტიული კავშირების რაოდენობის შემავლობა β–ში და γ-ში ნაკლებია ვიდრე α-ში. ამიტომ ინდუქციის დაშვების თანახმად $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \beta'$ და $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \gamma'$.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 2ა. β ღებულობს მნიშვნელობა 0. მაშინ α ღებულობს მნიშვნელობა 1, და β' არის $\neg\beta$, ხოლო α' არის α. მაშასადამე $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \neg\beta$ და, ლემა 6 (c) თანახმად, $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \beta \to \gamma$, მაგრამ $\beta \to \gamma$ არის α.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 2ბ. γ ღებულობს მნიშვნელობა 1. მაშასადამე, α ღებულობს მნიშვნელობა 1 და γ' არის γ, ხოლო α' არის α. $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \gamma$, და მაშინ, აქსიომათა სქემის (A1) თანახმად, $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \beta \to \gamma$, სადაც $\beta \to \gamma$ ემთხვევა α'-ს.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა 2გ. β ღებულობს მნიშვნელობა 1 და γ ღებულობს მნიშვნელობა 0. α' არის $\neg\alpha$, რადგან α ღებულობს მნიშვნელობა 0. β' არის β და γ' არის $\neg\gamma$. გვაქვს $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \beta$ და $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \neg\gamma$. აქედან, ლემა 6 (f) მიხედვით, ვღებულობთ $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \neg(\beta \to \gamma)$, სადაც $\neg(\beta \to \gamma)$ არის α'. □

თეორემა 9. (სისრულის თეორემა.) *თუ* L *თეორიის ფორმულა* α *ტავტოლოგიაა, მაშინ ის* L *თეორიის თეორემაა.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ α ტავტოლოგიაა და $p_1, \ldots, p_k$ პროპოზიციული ასოებია, რომლებსაც შეიცავს α. ყოველი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა განაწილებისათვის $p_1, \ldots, p_k$ პროპოზიციული ასოებისთვის, ლემა 9 თანახმად, გვაქვს $p'_1, \ldots, p'_k \vdash \alpha$ (α' ემთხვევა α-ს, ვინაიდან α ყოველთვის ღებულობს მნიშვნელობა 1. ამიტომ, როდესაც p_k ღებულობს მნიშვნელობა 1, ჩვენ გამოვიყენებთ რა ლემა 8, ვღებულობთ $p'_1, \ldots, p'_{k-1}, p_k \vdash \alpha$, ხოლო როცა p_k ღებულობს მნიშვნელობა 0, იმავე ლემით ვღებულობთ $p'_1, \ldots, p'_{k-1}, \neg p_k \vdash \alpha$. აქედან, დედუქციის თეორემის თანახმად, $p'_1, \ldots, p'_{k-1} \vdash p_k \to \alpha$ და $p'_1, \ldots, p'_{k-1} \vdash \neg p_k \to \alpha$. გამოვიყენებთ რა ლემა 6 (g), ვღებულობთ $p'_1, \ldots, p'_{k-1} \vdash \alpha$.
ზუსტად ასევე, განვიხილავთ რა ორ შემთხვევას, როცა p_{k-1} ღებულობს მნიშვნელობებს 1 და 0, და გამოვიყენებთ რა დედუქციის თეორემას და ლემა 6 (g), ჩვენ გამოვრიცხავთ p_{k-1} და ასე შემდეგ; k ნაბიჯის შემდეგ ჩვენ მივიღებთ $\vdash \alpha$. □

შედეგი 10. *სისტემა* L *არაწინააღმდეგობრივია, ე. ი. არ არსებობს ფორმულა* α *ისეთი, რომ* α *და* $\neg\alpha$ *ერთდროულად იყოს* L *–ის თეორემები.*

დამტკიცება. თეორემა 7-ის თანახმად, L თეორიის ყოველი თეორემა ტავტოლოგიაა. ტავტოლოგიის უარყოფა არ არის ტავტოლოგია. ე. ი., ყოველი α ფორმულისთვის შეუძლებელია, რომ α და $\neg\alpha$ იყოს L ერთდროულად თეორიის თეორემები. □

IV

პირველი რიგის თეორიები

4.1. ქვანტორები

არსებობს ისეთი სახის ლოგიკური მსჯელობები, რომლებიც ვერ საბუთდება გამონათქვამთა აღრიცხვის ჩარჩოებში. მოგვყავს ასეთი მსჯელობების მაგალითები :

(1) მამუკას ყოველი მეგობარი ჯანოს მეგობარია. პეტრე არ არის ჯანოს მეგობარი. მაშასადამე, პეტრე არ არის მამუკას მეგობარი.

(2) ყველა ადამიანი უკვდავია. სოკრატე ადამიანია. მაშასადამე, სოკრატე უკვდავია.

(3) ყველა ადამიანი ცხოველია. მაშადამე, ადამიანის თავი ცხოველის თავია.

ამ მასაზრებების კორექტულობა ეყრდნობა არა მხოლოდ მათში შემავალ წინადადებებს შორის ფუნქციონალურ-ჭეშმარიტულ ურთიერთობებს, არამედ ამ წინადადებების შინაგან სტრუქტურას, და აგრეთვე ისეთი გამონათქვამების გაგებას როგორიცაა "ყველა", "ყოველი" და ა. შ.

უფრო ნათელი რომ გახდეს რთული გამონათქვამების სტრუქტურა, მოსახერხებელია შემოვიღოთ სპეციალური გამონათქვამების აღნიშვნები , რომლებსაც ხშირად ვიყენებთ. თუ $P(x)$ აღნიშნავს, რომ x -ს გააჩნია თვისება P, მაშინ შევთამხდეთ $\forall xP(x)$ საშუალებით აღვნიშნავთ მტკიცებას : "ყოველი x საგნისათვის შესრულებულია თვისება P ", ან სხვა სიტყვებით, "ყველა x –ს გააჩნია თვისება P ". ჩანაწერი $\exists xP(x)$ აღნიშნავს, რომ "არსებობს საგანი x, რომელსაც გააჩნია თვისება P ", ე. ი. , "არსებობს ერთი მაინც საგანი x, რომელსაც გააჩნია თვისება P ". გამოსახულებაში $\forall xP(x)$ ნაწილს $\forall x$ ეწოდება *ზოგადობის კვანტორი,* ხოლო $\exists x$ ნაწილს $\exists xP(x)$ გამოსახულებისა ეწოდება *არსებობის კვანტორი.* კვანტორების, როგორც ლოგიკური ოპერაციბის, და მათთან დაკავშირებულ ცნებების შესწავლა წარმოდგენს ამ თავის ძირითად საგანს.

მ გ ა ლ ი თ ე ბ ი. დაუშვათ, რომ $m, j, p, s, F(x,y), M(x), I(x), A(x), h(x)$ აღნიშნავენ შესაბამისად "მამუკა", "ჯანო", "პეტრე", "სოკრატე", "x არის y-ის მეგობარი", "x ადამიანია" , "x უკვდავია", "x ცხოველია", "x –ის თავი". მაშინ (1) – (3) მსჯელობები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად :

(1') $$\frac{\forall x(F(x,m) \supset F(x,j)) \quad \neg F(p,j)}{\neg F(p,j)} \ ;$$

(2') $$\frac{\forall x\,(M(x) \supset I(x)) \quad M(s)}{} \ ;$$

$$I(s)$$

(3') $$\frac{\forall x\,(M(x) \supset A(x))}{\forall x(\exists x(x = h(y)\ \&\ M(y)) \supset \exists y(\,x = h(y)\ \&\ A(y)))}\ .$$

შევნიშნოთ, რომ ამ დასკვნების მართებულობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, რა კონკრეტული აზრი აქვთ სიმბოლოებს $m, j, p, s, F(x,y), M(x), I(x), A(x)$ და $h(x)$.

მსგავსად იმისა როგორ იყო გამოყენებული პროპოზიციული ფორმულები ლოგიკური სტრუქტურის გამოსავლენად, რომელიც დამოკიდებული იყო პროპოზიციულ კავშირებზე, შესაძლებელია აგრეთვე წარმოვადგინოთ აბსტრაქტულ ფორმებში მსჯელობები (ისეთი, როგორც (1) – (3)) , რომლებიც შეიცავენ ქვანტორებს, ისეთნაირად როგორც ეს გაკეთებული იყო (1') – (3') სახით. ამ მიზნით ჩვენ გამოვიყენებთ მძიმეებს, ფრჩხილებს, გამონათქვამთა აღრიცხვის სიმბოლოებს ¬ და ⊃ , *საგნობრივ (ინდივიდურ) ცვლადებს* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *საგნობრივ (ინდივიდურ) კონსტანტებს* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *პრედიკატულ ასოებს* $P_1^1, P_1^2, \ldots, P_k^j, \ldots$ და *ფუნქციონალურ სიმბოლოებს* $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_k^j, \ldots$. პრედიკატული ან ფუნქციონალური ასოს ზედა ინდექსი მიუთითებს არგუმენტების რაოდენობას, ხოლო ქვედა ინდექსი განასხვავებს ერთდაიგივე არგუმენტიან ასოებს. ფუნქციონალური ასოები, გამოყენებული საგნობრივ ცვლადებზე და კონსტანტებზე, წარმოქმნიან *ტერმებს.* უფრო ზუსტად :

(a) ყოველი საგნობრივი ცვლადი და კონსტანტა ტერმია;
(b) თუ f_i^n ფუნქციონალური ასოა და $t_1, \ldots, t_n$ ტერმებია, მაშინ $f_i^n(t_1,\ldots,t_n)$ არის ტერმი;
(c) გამოსახულება არის ტერმი მხოლოდ მაშინ, როცა ის მიიღება (a) და (b) წესით.

პრედიკატული ასოები, გამოყენებული ტერმებზე, წარმოქმნიან *ელემენტარულ ფორმულებს.* უფრო ზუსტად : თუ P_i^n პრედიკატული ასოა, ხოლო $t_1, \ldots, t_n$ - ტერმებია, მაშინ $P_i^n(t_1,\ldots,t_n)$ ელემენტარული ფორმულაა.

პრედიკატთა აღრიცხვის *ფორმულები* განისაზღვრება შემდეგნაირად :

(a) ყოველი ელემენტარული ფორმულა ფორმულაა,
(b) თუ α და β ფორმულებია და y საგნობრივი ცვლადია, მაშინ $(\neg\alpha)$, $(\alpha \supset \beta)$ და $(\forall y\alpha)$ ფორმულებია,
(c) გამოსახულება არის ფორმულა მხოლოდ მაშინ, როცა ის მიიღება (a) და (b) წესით.

$(\forall y\alpha)$ გამოსახულებაში "α" –ს ეწოდება $\forall y$ *ქვანტორის მოქმედების არე.* შევნიშნოთ, რომ α შესაძლებელია არ შეიცავს ცვლად y ; ამ შემთხვევაში ჩვენ

ვთვლით , რომ შინაარსობრივი აზრი α და $(\forall y\alpha)$ ერთიდაიგივეა. ისევე როგორც გამონათქვამთა აღრიცხვაში განისაზღვრება გამოსახულებები $\alpha \,\&\, \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \equiv \beta$. არ არის აუცილებლობა მთავარ სიმბოლოთა რიცხვში ჩაირთოს $\exists$ ნიშანი არსებობის ქვანტორისათვის, ვინაიდან ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\exists x\alpha$ როგორც შემოკლებული ჩანაწერი $\neg(\forall x(\neg\alpha))$ გამოსახულებისა.

ცვლად x –ის შემავლობას მოცემულ ფორმულაში ეწოდება *ბმული*, თუ x არის ამ ფორმულაში შემავალი ქვანტორის $\forall x$ ცვლადი ან იმყოფება ამ ფორმულაში შემავალი ქვანტორის $\forall x$ მოქმედების არეში; წინააღმდეგ შემთხვევაში ცვლად x –ის შემავლობას მოცემულ ფორმულაში ეწოდება *თავისუფალი.*

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

(i) $P_1^2(x_1, x_2)$;
(ii) $P_1^2(x_1, x_2) \supset \forall x_1 P_1^1(x_1)$;
(iii) $\forall x_1(P_1^2(x_1, x_2) \supset \forall x_1 P_1^1(x_1))$.

ცვლადი x_1 ერთადერთი შემავლობა ფორმულა (i)-ში არის თავისუფალი. ცვლადი x_1-ის პირველი შემავლობა ფორმულა (ii)-ში არის თავისუფალი, ხოლო მეორე და მესამე – ბმული. ცვლადი x_1-ის ყველა შემავლობა ფორმულა (iii)-ში არის ბმული. ცვლადი x_2-ის შემავლობა სამივე ფორმულებში თავისუფალია. შევნიშნოთ, რომ ერთდაიგივე ცვლადს შეიძლება ჰქონდეს თავისუფალი და ბმული შემავლობა ერთდაიგივე ფორმულაში, როგორც ეს ადგილი აქვს, მაგალითად, ფორმულა (iii)-ში.

ცვლადს ეწოდება *თავისუფალი (ბმული) ცვლადი* მოცემულ ფორმულაში, თუ არსებობს მისი თავისუფალი (ბმული) შემავლობა ამ ფორმულაში. მაშასადამე, ცვლადი შეიძლება იყოს ერთდროულად თავისუფალიც და ბმულიც ერთდაიგივე ფორმულაში. ასეთია, მაგალითად, ცვლადი x_1 (ii) ფორმულაში.

დაუშვათ $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ ცვლადებია და α ფორმულაა. მიუხედავად იმისა არიან თუ არა ეს ცვლადები თავისუფალი α-ში და არსებობს თუ არა α-ში სხვა თავისუფალი ცვლადები, ჩვენ ზოგჯერ გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, რომ აღვნიშნოთ ფორმულა α იმისთვის, რომ შემდგომ აღვნიშნოთ $\alpha(t_1,\ldots,t_k)$ – თი შედეგი მიღებული $t_1,\ldots,t_k$ ტერმების ჩანაცვლებით შესაბამისად $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ თავისუფალი ცვლადების შემავლობის ადგილას (თუ ასეთები მოიძებნება) ფორმულა α-ში.

ტერმ t -ს ეწოდება *თავისუფალი* x_i ცვლადისთვის ფორმულა α-ში, თუ x_I-ის არცერთი თავისუფალი შემავლობა α-ში არ იმყოფება კვანტორ $\forall x_j$ მოქმეების არეში, სადაც x_j *არის ცვლადი, რომელსაც შეიცავს* t.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. (a) ტერმი x_j თავისუფალია x_i –თვის $P_1^1(x_i)$-ში , მაგრამ არ არის თავისუფალი $\forall x_j P_1^1(x_i)$-ში. ტერმი $f_1^2(x_1, x_3)$ თავისუფალია x_i –თვის $\forall x_2 P_1^2(x_1, x_2) \supset P_1^1(x_1)$-ში, მაგრამ არ არის თავისუფალი $\exists x_3 \forall x_2 P_1^2(x_1, x_2) \supset P_1^1(x_1)$-ში.

(b) ყოველი ტერმი, რომელიც არ შეიცავს ცვლადებს, თავისუფალია ნებისმიერი ცვლადისთვის ნებისმიერ ფორმულაში.

(c) ტერმი t თავისუფალია ნებისმიერი ცვლადისთვის ფორმულა α-ში , თუ ტერმ t-ს არცერთი ცვლადი არ არის ბმული ცვლადი α-ში.

(d) x_i თავისუფალია x_i ცვლადისთვის ნებისმიერ ფორმულაში.

(e) ყოველი ტერმი თავისუფალია x_i –თვის α-ში , თუ α არ შეიცავს x_i –ის თავისუფალ შემავლობას.

4.2. **ინტერპრეტაცია. შესრულებადობა და ჭეშმარიტობა. მოდელები**.

ფორმულებს გააჩნია აზრი მხოლოდ მაშინ, როცა მათში შემავალ სიმბოლოებს გააჩნია ინტერპრეტაცია. როგორც ვიცით სიმბოლოები წარმოადგენენ თეორიის ენის ნაწილს. თეორიის ენა აღვნიშნოთ L -ით. *ინტერპრეტაციის* ქვეშ ჩვენ გვესმის ფუნქცია φ-ი რომელიც ასახავს ენას ალგებრულ სისტემაში $(D, \{g_i^j\}, \{R_i^j\})$,

სადაც $\varphi(a_i) \in D$, $\varphi(f_i^j) = g_i^j$, $\varphi(P_i^j) = R_i^j$, და $g_i^j: D^j \to D$ და $R_i^j \subseteq D^j$ არის შესაბამისად j–ადგილიანი ოპერაცია და მიმართება D-ში. D-ს ეწოდება φ ინტერპრეტაციის არე. მოცემულ ინტერპრეტაციაში ცვლადები მოისაზრება როგორც ცვლადები D –ზე, ხოლო კავშირებს $\neg$, $\supset$ და კვანტორებს ენიჭება მათი ჩვეულებრივი აზრი.

მოცემული ინტერპრეტაციისათვის ნებისმიერი ფორმულა თავისუფალი ცვლადების გარეშე (ან, სხვანაირად, *ჩაკეტილი ფორმულა*) წარმოადგენს გამონათქვამს , რომელიც ჭეშმარიტია ან მცდარია, ხოლო ნებისმიერი ფორმულა თავისუფალი ცვლადებით გამოხატავს რომელიღაც მიმართებას ინტერპრეტაციის არეში ; ეს მიმართება შეიძლება იყოს შესრულებადი (ჭეშმარიტი) ცვლადების რომელიღაც მნიშვნელობებისათვის ინტერპრეტაციის არედან და არ იყოს შესრულებადი (მცდარი) სხვა მნიშვნელობებისათვის.

მ გ ა ლ ი თ ე ბ ი

(i) $P_1^2(x_1, x_2)$;
(ii) $\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)$;
(iii) $\exists x_2 \forall x_1 P_1^2(x_2, x_1)$.

თუ ჩვენ ვიღებთ ინტერპრეტაციის არედ დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს და $P_1^2(y, z)$ ინტერპრეტაცია არის $y \le z$, მაშინ (i) წარმოადგენს მიმართებას $y \le z$, რომელიც შესრულებადია ყველა ისეთ დადებით მთელ რიცხვთა (a,b) დალაგებულ წყვილებისთვის, რომ $a \le b$; (ii) წარმოადგენს თვისებას (ე. ი. უნარულ (ერთადგილიან) მიმართებას)

“ყოველი დადებითი მთელი y რიცხვისთვის, $y \leq z$ ”, რომელიც სრულდება მხოლოდ 1 რიცხვისთვის; დაბოლოს , (iii) არის ჭეშმარიტი გამონათქვამი, რომელიც ამტკიცებს უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვის არსებობას. ჩვენ რომ ინტერპრეტაციის არედ აგვეღო ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე, მაშინ (iii) აღმოჩნდებოდა მცდარი.

შესრულებადობის და ჭეშმარიტობის ცნება ინტუიციურად გასაგებია, მაგრამ სკეპტიკოსებისთვის შესაძლებელია მოვიყვანოთ უფრო ზუსტი ფორმულირება. დაუშვათ გვაქვს რომელიმე ინტერპრეტაცია φ თავისი ინტერპრეტაციის D არეთი, და Σ იყოს ყველა თვლად მიმდევრობათა სიმრავლე, რომლის ელემენტები არის D-დან. ჩვენ ეხლა განვსაზღვრავთ, რას ნიშნავს, რომ ფორმულა α შესრულებადია $s = (b_1, b_2, \ldots)$ მიმდევრობაზე Σ-დან მოცემული ინტერპრეტაციისათვის.

წინასწარ ჩვენ განვსაზღვრავთ ერთადგილიან ფუნქციას s^*, რომლის დომეინია ყველა ტერმთა სიმრავლე, ხოლო კოდომეინი არის.

(1) თუ ტერმი t არის საგნობრივი ცვლადი x_i , მაშინ $s^*(t) = b_i$.
(2) თუ ტერმი t არის საგნობრივი კონსტანტა a_i, მაშინ $s^*(t)$ ემთხვევა მის ინტერპრეტაციას $\varphi(a_i) \in D$.
(3) თუ f_i^n ფუნქციონალური ასოა, რომლის ინტერპრეტაცია $\varphi(f_i^n) = g_i^n$ არის n – ადგილიანი ოპერაცია D –ზე, და $t_1, \ldots, t_n$ ტერმებია, მაშინ $s^*(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = g_i^n(s^*(t_1), \ldots, s^*(t_n))$.

