# ლექცია 5

## 3.7. ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ ერთი ცვლადის $n$ უცნობი ფუნქციის შემცველი პირველი რიგის $n$ დიფერენციალური განტოლებისგან შემდგარი სისტემა, როცა სისტემის ყოველი განტოლება შეიცავს მხოლოდ ერთ-ერთი უცნობი ფუნქციის წარმოებულს და ისინი ამოხსნილია ამ წარმოებულების მიმართ, ე. ი.,

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i\left(t, x_1, x_2, ...., x_n\right),\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3.7.1}$$

სისტემა, სადაც $t$ დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, საძიებელი ფუნქციებია. (3.7.1) განტოლებები არაწრფივია, რადგან $F_i$ ფუნქციები $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, უცნობების მიმართ, საზოგადოდ, არაწრფივი ფუნქციებია.

**განსაზღვრა 3.7.1**. (3.7.1) განტოლებათა სისტემას ეწოდება *ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.*

**განსაზღვრა 3.7.2**. (3.7.1) სისტემის ამონახსნი რაიმე $]t_0, T[$ ინტერვალზე ($t_0$ და $T$ ფიქსირებულია) ეწოდება დიფერენცირებად (გაწარმოებად) $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციებს, რომლებიც ამ ინტერვალზე აკმაყოფილებენ (3.7.1.) სისტემას, ე. ი., მას იგივეობად აქცევენ.

**ამოცანა 3.7.3**. ვიპოვოთ (3.7.1) სისტემის ისეთი $x_1(t), x_2(t), ...., x_n(t)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$x_i\left(t_0\right) = x_{io},\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3.7.2}$$

საწყის პირობებს, სადაც $t_0, x_{io}$, $i = \overline{1,n}$, მოცემული რიცხვებია.

**განსაზღვრა 3.7.4**. (3.7.1), (3.7.2) ამოცანას ეწოდება *კოშის ამოცანა ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისთვის.*

**თეორემა 3.7.5**. თუ $F_i$, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციები თავიანთი არგუმენტების მიმართ $\Omega \subset R^{n+1}$ არის ჩაკეტვაზე უწყვეტი ფუნქციებია და, გარდა ამისა, $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების მიმართ

$$\left|F_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) - F_i(t, \tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, ..., \tilde{\tilde{x}}_n)\right| \le \sum_{i=1}^{n} A_i \left|\tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i\right| \tag{3.7.3}$$

ლიპშიცის პირობას აკმაყოფილებენ, მაშინ (3.7.1), (3.7.2) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $t_0$ წერტილის შემცველ საკმარისად მცირე $\left]t_0 - h, t_0 + h\right[$ მიდამოში.

**განსაზღვრა 3.7.6**. თუ ფიქსირებული $t = t_0$-სთვის დავასახელებთ სხვადასხვა საწყის $x_{io}$, $i = \overline{1,n}$, მნიშვნელობებს, მივიღებთ $C_1$, …, $C_n$ ნებისმიერ $n$ მუდმივზე დამოკიდებულ

$$x_i = x_i\left(t, C_1, \ldots, C_n\right),\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3.7.4}$$

ამონახსნს, რომელსაც (3.7.1) *სისტემის ზოგადი ამონახსნი* ეწოდება.

**განსაზღვრა 3.7.7**. (3.7.4) ამონახსნს ეწოდება *მდგრადი ამონახსნი*, თუ საწყისი პირობების მცირედ ცვლილება იწვევს ამონახსნის მცირედ ცვლილებას.

**განსაზღვრა 3.7.8**. (3.7.1) სისტემას ეწოდება *ავტონომიური სისტემა*, თუ $F_i$, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციები უშუალოდ არაა დამოკიდებული $t$-ზე, ე. ი.,

$$F_i = F_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

**განსაზღვრა 3.7.9**. თუ (3.7.1) სისტემის ზოგად (3.7.4) ამონახსნს ნებისმიერი მუდმივების მიმართ ამოვხსნით, მივიღებთ, რომ

$$\varphi_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_i,\ \ i = \overline{1,n}. \tag{3.7.5}$$

თითოეულს (3.7.5) განტოლებებიდან ეწოდება *პირველი ინტეგრალი.* პირველი ინტეგრალების

(3.7.5) ერთობლიობა შეადგენს *ზოგად ინტეგრალს*.

(3.7.1) სისტემას შეიძლება ჰქონდეს უამრავი პირველი ინტეგრალი. იმისთვის, რომ მივიღოთ ზოგადი ინტეგრალი, საჭიროა, ვიპოვოთ $n$ დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი, ე. ი., ისეთი, რომელთა ამოხსნა შეიძლება $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$-ის მიმართ. ამისთვის კი, არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის თანახმად, იაკობიანი

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0\,.$$

პირველი ინტეგრალების საშუალებით სისტემის ინტეგრება განსაკუთრებით მოსახერხებელია, როცა სისტემა სიმეტრიული ფორმითაა ჩაწერილი.

