

## ლექცია 2

## 3.2. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება განცალკევად ცვლადებში

განვიხილოთ

$$\frac{dy(x)}{dx} = A(x)B(y) \quad (3.2.1)$$

განტოლება, სადაც  $A(x)$  არის  $x$ -ის უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო  $B(y) \neq 0$   $y$ -ის უწყვეტი ფუნქციაა შესაბამისად  $[a, b]$  და  $[c, d]$  ინტერვალებზე.

**განსაზღვრა 3.2.1.** (3.2.1) სახის განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალკევად ცვლადებში.

თუ (3.2.1) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ  $dx$ -ზე და გავყოფთ  $B(y)$ -ზე, მივიღებთ, რომ

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx. \quad (3.2.2)$$

რადგან

$$\frac{1}{B(y)} \text{ და } A(x)$$

უწყვეტი ფუნქციებია, არსებობს მათი

$$b(y) = \int \frac{dy}{B(y)} \text{ და } a(x) = \int A(x)dx$$

ანტიწარმოებულები. ასე, რომ (3.2.2) შეიძლება ჩაწეროთ

$$db(y) = da(x)$$

სახით. ორი ფუნქციის (აქ  $y$  განხილულია, როგორც  $x$ -ის ფუნქცია) დიფერენციალების ტოლობიდან კი გამომდინარეობს, რომ თვით ეს ფუნქციები მუდმივი შესაკრებით განსხვავდებიან, ე.ი.,

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx + C, \quad C = const,$$

რომელიც შეიძლება

$$F(x, y) = C \quad (3.2.3)$$

არაცხადი სახით გადავწეროთ, სადაც

$$F(x, y) := \int \frac{dy}{B(y)} - \int A(x)dx.$$

(3.2.3)-ს ეწოდება (3.2.1) განტოლების *ზოგადი ინტეგრალი*. გეომეტრიულად ზოგადი ინტეგრალი წარმოადგენს სიბრტყეზე წირების ერთპარამეტრიან (პარამეტრით  $C$ ) ოჯახს. მათ ჩვენ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირებს ვუწოდებთ. ინტეგრალური წირი ამონახსნის გრაფიკია.  $C$  პარამეტრისთვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მინიჭებით ვიღებთ განტოლების ყველა ამონახსნს, გარდა, შესაძლებელია, განსაკუთრებული ამონახსნისა. იგივე ტერმინოლოგიას ვიყენებთ უფრო ზოგადი

$$y' = f(x, y) \quad (3.2.4)$$

განტოლებისთვისაც. სახელდობრ, მის ზოგად ამონახსნს და ზოგად ინტეგრალს აქვთ შესაბამისად

$$y = \varphi(x, C) \text{ და } \Phi(x, y, C) = 0$$

სახე. შევნიშნოთ, რომ (3.2.4) განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეში მიმართულებას, ხოლო ინტეგრალური წირის ყოველ წერტილში მხებს განტოლებით განსაზღვრული მიმართულება აქვს.

**მაგალითი 3.2.2.** განვიხილოთ

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad y \neq 0, \tag{3.2.5}$$

განტოლება. (3.2.5)-ის ორივე მხარის  $y$ -ზე გაყოფისა და  $dx$ -ზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ, რომ

$$\frac{dy}{y} = x dx, \tag{3.2.6}$$

(3.2.6)-ის ინტეგრება (ზემოთ მითითებული აზრით) მოგვცემს (3.2.5)-ის ზოგად ამონახსნს, რომელსაც აქვს

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2} + c} \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} + c} \tag{3.2.7}$$

სახე.