ამრიგად, s^* არის ფუნქცია , რომელიც განისაზღვრება მიმდევრობა s-ით და ასახავს ტერმთა სიმრავლეს D-ში. თუ ვილაპარაკებთ არაფორმალურად, მაშინ ნებისმიერი $s = (b_1, b_2, \ldots)$ მიმდევრობისთვის და ნებისმიერი ტერმ t-თვის $s^*(t)$ არის D სიმრავლის ელემენტი, რომელიც მიიღება ცვლად x_i ჩანაცვლების შედეგად b_i ელემენტით ყოველი i –თვის ტერმ t-ში და შემდეგ ინტერპრეტაციის ყველა ოპერაციის შესრულებით , რომლებიც შეესაბამებიან ტერმ t-ში შემავალ ფუნქციონალურ ასოებს. მაგალითად, თუ t არის $f_2^2(x_3, f_1^2(x_1, a_1))$, ინტერპრეტაციის არე არის მთელ რიცხვთა სიმრავლეწ, f_2^2 და f_1^2 ინტერპრეტირდება შესაბამისად როგორც ჩვეულებრივი გამრავლება და ჯამი, ხოლო a_1 როგორც 2 ; მაშინ ნებისმიერი $s = (b_1, b_2, \ldots)$ მიმდევრობისთვის $s^*(t)$ წარმოადგენს მთელ რიცხვს $b_1 \times (b_1 + 2)$.

ეხლა ჩვენ შევუდგეთ ძირითად განსაზღვრებას, რომელსაც განვმარტავთ ფორმულის ინდუქციურ განსაზღვრაზე დაყრდნობით.

(i) თუ α არის ელემენტარული ფორმულა $P_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ და R_j^n არის მისი შესაბამისი მიმართება $\varphi(P_j^n)$ მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ფორმულა α შესრულებადია s მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$R_j^{\,n}(s^*(t_1),\ldots, s^*(t_n))$, ე. ი. n –ელემენტიანი მიმდევრობა $(s^*(t_1),\ldots,s^*(t_n))$ ეკუთვნის მიმართება $R_j^{\,n}$.

(ii) ფორმულა $\neg\alpha$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α არ არის შესრულებადი s-ზე.

(iii) ფორმულა $\alpha \supset \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α არ არის შესრულებადი მიმდევრობა s-ზე ან როცა ფორმულა β შესრულებადია s-ზე.

(iv) ფორმულა $\forall x_i\alpha$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე Σ -დან, რომელიც განსხვავებულია s-ისგან არაუმეტეს თავისი i-ური კომპონენტით.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ფორმულა α შესრულებადია $s = (b_1, b_2, \ldots.)$ მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჩანაცვლება ყოველი i- თვის სიმბოლოსი, რომელიც წარმოადგენს b_i , ადგილებზე სადაც x_i წარმოადგენს თავისუფალ ცვლადს α-ში გვაძლევს ჭეშმარიტ წინადადებას მოცემულ ინტერპრეტაციაში.

ფორმულა α ეწოდება *ჭეშმარიტი* (მოცემულ ინტერპრეტაციაში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე Σ–დან.

ფორმულა α ეწოდება *მცდარი* (მოცემულ ინტერპრეტაციაში), თუ ის არ არის შესრულებადი არცერთ მიმდევრობაზე Σ–დან.

მოცემულ ინტერპრეტაციას ეწოდება *მოდელი* მოცემული Γ სიმრავლისათვის, თუ ყოველი ფორმულა Γ-დან ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში.

შეამოწმეთ შემდეგი დებულებები, რომლებიც გამომდინარეობენ განსაზღვრებიდან.

(I) α მცდარია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\alpha$ ჭეშმარიტია იგივე ინტერპრეტაციაში, და α ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\alpha$ მცდარია.

(II) არცერთი ფორმულა არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტი და მცდარი ერთდაიგივე ინტერპრეტაციაში.

(III) თუ მოცემულ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია α და $\alpha \supset \beta$, მაშინ ჭეშმარიტია β .

(IV) $\alpha \supset \beta$ მცდარია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ჭეშმარიტია ამ ინტერპრეტაციაში, ხოლო β მცდარია.

(V) (i) $\alpha \,\&\, \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α შესრულებადია s –ზე და β შესრულებადია s –ზე. $\alpha \vee \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α შესრულებადია s –ზე ან β შესრულებადია s –ზე. $\alpha \equiv \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან ფორმულა α შესრულებადია s –ზე და β შესრულებადია s –ზე, ან α არ არის შესრულებადი s –ზე და β არ არის შესრულებადია s –ზე.

(ii) $\exists x_i\alpha$ შესრულებადია s –ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α შესრულებადია ერთზე მაინც s' მიმდევრობაზე, რომელიც განსხვავდება s –გან არაუმეტეს მხოლოდ i –ური კომპონენტით.

(VI) α ჭეშმარიტია მოცმულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამავე ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია $\forall x_i\alpha$. მოცემული α ფორმულის *ჩაკეტვა* ეწოდება ფორმულას, რომელიც მიიღება ზოგადობის კვანტორების მინაწერით α -ს წინ, რომლებიც შეიცავენ ინდექსების კლებადობის მიხედვით α-ს ყველა თავისუფალ ცვლადებს. α ფორმულის ჩაკეტვას, რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს, ვუწოდებთ თვით ამ ფორმულა α-ს. (მაგალითად, თუ α არის $P_1^2(x_2, x_5) \supset \neg\exists x_2 P_1^3(x_1, x_2, x_3)$, მაშინ α-ს ჩაკეტვა იქნება $\forall x_5\forall x_3\forall x_2\alpha$.)

(VII) ტავტოლოგიის ყოველი კერძო შემთხვევა ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში. (მოცემული პროპოზიციული ფორმის კერძო შემთხვევას ჩვენ ვუწოდებთ ნებისმიერ ფორმულას, რომელიც მიიღება ამ ფორმულაში პროპოზიციული ფორმულების ნაცვლად (პრედიკატთა აღრიცხვის) ფორმულების ჩანაცვლებით იმ პირობით, რომ ერთდაიგივე პროპოზიციული ასოების შემავლობის ადგილას ერთდაიგივე ფორმულა ჩაინაცვლება.)

(VIII) დავუშვათ, რომ ფორმულა α -ს ყველა თავისუფალი ცვლადები იმყოფება $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ ცვლადებს შორის. მაშინ თუ s და s' მიმდევრობების კომპონენტები $i_1, \ldots, i_n$ ნომრით ემთხვევა ერთმანეთს , მაშინ ფორმულა α შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებადია s'-ზე. (მ ი თ ი თ ე ბ ა. ინდუქცია კავშირების და კვანტორების რაოდენობის მიხედვით ფორმულა α–ში. ჯერ დამტკიცდეს, რომ ტერმ t-ს ცვლადები იმყოფება $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ შორის , ხოლო s და s' მიმდევრობების წევრები $i_1, \ldots, i_n$ ნომრით ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ $s^*(t) = (s')^*(t)$. კერძოდ, თუ t არ შეიცავს ცვლადებს, მაშინ $s_1^*(t) = s_2^*(t)$ ნებისმიერი s_1 და s_2 მიმდევრობებისათვის.

ყველა ისეთი n-ელემენტიან $(b_{i_1},\ldots,b_{i_k})$ მიმდევრობების სიმრავლეს, სადაც მისი ელემენტები ეკუთვნის ინტერპრეტაციის D არეს, ისეთი რომ ფორმულა α შესრულებადია ყოველ მიმდევრობა s –ზე, რომლის $i_1, \ldots, i_n$ კომპონენტები ემთხვევა შესაბამისად $b_{i_1},\ldots,b_{i_k}$, ეწოდება ინტერპრეტაციის მიმართება (ან თვისება), რომელიც შეესაბამება ფორმულა α–ს. დავუშვათ, მაგალითად, რომ D არის ყველა ადამიანთა სიმრავლე, $P_1^2(x,y)$ და $P_2^2(x,y)$ ინტერპრეტაციები შესაბამისად არიან "x არის y-ის ძმა" და "x არის y-ის მშობელი" ; მაშინ ბინარული მიმართება D–ში , რომელიც შეესაბამება ფორმულას $\exists x_3(P_1^2(x_1,x_3) \wedge P_2^2(x_3,x_2))$, წარმოადგენს მიმართებას – ნათესაურ კავშირს, რომელიც აკავშირებს ძმისშვილს და ბიძას. თუ ინტერპრეტაციის არედ ავიღებთ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეს, ხოლო P_1^2, f_1^2 და a_1 ინტერპრეტირებულია შესაბამისად როგორც = , გამრავლება და 1, მაშინ ფორმულას

$\neg P_1^2(x_1, a_1) \wedge \forall x_2(\exists x_3 P_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)) \supset P_1^2(x_2, x_1) \vee P_1^2(x_2, a_1))$

შეესაბამება მოცემული აზრით რიცხვის თვისებას იყოს მარტივი.

(IX) თუ ფორმულა α ჩაკეტილია, მაშინ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია ან α, ან $\neg\alpha$ (ე. ი. α მცდარია).

არაჩაკეტილი, ე. ი. რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს, ფორმულა α შეიძლება ზოგიერთ ინტერპრეტაციაში იყოს არც ჭეშმარიტი და არც მცდარი. დავუშვათ, მაგალითად, α არის $P_1^2(x_1,x_2)$. განვიხილოთ ინტერპრეტაცია, რომლის არე არის მთელ რიცხვთა სიმრავლე და სადაც $P_1^2(x_1,x_2)$ ინტერპრეტაცია არის $x < y$. ამ ინტერპრეტაციაში α შესრულებადია მხოლოდ მიმდევრობა $s = (b_1, b_2, \dots)$ –ზე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $b_1 < b_2$. მაშასადამე, ამ ინტერპრეტაციაში განხილული ფორმულა α არც ჭეშმარიტია და არც მცდარი.

(X) **ლემა.** *დავუშვათ, რომ t და v ტერმებია, s მიმდევრობაა Σ-დან, t' მიიღება t-დან ყველა x_i შემავლობების ჩანაცვლებით v ტერმით და s' მიიღება s-დან მასში i-ური კომპონენტის შეცვლით $s^*(v)$ –თი ; მაშინ $s^*(t') = (s')^*(t)$.*

დავუშვათ, რომ $\alpha(x_i)$ ფორმულაა, t ტერმია, რომელიც თავისუფალია x_i – თვის $\alpha(x_i)$-ში, და $\alpha(t)$ ფორმულაა, რომელიც მიღებულია $\alpha(x_i)$-ის ყველა თავისუფალი x_i ცვლადის შენაცვლებით t –თი. მაშინ ფორმულა $\alpha(t)$ შესრულებადია მიმდევრობა $s = (b_1, b_2, \dots)$ –ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებადია s', რომელიც მიღებულია s –დან ელემენტ b_i –ის შეცვლით $s^*(t)$ –თი.

შედეგი. *თუ მიმდევრობა s-ზე შესრულებადია ფორმულა $\forall x_i\alpha(x_i)$, მაშინ შესრულებადია აგრეთვე ფორმულა $\alpha(t)$. მაშასადამე, ფორმულა $\forall x_i\alpha(x_i) \supset \alpha(t)$ ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში.*

(XI) თუ ფორმულა α არ შეიცავს x_i როგორც თავისუფალ ცვლადს, მაშინ ფორმულა

$$\forall x_i(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x_i\beta)$$

ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში.

სავარჯიშო

დაამტკიცეთ (I) – (XI). მაგალითის სახით ჩვენ დავამტკიცოთ (XI).
დავუშვათ, რომ (XI) არასწორია. ეს ნიშნავს, რომ რომელიღაც α და β ფორმულებისთვის ფორმულა $\forall x_i(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x_i\beta)$ არ არის ჭეშმარიტი რომელიღაც ინტერპრეტაციაში. განსაზღვრის მე -(iii) პუნქტის თანახმად უნდა არსებობდეს მიმდევრობა s, რომელზედაც $\forall x_i(\alpha \supset \beta)$ შესრულებადია, ხოლო $(\alpha \supset \forall x_i\beta)$ არ არის შესრულებადი. მაშინ, ისევ იმავე მე -(iii) პუნქტის თანახმად ამ მიმდევრობა s-ზე შესრულებადია α და არ არის შესრულებადი $\forall x_i\beta$.. ე. ი. , იგივე განსაზღვრების მე- (iv) პუნქტის თნახმად, არსებობს მიმდევრობა s' , რომელიც შეიძლება განსხვავდებოდეს s –გან მხოლოდ ერთი i-ური კომპონენტით,

რომელზედაც არ არის შესრულებადი β . ვინაიდან x_i არ არის თვისუფალი არც $\forall x_i(\alpha \supset \beta)$ – ში და არც α -ში, ხოლო თვით ეს ფორმულები შესრულებადია s-ზე, მაშინ, თანახმად (VIII) , ისინი შესრულებადია აგრეთვე s'-ზე, (iv) თანახმად გამომდინარეობს , რომ $\alpha \supset \beta$ აგრეთვე შესრულებადია s'-ზე. ამგვარად, $\alpha \supset \beta$ და α შესრულებადია s'-ზე, საიდანაც, პუნქტი (iii) მიხედვით , გამომდინარეობს, რომ β -ც შესრულებადია s'-ზე. მივიღეთ წინაამდდეგობა, რომ β არ არის შესრულებადი s'-ზე. ამით (XI) დამტკიცებულია.

ფორმულა α -ს ეწოდება *ლოგიკურად ზოგადმართებული* (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ის ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში.

ფორმულა α -ს ეწოდება *შესრულებადი* (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ არსებობს ინტერპრეტაცია, რომელშიც α შესრულებადია ერთ მაინც მიმდევრობაზე Σ -დან.

ცხადია, რომ ფორმულა α ლოგიკურად ზოგადმართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\neg\alpha$ არ არის შესრულებადი, და α შესრულებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\neg\alpha$ არ არის ლოგიკურად ზოგადმართებული. როგორც ვიცით, ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ჩაკეტილი ფორმულა α ან ჭეშმარიტია ან მცდარი, ე. ი. შესრულებადია ან ნებისმიერ მიმდევრობაზე, ან არცერთზე. ამგვარად, ნებისმიერი ჩაკეტილი ფორმულა შესრულებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჭეშმარიტია რომელიღაც ინტერპრეტაციაში.

ფორმულა α ვუწოდებთ *წინააღდეგობრივს* (პრედიკატთა აღრიცხვაში) , თუ ფორმულა $\neg\alpha$ ლოგიკურად ზოგადმართებულია, ან, რაც იგივეა, თუ ფორმულა α მცდარია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში.

ვიტყვით, რომ ფორმულა β *ლოგიკურად გამომდინარეობს ფორმულა* α -დან (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ფორმულა β შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე, რომელზედაც შესრულებადია ფორმულა α . (უფრო ზოგადად, ფორმულა β *ლოგიკურად გამომდინარეობს* (პრედიკატთა აღრიცხვაში) ფორმულათა Γ სიმრავლიდან, თუ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ფორმულა β შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე, რომელზედაც შესრულებადია ყოველი ფორმულა Γ-დან.)

ფორმულებს ვუწოდებთ *ლოგიკურად ექვივალენტურებს* (პრედიკატთა აღრიცხვაში) , თუ ყოველი მათგანი ლოგიკურად გამომდინარეობს მეორედან.

ამ განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი მტკიცებები:

(a) ფორმულა β ლოგიკურად გამომდინარეობს ფორმულა α -დან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\alpha \supset \beta$ ლოგიკურად ზოგადმართებულია.

(b) α და β ფორმულები ლოგიკურად ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $\alpha \equiv \beta$ ლოგიკურად ზოგადმართებულია.

(c) თუ ფორმულა β ლოგიკურად გამომდინარეობს ფორმულა α -დან და α ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ამავე ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია β.

(d) თუ ფორმულა β ლოგიკურად გამომდინარეობს ფორმულების Γ სიმრავლიდან , რომლებიც ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ამავე ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია β.

ყოველ წინადადებას რომელიმე ფორმალურ ან ბუნებრივ ენაში ეწოდება *ლოგიკურად ჭეშმარიტი* (პრედიკატთა აღრიცხვაში), თუ ის არის რომელიღაც ლოგიკურად ზოგადმართებული ფორმულის კერძო შემთხვევა, და ეწოდება *ლოგიკურად მცდარი* (პრედიკატთა აღრიცხვაში) , თუ ის არის კერძო შემთხვევა რომელიღაც წინაამღდეგობრივი ფორმულისა.

4.3 პირველი რიგის თეორიები

გამონათქვამთა აღრიცხვის შემთხვევაში ჭეშმარიტობის ცხრილის მეთოდი გვაძლევს შემოწმების ეფექტურ საშუალებას, არის თუ არა მოცემული ფორმულა ტავტოლოგია. მაგრამ ეჭვის ქვეშ დგას ეფექტური პროცესის არსებობა , რომელიც იძლევა საშუალებას ნებისმიერი მოცემული ფორმულისათვის ამოიხსნას საკითხი იმის შესახებ , არის თუ არა ის ლოგიკურად ზოგადმართებული, ვინაიდან ეხლა უკვე ნებისმიერი ფორმულისათვის გვაქვს საქმე შევამოწმოთ მისი ჭეშმარიტობა ინტერპრეტაციებში , რომლის არეები არის ნებისმიერი დიდი სასრული, და აგრეთვე უსასრულო. აქსიომატიკური მეთოდი, რომელიც წარმოადგენდა ზედმეტ ფუფუნებას გამონათქვამთა აღრიცხვისათვის, ამგვარად წარმოადგენს აუცილებლობას ფორმულების შესწავლისას, რომლებიც შეიცავენ კვანტორებს, და ამიტომ ჩვენ უკვე შეუდგებით *პირველი რიგის თეორიების* განხილვას.

ნებისმიერი პირველი რიგის K თეორიის სიმბოლოები არსებითად წარმოადგენენ იგივე სიმბოლოებს, რომლებიც ჩვენ შემოვიღეთ ადრე ამ თავში: პროპოზიციული კავშირები ¬, ∪; პუნკტუაციის ნიშნები (,), (მკაცრად რომ ვთქვათ, მძიმე არ არის აუცილებელი, მაგრამ მოსახერხებელია ფორმულების წაკითხვისათვის); საგნობრივი ცვლადების $x_1, x_2, \ldots$ თვლადი სიმრავლე; არაცარიელი, სასრული ან თვლადი, პრედიკატული ასოების სიმრავლე P_j^n $(n, j \geq 1)$; სასრული (შესაძლებელია ცარიელიც) ან თვლადი სიმრავლე ფუნქციონალური ასოებისა f_j^n $(n, j \geq 1)$; და, დაბოლოს, სასრული (აგრეთვე, შესაძლებელია, ცარიელი) ან თვლადი სიმრავლე საგნობრივი კონსტანტებისა a_i $(i \geq 1)$. ამგვარად, K თეორიას შესაძლებელია არ გააჩნდეს რომელიმე ან ყველა ფუნქციონალური ასოებიც კი და საგნობრივი კონსტანტები, აგრეთვე რომელიმე – მაგრამ არა ყველა! – პრედიკატული ასოები. სხვადასხვა თეორიები შეიძლება განსხვავდებოდენ ერთმანეთისგან სიმბოლოების შემადგენლობით. წინა ლექციაში განსაზღვრული ტერმები, ფორმულები და პროპოზიციული კავშირები &, ∨, ≡ რჩება ძალაში ნებისმიერი პირელი რიგის თეორიისათვის. რა თქმა უნდა, ყოველი პირველი რიგის K თეორიისთვის ტერმების და ფორმულების აგებაში მონაწილეობენ მხოლოდ ის სიმბოლოები, რომლებიც ეკუთვნიან K თეორიას.

K თეორიის აქსიომები იყოფა ორ კლასად: ლოგიკურ და საკუთრივ (არალოგიკურ) აქსიომებად.

ლოგიკური აქსიომები: K თეორიის α, β და γ ნებისმიერი ფორმულებისთვის, შემდეგი ფორმულები წარმოადგენენ K თეორიის აქსომებს :

(1) $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$;
(2) $((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)))$;
(3) $((\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset ((\neg\beta \supset \alpha) \supset \beta))$;
(4) $\forall x_i \alpha(x_i) \supset \alpha(t)$, სადაც $\alpha(x_i)$ არის K თეორიის ფორმულა, რომელიც თავისუფალია x_i –თვის $\alpha(x_i)$-ში . შევნიშნოთ, რომ t შეიძლება ემთხვეოდეს x_i –ს, და მაშინ ჩვენ ვღებულობთ აქსომას $\forall x_i \alpha(x_i) \supset \alpha(x_i)$.
(5) $\forall x_i(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x_i \beta)$, თუ ფორმულა α არ შეიცავს x_i ცვლადის თავისუფალ შემავლობას.

4.4 პირველი რიგის თეორიების თვისებები

ამ პარაგრაფის ყველა შედეგი მიეკუთვნება (თუ არ არის სპეციალური მინიშნება) ნებისმიერი პირველი რიგის K თეორიას. შევნიშნოთ, რომ პირველი რიგის ყოველი თეორია არის ფორმალური თეორია.

