ლექცია 1

1. წინასიტყვაობა

დიფერენციალური განტოლებებისა და მათემატიკური ფიზიკის წინამდებარე ერთსემესტრიანი კურსი იმ სტუდენტებისთვისაა განკუთვნილი, რომლებისთვისაც "მათემატიკა" მეორად (minor) სპეციალობას წარმოადგენს. მასში შეკუმშული სახითაა შესული იმ სტუდენტებისთვის, რომელთა ძირითადი (major) სპეციალობაა "მათემატიკა", განკუთვნილი ორი ძირითადი კურსი: 1. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები; 2. მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები.

2. შესავალი

დიფერენციალური მოდელები ბუნებაში და საზოგადოებრივ ურთიერთობაში მიმდინარე პროცესების აღწერის მძლავრი იარაღია. დიფერენციალური მოდელები წარმოადგენენ განტოლებებს ან განტოლებათა სისტემებს, რომლებიც საძიებელი სიდიდეების ფუნქციებს და მათ წარმოებულებს შეიცავენ. იქიდან გამომდინარე, წარმოებულები ჩვეულებრივია თუ კერძო, საქმე გვექნება ჩვეულებრივ ან კერძო წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებთან და სისტემებთან.

ლექციების კურსი ორი ნაწილისგან შედგება. კურსის პირველი ნაწილი ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს და სისტემებს და პირველი რიგის კერძო წარმოებულიან განტოლებას ეძღვნება, ხოლო მეორე ნაწილი კერძო წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებსა და სისტემებს.

3. დიფერენციალური განტოლებები

3.1 პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. ბაქტერიების გამრავლების ამოცანა. რადიუმის დაშლის ამოცანა

ამოცანა 3.1.1. ვთქვათ, წერტილმა მოძრაობა დაიწყო $t = t_0$ მომენტში და მოძრაობს x ღერძის გასწვრივ. მისი სიჩქარე დროის ყოველ t მომენტში დავახასიათოთ $f(t)$ ფუნქციით. ვიპოვოთ t დროში განვლილი მანძილი.

როგორც ვიცით, განვლილი $x(t)$ მანძილის t-თი წარმოებული არის სიჩქარე, ე. ი.,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)\,. \tag{3.1.1}$$

ამოცანა 3.1.4. ბაქტერიების გამრავლების ამოცანა.

B-თი აღვნიშნოთ ბაქტერიების რაოდენობა. მისი დროით წარმოებული ახასიათებს ბაქტერიების გამრავლებას და წარმოადგენს გამრავლების სიჩქარეს. ექსპერიმენტით დადგენილია, რომ ბაქტრიების გამრავლება, თუ გამრავლების ხელშემშლელი რაიმე პირობები არ არსებობს, მათ რაოდენობაზეა დამოკიდებული და გარკვეულ პირობებში ეს დამოკიდებულება პირდაპირ პროპორციულია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{dB(t)}{dt} = cB(t)\,, \tag{3.1.2}$$

სახით, სადაც c მუდმივი პროპორციულობის კოეფიციენტია, რომელიც გარემოზეა დამოკიდებული.

ამოცანა 3.1.3. განვიხილოთ რადიუმის დაშლის ამოცანა.

ექსპერიმენტით დადგენილია, რომ რადიუმის დაშლის სიჩქარე დაშლამდე ნივთიერების რაოდენობის პროპორციულია. ვთქვათ, R ნივთიერების რაოდენობაა. რადიუმის დაშლის სიჩქარე დროის მოცემულ t მომენტში ტოლია ნივთიერების R რაოდენობის t დროით წარმოებულის, ე. ი., $\frac{dR}{dt}$-სი. ამიტომ რადიუმის დაშლის ამოცანა შემდეგ

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \tag{3.1.3}$$

დიფერენციალურ განტოლებაზე დაიყვანება, სადაც $k > 0$ პროპორციულობის კოეფიციენტია. “ – “ ნიშანი აღებულია იმის გამო, რომ t დროის ზრდასთან ერთად ნივთიერების რაოდენობა მცირდება.

განსაზღვრა 3.1.4. განტოლებას, რომელიც უცნობი (საძიებელი) ფუნქციის წარმოებულებს შეიცავს, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება, ხოლო წარმოებულების უმაღლეს რიგს – განტოლების რიგი.

(3.1.1)-(3.1.3) განტოლებები პირველი რიგის წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს წარმოადგენენ.

განსაზღვრა 3.1.5. *დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება* ფუნქციას, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას იგივეობად აქცევს.

განსაზღვრა 3.1.6. (3.1.1), (3.1.2) ან (3.1.3) სახის დიფერენციალური განტოლების *ზოგადი ამონახსნი ეწოდება* ისეთ ფუნქციათა ოჯახს, რომელიც გარდა t ცვლადისა, დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ მუდმივზეც და რომლის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ იგივეობას.

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი, რომლებსაც მივიღებთ, თუ მის ზოგად ამონახსნში მუდმივს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას მივანიჭებთ. ამ გზით მიღებულ ამონახსნებს მოცემული განტოლების *კერძო ამონახსნები* ეწოდება.