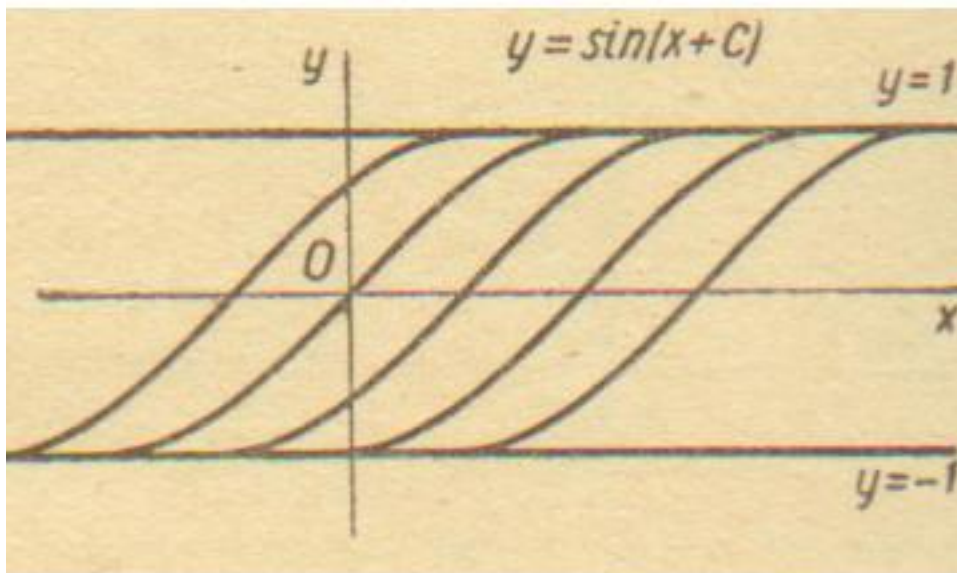
**მაგალითი 3.2.3.**

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y = \sin(x + C), \quad -\frac{\pi}{2} \leq x + C \leq \frac{\pi}{2},$$

სახე. შესაბამისი ინტეგრალური წირები წარმოადგენენ სინუსიოდების ნაჭრების ოჯახს, ხოლო მათი  $y=1$  და  $y=-1$  მომვლელები – განსაკუთრებულ ამონახსნებს (იხ. ნახ. 3.2.1).



ნახ. 3.2.1

**შებრუნებული ამოცანა 3.2.4.**

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{3.2.8}$$

$$\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0$$

სისტემიდან  $C$  პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ იმ

$$F(x, y, y') = 0$$

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგად ამონახსნს (3.2.8) წარმოადგენს.

**მაგალითი 3.2.5.** ვიპოვოთ ის დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს

$$y^2 = 2Cx \tag{3.2.9}$$

განტოლებით მოცემული პარაბოლების ოჯახს.

(3.2.9) განტოლების  $x$ -ის მიმართ გაწარმოებით გვექნება

$$2yy' = 2C. \tag{3.2.10}$$

(3.2.10) ტოლობის ორივე მხარის (3.2.9) ტოლობის შესაბამის მხარეზე გაყოფით  $C$  ნებისმიერი

მუდმივი გამოირიცხება და მივიღებთ საძიებელ დიფერენციალურ

$$2 \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}, \text{ ე. ი., } 2xy' - y = 0$$

განტოლებას.

### 3.3. პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება

**განსაზღვრა 3.3.1.** პირველი რიგის

$$\frac{dy(x)}{dx} = \varphi(x, y) \tag{3.3.1}$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება *ერთგვაროვანი*, თუ  $\varphi(x, y)$  ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც თავისი არგუმენტების შეფარდების ფუნქცია, ე. ი., თუ

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0. \tag{3.3.2}$$

თუ შემოვიღებთ

$$t := \frac{y}{x} \tag{3.3.3}$$

აღნიშვნას, მაშინ (3.3.1) სახის განტოლება დავა (3.2.1) სახის განტოლებაზე. მართლაც, (3.3.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$y = tx$$

და

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(tx)}{dx} = t \frac{dx}{dx} + x \frac{dt}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}. \tag{3.3.4}$$

(3.3.1)-დან, (3.3.2)-ისა და (3.3.3)-ის თანახმად, გვექნება, რომ

$$t + x \frac{dt}{dx} = f(t) \text{ ანუ } x \frac{dt}{dx} = f(t) - t,$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + c, \quad c = const, \tag{3.3.5}$$

გამოსახულებას, საიდანაც ვიპოვით  $t$ -ს, როგორც  $x$ -ის ფუნქციას. მისი  $y = xt$  ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ (3.3.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

(3.3.5)-ში ივლისხმება, რომ  $f(t) \neq t$ . იმ შემთხვევაში, როცა  $f(t) = t$ , (3.3.1) განტოლებას აქვს

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{3.3.6}$$

სახე, რომელსაც მარტივად ამოვხსნით ცვლადთა განცალგების მეთოდით. მართლაც,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1 \quad (C_1 > 0) \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm C_1 =: C_2 \Rightarrow y = C_2 x,$$

$$C_2 \neq 0.$$

მეორე მხრივ,  $y = 0$  (3.3.6) განტოლების ამონახსნია, რაშიც უშუალოდ განტოლებაში ჩასმით შეიძლება დავრწმუნდეთ. ამდენად, ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y = Cx, \quad C \in R^1,$$

სახე. ცხადია, ინტეგრალური წირები ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამა-

ვალ წრფეებს წარმოადგენენ.

**მაგალითი 3.3.2.** განვიხილოთ

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \quad (3.3.7)$$

განტოლება.

ცხადია,  $f(t) = t^2 + t$ . (3.3.5)-ის ძალით მივიღებთ, რომ

$$\int \frac{dt}{t^2} = \ln|x| + c \Rightarrow -\frac{1}{t} = \ln|x| + c \Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \Rightarrow y = -\frac{x}{\ln|x| + c}. \quad (3.3.8)$$

(3.3.8) წარმოადგენს (3.3.7) განტოლების ზოგად ამონახსნს.