თეორემა 1. *თუ K თეორიის ნებისმიერი ფორმულა α არის ტავტოლოგიის კერძო შემთხვევა, მაშინ α არის K თეორიის თეორემა და გამოიყვანება მხოლოდ* (1) – (3) *აქსიომების და გამოყვანის წესის* modus ponens*-ის გამოყენებით.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ α მიღებულია რომელიღაც W ტავტოლოგიიდან ჩანაცვლების საშუალებით. გამონათქვამთა აღრიცხვის სისრულის თეორემის თანახმად არსებობს W გამოყვანა L–ში. ამ გამოყვანაში ყველგან გავაკეთოთ ჩანაცვლება შემდეგი წესის მიხედვით : (i) თუ რომელიღაც პროპოზიციული ასო შედის W –ში, მაშინ ყველა მისი შემავლობის ადგილას გამოყვანის ყოველ ფორმულაში ჩავანაცვლებთ K თეორიის იმ ფორმულას, რომელიც ჩანაცვლებული იყო W –ში იმავე პროპოზიციული ასოების ადგილას ფორმულა α აგებულობისას, (ii) თუ მოცემული პროპოზიციული ასო არ შედის W –ში , მაშინ ყველა მისი შემავლობის ადგილას გამოყვანის ფორმულებში ჩავანაცვლებთ ნებისმიერ (ერთდაიგივეს მოცემული პროპოზიციული ასოსთვის) K თეორიის ფორმულას. ასეთნაირად მიღებული ფორმულების მიმდევრობა იქნება ფორმულა α-ს გამოყვანა K-ში, ისეთნაირი გამოყვანა, რომელსაც გამოყენებული აქვს მხოლოდ აქსიომათა სქემა (1) – (3) და MP. □

თეორემა 2. *ნებისმიერი პირველი რიგის პრედიკატთა K აღრიცხვა არაწინაამღდეგობრივია.*

დამტკიცება. ნებისმიერი α ფორმულისთვის $h(\alpha)$ აღვნიშნოთ გამოსახულება, რომელიც მიიღება α ფორმულის შემდეგი გარდაქმნის შედეგად: α ფორმულაში ჩამოვაშოროთ ყველა ქვანტორი და ტერმი (შესაბამისი ფრჩხილებით და მძიმეებით). მაგალითად, $h(\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2) \supset P_1^1(x_3))$ არის $P_1^2 \supset P_1^1$. არსებითად $h(\alpha)$ ყოველთვის არის პროპოზიციული ფორმულა, სადაც პროპოზიციული ასოების მაგივრად გამოყენებულია P_j^k სიმბოლოები. ცხადია, რომ $h(\neg\alpha) = \neg h(\alpha)$ და $h(\alpha \supset \beta) = h(\alpha) \supset h(\beta)$. ნებისმიერი α აქსიომისთვის , რომელიც მიღებულია (1) – (5) აქსიომათა სქემებიდან, $h(\alpha)$ არის ტავტოლოგია. ეს ცხადია (1) – (3) –თვის. მე-(4) სქემის $\forall x_i \alpha(x_i) \supset \alpha(t)$ ყოველი კერძო შემთხვევა h ოპერაციით გარდაიქმნება $\beta \supset \beta$ სახის ტავტოლოგიად, ხოლო მე-(5) სქემის $\forall x_i (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x_i \beta))$ ყოველი კერძო შემთხვევა h ოპერაციით გარდაიქმნება$(\delta \supset \gamma) \supset (\delta \supset \gamma)$ სახის ტავტოლოგიად. დაბოლოს, თუ $h(\alpha)$ და $h(\alpha \supset \beta)$ ტავტოლოგიებია, მაშინ $h(\beta)$ ტავტოლოგიაა; თუ $h(\alpha)$ ტავტოლოგიაა, მაშინ $h(\forall x_i \alpha)$ ტავტოლოგიაა, რადგან h ოპერაციის გამოყენების შედეგად მიღებული გამოსახულებები ემთხვევა ერთმანეთს. ე. ი. , თუ α თეორემაა K-ში, მაშინ $h(\alpha)$ ტავტოლოგიაა. თუ ჩვენ დაუშვებთ, რომ არსებობს ფორმულა β K-ში ისეთი, რომ $\vdash_K \beta$ და $\vdash_K \neg\beta$, მაშინ ორივე გამოსახულება $h(\beta)$ და $h(\neg\beta)$ იქნებოდა ტავტოლოგია, რაც შეუძლებელია. ე. ი. K არაწინაამღდეგობრივია. □

დედუქციის თეორემა გამონათქვამთა აღრიცხვისათვის გარკვეული შესაბამისი მოდიფიკაციის გარეშე შეუძლებელია ჩამოყალიბდეს ნებისმიერი პირველი რიგის K თეორიისათვის. მაგალითად, $\alpha \vdash_K \forall x_i \alpha$ ნებისმიერი α ფორმულისათვის, მაგრამ ყოველთვის არ გვაქვს, რომ $\vdash_K \alpha \supset \forall x_i \alpha$. მართლაც, განვიხილოთ ინტერპრეტაციის არე, რომელიც შეიცავს ორ c და d ელემენტს მაინც. დავუშვათ, რომ K არის რომელიღაც პრედიკატთა აღრიცხვა, და α არის $P_1^1(x_1)$. დავუშვათ, რომ P_1^1–ის ინტერპრეტაცია წარმოადგენს რაღაც თვისებას, რომელიც გააჩნია მხოლოდ ელემენტ c-ს. მაშინ $P_1^1(x_1)$ შესრულებადია ნებისმიერ $s = (b_1, b_2, \dots)$ მიმდევრობაზე, სადაც $b_1 = c$, მაგრამ $\forall x_i \alpha$ არ არის შესრულებადი საერთოდ არცერთ მიმდევრობაზე. ამგვარად, ფორმულა $\alpha \supset \forall x_i \alpha$ არ არის ჭეშმარიტი მოცემულ ინტერპრეტაციაში და ამიტომ არ არის ლოგიკურად ზოგადმართებული. ხოლო, როგორც ჩვენ მომავალში ვნახავთ, ყოველი თეორემა ნებისმიერი პრედიკატთა აღრიცხვისათვის ლოგიკურად ზოგადმართებულია. მაგრამ შესუსტებული სახის დედუქციის თეორემის სასარგებლო ფორმა შესაძლებელია დამტკიცდეს.

დავუშვათ α ფორმულაა, რომელიც ეკუთვნის მოცემულ ფორმულათა Γ სიმრავლეს, და დაუშვათ , რომ $\beta_1, \dots, \beta_n$ – რომელიღაც გამოყვანაა Γ-დან, ცადაც ყოველი ნაბიჯი დასაბუთებულია. ჩვენ ვიტყვით, რომ β_i *დამოკიდებულია* α-ზე ამ გამოყვანაში , თუ

(i) β_i არის α და β_i -ის დასაბუთება არის ის, რომ β_i ეკუთვნის Γ, ან

(ii) β_i დასაბუთებულია იმით, რომ ის არის უშუალო შედეგი MP-ით ან Gen-ით რომელიღაც წინამდებარე ფორმულებიდან ამ გამოყვანაში, რომლებიდანაც ერთი მაინც დამოკიდებულია α-ზე.

მ გ ა ლ ი თ ი. α , $\forall x_1\alpha \supset \gamma \vdash \forall x_1\gamma$.

(β_1) α	ჰიპოთეზა
(β_2) $\forall x_1\alpha$	(β_1), Gen
(β_3) $\forall x_1\alpha \supset \gamma$	ჰიპოთეზა
(β_4) γ	(β_2), (β_3) , MP
(β_5) $\forall x_1\gamma$	(β_4), Gen

აქ (β_1) დამოკიდებულია α -ზე, (β_2) დამოკიდებულია α -ზე, (β_3) დამოკიდებულია $\forall x_1\alpha \supset \gamma$ -ზე, (β_4) დამოკიდებულია α -ზე და $\forall x_1\alpha \supset \gamma$-ზე და (β_5) დამოკიდებულია α -ზე და $\forall x_1\alpha \supset \gamma$-ზე.

თეორემა 3. *თუ β არ არის დამოკიდებული α -ზე გამოყვანაში* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, *მაშინ* $\Gamma \vdash \beta$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\beta_1, \ldots, \beta_n = \beta$ არის β -ს გამოყვანა Γ-დან და α -დან, სადაც β არ არის დამოკიდებული α-ზე. როცა მოცემულ გამოყვანაში ფორმულების რაოდენობა $n = 1$, მაშინ თეორემა მართებულია. დავუშვათ, რომ თეორემა მართებულია, როცა გამოყვანის სიგრძე (ფორმულების რაოდენაბა გამოყვანაში) ნაკლებია n –ზე (ინდუქციის დაშვება). თუ β ეკუთვნის Γ-ს ან β აქსიომაა, მაშინ $\Gamma \vdash \beta$. თუ β უშუალოდ გამომდინარეობს რომელიღაც (ერთი ან ორი) წინამდებარე ფორმულებიდან, მაშინ, ვინაიდან β არ არის დამოკიდებული α -ზე, არ არის დამოკიდებული α -ზე აგრეთვე არცერთი (ის) წინამდებარე ფორმულები. მაშასადამე, ინდუქციის დაშვების თანახმად, Γ -დან გამოიყვანება ეს ფორმულები, და მათთან ერთად ფორმულა β. □

თეორემა 4. (დედუქციის თეორემა) *დავუშვათ, რომ* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, *და ამასთან ერთად არსებობს β-ას ისეთი გამოყვანა $\{\Gamma, \alpha\}$ –დან, სადაც განზოგადოების გამოყვანის წესის* (Gen) *არცერთ გამოყენებისას ფორმულებზე, რომლებიც დამოკიდებულია ამ გამოყვანაში α-ზე, კვანტორით არ იბმევა α-ს არცერთი თავისუფალი ცვლადი. მაშინ* $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

დამტკიცება. დაუშვათ, რომ $\beta_1, \ldots, \beta_n = \beta$, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობას, რომ β გამოიყვანება $\{\Gamma, \alpha\}$ –დან. ინდუქციით დავამტკიცოთ, რომ $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$ ნებისმიერი $i \le n$. თუ β_i აქსიომაა ან ეკუთვნის Γ-ას , მაში $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$, ვინაიდან $\beta_i \supset (\alpha \supset \beta_i)$ აქსიომაა. თუ β_i ემთხვევა α-ს, მაშინ $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$ ვინაიდან $\vdash \alpha \supset \alpha$. თუ არსებობს j და k , რომლებიც ნაკლებია i-ზე, და ისეთები, რომ β_k არის $\beta_j \supset \beta_i$, მაშინ, იდუქციის დაშვების თანახმად, $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_j$ და $\Gamma \vdash \alpha \supset (\beta_j \supset \beta_i)$. მაშასადამე, მე- (2) აქსიომათა სქემის და MP-ით, $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$. ბოლოს, დაუშვათ, რომ არსებობს j, $j < i$, ისეთი, რომ β_i არის $\forall x_k \beta_j$. დაშვების თანახმად, $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_j$, და ან β_j არ არის დამოკიდებული α-ზე , ან x_k არ არის α-ას თავისუფალი ცვლადი.

თუ β_j არ არის დამოკიდებული α-ზე, მაშინ, თეორემა 3 მიხედვით, $\Gamma \vdash \beta_j$, და შემდეგ, Gen-ის გამოყენებით , ვღებულობთ $\Gamma \vdash \forall x_k \beta_j$, ე. ი. $\Gamma \vdash \beta_i$. (1) აქსიომათა სქემის გამოყენებით, $\vdash \beta_i \supset (\alpha \supset \beta_i)$. თუ x_k არ არის α-ას თავისუფალი ცვლადი, მაშინ , (5) აქსომათა სქემის მიხედვით, $\vdash \forall x_k(\alpha \supset \beta_j) \supset (\alpha \supset \forall x_k \beta_j)$. ვინაიდან $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_j$, მაშინ , გამოყვანის წესის Gen-ის მიხედვით, ვღებულობთ $\Gamma \vdash \forall x_k(\alpha \supset \beta_j)$ და , ბოლოს, მოდუს პონენსის MP საშუალებით : $\Gamma \vdash \alpha \supset \forall x_k \beta_j$, ე. ი. $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta_i$. ამით ინდუქცია დასრულდა. თეორემის დასკვნა მიიღება როცა $i = n$. □

შედეგი 5. *თუ* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *და არსებობს გამოყვანა, რომელიც აგებულია განზოგადოების წესის გამოყენების გარეშე* α*- ს თავისუფალი ცვლადების მიმართ, მაშინ* $\Gamma \vdash \beta$.

შედეგი 6. *თუ ფორმულა* α *ჩაკეტილია და* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, *მაშინ* $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \alpha \supset \forall x_2 \forall x_1 \alpha$.
დამტკიცება .

1. $\forall x_1 \forall x_2 \alpha$	ჰიპოთეზა
2. $\forall x_1 \forall x_2 \alpha \supset \forall x_2 \alpha$	აქსიომათა სქემა (4)
3. $\forall x_2 \alpha$	1, 2, MP
4. $\forall x_2 \alpha \supset \alpha$	აქსიომათა სქემა (4)
5. α	3, 4, MP
6. $\forall x_1 \alpha$	5, Gen
7. $\forall x_2 \forall x_1 \alpha$	6, Gen

ამგვარად, 1 – 7 მიხედვით, $\forall x_1 \forall x_2 \alpha \vdash \forall x_2 \forall x_1 \alpha$, მაგრამ გამოყვანის აგებისას Gen – ის გამოყენების არც ერთ შემთხვევაში არ იბმება $\forall x_1 \forall x_2 \alpha$ ფორმულის თავისუფალი ცვლადი. ამიტომ, შედეგი 5 თანახმად, $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \alpha \supset \forall x_2 \forall x_1 \alpha$.

4.5 სისრულის თეორემა

თეორემა 7. *პირველი რიგის თეორიის ნებისმიერ პრედიკატთა აღრიცხვაში ყოველი თეორემა არის ლოგიკურად ზოგადმართებული.*

დამტკიცება. ფორმულის ჭეშმარიტობის ცნების (VII) თვისების თანახმად, აქსიომები, რომლებიც წარმოდგენილია (1) – (3) სქემებით, ლოგიკურად ზოგადმართებულებია. (X) (შედეგი) და (XI) თანახმად, ლოგიკურად ზოგადმართებულებია აქსიომები, რომლებიც წარმოქმნილია (4) – (5) სქემებით. (III) და (VI) თანახმად, გამოყვანის წესები MP და Gen ინახავენ ლოგიკურად

ზოგადმართებულობის თვისებას. ამგვარად, ნებისმიერი პრედიკატული აღრიცხვის ყოველი თეორემა ლოგიკურად ზოგადმართებულია.

□

სავარჯიშოები.

1. თუ $\Gamma \vdash_K \alpha$ და ნებისმიერი ფორმულა Γ -დან ჭეშმარიტია მოცემულ M მოდელში, მაშინ ფორმულა α ჭეშმარიტია M მოდელში ნებისმიერი პირველი რიგის K თეორიისთვის.
2. თუ ფორმულა α არ შეიცავს ქვანტორებს და დამტკიცებადია პრედიკატთა აღრიცხვაში, მაშინ ის წარმოადგენს ტავტოლოგიის კერძო შემთხვევას, და ამიტომ, თეორემა 1-ის თანახმად, ამ ფორმულისათვის არსებობს უქვანტორო გამოყვანა, რომელშიც გამოყენებულია მხოლოდ აქსიომათა სქემა (1) – (3) და გამოყვანის წესი MP.

დავუშვათ, რომ ცვლადები x_i და x_j არ ემთხვევა ერთმანეთს და ფორმულა $\alpha(x_j)$ მიიღება $\alpha(x_i)$ ფორმულიდან x_j-ის ჩანაცვლებით ყველა ცვლად x_i -ის თავისუფალი შემავლობის ნაცვლად, მაშინ $\alpha(x_i)$ და $\alpha(x_j)$ უწოდებენ *მსგავსებს*, თუ x_j თავისუფალია x_i –თვის $\alpha(x_i)$ –ში და $\alpha(x_i)$ –ს არ გააჩნია x_j-ის თავისუფალი შემავლობა. თუ $\alpha(x_i)$ და $\alpha(x_j)$ მსგავსებია, მაშინ x_i თავისუფალია x_j-თვის $\alpha(x_j)$-ში და $\alpha(x_j)$-ის არ გააჩნია x_i-ის თავისუფალი შემავლობა. ამრიგად, მსგავსობა არის სიმეტრიული მიმართება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ , $\alpha(x_i)$ და $\alpha(x_j)$ მსგავსებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_j თავისუფლად შედის $\alpha(x_j)$-ში ზუსტად იმ ადგილებში, სადაც x_i თავისუფლად შედის $\alpha(x_i)$-ში.

ლემა 8. *თუ $\alpha(x_i)$ და $\alpha(x_j)$ მსგავსებია, მაშინ* $\vdash \forall x_i \alpha(x_i) \equiv \forall x_j \alpha(x_j)$.

დამტკიცება. მე-(4) აქსიომათა სქემის მიხედვით, $\vdash \forall x_i \alpha(x_i) \supset \alpha(x_j)$. ვიყენებთ წესს Gen : $\vdash \forall x_j(\forall x_i \alpha(x_i) \supset \alpha(x_j))$ და , მე-(5) აქსიომათა სქემის მიხედვით, ვღებულობთ $\vdash \forall x_i \alpha(x_i) \supset \forall x_j \alpha(x_j)$. ანალოგიურად ვამტკიცებთ, რომ $\vdash \forall x_j \alpha(x_j) \supset \forall x_i \alpha(x_i)$. ვიყენებთ რა ტავტოლოგიას $p_1 \supset (p_2 \supset (p_1 \,\&\, p_2)$ და თეორემა 1, ვღებულობთ $\vdash \forall x_i \alpha(x_i) \equiv \forall x_j \alpha(x_j)$.
□

ლემა 9. *თუ* K *თეორიის ჩაკეტილი ფორმულა $\neg\alpha$ არ არის გამოყვანადი* K-*ში , მაშინ* K′ *თეორია, რომელიც მიღებულია* K-*დან α-ს დამატებით აქსიომის სახით, არაწინააღმდეგობრივია.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ K′ წინააღმდეგობრივია. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ფორმულა β, რომლისათვისაც $\vdash_{K'} \beta$ და $\vdash_{K'} \neg\beta$. თეორემა 1-ის თანახმად, $\vdash_{K'} \beta \supset (\neg\beta \supset \neg\alpha)$. მაშასადამე , $\vdash_{K'} \alpha$ და $\alpha \vdash_K \neg\alpha$. ვინაიდან ფორმულა α ჩაკეტილია, მაშინ, შედეგი 6-ის თანახმად, $\vdash_K \alpha \supset \neg\alpha$. მეორეს მხრივ, თეორემა 6-ის თანახმად, $\vdash_K (\alpha \supset \neg\alpha) \supset \neg\alpha$. ამიტომ $\vdash_K \neg\alpha$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. (ანალოგიურად, თუ ფორმულა α არაა გამოყვანადი K-ში, მაშინ ფორმულა $\neg\alpha$-ს დამატებით აქსიომის სახით K თეორიაში წინააღმდეგობას არ გვაძლევს.) □

ლემა 10. *ნებისმიერი პირველი რიგის თეორიის ყველა გამოსახულებათა სიმრავლე თვლადია (ე. ი. , კერძოდ თვლადია: ყველა ტერმთა სიმრავლე, ყველა ფორმულათა სიმრავლე, ყველა ჩაკეტილ ფორმულათა სიმრავლე).*

დამტკიცება. ყოველ u სიმბოლოს შევუსაბამოთ ლუწი რიცხვი $g(u)$ შემდეგი წესის მიხედვით: $g(\,(\,) = 3,\ g(\,)\,) = 5,\ g(,) = 7,\ g(\neg) = 9,\ g(\supset) = 11,\ g(x_k) = 5 + 8k,\ g(a_k) = 7 + 8k,\ g(f_k^n) = 9 + 8\cdot(2^n \cdot 3^k),\ g(P_k^n) = 11 + 8\cdot(2^n \cdot 3^k)$. ხოლო გამოსახულებას $u_0u_1\ldots u_r$ შეუსაბამოთ რიცხვი $2^{g(u_0)}\, 3^{g(u_1)}\cdots p_r^{\,g(u_r)}$, სადაც p_i არის i–ური მარტივი რიცხვი. ასეთი ნუმერაციის დროს, ცხადია , სხვადასხვა გამოსახულებები მიიღებენ სხვადასხვა ნომერს, და ჩვენ შეგვიძლია გადავთვალოთ ყველა გამოსახულება შესაბამისი რიცხვების ზრდის მიხედვით. □

პირველი რიგის K თეორიას ვუწოდოთ *სრული* , თუ K თეორიის ნებისმიერი ჩაკეტილი α ფორმულისთვის ან $\vdash_K \alpha$ ან $\vdash_K \neg\alpha$.