გადავწეროთ (3.7.1) სისტემა შემდეგი სახით:

$$\frac{dx_i}{F_i}=\frac{dt}{1},\ \ i=\overline{1,n}\,,$$

ან გაშლილი სახით:

$$\frac{dx_1}{F_1}=\frac{dx_2}{F_2}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n}=\frac{dt}{1}\,. \tag{3.7.6}$$

თუ შემოვიღებთ

$$x_{n+1}:=t$$

აღნიშვნას, მაშინ შეიძლება, (3.7.1) სისტემა შემდეგი *სიმეტრიული ფორმით* გადაიწეროს:

$$\frac{dx_1}{F_1}=\frac{dx_2}{F_2}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n}=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}}\,,$$

სადაც, განსახილველ შემთხვევაში, $F_{n+1}=1$.

პირველი ინტეგრალების მოსაძებნად გამოიყენება *ინტეგრებად კომბინაციათა მეთოდი*. მის არსს გავეცნოთ კონკრეტულ მაგალითზე.

**მაგალითი 3.7.10**. განვიხილოთ

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$$

სისტემა. პროპორციების ცნობილი თვისების თანახმად, თუ პროპორციის პირველ წევრს გამოვაკლებთ მეორეს და პირველს გამოვაკლებთ მესამეს, მივიღებთ შემდეგ ტოლ სიდიდეებს:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx-dz}{z-x}\,,\ \text{ე. ი.,}\ \ \frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(x-z)}{x-z}\,.$$

აქედან ინტეგრებით გვექნება

$$\ln|x-y|=\ln|x-z|+\ln C_1\,,$$

საიდანაც

$$\frac{x-y}{x-z}=C_1\,. \tag{3.7.7}$$

ანალოგიურად, თუ მეორეს გამოვაკლებთ მესამეს, მივიღებთ

$$\frac{x-y}{y-z}=C_2\,. \tag{3.7.8}$$

მაგრამ (3.7.7) და (3.7.8) პირველი ინტეგრალები დამოუკიდებელი არაა. მართლაც,

$$\frac{\partial\left(\dfrac{x-y}{x-z},\dfrac{x-y}{y-z}\right)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{-1}{x-z} & \dfrac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2}\\ \dfrac{x-y}{(x-z)^2} & \dfrac{x-y}{(y-z)^2}\end{vmatrix}=\frac{y-x}{(x-z)(y-z)^2}-\frac{(x-y)((z-x)}{(y-z)^2(x-z)^2}$$

$$=\frac{(y-x)(x-z)-(x-y)(z-x)}{(x-z)^2(y-z)^2}=0\,,$$

როცა $x\neq z$, $y\neq z$. მაშასადამე, (3.7.8) და (3.7.9) პირველი ინტეგრალები დამოკიდებელი არიან.

შევნიშნოთ, რომ მეორე პირველი ინტეგრალი, რომელიც (3.7.8)-თან ერთად ქმნის დამოუკიდებელ პირველ ინტეგრალთა სისტემას, არის

$$(x-y)^2(x+y+z)=C_2\,. \tag{3.7.10}$$

ამის დასამტკიცებლად (3.7.7) ტოლი უსასრულოდ მცირე სიდიდეები გავუტოლოთ ახალი $t$ დამოუკიდებელი ცვლადის $dt$ დიფერენციალს

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}=dt\,.$$

მაშინ, ცხადია,

$$dx=(y+z)\,dt\,,\;\; dy=(z+x)\,dt\,,\;\; dz=(x+y)\,dt\,. \tag{3.7.11}$$

შევკრიბოთ ეს ტოლობები:

$$d(x+y+z)=2(x+y+z)\,dt\,. \tag{3.7.12}$$

(3.7.11)-ის პირველ ტოლობას გამოვაკლოთ მეორე ტოლობა:

$$d(x-y)=(x-y)\,dt\,. \tag{3.7.13}$$

(3.7.12) და (3.7.13)-დან, შესაბამისად, მივიღებთ, რომ

$$\frac{d(x+y+z)}{(x+y+z)}=2\,dt\,,\;\text{ე. ი.,}\;\; d\ln|x+y+z|=2\,dt$$

და

$$\frac{d(x-y)}{(x-y)}=dt\,,\;\text{ე. ი.,}\;\; -d\ln|x-y|=dt\,.$$

აქედან

$$d\ln|x+y+z|=-2d\ln|x-y|\,.$$

მაშასადამე,

$$\ln|x+y+z|=-2\ln|x-y|+\ln|C_2|\,.$$

საიდანაც

$$\ln(x-y)^2|x+y+z|=\ln|C_2|$$

და, საბოლოოდ, მივიღებთ (3.7.10) პირველ ინტეგრალს.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (3.7.8) და (3.7.10) პირველი ინტეგრალები დამოკიდებული არ არიან, მართლაც,

$$\frac{\partial\left(\dfrac{x-z}{x-y},(x-y)^2(x+y+z)\right)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{x-z}{(x-y)^2} & -2(x-y)(x+y+z)(x-y)^2\\ \dfrac{1}{x-y} & (x-y)^2\end{vmatrix}$$

$$=x-z-2(x+y+z)+x-y=-3z-3y=-3(y+z)\neq 0\,,$$

როცა $y\neq z$.