ლექცია 4

3.5. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

გავიხსენოთ რამდენიმე განსაზღვრა კალკულუსიდან.

განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x, y)$. x არგუმენტს მივცეთ ნაზრდი Δx, ხოლო y არგუმენტს – ნაზრდი Δy. მაშინ ფუნქცია მიიღებს $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ მნიშვნელობას და ფუნქციის ნაზრდი იქნება

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

თუკი ნაზრდს მივცემთ მხოლოდ x არგუმენტს ან მხოლოდ y არგუმენტს, მაშინ შესაბამისად მიიღება

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

კერძო ნაზრდები.

განსაზღვრა 3.5.1. თუ

$$\frac{\partial z}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

ზღვრები არსებობენ, მათ ეწოდებათ შესაბამისად კერძო წარმოებული x-ით და y-ით.

განსაზღვრა 3.5.2 ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი ეწოდება კერძო წარმოებულებისა და შესაბამისი არგუმენტების ნაზრდების ნამრავლთა ჯამს[*)], ე. ი.,

---

[*)] უფრო მკაცრად, ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება

$$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$

გამოსახულებას, თუ ფუნქციის ნაზრდის წარმოდგენა შეიძლება

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

სახით, სადაც o (ო მცირე) ლანდაუს [ე. გ. ჰ. ლანდაუ (1877 – 1938) – გერმანელი მათემატიკოსი] სიმბოლოა და ნიშნავს უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეს, ვიდრე ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდეა. გამომდინარე კერძო წარმოებულის განმარტებიდან (იხ. განსაზღვრა 3.5.1) ადვილად დავასკვნით, რომ

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{და} \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

შევნიშნოთ, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალად მიღებულია მისი ნაზრდი, ე.ი.,

$$dx = \Delta x \quad \text{და} \quad dy = \Delta y$$

მაშინ, როდესაც ფუნქციის ნაზრდი მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდით განსხვავდება ფუნქციის დიფერენციალისგან.

$\frac{\partial z}{\partial x}dx$-ს და $\frac{\partial z}{\partial y}dy$-ს ეწოდებათ კერძო დიფერენციალები, შესაბამისად, x-ით და y-ით.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \,.$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \,, \tag{3.5.1}$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ მოცემული ფუნქციებია რაიმე Ω არეში*). მას x-ის და y-ის მიმართ სიმეტრიული სახე აქვს.

განსაზღვრა 3.5.3. (3.5.1) განტოლებას ეწოდება *დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში,* თუ მისი მარცხენა მხარე რაიმე ფუნქციის სრული დიფერენციალია.

თუ (3.5.1) განტოლების მარცხენა მხარე რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს წარმოადგენს, ე. ი.,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y)\,, \tag{3.5.2}$$

მაშინ (3.5.1) განტოლება მიიღებს

$$du(x, y) = 0$$

სახეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ u მუდმივია, ე.ი., მივიღებთ (3.5.1) განტოლების

$$u(x, y) = c \tag{3.5.3}$$

ზოგად ინტეგრალს, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

ისმის კითხვა: რა პირობებში იქნება (3.5.1)-ის მარცხენა მხარე რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი და როგორ ვიპოვოთ ის?

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3.5.4. თუ $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ფუნქციები უწყვეტია

$$\Omega := \{(x, y : a < x < b, \quad c < x < d\}$$

მართკუთხედზე და ამავე მართკუთხედზე აქვთ უწყვეტი $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები, მაშინ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{3.5.4}$$

დიფერენციალური გამოსახულება წარმოადგენდეს რაიმე $u(x, y) \in C^2(\Omega)$ **) ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, იმაში მდგომარეობს, რომ Ω მართკუთხედის ყველა წერტილში ადგილი ჰქონდეს

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.5.5}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ (3.5.5) პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, სრულდება (3.5.2). $u(x, y)$ ფუნქციის დიფერენციალი შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

---

*) არე ეწოდება ისეთ Ω სიმრავლეს, რომლის ყველა წერტილისთვის მოიძებნება ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად მოთავსდება Ω-ში და მისი ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შევაერთოთ წირით, რომელიც მთლიანად Ω-ს ეკუთვნის.