პირველი რიგის თეორია K′, რომლის სიმბოლოები იგივეა რაც პირველი რიგის თეორია K -ში, უწოდებენ K თეორიის *გაფართოებას,* თუ K თეორიის ნებისმიერი თეორემა აგრეთვე K′ თეორიის თეორემაა. (ცხადია, რომ დამტკიცდეს, რომ თეორია K′ არის თეორია K -ს გაფართოება, საკმარისია დამტკიცდეს , რომ K თეორიის ყველა საკუთრივი აქსიომები არის K′ თეორიის თეორემები.)

ლემა 11. (ლინდენბაუმის ლემა.) *თუ პირველი რიგის თეორია* K *არაწინაამღდეგობრივია, მაშინ არსებობს მისი არაწინაამღდეგობრივი გაფართოება.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ β_1 , β_2 , ... არის K თეორიის ყველა ჩაკეტილი ფორმულების ჩამონათვალი (ლემა 10). შემდეგნაირად განვსაზღვროთ $J_0, J_1, J_2, \ldots$ თეორიების მიმდევრობა. დაუშვათ , რომ J_0 არის K. დაუშვათ, რომ თეორია J_n $(n \geq 0)$ უკვე განსაზღვრულია. თუ $\vdash_{Jn} \neg\beta_{n+1}$ არასწორია, მაშინ J_{n+1} განვსაზღვროთ როგორც თეორია, რომელიც მიღებულია J_n –დან β_{n+1} დამატებით ახალი აქსიომის სახით. თუ $\vdash_{Jn} \neg\beta_{n+1}$, მაშინ $J_{n+1} = J_n$. J იყოს პირველი რიგის თეორია, რომელიც მიიღება თუ აქსიომებად ავირებთ ყველა J_i თეორიბის აქსიომებს. ცხადია, რომ J_{n+1} არის J_n -ის გაფართოება, ხოლო J არის ყოველი J_i თეორიის გაფართოება, მათ შორის K თეორიის, რომელიც ემთხვევა J_0 . J თეორიის არაწინაამღდეგობრიობის დასამტკიცებლად საკმარისია დამტკიცდეს ყოველი J_i თეორიის არაწინაამღდეგობრიობა, ვინაიდან ყოველი წინაამღდეგობრიობის გამოყვანა J-ში იყენებს სასრული რაოდენობა აქსიომებს და, მაშასადამე, არის წინაამღდეგობრიობის გამოყვანა რომელიღაც J_n თეორიაში. დავამტკიცოთ J_i თეორიის არაწინაამღდეგობრიობა ინდუქციით i –ს მიმართ. პირობის თანახმად $J_0 = K$ არაწინაამღდეგობრივია. დაუშვათ, რომ თეორია J_i არაწინაამღდეგობრივია . მაშინ , თუ $J_{i+1} = J_i$, მაშინ თეორია J_{i+1} არაწინაამღდეგობრივია. თუ $J_{i+1} \neq J_i$ და , მაშასადამე, J_{i+1} –ის განსაზღვრის თანახმად , ფორმულა $\neg\beta$ არ არის გამოყვანადი J_i –ში, მაშინ , ლემა 9 თანახმად, თეორია J_{i+1} აგრეთვე არაწინაამღდეგობრივია. ამგვარად, J_i

არაწინაამღდეგობრივობიდან გამომდინარეობს J_{i+1} –ის არაწინაამღდეგობრივობა, და ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ყველა J_i თეორიები არაწინაამღდეგობრივია ; მაშასადამე, არაწინაამღდეგობრივია თეორია J . J თეორიის სისრულის დასამტკიცებლად განვიხილოთ K თეორიის ნებისმიერი ჩაკეტილი ფორმულა α . ცხადია, რომ $\alpha = \beta_{j+1}$ რომელიღაც j-თვის ($j \geq 0$). თეორია J_i განსაზღვრის თანახმად , ან $\vdash_{Jj} \neg\beta_{j+1}$, ან $\vdash_{Jj+1} \beta_{j+1}$, ვინაიდან , თუ არასწორია $\vdash_{Jj} \neg\beta_{j+1}$, მაშინ β_{j+1} cცხადდებაЧაქსიომად J_{j+1} –ში. მაშასადამე, გვაქვს $\vdash_J \neg\beta_{j+1}$, ან $\vdash_J \beta_{j+1}$.

ამგვარად, თეორია J არის K თეორიის სრული არაწინაამღდეგობრივი გაფართოება. □

თეორემა 12. *ყოველ პირველი რიგის არაწინაამღდეგობრივ თეორიას გააჩნია თვლადი მოდელი* (*ე. ი. მოდელი თვლადი არეთი*).

□

შედეგი 13. *პირველი რიგის* K *თეორიის ყოველი ზოგადმართებული ფორმულა* K *თეორიის თეორემაა.*

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ჩაკეთილი α ფორმულები, ვინაიდან ყოველი ფორმულა β ლოგიკურად ზოგადმართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ლოგიკურად ზოგადმართებულია მისი ჩაკეტვა, და გამოყვანადია K-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა K-ში გამოყვანადია მისი ჩაკეტვა. ამგვარად, α იყოს K თეორიის ლოგიკურად ზოგადმართებული ჩაკეტილი ფორმულა. დაუშვათ, რომ α არ არის K თეორიის თეორემა. მაშინ თუ ჩვენ K თეორიას დაუმატებთ ფორმულა $\neg\alpha$ ახალი აქსიომის სახით, მაშინ მივიღებთ ახალ თეორიას K′, არაწინაამღდეგობრივს ლემა 9 თანახმად. თეორია K′ გააჩნია, თეორემა 12 თანახმად, მოდელი M. ვინაიდან ფორმულა $\neg\alpha$ აქსიომაა K′-ში, მაშინ $\neg\alpha$ ჭეშმარიტია M-ში, და ვინაიდან ლოგიკურად ზოგადმართებულია , მაშინ ის ჭეშმარიტია M-ში. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, ფორმულა α ერთდროულად ჭეშმარიტია და მცდარია M-ში , რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, ფორმულა α უნდა იყოს K თეორიის თეორემა.
□

შედეგი 14. *ნებისმიერ პირველი რიგის პრედიკატთა აღრიცხვაში ფორმულა თეორემაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა ის ლოგიკურად ზოგადმართებულია.*

დამტკიცება. გამომდინარეობს თეორემა 7 და შედეგი 13 -დან. □

შედეგი 15. (a) *ფორმულა α ჭეშმარიტია* K *თეორიის ნებისმიერ თვლად მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_K \alpha$. მაშასადამე, α ჭეშმარიტია* K *თეორიის ნებისმიერ მოდელში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_K \alpha$.*

(b) *თუ* K *თეორიის ნებისმიერ მოდელში ფორმულა* β *შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე, რომელზედაც შესრულებადია ყველა ფორმულა რომელიმე* Γ *სიმრავლიდან, მაშინ* $\Gamma \vdash_K \beta$.

(c) *თუ* K *თეორიის ფორმულა* β *ლოგიკურად გამომდინარეობს* K *თეორიის* Γ *სიმრავლის ფორმულებიდან, მაშინ* $\Gamma \vdash_K \beta$.

(d) *თუ* K *თეორიის ფორმულა* β *ლოგიკურად გამომდინარეობს იგივე თეორიის ფორმულა* α *-დან, მაშინ* $\alpha \vdash_K \beta$.

დამტკიცება. (a) ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ფორმულა α ჩაკეტილია. დაუშვათ, რომ α ჭეშმარიტია K თეორიის ნებისმიერ თვლად მოდელში. თუ არასწორია $\vdash_K \alpha$, მაშინ თეორია $K'=K+ \{\neg\alpha\}$ [*]).
მაშასადამე, K' -ს გააჩნია თვლადი მოდელი M. ფორმულა $\neg\alpha$, როგორც K' თეორიის აქსიომა, ჭეშმარიტია M-ში. მაგრამ M აგრეთვე არის K თეორიის მოდელიც, და ამიტომ α ჭეშმარიტია M-ში. მაშასადამე , ფორმულა α ერთდროულად ჭეშმარიტია და მცდარია M-ში, რაც შეუძლებელია.

(b) განვიხილოთ თეორია $K+\Gamma$. ფორმულა β ჭეშმარიტია ამ თეორიის ყველა მოდელში. მაშინ , (a) პუნქტის თანახმად, $\vdash_{K+\Gamma} \beta$, და, მაშასადამე, $\Gamma \vdash_K \beta$.

პუნქტი (c) , ცხადია, გამომდინარეობს (b)-დან, ხოლო (d) არის (c) –ს კერძო შემთხვევა. □

შედეგები 13 – 15 გვიჩვენებს, რომ პრედიკატთა ლოგიკისთვის სინტაქსური მეთოდი პირველი რიგის თეორიებისათვის ექვივალენტურია სემანტიკური მეთოდისა, რომელიც იყენებს ინტერპრეტაციის, მოდელის, ლოგიკურად ზოგადმართებულობის და ა. შ. ცნებებს. გამონათქვამთა აღრიცხვისთვის ანალოგიური ექვივალენტობა სემანტიკური (ტავტოლოგია და ა. შ.) და სინტაქსური (სისტემა L –ის თეორემა და ა. შ.) ცნებებისა გამოისახულია მე 11 ლექციის მე-7 და მე –9 თეორემებში.

შედეგი 16. (სკოლემ-ლევენგეიმის თეორემა.) *თუ პირველი რიგის თეორია* K *-ს გააჩნია რომელიმე მოდელი, მაშინ მას გააჩნია თვლადი მოდელი.*

დამტკიცება. თუ K-ს გააჩნია მოდელი, მაშინ K არაწინაამდღეგობრივია (იხ. (II) ლექცია 16). მაშასადამე , თეორემა 12 თანახმად, K-ს გააჩნია თვლადი მოდელი . □

[*]) თუ K თეორიაა და Δ - K თეორიის ფორმულათა სიმრავლე, მაშინ $K+\Delta$ -თი აღინიშნება თეორია, რომელიც მიღებულია K-დან მასში ყველა ფორმულების დამატებით Δ -დან აქსიომების სახით.

V

გამოთვლების საფუძვლები

კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი

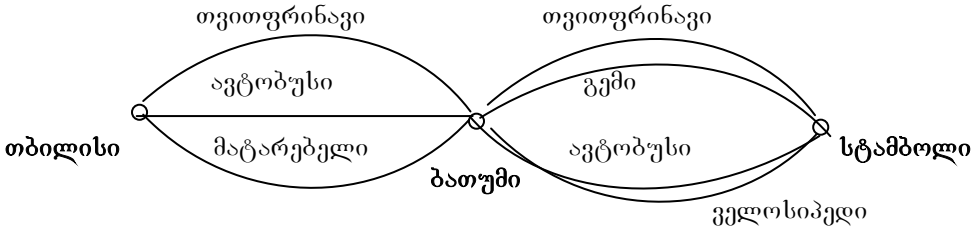
კომბინატორიკა წარმოადგენს დისკრეტული მათემატიკის ერთერთ ნაწილს, რომელმაც მოიპოვა განსაკუთრებული მნიშვნელობა მისი გამოყენებისა ალბათობის თეორიაში, მათემატიკურ ლოგიკაში, რიცხვთა თეორიაში, გამოთვლით ტექნიკაში, მკიბერნეტიკაში.

ადამიანს ხშირად უწევს ჰქონდეს საქმე ამოცანებთან, სადაც საჭიროა რომელიღაც საგნების განლაგების ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის რიცხვის პოვნა ან რომელიღაც ქმედების განხორციელების რაოდენობის რიცხვის პოვნა.

ჩამოვაყალიბოთ მნიშვნელოვანი წესი, რომელიც ხშირად გამოიყენება კომბინატორული გამოთვლებისათვის. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. თბილისიდან ბათუმამდე შეგვიძლია ჩავიდეთ მატარებლით, ავტობუსით, თვითფრინავით; ბათუმიდან სტამბოლამდე შესაძლებელია ჩასვლა გემით, თვითფრინავით, ავტობუსით, ველოსიპედით. რამდენი საშუალებით შეიძლება განხორციელდეს მგზავრობა მარშრუტით თბილისი – ბათუმი – სტამბოლი? (ნახ. 1)

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ სხვადასხვა ვარიანტების რაოდენობა ჩახწევისა თბილისიდან სტამბოლამდე უდრის 3 × 4 = 12, ვინაიდან, თუ ავირჩიეთ სამი შესაძლებლობიდან ერთი მარშრუტი თბილისიდან ბათუმამდე, მაშინ არსებობს ოთხი შესაძლო ვარიანტი მგზავრობისა ბათუმიდან სტამბოლამდე.



ნახ. 1

მსჯელობა, რომელიც მოყვანილია პირველი ამოცანის ამოხსნისას, ამტკიცებს შემდეგი მარტივი მტკიცებულების მართებულობას, რომელსაც ჩვენ ვუწოდებთ *კომბინატორიკის ძირითად პრინციპს.*

თუ რომელიმე არჩევანი A შეიძლება განხორციელდეს m სხვადასხვა საშუალებით, და ყოველივე ამ განხორციელებული საშუალების შემდეგ შეიძლება განხორციელდეს სხვა არჩევანი B n

რაოდენობის საშუალებით, მაშინ A და B არჩევანი (მოცემული მიმდევრობით) შეიძლება განხორციელდეს m × n რაოდენობის საშუალებით.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. ქვეყნის პირველობაში ფეხბურთში მონაწილეობას ღებულობს 16 გუნდი. ოქროს და ვერცხლის მედლების განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ოქროს მედლის მიღება შეუძლია 16-დან ერთ გუნდს. იმის შემდეგ, როცა გამოვლენილია ოქროს მედლის მფლობელი, ვერცხლის მედლის მფლობელი შეიძლება გახდეს დარჩენიი 15-ი გუნდიდან ერთი. მაშასადამე, საერთო რაოდენობა ოქროს და ვერცხლის მედლების განაწილების ვარიანტებისა უდრის $16 \times 15 = 240$.

განვსაღვროთ ზოგადი სახით კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი (გამრავლების წესი).

დავუშვათ უნდა შესრულდეს ერთის მეორეს მიყოლებით k მოქმედება. თუ პირველი მოქმედება შეიძლება შესრულდეს n_1 საშუალებით, მეორე – n_2 საშუალებით, მესამე – n_3 საშუალებით და ა. შ. k მოქმედებამდე, რომელიც შეიძლება შესრულდეს n_k საშუალებით, მაშინ ყველა k მოქმედება ერთად აღებული შეიძლება შესრულდეს

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ \ldots \times n_k$$

საშუალებით.

5.1. სასრულ სიმრავლეთა ჯამის ელემენტების რაოდენობის პოვნა.

A სასრული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა აღვნიშნოთ $N(A)$.

ძირითადი ფორმულა, რომელიც თვლის ორი სასრული სიმრავლის ჯამის ელემენტების რაოდენობას შემდეგია:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B). \qquad (1)$$

მართლაც, $N(A) + N(B)$ არის რიცხვი, რომელიც მიიღება ჯერ A სიმრავლის ყველა ელემენტების გადათვლით და, შემდეგ, B სიმრავლის ყველა ელემენტების გადათვლით. მაგრამ ამ შემთხვევაში A და B სიმრავლის საერთო ელემენტები გადაითვლება ორჯერ, ე. ი.

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

ამ ფორმულის საშუალებით მიიღება ფორმულა, რომელიც ითვლის ნებისმიერი სასრული რაოდენობის სასრული სიმრავლეების ჯამის ელემენტების რაოდენობას. მაგალითად სამი სასრული სიმრავლეებისთვის გვაქვს:

$N(A \cup B \cup C) = N(A \cup (B \cup C)) = N(A) + N(B \cup C) - N((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$
$= N(A) + N(B) + N(C) - N(B \cap C) - (N(A \cap B) + N(A \cap C) - N((A \cap B) \cap (A \cap C)) =$
$= N(A) + N(B) + N(C) - N(B \cap C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) + N(A \cap B \cap C).$

ახლა დავამტკიცოთ ზოგადი ფორმულა.

თეორემა 1. *თუ* $A_1, \dots, A_n$ *სასრული სიმრავლეებია, მაშინ*

$N(A_1 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + \dots + N(A_n) - \{ N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \dots + N(A_{n-1} \cap A_n)\} + + \{ N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$+ N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \dots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} - \dots$
$\dots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \dots \cap A_n).$ (2)

(2) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს n შესაკრების ჯამს, რიგით k-ურ შესაკრებს აქვს სახე

$$(-1)^{k-1} S_k(A_1, \dots, A_n),$$

სადაც $S_k(A_1, \dots, A_n)$ არის $N(Ai_1 \cap \dots \cap Ai_k)$ რიცხვების ჯამი ყველა $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეებიდან შესაძლო k სხვადასხვა სიმრავლეების თანაკვეთის მიხედვით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფორმულა (1)-დან გამომდინარეობს, რომ ფორმულა (2) მართებულია ორი სიმრავლისთვის. დავუშვათ, რომ ეს ფორმულა მართებულია $n-1$ სიმრავლისთვის, და ვუჩვენოთ, რომ ის სრულდება აგრეთვე n სიმრავლისთვის. დაშვების თანახმად

$N(A_1 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2 \cup \dots \cup A_n) - N((A_1 \cap A_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_n)) =$
$= N(A_1) + \{S_1(A_2, \dots, A_n) - S_2(A_2, \dots, A_n) + \dots + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_2, \dots, A_n)\} -$
$- \{ S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) - S_2(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) + \dots$
$+ (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n)\}.$

აქედან რომ გამოვიყვანოთ ფორმულა (2), საკმარისია მივიღოთ მხედველობაში შემდეგი ტოლობები

$N(A_1) + S_1(A_2, \dots, A_n) = S_1(A_1, \dots, A_n),$
$S_2(A_2, \dots, A_n) + S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) = S_2(A_1, \dots, A_n),$
$S_k(A_2, \dots, A_n) + S_{k-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) = S_k(A_1, \dots, A_n),$
$S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) = S_n(A_1, \dots, A_n).$ □

5. 2. მოცემული სიმრავლის *k*-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა.

გავიხსენოთ, რომ $P(A)$ აღნიშნავს A სიმრავლის ბულეანს, ე. ი. A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს. $P_k(A)$ -თი აღვნიშნავთ A სიმრავლის ყველა k-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს:
$P_k(A) = \{B \in P(A): N(B) = k\}.$

ბუნებრივია დაისვას კითხვა: რამდენი k-ელემენტიანი განსხვავებული ქვესიმრავლე გააჩნია n-ელემენტიან სიმრავლეს?

თეორემა 2. *n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა k-ელემენტიანი განსხვავებული ქვესიმრავლეების რაოდენობა ტოლია*

$$N(P_k(A)) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აღვნიშნოთ $N(P_k(A)) = C_n^k$. იმისათვის, რომ ავაგოთ A სიმრავლის k-ელემენტიანი ქვესიმრავლე, $(k-1)$-ელემენტიან ქვესიმრავლეს უნდა დავუმატოთ ერთი $n-k+1$ დარჩენილი ელემენტებიდან. ვინაიდან $(k-1)$-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა უდრის C_n^{k-1} და ყოველი მათგანი შეგვიძლია გავხადოთ k-ელემენტიანი $n-k+1$ საშუალებით, მაშინ ჩვენ მივიღებთ $(n-k+1)\,C_n^{k-1}$ ქვესიმრავლეს. მაგრამ ყველა მათგანი არ იქნება განსხვავებული, ვინაიდან ყოველი k-ელემენტიანი სიმრავლე შეიძლება ასეთნაირად აიგოს k საშუალებით: ყოველი ელემენტის დამატებით მისი (სიმრავლის) k ელემენტიდან. ამიტომ ჩვენს მიერ გამოთვლილი რიცხვი k ჯერ მეტია, ვიდრე C_n^k - k-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობისა. მაშასადამე

$$kC_n^k = (n-k+1)\,C_n^{k-1}.$$

აქედან ვპოულობთ

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k-1}C_n^{k-2} = \ldots = \frac{(n-k+1)\ldots(n-1)}{k(k-1)\ldots 2}C_n^1.$$

მაგრამ, n-ელემენტიანი სიმრავლის ერთ ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა C_n^1 უდრის n. აქედან მიიღება ფორმულა (1). □

n-ელემენტიან სიმრავლის ნებისმიერ k ელემენტიან ქვესიმრავლეს უწოდებენ *ჯუფდებას n ელემენდიდან k-დ.*

თეორემა 3. *ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \qquad (2)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ რომელიღაც ელემენტი a სიმრავლე A-დან, რომელიც შედგება n ელემენტისაგან, და ყველა k-ელემენტიანი ქვესიმრავლეები A სიმრავლიდან (ასეთი ქვესიმრავლეების რაოდენობა ტოლია C_n^k). ყველა k-ელემენტიანი ქვესიმრავლეები A სიმრავლიდან გავყოთ ორ ჯგუფად: ქვესიმრავლეები, რომლებიც შეიცავენ a-ს, და ქვესიმრავლეები, რომლებიც არ შეიცავენ a-ს. ქვესიმრავლეების რაოდენობა პირველი ჯგუფიდან უდრის C_{n-1}^{k-1}, ვინაიდან ყოველი ასეთი ქვესიმრავლე მიიღება a-ს დამატებით რომელიღაც $(k-1)$-ელემენტიან ქვესიმრავლეზე A სიმრავლიდან (შევნიშნოთ, რომ $A-\{a\}$ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა უდრის $n-1$). ქვესიმრავლეების რაოდენობა

მეორე ჯგუფიდან უდრის C_{n-1}^{k}, ვინაიდან ყოველი ასეთი ქვესიმრავლე არის k-ელემენტიანი ქვესიმრავლე $A - \{a\}$ სიმრავლისა. მაშასადამე,

$$C_n^{\,k} = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$$ □

5. 3. მოცემული სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა.

ეხლა გამოვარკვიოთ რამდენო ქვესიმრავლეები გააჩნია n–ელემენტიან სიმრავლე A–ს.

თეორემა 4. *n–ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რიცხვი უდრის* 2^n.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. M_a იყოს A სიმრავლის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, რომლებიც შეიცავენ a ელემენტს. ცხადია, რომ ყოველი ასეთი ქვესიმრავლე განსაზღვრულია, თუ მითითებულია ყველა დანარჩენი (a–ს გარდა) ელემენტი. ამიტომ ასეთი ქვესიმრავლეების რაოდენობა იქნება იმდენი, რამდენიც იქნება ქვესიმრავლეების რაოდენობა $A' = A - \{a\}$ სიმრავლისა, რომელიც შეიცავს ყველა ელემენტებს A-დან, a–ს გარდა. ამ სიმრავლეს გააჩნია $n - 1$ ელემენტი. ამიტომ, თუ q_n არის n–ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რიცხვი, მაშინ $N(M_a) = q_{n-1}$.

თუ $\sim M_a$ არის A სიმრავლის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, რომლებიც არ შეიცავენ a ელემენტს, მაშინ $N(\sim M_a) = q_{n-1}$. ვინაიდან $P(A) = M_a \cup \sim M_a$, მაშინ $N(P(A)) = 2\, q_{n-1}$. აქედან ვღებულობთ, რომ $q_n = 2\, q_{n-1}$. მაშადამე, $q_n = 2\, q_{n-1} = 2^2\, q_{n-2} = \ldots = 2^{n-1}\, q_1$. სიმრავლეს, რომელიც შედგება ერთი ელემენტისაგან, გააჩნია ორი ქვესიმრავლე (მთლიანი სიმრავლე და ცარიელი სიმრავლე). ამიტომ $q_1 = 2$. მაშასადამე, $q_n = 2^n$. □

შედეგი 5. ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \ .$$

5. 4. მოცემული სიმრავლის გადანაცვლებები

ჩვენ შეგვიძლია დავალაგოთ სასრული სიმრავლის ელემენტები, თუ მივანიჭებთ ყოველ ელემენტს რომელიღაც ნატურალურ რიცხვს 1-დან n-მდე, სადაც n არის ელემენტთა რაოდენობა მოცემულ სიმრავლეში. ყოველი სასრული სიმრავლე შეიძლება ამგვარად დალაგდეს, თუ, მაგალითად, ამოვწერთ სიმრავლის ყველა ელემენტებს სიის მიხედვით ($a, b, c, \ldots$), და შემდეგ შევუსაბამებთ ყოველ ელემენტს ადგილის ნომერს, რომელზედაც ის იმყოფება სიაში. ცხადია, რომ ყოველი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ერთ ელემენტზე მეტს, შეიძლება დალაგდეს არა ერთის გზით. დალაგებული სიმრავლეები განსხვავებულებია, თუ ისინი განსხვავდებიან ან თავისი ელემენტებით, ან დალაგებით. სხვადასხვა დალაგებულ სიმრავლეებს, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ თავისი ელემენტების დალაგებით (ე. ი. შეიძლება მიღებულ იქნან ერთიდაიგივე სიმრავლიდან), ეწოდება ამ სიმრავლის *გადანაცვლებები.*

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 3-ელემენტიან სიმრავლის $A = \{a, b, c\}$ გადანაცვლებებს აქვს შემდეგი სახე

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

გამოვთვალოთ ყველა შესძლო საშუალებების რიცხვი, რომლითაც დალაგდება მოცემული სიმრავლე, ე. ი. A სიმრავლის გადანცვლებათა რიც-ხვი. დავუშვათ A სიმრავლეს გააჩნია n რაოდენობის ელემენტი. აღვნიშნოთ მისი ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი P_n -ით.

თეორემა 5. $P_n = n!$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თანმიმდევრულად ავირჩიოთ A სიმრავლის ელემენტები და განვალაგოთ ისისნი განსაზღვრული რიგის მიხედვით n ადგილას. პირველ ადგილზე შეგვიძლია ავირჩიოთ n ელემენტებიდან ნებისმიერი. ამის შემდეგ, როცა უკვე დაკავებულია პირველი ადგილი, მეორე ადგილზე შეგვიძლია ავირჩიოთ დარჩენილი $(n-1)$-ელემენტებიდან ნებისმიერი და ა. შ. გამრავლების წესის მიხედვით ყველა n ადგილი შეიძლება დაკავდეს

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\cdot 1 = n!$$

საშუალებით. მაშასადამე, n-ელემენტიანი სიმრავლე A შეიძლება დალაგდეს $n!$ საშუალებებით. □

5. 5. მოცემული სიმრავლის დალაგებული ქვესიმრავლეები (განლაგებები)

განვიხილოთ მოცემული A სიმრავლის დალაგებული ქვესიმრავლეები. ვგულისხმობთ რა, რომ თვითონ A დაულაგებელი სიმრავლეა, ამიტომ ყოველი მისი ქვესიმრავლე შეიძლება რაღაცნაირად დალაგდეს. A სიმრავლის ყველა k-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა ტოლია C_n^k. ყოველი ასეთი ქვესიმრავლე შეიძლება დალაგდეს $k!$ საშუალებით. ასეთნაირად მივიღებთ A სიმრავლის ყველა დალაგებულ k-ელემენტიანი ქვესიმრავლეებს. მაშასადამდე, მათი რიცხვი უდრის $k!\cdot C_n^k$.

თეორემა 6. *n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა დალაგებულ k-ელემენტიანი ქვესიმრავლეთა რიცხვი ტოლია*

$$A_n^k = k!\cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\,\ldots\,(n-k+1).$$

3. 5. გადანაცვლებები განმეორებებით

დავსვათ ასეთი კითხვა. რამდენი საშუალებებით შეიძლება დაიყოს A სიმრავლე, რომელიც შედგება n-ელემენტებისგან, m თანაუკვეთ ნაწილად

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$$

ისეთნაირად, რომ $N(B_1) = k_1$, $N(B_2) = k_2$, ... $N(B_m) = k_m$, სადაც $k_1, k_2, \dots, k_m$ - მოცემული რიცხვებია ($k_i \geq 0$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$)? სიმრავლეებს $B_1, B_2, \dots, B_m$ არ უნდა ჰქონდეთ საერთო ელემენტები.

ყველა ზემოთ აღწერილი A სიმრავლის დაყოფა m ჯგუფად $B_1, B_2, \dots, B_m$ შეიძლება მივიღოთ შემდეგნაირად: ავიღოთ A სიმრავლის ნებისმიერი k_1-ელემენტიანი ქვესიმრავლე B_1 (ეს შეიძლება განხირციელდეს $C_n^{k_1}$ საშუალებით); დარჩენილი $n - k_1$ ელემენტებიდან ავიღოთ k_2-ელემენტიანი ქვესიმრავლე B_2 (ეს შეიძლება განხირციელდეს $C_{n-k_1}^{k_2}$ საშუალებით) და ა. შ. სხვადასხვა $B_1, B_2, \dots, B_m$ სიმრავლეების არჩევის საშუალებათა რაოდენობის რიცხვი გამრავლების წესის თანახმად უდრის

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \dots \cdot C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k_1-\dots-k_{m-1})!}{k_3!(n-k_1-\dots-k_m)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

(შეგახსენებთ, რომ $0! = 1$).

მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა

თეორემა 7. *დავუშვათ მოცემულია დადებითი მთელი რიცხვები $k_1, k_2, \dots, k_m$, შემდეგი პირობით: $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. საშუალებათა რაოდენობის რიცხვი, რომლითაც შეიძლება წარმოდგენილ იქნას n-ელემენტიანი სიმრავლე m თანაუკვეთი ქვესიმრავლეების $B_1, B_2, \dots, B_m$ გაერთიანებად, რომლის ელემენტების რაოდენობა შესაბამისად უდრის $k_1, k_2, \dots, k_m$, ტოლია*

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

რიცხვებს $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ უწოდებენ *პოლინომიალურ კოეფიციენტებს.* მათ გააჩნიათ კიდევ ერთი ძალიან მნიშვნელოვანი ინტერპრეტაცია.

დავუშვათ გვაქვს n ასო: k_1 – ასო a_1, k_2 – ასო a_2, k_m – ასო a_m ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$). განვსაზღვროთ, რამდენი სხვადასხვა სიტყვა შეიძლება შევადგინოთ ამ ასოებისგან. გადავნომროთ ადგილები, რომელზედაც იმყოფება ასოები, 1, 2, ... , n რიცხვებით. ყოველი სიტყვა განისაზღვრება B_1 (ადგილების ნომრები, სადაც იმყოფება ასო a_1), B_2 (ადგილების ნომრები, სადაც იმყოფება ასო a_2), ... , B_m (ადგილების ნომრები, სადაც იმყოფება ასო a_m) სიმრავლეებით. მაშასადამე, სხვადასხვა სიტყვების რაოდენობა უდრის იმ საშუალებათა რაოდენობას, რომლითაც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სიმრავლე $A = \{1, 2, \dots, n\}$ თანაუკვეთი სიმრავლეთა $B_1, B_2, \dots, B_m$ გაერთიანებად, ე. ი.

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

ზემოთ მოყვანილი მტკიცებულება შეიძლება ფორმულირებულ იქნას შემდეგი თეორემის სახით

თეორემა 8. *სხვადასხვა გადანაცვლებათა რიცხვი, რომლებიც შესაძლოა შევადგინოთ n ელემენტისგან, რომელთა შორის იმყოფება ერთი ტიპის k_1 ელემენტი, მერე ტიპის k_2 ელემენტი, … , m ტიპის k_m ელემენტი, უდრის*

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

5. 6. ნიუტონის ბინომი და პოლინომიალური ფორმულა

ცნობილია, რომ

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

ზოგადად ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას
თეორემა 9. *ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას*

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n, \qquad (1)$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ფორმულა (1) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

ამ თეორემას ზოგჯერ უწოდებენ *ბინომიონალურ თეორემას,* ხოლო რიცხვებს C_n^k - *ბინომიონალურ კოეფიციენტებს.* ტოლობა (1) უწოდებენ *ნიუტონის ბინომს.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გადავამრავლოთ თანმიმდევრულათ $(a + b)$ n ჯერ. მაშინ მივიღებთ $d_1d_2 \dots d_n$ სახის 2^n შესაკრებების ჯამს, სადაც d_i $(i = 1, \dots, n)$ უდრის ან a-ს, ან b-ს. დავყოთ ყველა შესაკრები $n + 1$ ჯგუფად $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, სადაც B_k-ს ეკუთვნის ყველა ის ნამრავლი, რომელიც შეიცავს b-ს ნამრავლად k ჯერ, ხოლო a-ს - $n - k$ ჯერ. ცხადია, რომ ნამრავლების რაოდენობა B_k –ში უდრის C_n^k , ხოლო ყოველი შესაკრები B_k –ში უდრის $a^{n-k}b^k$. ამიტომ

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \ .$$

შეგახსენებთ ბინომიალური კოეფიციენტების შემდეგ მნიშვნელოვან თვისებას:

$$C_{n+1}^{\ k} = C_n^{\ k} + C_n^{\ k-1}. \qquad (2)$$

ტოლობა (2) უჩვენებს, რომ ბინომიალური კოეფიციენტები შეიძლება ჩამოიწეროს სამკუთხედის ცხრილის სახით, რომელსაც უწოდებენ *პასკალის სამკუთხედს*:

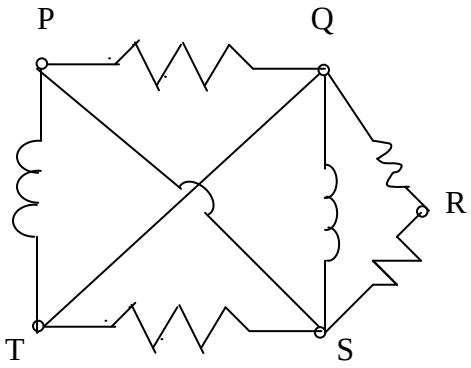
1 1 $n = 1$
1 2 1 $n = 2$
1 3 3 1 $n = 3$
1 4 6 4 1 $n = 4$
1 5 10 10 5 1 $n = 5$
.....

პასკალის სამკუთხედის მე – n –ე სთრიქონში ჩაწერილია $(a+b)^n$-ის კოეფიციენტები, სადაც ყოველი კოეფიციენტი, გარდა პირველისა და ბოლოსი, რომლებიც უდრის 1, უდრის შესაბამისი კოეფიციენტების ჯამს წინამდებარე სთრიქონიდან.

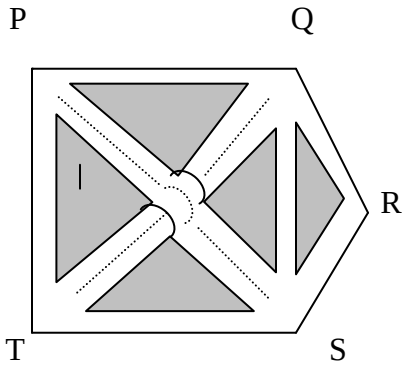
გრაფები

6.1 რა არის გრაფი?

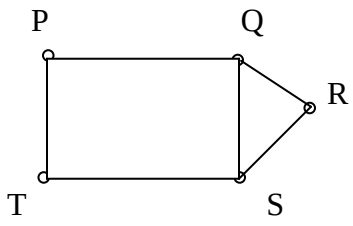
განვიხილოთ 1.1 და 1.2 ნახ-ები, სადაც შესაბამისად ასახულია ელექტრონული სქემის უბანი და გზების რუქის ნაწილი. ცხადია, რომ ორივე ეს ნახატი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ერთი და იგივე დიაგრამით შემდგარი ხაზებით და წერტილებით, რომელიც წარმოდგენილია 1.3 ნახ-ზე. წერტილებს *P, Q, R, S* და *T* –ს უწოდებენ წვეროებს, ხაზებს – წიბოებს , ხოლო მთელ დიაგრამას ეწოდება გრაფი. (შევნიშნოთ, რომ *S* და *T* ხაზების გადაკვეთის წერტილი არ ეკუთვნის გრაფის წვეროებს, ვინაიდან ის არ არის საერთო წერტილი არც მავთულების, და არც გზაჯვარედინის.) წვეროს ხარისხს უწოდებენ წიბოების რაოდენობას, რომლის ბოლოებს წარმოადგენს ეს წვერო; 1.2 ნახ-ზე ეს შეესაბამება გზების რაოდენობას , რომლებიც იკვეთებიან გზაჯვარედინზე; ასე რომ წვეროს ხარისხი უდრის 4-ს.

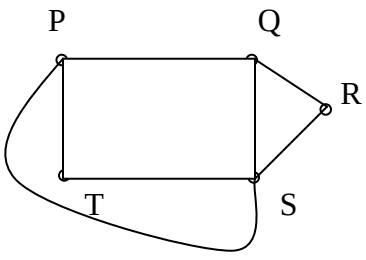


ნახ. 1.1



ნახ. 1.2

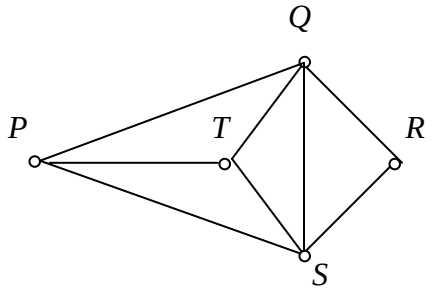




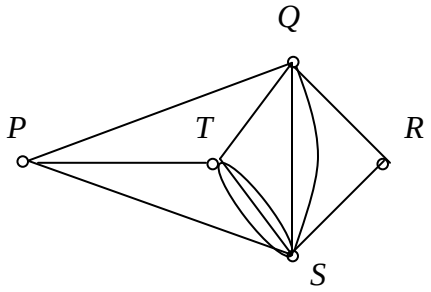
ნახ. 1.3 ნახ. 1.4

ზემოთ განხილული სიტუაციები შეიძლება აღიწეროს აგრეთვე სხვა გრაფით (იხ. ნახ. 1.4). აქ ჩვენ ავიცილეთ *PS* და *QT* ხაზების "გადაკვეთა", *PS* ხაზის გავლებით *PQST* მართკუთხედის გარეთ.

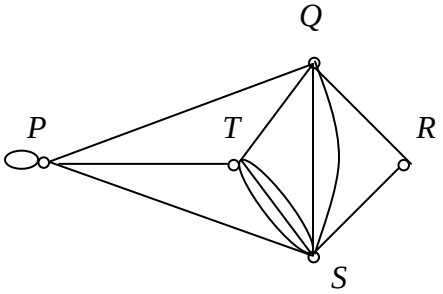
ამით ჩვენ გვინდა ხაზი გავუსვათ იმას, რომ გრაფი – ეს არის წერტილების სიმრავლის და მათი (წერტილების) დაკავშირების (ან შეერთების) ხერხების წარმოდგენა და ჩვენი მიზნებისთვის მეტრიკული თვისებები არაარსებითია. გამომდინარე აქედან, ნებისმიერი ორი გრაფი, რომლებიც წარმოადგენენ ერთიდაიგივე სიტუაციას (როგორც, მაგალითად, გრაფები, რომლებიც მოცემულია ნახ. 1.3 და 1.4), არსებითად ჩაითვლებიან ერთნაირად. უფრო ზუსტად, ვიტყვით, რომ ორი გრაფი *იზომორფულია,* თუ მათ წვეროებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რომლებსაც გააჩნიათ თვისება, რომ ერთ გრაფში ორი წვერო დაკავშირებულია წიბოთი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისი წვეროები დაკავშირებულია წიბოთი მეორე გრაფში. ნახ. 1.5-ზე ასახულია კიდევ ერთი გრაფი, რომელიც იზომორფულია ზემოთ აღწერილი ორი გრაფისა.



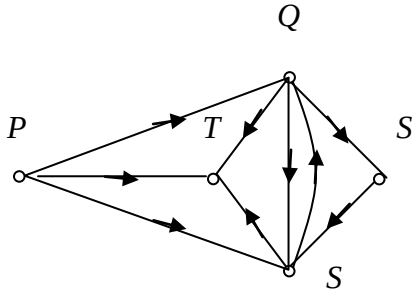
ნახ. 1.5



ნახ. 1.6



ნახ. 1.7



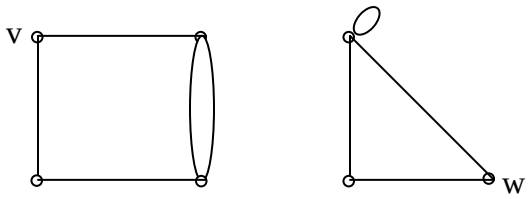
ნახ. 1.8

აღნიშვნის ღირსია, რომ აქამდე განხილული გრაფი "მარტივია" იმ გაგებით, რომ მასში ნებისმიერი ორი წვერო დაკავშირებულია არაუმეტეს ერთი წიბოთი. დავუშვათ, რომ გზები *Q*-დან *S*-მდე და *S*-დან *T*-მდე ზედმეტად გადატვირთულია და განტვირთვის მიზნით გაჭრილია პარალელური გზები, რომლებიც აკავშირებს იგივე წერტილებს. შესაბამისი დიაგრამა წარმოდგენილია ნახ. 1.6-ზე. წიბოებს,

რომლებიც აკავშირებენ *Q*-ს *S*-თან ან *S*-ს *T*-თან, უწოდებენ *ჯერადს.* თუ ჩვენ ამასთანავე გვინდა ავტოფარეხის აშენება *P* პუნქტში, მაშინ დიაგრამაზე ეს შეიძლება აღინიშნოს წიბოთი *P*–დან *P*-ში; ასეთ წიბოს უწოდებენ *მარყუჟს* (ნახ. 1.7). გრაფებს, რომლებიც არ შეიცავენ მარყუჟებს და ჯერად წიბოებს, უწოდებენ *მარტივს გრაფებს.*

რა გამოვა, თუ ყოველ გზაზე დასაშვებია მხოლოდ ცალმხრივი მოძრაობა? ამ კითხვის დასმით, ჩვენ მივდივართ *ორიენტირებული გრაფების* (ან შემოკლებით *ორგრაფების)* განხილვასთან. ორგრაფის მაგალითი მოცემულია 1.8 ნახატზე; მოძრაობის მიმართულება მითითებულია ისრით.