**) $C^2(\Omega)$-თი აღნიშნულია ისეთ ფუნქციათა კლასი, რომლებსაც მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები აქვთ. ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციათა $C^m(\Omega)$ კლასი ნებისმიერი მთელი m-სთვის. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ უწყვეტ ფუნქციათა კლასს აღნიშნავს.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

თუ ამ უკანასკნელს $(3.5.2)$-ს შევადარებთ, დავასკვნით, რომ

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (3.5.6)$$

თუ ამათგან პირველს y-ით, ხოლო მეორეს x-ით გავაწარმოებთ, გვექნება, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

რადგან $u(x,y) \in C^2(\Omega)$, მისი მეორე რიგის შერეული წარმოებულები უწყვეტია და შვარცის თეორემის (დამტკიცების გარეშე) თანახმად მარჯვენა მხარეში შერეული წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია, საიდანაც გამომდინარეობს მარცხენა მხარეების ტოლობა, ე. ი., შესრულდება $(3.5.5)$ პირობა.

დავუშვათ, რომ $(3.5.5)$ პირობა სრულდება და დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება ისეთი $u(x,y)$ ფუნქციიის აგება, რომლის სრული დიფერენციალი $(3.5.4)$ იქნება. თუ ასეთი $u(x,y)$ ფუნქცია არსებობს, მაშინ შესრულდება $(3.5.6)$ ტოლობები.

$(3.5.6)$-ის პირველი განტოლებიდან x-ის მიმართ ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + c_1(y), \quad a < x_0 < b, \qquad (3.5.7)$$

სადაც x_0 ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $c_1(y)$ y-ის ნებისმიერი ფუნქციაა.

$(3.5.7)$-ში $c_1(y) \in C^1(]c,d[)$ ფუნქცია ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ დავაკმაყოფილოთ $(3.5.6)$-ის მეორე განტოლებაც. ამისთვის $(3.5.7)$ ტოლობის ორივე მხარე y-ით გავაწარმოოთ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + c'_1(y).$$

აქედან, ვინაიდან უნდა შესრულდეს

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y),$$

გვექნება, რომ

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + c'_1(y) = N(x,y).$$

რადგან თეორემა 3.5.4-ის პირობებში Ω-ში მდებარე ნებისმიერი ჩაკეტილი მართკუთხედისთვის (ღერძების პარალელური გვერდებით) სრულდება მარცხენა მხარეში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ y-ით გაწარმოების პირობები*), გვექნება

---

*) **თეორემა 3.5.5**. თუ $M(t,y)$ და მისი კერძო

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)dt + c'_1(y) = N(x,y).$$

ეს უკანასკნელი, (3.5.5) პირობის თანახმად, შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dt + c'_1(y) = N(x,y). \tag{3.5.8}$$

(3.5.8)-ში გამოვთვალოთ ინტეგრალი ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dx = N(t,y)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = N(x,y) - N(x_0,y) \tag{3.5.9}$$

(3.5.9) ჩავსვათ (3.5.8)-ში:

$$N(x,y) - N(x_0,y) + c'_1(y) = N(x,y),$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$c'_1(y) = N(x_0,y).$$

აქედან y-ით ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$c_1(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,\tau)d\tau + C, \quad c < y_0 < d, \tag{3.5.10}$$

სადაც y_0 ნებისმიერი ფიქსირებული, ხოლო C ნებისმიერი მუდმივია. $c_1(y)$-ის (3.5.10) მნიშვნელობას თუ (3.5.7)-ში ჩავსვამთ, გვექნება, რომ

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\tau)d\tau + C. \tag{3.5.11}$$

ახლა უშუალო დიფერენცირებით (გაწარმოებით) ადვილი დასანახია, რომ აგებული (3.5.11) ფუნქციის სრული დიფერენციალი (3.5.4)-ს ემთხვევა. მართლაც, (3.5.11)-დან ცხადია, რომ

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt + N(x_0,y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dt + N(x_0,y)$$

წარმოებული უწყვეტია $x_0 \le t \le x$, $c_1 \le y \le d_1$ $(c < c_1,\ d_1 < d)$ მართკუთხედზე მაშინ არსებობს

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt$$

წარმოებული და

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt.$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y) + N(x_0,y) = N(x,y).$$

უკანასკნელ ტოლობებში გამოვიყენეთ (3.5.5).