გრაფების თეორიაში დიდი ყურადღება ეთმობა სხვადასხვა სახის ჯაჭვების შესწავლას; *ჯაჭვების* ქვეშ ჩვენ გვესმის ერთმანეთის მიყოლებული წიბოების მიმდევრობა. ასე მაგალითად ნახ. 1.5 ერთერთი საშუალება *P*–დან *S* -ში მისაღწევად აღიწერება ჯაჭვით $P \to Q \to R$, რომლის სიგრძე არის 2; ანალოგიურად, $P \to S \to Q \to T \to S \to R$ არის ჯაჭვი, რომლის სიგრძე არის 5. $Q \to S \to T \to Q$ სახის ჯაჭვს უწოდებენ *ციკლს.* ზოგადად ყოველთვის არ არის შესაძლებელი მოინახოს ჯაჭვი, რომელიც აკავშირებს განსახილველი გრაფის ორ მოცემულ წვეროს (იხ. ნახ. 1.9); ასეთი ჯაჭვი იარსებეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ გრაფი შემდგარია ერთი მთლიანი ნაწილისაგან.



ნახ. 1.9

გრაფს, რომლის ყოველი ორი წვერო დაკავშირებულია ჯაჭვით, ეწოდება *ბმული.* გრაფებს, სადაც არსებობს ჯაჭვი, რომელიც თავდება საწყის წვეროზე და გადის მხოლოდ ერთჯერ ყოველ წიბოზე ან ყოველ წვეროზე, ეწოდება შესაბამისად *ეილერის* და *ჰამილტონის* გრაფები. მაგალითად, გრაფი წარმოდგენილი 1.5 ნახატზე ჰამილტონისაა (შესაძლო ჯაჭვია $P \to Q \to R \to S \to T \to P$), მაგრამ არ არის ეილერის გრაფი, ვინაიდან მასში ყოველი ჯაჭვი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთხელ ყოველ წიბოს, აუცილებლად მთავრდება წვეროზე, რომელიც განსხვავებულია საწყისისგან.

ყოველ გრაფს, რომელიც შესაძლებელია ისე დაიხატოს სიბრტყეზე, რომ არ შეიცავდეს (წიბოების) გადაკვეთებს, ეწოდება *პლანარული გრაფი.*

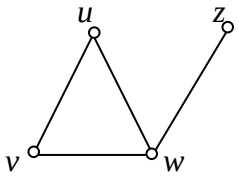
პლანარული გრაფები თამაშობენ შესამჩნევ როლს გაფერადების ამოცანებში. რომ გავიგოთ, როგორ წარმოიქმნება ასეთი ამოცანები, დავუბრუნდეთ "გზის" გრაფს და დავუშვათ, რომ კომპანიებს "შელს", "ესსოს", "ბრიტიშ პეტროლიუმს" და "გალფს" სურთ გაინაწილონ ბენზინგასამართი სადგურების მშენებლობა *P, Q, R, S* და *T* პუნქტებში. დავუშვათ, რომ ეკონომიური მიზეზებიდან გამომდინარე, არც ერთ კომპანიას არ სურს ააშენოს თავისი სადგურები მეზობელ წვეროებში. მაშინ შესაძლებელია შემდგი გადაწყვეტილება: "შელლი" აშენებს სადგურს *P* პუნქტში,

“ესსო” - *Q* პუნქტში, “ბრიტიშ პეტროლიუმი” - *S*-ში, “გალფი” - *T*-ში, ხოლო *R* პუნქტში აშენებს ან “შელლი” ან “გალფი”. მაგრამ, თუ “გალფი” გადაწყვეტს არ მიიღოს მონაწილეობა მშენებლობაში, მაშინ ცხადია, რომ სამი დარჩენილი კომპანია ვერ შეძლებს ააშენოს თავისი სადგურები აღნიშნული საშუალებით.

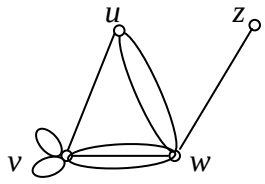
ასეთი საკითხები განიხილება ამოცანებში სადაც ისმის საკითხი მარტივი გრაფის წვეროების *k* საღებავის საშუალებით ისეთნაირად გაფერადებისა, რომ ყოველი წიბოს ბოლოებს ჰქონდეთ სხვადასხვა ფერი. თუ გრაფი პლანარულია, მაშინ ეს ამოცანა გადაწყვეტილია ხუთი საღებავის საშუალებით. მაღალი სისწრაფის კომპუტერების საშუალებით ეს ამოცანა გადაწყდა ოთხი საღებავის საშუალებით. ეს პრობლემა ცნობილი იყო როგოც *ოთხი საღებავის პრობლემა.*

6.2 განსაზღვრებები

პირველად განვსაზღვროთ მარტივი გრაფი *G*. წყვილს (*V*(*G*), *E*(*G*)) ეწოდება *მარტივი გრაფი,* თუ *V*(*G*) ელემენტების არაცარიელი სასრული სიმრავლეა, რომლებსაც უწოდებენ *წვეროებს* (ან *კვანძებს,* ან *წერტილებს*), ხოლო *E*(*G*) არის დაულაგებელი ელემენტების *V*(*G*) –დან წყვილების სასრული სიმრავლე, რომლებსაც უწოდებენ *წვეროებს* (ან *ხაზებს*). ზოგჯერ *V*(*G*) –ს უწოდებენ *G* გრაფის *წვეროების სიმრავლეს,* ხოლო *E*(*G*)-ს - *G* გრაფის *წიბოების სიმრავლეს.* მაგალითად, 2.1 ნახატზე წარმოდგენილია მარტივი გრაფი *G*, რომლის წვეროების სიმრავლე *V*(*G*) არის {*u.v,w,z*}, ხოლო წიბოების სიმრავლე *E*(*G*) შედგება {*u.v*}, {*v,w*}, {*u,w*} და {*w,z*} წყვილებისაგან. ასეტ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ წიბო {*v,w*} *აერთებს v* და *w* წვეროებს.



ნახ. 2.1



ნახ. 2.2

ბევრი შედეგი, რომელიც მიღებულია მარტივი გრაფებისთვის, ადვილად გადაიტანება უფრო ზოგად ობიექტებზე, სადაც ორი წვერო შესაძლოა შეერთებული იყოს ერთზე მეტი რაოდენობის წიბოების საშუალებით. გარდა ამისა, ხშირად მოსახერხებელია მოვხსნათ შეზღუდვა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ წიბო უნდა აერთიანებდეს ორ *სხვადასხვა* წვეროს, და დავუშვათ *მარყუჟების* არსებობა, ე. ი. წიბოების, რომლებიც აერთიანებენ წვეროს თავის თავთან. ასეთნაირად მიღებულ ობიექტებს, სადაც დასაშვებია მარყუჟები და ჯერადი წიბოები, ეწოდება *ზოგადი გრაფი.*

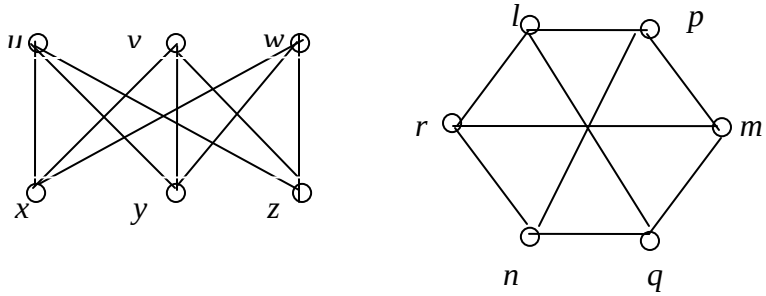
ორიენტირებული გრაფი (ანუ ***ორგრაფი***) *D* არის წყვილი (*V*(*D*), *A*(*D*)), სადაც *V*(*D*) არის ელემენტების არაცარიელი სიმრავლე, რომლებსაც ვუწოდებთ *წვეროებს,* ხოლო *A*(*D*) არის ელემენტებისგან *V*(*D*)-დან დალაგებული წყვილების არაცარიელი სასრული კლასი,

რომლებსაც უწოდებენ ***რკალებს***. შევნიშნოთ, რომ რკალები (v,w) და (w,v) სხვადასხვაა. 2.3 ნახატზე მოცემულია ორგრაფი, რომლის რკალებია (u,v), (v,v), (v,w), (v,w), (v,w), (w,u), (w,z).

G გრაფის ორ წვეროს v –ს და w–ს ეწოდება ***მოსაზღვრე***, თუ არსებობს მათი გამაერთიანებელი წიბო (ე. ი. $\{v,w\}$ სახის წიბო); ამასთან ერთად წვეროებს v –ს და w–ს ეწოდება ამ წიბოს ***ინციდენტური*** წვეროები (ხოლო წიბოს – ამ წვეროების ***ინციდენტურს***). ანალოგიურად, G გრაფის ორ განსხვავებულ წიბოს ეწოდება ***მოსაზღვრე***, თუ მათ გააჩნია ერთი საერთო წვერო. G გრაფის v წვეროს ***ხარისხი*** (ან ***ვალენტობა***) არის წიბოების რაოდენობა, რომლებიც v წვეროს ინციდენტურია; v წვეროს ხარისხი აღინიშნება $\rho(v)$–თი. v წვეროს ხარისხის გამოთვლისას მარყუჟს ვითვლით ორჯერ. წვეროს, რომლის ხარისხი უდრის 0-ს, უწოდებენ ***იზოლირებულ წვეროს***, წვეროს, რომლის ხარისხი უდრის 1-ს, უწოდებენ ***დაკიდულ წვეროს.***

ადვილი დასანახია, თუ შევაჯამებთ ყველა წვეროს ხარისხს, მაშინ მივიღებთ ლუწ რიცხვს – რომელიც ტოლია წიბოების გაორმაგებული რაოდენობისა, ვინაიდან ყოველი წიბო მონაწილეობს ამ ჯამში ზუსტად ორჯერ. ამ შედეგს უწოდებენ ***ხელის ჩამორთმევის ლემას.***

ორ გრაფს G_1-ს და G_2-ს უწოდებენ ***იზომორფულს***, თუ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წვეროების სიმრავლეებს შორის, რომელთაც გააჩნიათ თვისება, რომ წიბოების რაოდენობა, რომლებიც აერთიანებენ ორ წვეროს G_1-ში, უდრის წიბოების რაოდენობას, რომლებიც აერთიანებენ შესაბამის წვეროებს G_2-ში.



ნახ. 2.5

ორი გრაფი, რომელიც მოცემული ნახ. 2.5-ზე, იზომორფულია შემდეგი შესაბამისობით: $u \leftrightarrow l$, $v \leftrightarrow m$, $w \leftrightarrow n$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow q$, $z \leftrightarrow r$. G გრაფის ***ქვეგრაფი*** არის გრაფი, რომლის ყველა წვერო ეკუთვნის $V(G)$-ს, ხოლო ყველა წიბო ეკუთვნის $E(G)$ –ს.

G გრაფის ***შეუღლების მატრიცა*** $\{v_1, \dots, v_n\}$ წვეროების სიმრავლით ეწოდება $n \times n$ განზომილების $A = (a_{ij})$ მატრიცას, სადაც ელემენტი a_{ij} უდრის G -ში წიბოების რაოდენობის რიცხვს, რომლებიც აერთიანებენ v_i–ს და v_j–ს. შედეგად ჩვენ მივიღებთ სიმეტრიულ მატრიცას შემდგარს არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისაგან, რომელსაც გააჩნია თვისება, რომ ჯამი ნებისმიერ სტრიქონში ან სვეტში უდრის შესაბამისი წვეროს ხარისხს (აქ ყოველი მარყუჟი წვეროს ხარისხში ითვლება ერთხელ). პირიქით, ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისაგან შემდგარი სიმეტრიული მატრიცისაგან, ადვილად აიგება გრაფი (რომელიც ერთადერთია იზომორფულობის სიზუსტით), რომლის შეუღლებული მატრიცა სწორედ მოცემული მატრიცაა. ქედან გამომდინარეობს, რომ გრაფების თეორია შეიძლება დაყვანილ იქნას სპეციალური ტიპის მატრიცების შესწავლაზე.

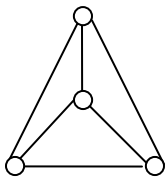
6.3 გრაფების მაგალითები

ს რ უ ლ ა დ ა რ ა ბ მ უ ლ ი გ რ ა ფ ე ბ ი. გრაფი, რომლის წიბოების სიმრავლე ცარიელია, ეწოდება ***სრულად არაბმული გრაფი.***

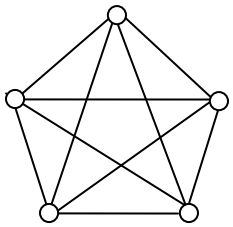
ნახ. 3.1

სრულად არაბმულ n წვეროიან გრაფს ჩვენ აღვნიშნავთ N_n; N_4 მოყვანილია 3.1 ნახატზე.

ს რ უ ლ ი გ რ ა ფ ე ბ ი. მარტივ გრაფს, რომელშიც ნებისმიერი ორი წვერო მოსაზღვრეა, ეწოდება ***სრული გრაფი.*** n წვეროიანი სრული გრაფი აღინიშნება K_n-ით.



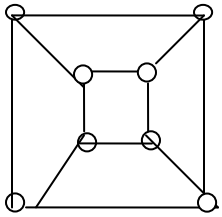
ნახ. 3.2

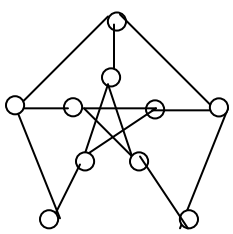


ნახ. 3.3

რ ე გ უ ლ ა რ უ ლ ი გ რ ა ფ ი. გრაფს, რომელის ყველა წვეროს გააჩნია ერთიდაიგივე ხარისხი, ეწოდება ***რეგულარული გრაფი.*** თუ გრაფის ყველა წვეროს ხარისხი უდრის r-ს, მაშინ მას ეწოდება r ***ხარისხის რეგულარული გრაფი.*** 3 ხარისხის რეგულარულ გრაფს უწოდებენ ***კუბურ გრაფს*** (ნახ. 3.5). შევნიშნოთ, რომ ყოველი სრულად არაბმული გრაფი არის რეგულარული გრაფი 0 ხარისხით, ხოლო ყოველი სრული გრაფი K_n-ი არის რეგულარული გრაფი $n-1$ ხარისხით.

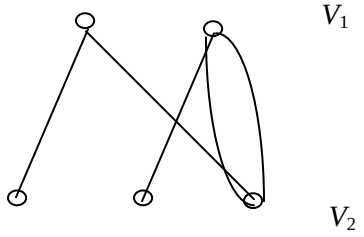
პ ლ ა ტ ო ნ ი ს ე ბ უ რ ი გ რ ა ფ ე ბ ი. პლატონისებური გრაფები არის გრაფები, რომლებიც აგებულია ხუთი წესიერი მრავალწახნაგების საშუალებით – პლატონისებური სხეულებით: ტეტრაედრით, კუბით, ოქტაედრით, დოდეკაედრით და იკოსაედრით. გრაფი K_4 შეესაბამება ტეტრაედრს (ნახ. 3.2); კუბი (ნახ. 3.4).

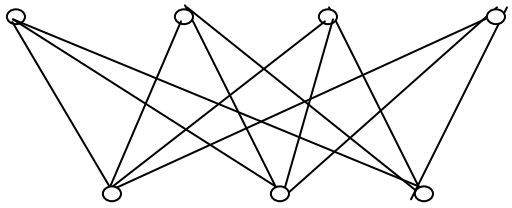




ნახ. 3.4 ნახ. 3.5

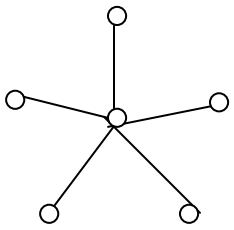
ო რ წ ი ლ ა გ რ ა ფ ე ბ ი. დავუშვათ, გრაფის წვეროების სიმრავლე შესაძლებელია გაიხლიჩოს ორ თანაუკვეთ ქვესიმრავლეებად - V_1-ით და V_2-ით ისეთნაირად, რომ ყოველი წიბო G-ში აერთიანებს რომელიღაც წვეროს V_1-დან რომელიღაც წვეროსთან V_2-დან (ნახ. 3.6); მაშინ G-ს უწოდებენ ***ორწილა გრაფს.*** ორწილა გრაფი შეიძლება განვსაზღვროთ სხვანაირად – მისი წვეროების ორ ფერად შეფერადების ტერმინებში, ვთქვათ, წითლად და ლურჯად. ამასთან, გრაფი არის ორწილა, თუ ყოველი მისი წვერო შეიძლება შეფერადდეს წითლად ან ლურჯად ისეთნაირად, რომ ნებისმიერ წვეროს ჰქონდეს ერთი ბოლო წითელი, ხოლო მეორე – ლურჯი. აღსანიშნავია, რომ ორწილა გრაფში არ არის აუცილებელი, რომ ყოველი წვერო V_1-დან შეერთებული იყოს ყოველ წვეროსთან V_2-დან; თუ ეს ასეა და გრაფი G მარტივია, მაშინ მას უწოდებენ ***სრულ ორწილა გრაფს*** და აღნიშნავენ $K_{m,n}$-ით, სადაც m და n-ი არის წვეროების რაოდენობა V_1-ში და V_2–ში. 3.7 ნახატზე აღბეჭდილია გრაფი $K_{4,3}$, ხოლო 2.5 ნახატზე გრაფი $K_{3,3}$-ის ორი ვარიანტი.





ნახ. 3.6 ნახ. 3.7

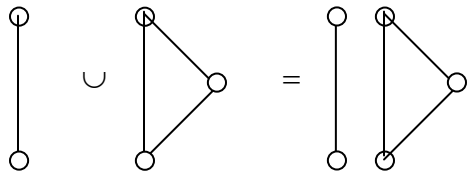
$K_{4,n}$-ის სახის სრულ ორწილა გრაფს უწოდებენ ***ვარსკვლავ გრაფს;*** 3.8 ნახატზე აღბეჭდილია ვარსკვლავ გრაფი $K_{1,5}$.



ნახ. 3.8

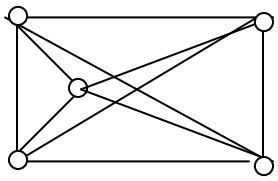
ო რ ი გ რ ა ფ ი ს გ ა ე რ თ ი ა ნ ე ბ ა დ ა შ ე ე რ თ ე ბ ა.

არსებობს რამოდენიმე საშუალება ორი გრაფის შეერთებისა, ახლის, უფრო დიდის, შესაქმნელად; განვიხილოთ ორი მათგანი. დავუშვათ გვაქვს ორი გრაფი $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ და $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, სადაც $V(G_1)$ და $V(G_2)$ არ თანაიკვეთებიან. G_1 და G_2 გრაფების ***გაერთიანება*** $G_1 \cup G_2$ არის გრაფი, რომლის წვეროების სიმრავლეა $V(G_1) \cup V(G_2)$ და წიბოების სიმრავლეა $E(G_1) \cup E(G_2)$ (ნახ. 3.9). შეგვიძლია აგრეთვე შევქმნათ G_1 და G_2 გრაფების ***შეერთება*** $G_1 + G_2$, თუ ავიღებთ მათ გაერთიანებას და G_1 -ის

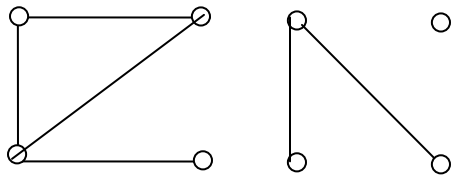


ნახ. 3.9

ყოველ წვეროს შევაერთებთ G_2-ის ყოველ წვეროსთან. K_2+K_3 გრაფის მაგალითი მოყვანილია 3.10 ნახატზე. ადვილი დასანახია, რომ გაერთიანების და შეერთების ოპერაციები შეგვიძლია განვავრცოთ გრაფების ნებისმიერ სასრულ რაოდენობაზე და რომ ისინი კომუტაციური და ასოციაციურია.



ნახ. 3.10

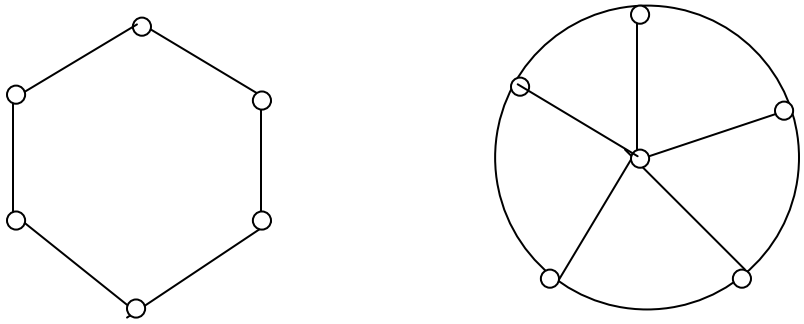


ნახ. 3.11

ბ მ უ ლ ი გ რ ა ფ ე ბ ი. გრაფს ვუწოდებთ ***ბმულს***, თუ ის არ შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც ორი გრაფის გაერთიანება, და ***არაბმულს*** წინააღმდეგ შემთხვევაში. ცხადია, რომ ნებისმიერი არაბმული გრაფი G შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც ბმული გრაფების სასრული რაოდენობის გაერთიანებით – ყოველი ასეთ ბმულ გრაფს უწოდებენ G გრაფის ***კომპონენტს***. 3.11 ნახატზე ნაჩვენებია გრაფი სამი კომპონენტით.

ც ი კ ლ უ რ ი გ რ ა ფ ე ბ ი. 2 ხარისხის ბმულ რეგულარულ გრაფს ვუწოდებთ ***ციკლურ გრაფს*** (ან ***ციკლს***). n წვეროიან ციკლურ გრაფს აღნიშნავენ C_n–ით. N_1–ის და C_{n-1}

($n \geq 3$) გრაფების შეერთებას უწოდებენ n ***წვეროიან ბორბალს*** და აღინიშნება W_n-ით. 3.12 ნახატზე ნაჩვენებია C_6 და W_6.

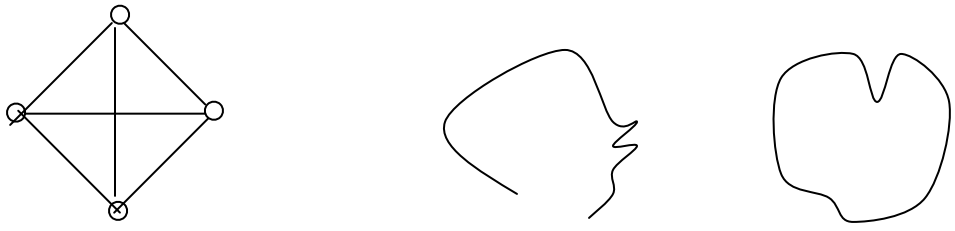


ნახ. 3.12

მ ა რ ტ ი ვ ი გ რ ა ფ ი ს დ ა მ ა ტ ე ბ ა. დავუშვათ, რომ G არის მარტივი გრაფი წვეროების $V(G)$ სიმრავლით. გარაფი G-ს ***დამატება*** $\overline{G}$ ეწოდება მარტივ გრაფს წვეროების $V(G)$ სიმრავლით, სადაც ორი წვერო მოსაზღვრეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი არ არიან მოსაზღვრე G –ში. აქედან გამომდინარეობს, თუ გრაფი G შეიცავს n წვეროს, მაშინ გრაფი $\overline{G}$ შეიძლება აიგოს, თუ K_n გრაფიდან მოვაშორებთ ყველა წიბოს, რომლებიც ექუთვნიან G –ს (აქ G ითვლება K_n -ის ქვეგრაფი). შევნიშნოთ, რომ სრული გრაფის დამატება წარმოადგენს სრულად არაბმულ გრაფს და პირიქით; რეგულარული გრაფის დამატება რეგულარულია.

6.4 გრაფების განლაგება

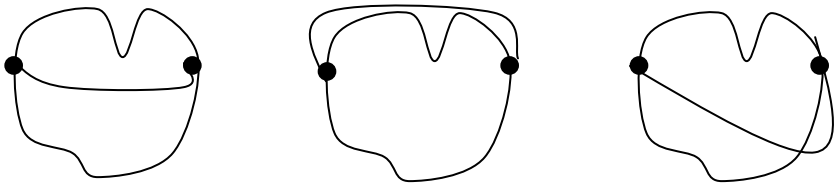
გრაფების წარმოსადგენად ჩვენ ვიყენებდით დიაგრამებს, სადაც წერტილები ან წრეწირები აღნიშნავდნენ წვეროებს, ხოლო მონაკვეთები ან რკალები მათ წიბოებს. ასეთი დიაგრამები ძალიან მოხერხებელია ცალკეული გრაფების თვისებების გამოსაკვლევად. ამიტომ ბუნებრივია დავსვათ კითხვა, რას ნიშნავს სინამდვილეში – "წარმოვადგინოთ" გრაფი დიაგრამის საშუალებით, და შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი გარფი წარმოვადგინოთ ასეთნაირად?



ნახ. 4.1 ნახ. 4.2

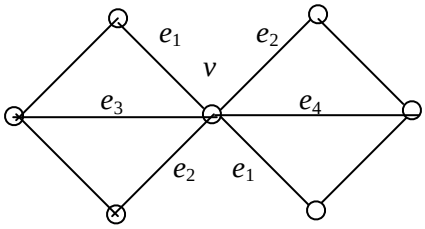
- კარგი იქნებოდა, თუ ჩვენ გვექნებოდა გრაფების წარმოდგენის შესაძლებლობა რომელიღაც სივრცეში (მაგალითად, სიბრტყეზე ან სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში) ისეთნაირად, რომ მათ არ ჰქონდეთ (წიბოების) "გადაკვეთები". მაგალითად, K_4 გრაფის გამოსახულებას, რომელიც მოცემულია 4.1 ნახატზე, გააჩნია გადაკვეთა; ჩვენ კი გვინდა ვიპოვოთ ისეთი გამოსახულება (იხ., მაგალითად, ნახ. 3.2), რომელიც არ შეიცავს გადაკვეთებს. სინამდვილეში ყოველი გრაფი შესაძლებელია გამოისახოს სამგანზომილებიან სივრცეში გადაკვეთების გარეშე, მაგრამ სიბრტყეზე ასეთნაირი გამოსახვა ყოველთვის არ არის შესაძლებელი.

გავიხსენოთ, რომ **ჟორდანის მრუდი** (ან **ჟორდანის რკალი**) სიბრტყეზე არის უწყვეტი მრუდი, რომელსაც არ გააჩნია თვითგადაკვეთები; **ჩაკეტილი ჟორდანის მრუდი** ეწოდება ჟორდანის მრუდი, რომელთა საწყისი და ბოლო ემთხვევა ერთმანეთს. ანალოგიურად განისაზღვრება ჟორდანის მრუდი სამგანზომილებიან სივრცეში, როგორიცაა სფერო ან ტორი. შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ ცნობილ **თეორემას ჟორდანის მრუდი** შესახებ, რომელიც ამტკიცებს, რომ თუ Υ ჩაკეტილი ჟორდანის მრუდია სიბრტყეზე, ხოლო x და y - მასზე ორი სხვადასხვა წერტი, მაშინ ნებისმიერი ჟორდანის მრუდი, რომელიც აერთიანებს x-ს და y-ს, უნდა მდებარეობდეს ან მთლიანად Υ მრუდის შიგნით (x და y წერტილების გარდა) ან Υ მრუდის გარეთ (იგივე გამონაკლისით), ან გადაკვეთს Υ-ს რომელიღაც წერტილზე, განსხვავებულს x-ს და y-საგან (ნახ. 4.3).



ნახ. 4.3

ვიტყვით, რომ გრაფი G **შეიძლება განლაგდეს** (ან **გააჩნია განლაგება**) მოცემულ სივრცეში, თუ ის იზომორფულია რომელიღაც გრაფისა, რომელიც გამოსახულია ამ სივრცეში წერტილების, რომლებიც წარმოადგენენ G გრაფის წვეროებს, და ჟორდანის მრუდების, რომლებიც წარმოადგენენ წიბოებს, საშუალებით, ამასთანავე ეს მრუდები არ გადაიკვეთებიან. ამ განსაზღვრებაში **გადაკვეთა** გაიგება ასეთნაირად: ან (*i*) ჟორდანის მრუდი, რომლებიც შეესაბამება ორ წიბოს, გადაიკვეთებიან წერტილში, რომელიც არ შეესაბამება არცერთ წვეროს, ან (*ii*) ჟორდანის მრუდი, რომელიც შეესაბამება წვეროს, გადის წერტილზე, რომელიც შეესაბამება წიბოს, რომელიც არ არის ინციდენტური ამ წიბოსი. (შემთხვევა (*ii*) ნაჩვენებია ნახ. 4.4-ზე; წვერო v არ არის ინციდენტური e_1 და e_2 წიბოებისა.)



ნახ. 4.4

თეორემა 4A. *ნებისმიერი გრაფი შეიძლება განლაგდეს სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში.*

დამტკიცება. პირდაპირ ავაგოთ განლაგება. პირველ რიგში დავსვათ გრაფის წვეროები X ღერძის სხვადასხვა წერტილებში; შემდეგ ყოველი წიბოსთვის ავარჩიოთ სიბრტყე, რომელიც გადის X ღერძზე ისეთნაირად, რომ გრაფის სხვადასხვა წიბოებს შეესაბამება სხვადასხვა სიბრტყეები. (ეს ყოველთვის შესაძებელია გრაფის სისრულის გამო.)

საჭირო განლაგება მიიღება შემდეგნაირად: გრაფის ყოველი მარყუჟისათვის შესაბამის სიბრტყეზე ვხატავთ წრეწირს, რომელიც გადის შესაბამის წვეროზე; ყოველი წიბოსთვის, რომელიც აერთიანებს ორ სხვადასხვა წვეროს, შესაბამის სიბრტყეზე ვხატავთ ნახევარწრეწირს, რომელიც გადის ამ ორ წვეროზე. ცხადია, რომ არცერთი გლუვი არ გადაიკვეთება, ვინაიდან ისინი განლაგებულია სხვადასხვა სიბრტყეებზე; აქედან გამომდინარეობს საჭირო შედეგი.

□

ეს თეორემა იძლევა დიაგრამების გამოყენების დასაბუთებას გრაფების წარმოდგენისათვის: საკმარისია ავიღოთ სამგანზომილებიანი წარმოდგენა და მოვახდინოთ მისი პროექცირება სიბრტყეზე ისეთნაირად, რომ არცერთი ორი წვერო არ მოხვდეს ერთდაიმავე წერტილზე. ზოგადად, ამ მეთოდს მივყავართ გადაკვეთებამდე, თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ დიაგრამებს გადაკვეთების გარეშე. ეს მოხდება მხოლოდ მაშინ, როცა განსახილველი გრაფი შეიძლება განლაგდეს სიბრტყეზე; ასეთ გრაფებს უწოდებენ **პლანარულ გრაფებს.**

დავუშვათ, რომ გრაფი G განლაგებულია რომელიღაც სივრცეში. ამ სივრცის x წერტილს უწოდებენ **დიზიუნქტურს** G-სთან, თუ ის არ შეესაბამება G გრაფის არცერთ წვეროს და არ ძევს არცერთ მის წიბოზე.

თეორემა 4B. *გრაფი პლანარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის განლაგებადია სფეროს ზედაპირზე.*

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ გრაფი G განლაგებულია სფეროს ზედა-პირზე. დავდგათ სფერო სიბრტყეზე ისეთნაირად, რომ მისი "ჩრდილო პოლუსი" (წერტილი, რომელიც შეხების

წერტილის დიამეტრალურად მოპირდაპირეა) დიზიუნქტიური იყოს G-თან. მაშინ საჭირო სიბრტყული წარმოდგენა მიიღება სტერეოგრაფიული პროექციით ჩრდილო პოლუსიდან. შებრუნებული მტკიცებულება ადვილად მტკიცდება. □

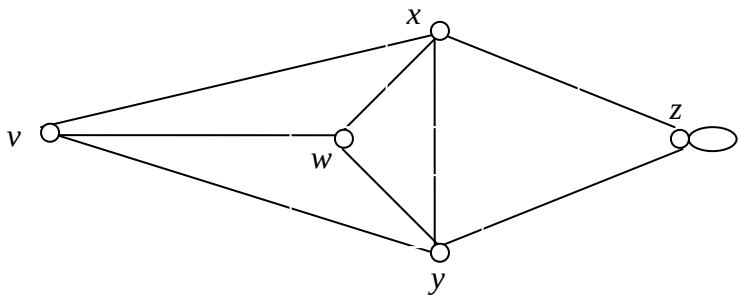
6.5 ჯაჭვები და ციკლები

6.5.1 ახალი განსაზღვრებები

მარშრუტი მოცემულ G გრაფში არის შემდეგი სახის წიბოების სასრული მიმდევრობა

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$$

(რომელსაც აგრეთვე აღნიშნავენ $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$). ცხადია მარშრუტის შემდეგი თვისება: ნებისმიერი ორი მომდევნო წიბო არის ან მოსაზღვრე, ან ერთიდაიგივე. ყოველ მარშრუტს შეესაბამება წვეროების მიმდევრობა $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m$; v_0 –ს ეწოდება **საწყისი წვერო**, ხოლო v_m-ს **მარშრუტის ბოლო წვერო**. მაშასადამე, ჩვენ ვსაუბრობთ მარშრუტზე v_0-დან v_m-მდე. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი v_0 წვეროსთვის ტრივიალური მარშრუტი, რომელიც საერთოდ არ შეიცავს წიბოებს, არის მარშრუტი v_0 -დან v_0-მდე. **მარშრუტის სიგრძე** ეწოდება მასში შემავალ წიბოების რიცხვს; მაგალითად, 5.1 ნახატზე მარშრუტს $v \to w \to x \to y \to z \to y \to w$ v-დან w-მდე გააჩნია სიგრძე, რომელიც უდრის შვიდს.



ნახ. 5.1

მარშრუტს ეწოდება **ჯაჭვი,** თუ ყველა მისი წიბო განსხვავებულია, და **მარტივი ჯაჭვი,** თუ ყველა მისი წვერო $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m$ განსხვავებულია (გარდა, შესაძლებელია, $v_0 = v_m$). ჯაჭვი ან მარტივი ჯაჭვი **ჩაკეტილია**, თუ $v_0 = v_m$. ჩაკეტილი მარტივი ჯაჭვი, რომელიც შეიცავს ერთ წიბოს მაინც, ეწოდება **ციკლი**; კერძოდ, ნებისმიერი მარყუჟი ან ნებისმიერი წყვილი ჯერადი წიბო ქმნის ციკლს.

ეხლა მოვიყვანოთ განსხვავებული, შესაძლოა, უფრო მოხერხებული განსაზღვრება ბმული გრაფებისა. გრაფ G–ს ვუწოდებთ **ბმულს**, თუ ნებისმიერი მისი ორი v და w წვეროსთვის არსებობს მარტივი ჯაჭვი v-დან w-მდე. ნებისმიერი გრაფი შეიძლება დაიყოს თანაუკვეთ ქვეგრაფებად, რომლებსაც ვუწოდებთ **(ბმულობის) კომპონენტებს,** განვსაზღვრავთ რა ამით ექვივალენტობის მიმართებას წვეროების სიმრავლეზე: ორი წვერო **ექვივალენტურია,**

თუ არსებობს მარტივი ჯაჭვი ერთიდან მეორეში. ცხადია, რომ ბმული გრაფი შედგება ერთი კომპონენტისაგან. გრაფს ეწოდება **არაბმული**, თუ მისი კომპონენტების რაოდენობა აღემატება ერთს.

ეხლა ჩამოვაყალიბოთ ბმული გრაფების თვისებები. შევაფასოთ n წვეროიანი და m კომპონენტების მოცემული რიცხვის მქონე მარტივი გრაფის წიბოების რაოდენობა. თუ ასეთი გრაფი ბმულია, მაშინ ბუნებრივია ველოდოთ, რომ მასში წიბოების რაოდენობა მინიმალურია მაშინ, როცა მას არ გააჩნია ციკლები (ასეთ გრაფს უწოდებენ **ხეს**), და მაქსიმალურია, როცა ის არის სრული გრაფი. აქედან გამომდინარეობს, რომ წიბოების რაოდენობა ბმულ გრაფში მდებარეობს $(n-1)$-სა და $n(n-1)/2$ შორის. ეს შედეგი წარმოადგენს უფრო ძლიერი მტკიცებულების კერძო შემთხვევას, რომელსაც ჩვენ ეხლა დავამტკიცებთ.

თეორემა 6A. *დავუშვათ, რომ G არის მარტივი გრაფი n წვეროთი და k კომპონენტით. მაშინ მისი წიბოების რიცხვი m აკმაყოფილებს უტოლობას*

$$n-k \le m \le (n-k)(n-k+1)/2.$$

დამტკიცება. უტოლობა $m \ge n-k$ დავამტკიცოთ ინდუქციით G –ში წიბოების რიცხვის რაოდენობის მიხედვით. თუ G სრულად არაბმული გრაფია, მტკიცებულება ცხადია. თუ გრაფ G –ში წიბოების რაოდენობა მინიმალურია (ვთქვათ m_0), მაშინ ნებისმიერი წიბოს მოშორება გამოიწვევს კომპონენტების რიცხვის გადიდებას ერთი ერთეულით. მაშასადამე, მიღებულ გრაფში გვექნება n წვერო, $k+1$ კომპონენტი და m_0-1 წიბო. მაშასადამე, ინდუქციის დაშვების თანახმად $m_0 - 1 \ge n-(k+1)$, საიდანაც ვღებულობთ $m_0 \ge n-k$, რაც იყო დასამტკიცებელი.