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ, თუ სრულდება (3.5.5), არსებობს ისეთი $u(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი (3.5.1) განტოლების მარცხენა მხარეა და ის ცხადი (3.5.11) სახით ავაგეთ.

შენიშვნა 3.5.6. ზოგიერთ შემთხვევაში, როცა (3.5.5) პირობა არ სრულდება, შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\mu(x,y)$ მამრავლი, რომ

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

განტოლება იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, სხვა სიტყვებით, შესრულდეს ამისთვის აუცილებელი და საკმარისი

$$\frac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

პირობა. ასეთ $\mu(x,y)$ მამრავლს *მაინტეგრებელი მამრავლი* ეწოდება.

3.6. ბერნულის*) განტოლება

განსაზღვრა 3.6.1.

$$y' = P(x)y + Q(x)y^m \tag{3.6.1}$$

განტოლებას, სადაც m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ხოლო $P(x)$ და $Q(x)$ მოცემული ფუნქციებია, *ბერნულის განტოლება* ეწოდება.

როცა $m = 0$, მივიღებთ ჩვენს მიერ ადრე გამოკვლეულ წრფივ განტოლებას, ხოლო როცა $m = 1$, მივიღებთ განტოლებას განცალებად ცვლადებში. ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ $m \neq 0{,}1$. მაშინ ბერნულის განტოლება არაწრფივი განტოლება იქნება. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ შეიძლება, ის წრფივ განტოლებაზე დავიყვანოთ. შემოვიღოთ ახალი საძიებელი

$$z := y^{1-m} \tag{3.6.2}$$

ფუნქცია, მაშინ

$$\frac{dz}{dx} = (1-m)y^{-m}y'. \tag{3.6.3}$$

ახლა, თუ (3.6.1)-ის ორივე მხარეს y^m-ზე გავყოფთ და გავამრავლებთ $(1-m)$-ზე, მაშინ (3.6.2)-ისა და (3.6.3)-ის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$(1-m)y^{-m}y' = (1-m)P(x)y^{1-m} + (1-m)Q(x)$$

და

$$\frac{dz}{dx} = (1-m)P(x)z + (1-m)Q(x).$$

ეს უკანასკნელი კი ჩვენს მიერ ცხადი სახით ამოხსნილ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს [იხ. (3.1.11)].

შენიშვნა 3.6.2. ბერნულის განტოლებაზე უფრო ზოგად, როცა $m = 2$,

---

*) დ. ბერნული (1700 – 1982) – იტალიელი მათემატიკოსი, მექანიკოსი, ფიზიოლოგი, ექიმი

$$y' = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x)$$

განტოლებას *რიკატის*[*)] *განტოლება* ეწოდება. თუ $P(x) \equiv 0$, $Q(x) = a = const$, და $R(x) = b$, $b = const$, ცვლადები განცალდება, ხოლო თუ $R(x) = bx^{-2}$, $b = const$ რიკატის განტოლების ამონახსნი ელემენტარულ ფუნქციებში იწერება. მართლაც, თუ შემოვიღებთ ახალ საძიებელ ფუნქციას (დამოუკიდებელ ცვლადს)

$$y = \frac{1}{z}$$

ტოლობით, რიკატის განტოლება დავა ერთგვაროვან განტოლებაზე [იხ. (3.3.1)], რადგან

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{x^2} \quad \text{და} \quad \frac{dz}{dx} = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

[*)] ი. ფ. რიკატი (1676 – 1754) – იტალიელი მათემატიკოსი