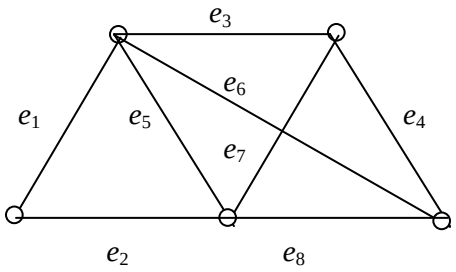
რაც შეეხება ზევიდან შეფასების დამტკიცებას, ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ G გრაფის ყოველი კომპონენტი სრულ გრაფად. დავუშვათ, რომ G_i და G_j არიან კომპონენტები შესაბამისად n_i და n_j წვეროებით და $n_i \ge n_j > 1$. თუ ჩვენ შევცვლით G_i-ს და G_j-ს სრულ გრაფებად n_i+1 და n_j-1 წვეროებით, მაშინ წვეროების საერთო რიცხვი არ შეიცვლება, ხოლო წიბოების რიცხვი გადიდდება დადებითი რიცხვით

$$\tfrac{1}{2}\{(n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)\} - \tfrac{1}{2}\{n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2)\} = n_i - n_j + 1.$$

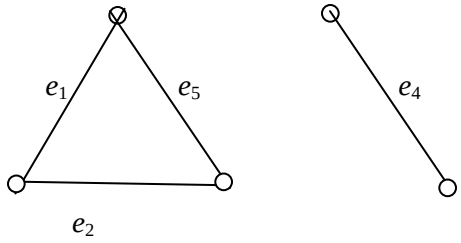
მაშადამე, იმისათვის რომ წიბოების რაოდენობა G გრაფში იყოს მაქსიმალური (მოცემული n და k-სათვის), G უნდა შედგებოდეს $k-1$ იზოლირებული წვეროებისგან და სრული გრაფის $n-k+1$ წვეროთი. აქედან გამომდინარეობს მოცემული უტოლობა. □

შედეგი 6B. *ნებისმიერი n წვეროიანი და არანაკლებ ვიდრე $(n-1)(n-2)/2$ წიბოიანი მარტივი გრაფი ბმულია* □

დავსვათ შემდეგი შეკითხვა: გრაფის წიბოების რა რაოდენობა უნდა მოვაშოროთ, რომ ის გახდეს არაბმული? ამ კითხვის განსახილველად უნდა შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებები. ბმული G გრაფის **განმაცალკევებელ სიმრავლეს** უწოდებენ მისი წიბოების ისეთ სიმრავლეს, რომელთა მოშორების შემდეგ მივიღებთ არაბმულ გრაფს. მაგალითად გრაფში, რომელიც გამოსახულია ნახ. 5.2, სიმრავლეები $\{e_1, e_2, e_5\}$ და $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ წარმოადგენენ



ნახ. 5.2

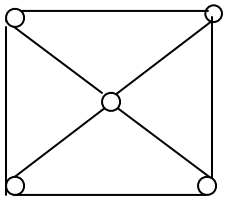


ნახ. 5.3

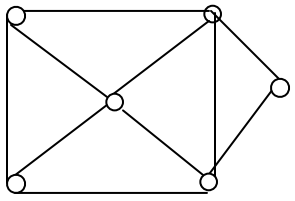
განმაცალკავებელ სიმრავლეებს; არაბმული გრაფი, რომელსაც ვღებულობთ მეორე სიმრავლის მოშორების შემდეგ, ნაჩვენებია ნახ. 5.3-ზე. **კვეთას** ვუწოდებთ ისეთ განმაცალკავებელ სიმრავლეს, როდესაც არცერთი მისი საკუთრივი სიმრავლე არ არის განმაცალკავებელი. განხილულ მაგალითში კვეთას წარმოადგენს მხოლოდ მეორე განმაცალკავებელ სიმრავლე. თუ კვეთა შედგება მხოლოდ ერთი წიბოსგან, მაშინ მას უწოდებენ **ხიდს.**

6.5.2 ეილერის გრაფები

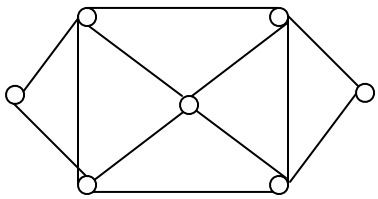
G ბმულ გრაფს უწოდებენ **ეილერის გრაფს**, თუ არსებობს ჩაკეტილი ჯაჭვი, რომელიც გადის ყველა მის წიბოზე; ასეთ ჯაჭვს უწოდებენ **ეილერის ჯაჭვს**. შევნიშნოთ, რომ ამ განსაზღვრებაში მოითხოვება, რომ ყოველი წიბო გვხვდებოდეს მხოლოდ ერთხელ. თუ ჩვენ მოვხსნით მოთხოვნას ჯაჭვის ჩაკეტილობაზე, მაშინ გრაფს ეწოდება ნახევრად ეილერის; ამ შემთხვევაში ყოველი ეილერის გრაფი იქნება ნახევრად ეილერის. ნახ. 6.1, 6.2 და 6.3-ზე გამოსახულია შესაბამისად არაეილერის, ნახევრად ეილერის და ეილერის



ნახ. 6.1



ნახ. 6.2



ნახ. 6.3

გრაფები. ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა ვიპოვოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ გრაფი იყოს ეილერის გრაფი? წინასწარ დავამტკიცოთ

ლემა 6A. *თუ გრაფ G-ს ყოველ წვეროს გააჩნია ხარისხი არანაკლები ორისა, მაშინ G-ს გააჩნია ციკლი.*

დამტკიცება. თუ გრაფ G-ს გააჩნია მარყუჟი ან ჯერადი წიბოები, მაშინ მტკიცებულება ცხადია; ამიტომ, დავუშვათ, რომ G არის მარტივი გრაფი. დავუშვათ v არის გრაფ G-ს ნებისმიერი წვერო. ინდუქციით ავაგოთ მარშრუტი $v \to v_1 \to v_2 \to \ldots$, სადც წვერო v_1 არის წვერო v-ს მოსაზღვრე წვერო, ხოლო როცა $i \geq 1$, მაშინ v_{i+1} მოსაზღვრეა v_i-სი და განსხვავებულია v_{i-1}–სა (ასეთი v_{i+1} წვეროს არსებობა გარანტირებულია ლემის პირობის თანახმად). ვინაიდან გრაფ G-ს გააჩნია სასრული რაოდენობა წვეროებისა, ბოლოსდაბოლოს მივალთ წვერომდე, რომელიც უკვე არჩეული იყო ადრე. დავუშვათ, რომ v_k არის პირველი ასეთი წვერო; მაშინ მარშრუტის ნაწილი, რომელიც მდებარეობს v_k-ს ორ შემავლობას შორის, არის საძიებო ციკლი.
□

თეორემა 6.B. *ბმული გრაფი G არის ეილერის გრაფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G-ს ყოველ წვეროს გააჩნია ლუწი ხარისხი.*

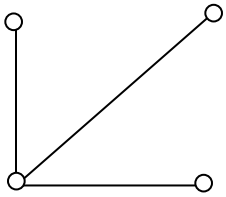
დამტკიცება. $\Rightarrow$ დავუშვათ, რომ P არის ეილერის ჯაჭვი G გრაფში. მაშინ P ჯაჭვის გავლისას გრაფ G-ს ნებისმიერ წვეროზე მისი ხარისხი იზრდება ორით. ხოლო ვინაიდან ყოველი წიბო P ჯაჭვში გვხდება მხოლოდ ერთხელ, მაშინ ყოველ წვეროს უნდა გააჩნდეს ლუწი ხარისხი.

$\Leftarrow$ მოვიყვანოთ დამტკიცება ინდუქციით წიბოების რაოდენობით G გრაფში. G გრაფის ბმულობის გამო, ყოველი წვეროს ხარისხი არანაკლებია ორისა, ხოლო აქედან, წინამდებარე ლემის თანახმად, ვასკვნით, რომ G გრაფი შეიცავს ციკლ C-ს. თუ C გადის გრაფ G –ს ყოველ წიბოზე, მაშინ დამტკიცება დასრულებულია; თუ არა, მაშინ, გრაფ G-ში წიბოების მოშორებით, რომლებიც ეკუთვნის ციკლ C-ს, მივიღებთ ახალ (შესაძლოა არაბმულ) გრაფ H-ს. წიბოების რაოდენობა H-ში ნაკლებია, ვიდრე G-ში, და ნებისმიერ წვეროს H-ში აგრეთვე გააჩნია ლუწი ხარისხი. ინდუქციის დაშვების თანახმად, გრაფ H-ის ყოველ კომპონენტში არსებობს ეილერის ჯაჭვი. G გრაფის ბმულობის გამო, ყოველ კომპონენტს H –ში გააჩნია ერთი მაინც საერთო წვერო C ციკლთან, ამიტომ გრაფ G-ს მოსაძებნი ეილერის ჯაჭვი შეიძლება მივიღოთ შემდეგნაირად: მივყვებით C ციკლის წიბოებს მანმადე, სანამ არ შევხდებით გრაფ H –ის არაიზოლირებულ წვეროს, შემდეგ მივყვებით ეილერის ჯაჭვს H-ის იმ კომპონენტში, რომელიც შეიცავს მითითებულ წვეროს; შემდეგ ვაგრძელებთ გზას C ციკლის წიბოებით, სანამ არ შევხდებით წვეროს, რომელიც ეკუთვნის გრაფ H –ის მეორე კომპონენტს, და ა.შ.; პროცესი მთავრდება მაშინ, როცა ჩვენ მოვხდებით ისევ საწყის წვეროზე. □

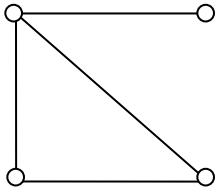
6.5.3 ჰამილტონის გრაფები

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ჩაკეტილი ჯაჭვის არსებობის პრობლემა, რომელიც გადის მოცემული G ბმული გრაფის ყოველ წიბოზე. შესაძლებელია განხილულ იქნას ანალოგიური პრობლემა ჩაკეტილი ჯაჭვის არსებობისა, რომელიც გაივლის მხოლოდ ერთხელ მოცემული G ბმული გრაფის ყოველ წვეროს. გასაგებია, რომ ასეთი ჯაჭვი უნდა იყოს ციკლი (გამორიცხულია ტრივიალური შემთხვევა, როცა G არის გრაფი N_1); თუ ასეთი ციკლი არსებობს, მაშინ მას უწოდებენ **ჰამილტონის ციკლს,** ხოლო G-ს **ჰამილტონის გრაფს**. გრაფს, რომელიც შეიცავს მარტივ ჯაჭვს, რომელიც გადის ყოველ წვეროს, ეწოდება

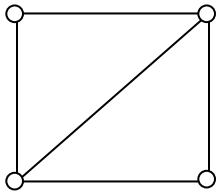
ნახევრადჰამილტონის გრაფი; შევნიშნოთ, რომ ყოველი ჰამილტონის გრაფი ნახევრადჰამილტონისაა. 7.1, 7.2 და 7.3 ნახატზე გამოსახულია შესაბამისად არაჰამილტონის, ნახევრადჰამილტონის და ჰამილტონის გრაფი.



ნახ. 7.1



ნახ. 7.2



ნახ. 7.3

თეორემა 7A. (დირაკი 1952). *თუ* n (≥ 3) *წვეროიან მარტივ გრაფში* $\rho(v) \geq n/2$ *ნებისმიერი* v *წვეროსთვის, მაშინ გრაფი* G *არის ჰამილტონის გრაფი.*

დამტკიცება. დავუმატოთ ჩვენ გრაფს k ახალი წვერო, ისეთნაირად რომ ყოველი მათგანი შევაერთოთ G გრაფის ყოველ წვეროსთან. დავუშვათ, რომ k არის წვეროების უმცირესი რიცხვი, რომელიც საჭიროა იმისთვია, რომ მიღებული გრაფი G' გახდეს ჰამილტონის გრაფი. შემდეგ, იმის დაშვებით, რომ $k > 0$, მივიღებთ წინააამღდეგობას.

დავუშვათ, რომ $v \to p \to w \to \ \ldots \ \to v$ ჰამილტონის ციკლია G'-ში, სადაც v და w წვეროებია G-დან, ხოლო p ერთერთი ახალი წვერო. მაშინ w არ არის მოსაზღვრე v–სი, ვინაიდან წინააამღდეგ შემთხვევაში ჩვენ შეგვეძლო არ გამოგვეყენებია წვერო p, რაც ეწინააამღდეგება k-ს მინიმალურობას. უფრო მეტიც, წვერო (დავუშვათ w'), რომელიც მოსაზღვრეა w –სი, არ შეიძლება უშუალო მიმდევარი იყოს წვერო v' –სა, რომელიც მოსაზღვრეა v –სი, იმიტომ რომ, მაშინ ჩვენ შეგვეძლო შეგვეცვალა

$$v \to p \to w \to \ \ldots \ \to v' \to w' \to \ \ldots \ \to v$$

შემდეგზე

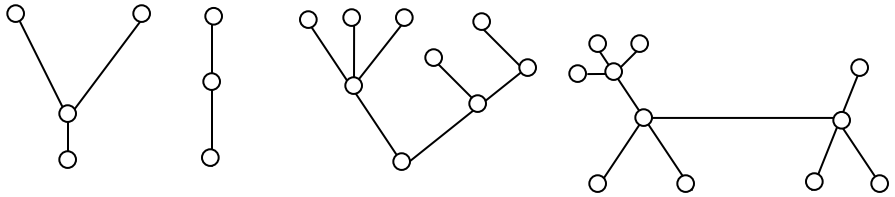
$$v \to v' \to \ \ldots \to w' \to \ \ldots \ \to v,$$

გადავატრიალეთ რა ციკლის ნაწილი მოთავსებული w –სა და v'–ს შორის. აქედან გამომდინარეობს, რომ გრაფ G'-ის წვეროების რიცხვი, რომლებიც არ არიან w–ს მოსაზღვრე, არანაკლებია ვიდრე წვეროების რიცხვი, რომლებიც მოსაზღვრეა v–თან (ე. ი. უდრის ყველაზე ცოტა $n/2 + k$); მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ გრაფ G'-ის წვეროების რაოდენობა, რომლებიც არიან w –ს მოსაზღვრე, აგრეთვე არანაკლებია $n/2 + k$. ხოლო ვინაიდან არცერთი წვერო გრაფ G'-დან არ შეიძლება ერთდროულად იყოს მოსაზღვრეც და არამოსაზღვრეც w წვეროსი, მაშინ გრაფ G'-ის წვეროების საერთო რიცხვი, რომელიც უდრის $n + k$, არანაკლებია, ვიდრე $n + 2k$. სწორედ ეს არის წინააამღდეგობა. □

6.6 ხეები

6.6.1 ხეების ელემენტარული თვისებები

ტყე ეწოდება გრაფს, რომელიც არ შეიცავს ციკლებს; ბმულ ტყეს ეწოდება **ხე**. მაგალითად, 8.1 ნახატზე გამოსახულია ტყე, რომელიც შედგება ოთხი კომპონენტისგან, სადაც ყოველი მათგანი ხეა. შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად ხეები და ტყეები წარმოადგენენ მარტივ გრაფებს.



ნახ. 8.1

ბევრი მაჩვენებლებით ხე წარმოადგენს გრაფის უმარტივეს არატრივიალურ ტიპს. როგორც მოგვიანებით ვუჩვენებთ, მას გააჩნია რამოდენიმე "კარგი" თვისებები; მაგალითად, ნებისმიერი მისი ორი წვერო შეერთებულია ერთადერთი მარტივი ჯაჭვით.

ლემა 1. *ბმული გრაფის წიბო არის ხიდი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ არის ჩართული არცერთ ციკლში.* □

ლემა 2. *თუ G გრაფის ორი განსხვავებული ციკლი გადის e წიბოზე, მაშინ G გრაფში არსებობს ციკლი, რომელიც არ გადის e-ზე.*

თეორემა 8A. *დავუშვათ, რომ გრაფ T-ს გააჩნია n წვერო. მაშინ შემდეგი მტკიცებულებები ექვივალენტურია:* □

(i) *T არის ხე;*

(ii) *T არ შეიცავს ციკლებს და გააჩნია $n-1$ წიბო;*

(iii) *T ბმულია და გააჩნია $n-1$ წიბო;*

(iv) *T ბმულია და ყოველი მისი წიბო ხიდია;*

(v) *T გრაფის ნებისმიერი ორი წვერო შეერთებულია მხოლოდ ერთი მარტივი ჯაჭვით;*

(vi) *T არ შეიცავს ციკლებს, მაგრამ, თუ დავუმატებთ მას ნებისმიერ ახალ წიბოს, მაშინ მივიღებთ ზუსტად ერთ ციკლს.*

დამტკიცება. თუ $n = 1$, მაშინ თეორემა ცხადია. დავუშვათ, რომ $n \geq 2$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). განსაზღვრის თანახმად T არ შეიცავს ციკლებს; მაშინ, ლემა 1 თანახმად, ნებისმიერი წიბოს მოშორება ხლეჩს T-ს ორ გრაფად, ისეთნაირად, რომ ყოველი მათგანი

ხეა. ინდუქციის დაშვების თანახმად წიბოების რაოდენობა ყოველ ხეში ერთზე ნაკლებია ვიდრე წვეროების რაოდენობა. აქედან გამომდინარეობს, რომ წიბოების სრული რაოდენობა T გრაფში უდრის $n-1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). თუ გრაფი T არაბმულია, მაშინ ყოველი მისი კომპონენტი წარმოადგენს ბმულ გრაფს ციკლების გარეშე. დამტკიცების წინა ნაწილიდან გამომდინარეობს, რომ წვეროების რაოდენობა ყოველ კომპონენტში ერთით მეტია წიბოების რაოდენობისა. ე. ი., წვეროების საერთო რაოდენობა T-ში მეტია წიბოების რაოდენობისა სულ მცირე ორით, ხოლო ეს ეწინააღმდეგება იმას, რომ T-ს გააჩნია $n-1$ წიბო.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). ნებისმიერი წიბოს მოშორება გვაძლევს გრაფს n წვეროთი და $n-2$ წიბოთი, რომელიც არ შეიძლება იყოს ბმული თეორემა 5B-ს თანახმად.

(iv) $\Rightarrow$ (v). ვინაიდან T ბმულია, მაშინ მისი წვეროების ყოველი წყვილი შეერთებულია ერთი მაინც მარტივი ჯაჭვით. თუ მოცემული წვეროების მოცემული წყვილი შეერთებულია ორი მარტივი ჯაჭვით, მაშინ ისინი ერთობლიან ციკლში, ხოლო ეს ეწინააღმდეგება იმას, რომ ყოველი წიბო T –ში არის ხიდი (ლემა 1).

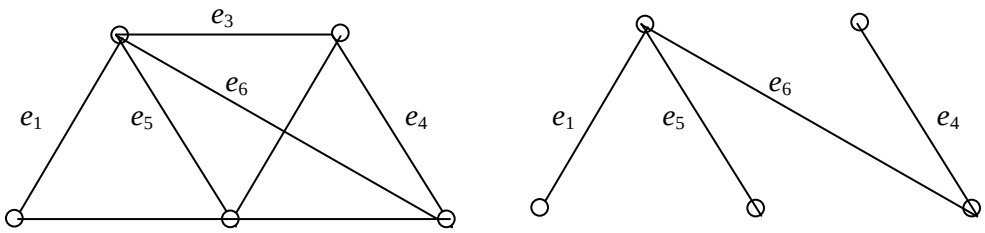
(v) $\Rightarrow$ (vi). თუ T შეიცავს ციკლს, მაშინ ამ ციკლის ორი ნებისმიერი წვერო შეერთებულია ორი მაინც მარტივი ჯაჭვით. ეხლა დავუმატოთ გრაფ T-ს რომელიღაც წიბო e; მაშინ ჩვენ მივიღებთ ციკლს, ვინაიდან e-ს ინციდენტური წვეროები შეერთებული T–ში მარტივი ჯაჭვით. მაშინ, ჩვენ რომ მივიღებთ მხოლოდ ერთ ციკლს, გამომდინარეობს ლემა 2 –დან.

(vi) $\Rightarrow$ (i). დავუშვათ, რომ T არაბმულია; მაშინ ნებისმიერი წიბოს დამატება, რომელიც აერთიანებს წვეროს ერთი კონპონენტიდან წვეროსთან მეორე კომპონენტიდან, არ იწვევს ციკლის შექმნას. □

შედეგი 8B. *დავუშვათ G არის ტყე n წვეროთი და k კომპონენტით. მაშინ G–ს გააჩნია $n-k$ წიბო.*

დამტკიცება. G გრაფის ყოველი კომპონენტისთვის გამოვიყენოთ თეორემა 8A-ს მე-(ii) მტკიცებულება. □

ცნობილია, რომ ბმულ გრაფ G-ში ერთი წიბოს მოშორება, რომელიც ეკუთვნის რომელიღაც მოცემულ ციკლს, არ არღვევს ბმულობას ასეთნაირად მიღებულ გრაფში. გამოვიყენოთ ეს პროცედურა ერთერთი დარჩენილ ციკლის მიმართ, და ა. შ. მანამდე, სანამ არ დაგვრჩება არცერთი ციკლი. შედეგად მივიღებთ ხეს, რომელიც აკავშირებს G გრაფის ყველა წვეროს; მას უწოდებენ G გრაფის **კარკასულ ხეს** (ან **კარკასს**). მაგალითი გრაფისა და ერთერთი მისი კარკასული ხისა ნაჩვენებია 8.2 და 8.3 ნახატზე.



e_2 e_8

ნახ. 8.2 ნახ. 8.3

ზოგადად G-თ აღვნიშნოთ ნებისმიერი n წვეროიანი გრაფი, m წიბოთი და k კომპონენტით. გამოვიყენებთ რა ზემოთ აღწერილ პროცედურას G-ს ყოველ კომპონენტის მიმართ, შედეგად მივიღებთ გრაფს, რომელსაც უწოდებენ **კარკასულ ტყეს**. ამ პროცედურაში მოშორებული წიბოების რაოდენობის რიცხვს უწოდებენ გრაფის **ციკლურ რანგს** (ან **ციკლომატურ რიცხვს**) და აღნიშნავენ $\gamma(G)$-თი. ადვილი დასანახია, რომ $\gamma(G) = m - n + k$ და არის არაუარყოფითი მთელი რიცხვი (თეორემა 5B-ს თანახმად). ხის ციკლური რანგი უდრის ნულს, ხოლო ციკლური რანგი ციკლური გრაფისა უდრის ერთს.

თეორემა 8C. *თუ T არის G გრაფის კარკასული ტყე, მაშინ* (i) *მაშინ ყოველ კვეთას G-ში გააჩნია საერთო წიბო T-სთან;* (ii) *ყოველ ციკლს G-ში გააჩნია საერთო წიბო T-ს დამატებასთან.*

დამტკიცება. (i) დავუშვათ, რომ C^* არის G გრაფის კვეთა, რომლის მოშორებით G გრაფის ერთერთი კომპონენტი იხლიჩება H და K ორ ქვეგრაფად. ვინაიდან T კარკასული ტყეა, მას უნდა გააჩნდეს წიბო, რომელიც აერთიანებს წვეროს H-დან წვერის K-დან; სწორედ ეს არის ის საძებნი წიბო. (ii) დავუშვათ C არის ციკლი G გრაფში, რომელსაც არ გააჩნია არცერთი საერთო წიბო T-ს დამატებასთან. მაშინ C ჩართულია T-ში, რაც შეუძლებელია. □