ამოვხსნათ ჩვენს მიერ დასმული ამოცანები.

ამოცანა 3.1.1. (3.1.1) განტოლების ამოხსნა ხდება უშუალო ინტეგრებით

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + const. \tag{3.1.4}$$

ცხადია, (3.1.4) არის (3.1.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ვიპოვოთ (3.1.1) განტოლების ისეთი $x(t)$ ამონახსნი, რომელიც $t = t_0$ მომენტში აკმაყოფილებს

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.1.5}$$

პირობას.

თუ (3.1.4)-ში t-ს ნაცვლად ჩავსვამთ t_0-ს, მივიღებთ

$$const = x(t_0) = x_0 .$$

(3.1.5) პირობას საწყისი პირობა ეწოდება.

განსაზღვრა 3.1.7. ამოცანას, როცა ვეძებთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს საწყისი პირობის გათვალისწინებით, ეწოდება *კოშის ამოცანა*.

ცხადია, (3.1.1), (3.1.5) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც ჩაიწერება

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + x_0$$

სახით.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, (3.1.1)-ში $f(t) = 1$, მაშინ (3.1.1), (3.1.5) ამოცანის ამონახსნს ექნება

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} dt + x_0 = (t - t_0) + x_0$$

სახე.

ამოცანა 3.1.3-ის ამოხსნა. (3.1.2) განტოლების ორივე მხარე გავყოთ B-ზე და გავამრავლოთ dt-ზე, მივიღებთ

$$\frac{dB}{B} = cdt\,.$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრების შედეგად გვექნება:

$$\int \frac{dB}{B} = \int cdt + d\,,\;\; d = const \;\;\Rightarrow\;\; \ln B = ct + d \;\;\Rightarrow\;\; B(t) = e^{ct+d} = d_1 e^{ct}\,, \qquad (3.1.6)$$

სადაც $d_1 := e^d$.

(3.1.6) არის (3.1.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

(3.1.2) განტოლებისთვის დავსვათ კოშის ამოცანა: ვთქვათ, $t = t_0$ მომენტში ბაქტერიების რაოდენობა იყო B_0, ე. ი.,

$$B(t_0) = B_0\,. \qquad (3.1.7)$$

მაშინ d_1 მუდმივი შემდეგნაირად განისაზღვრება [იხ. (3.1.7) და (3.1.6)]

$$B_0 = B(t_0) = d_1 e^{ct_0} \;\;\Rightarrow\;\; d_1 = \frac{B_0}{e^{ct_0}}\,.$$

ამრიგად, (3.1.2), (3.1.7) კოშის ამოცანის ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე

$$B(t) = \frac{B_0}{e^{ct_0}} e^{ct} = B_0 e^{c(t-t_0)}\,.$$

ამოცანა (3.3.4)-ის ამონახსნი ანალოგიურად იქნება

$$R = R_0 e^{-k(t-t_0)}\,,$$

სადაც

$$R_0 = R(t_0)$$

ნივთიერების საწყის რაოდენობას აღნიშნავს.

განსაზღვრა 3.1.8. განვიხილოთ

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x(t) = 0 \qquad (3.1.8)$$

განტოლება, სადაც $A(t)$ მოცემული ინტეგრებადი ფუნქციაა, $x(t)$ საძიებელი ფუნქციაა, (3.1.8) სახის განტოლებას, რომელიც საძიებელ ფუნქციას და მის პირველი რიგის წარმოებულს შეიცავს, *პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება.

ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად (3.1.8) შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A(t)x(t)\,. \qquad (3.1.9)$$

(3.1.9)-ის ორივე მხარე გავყოთ $x(t)$-ზე და გავამრავლოთ dt-ზე, გვექნება

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -A(t)dt\,,$$

საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ

$$\ln|x(t)| = -\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + d\,,\;\; \text{სადაც}\;\; d = const\,.$$

აქედან, ცხადია,

$$x(t) = De^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}, \text{ სადაც } D := \pm e^{d} = const. \qquad (3.1.10)$$

(3.1.10) არის (3.1.8)-ის ზოგადი ამონახსნი.

განსაზღვრა 3.1.9.

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = f(t) \qquad (3.1.11)$$

განტოლებას პირველი რიგის *წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება* ეწოდება.

მუდმივის ვარიაციის მეთოდის გამოყენებით ვიპოვოთ (3.1.11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. (3.1.10)-ში ჩავთვალოთ, რომ B არის t-ს ფუნქცია და $D(t)$ შევარჩიოთ ისე, რომ (3.1.10)-მა დააკმაყოფილოს (3.1.11):

$$\frac{d}{dt}\left[D(t)e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}\right] + A(t)D(t)e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} = f(t) \Rightarrow$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t} A(t)dt}\frac{dD}{dt} - D(t)A(t)e^{-\int_{t_0}^{t} A(t)dt} + A(t)D(t)e^{-\int_{t_0}^{t} A(t)dt} = f(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dD}{dt} = f(t)e^{\int_{t_0}^{t} A(t)dt} \Rightarrow$$

$$D(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}dt + c, \quad c = const. \qquad (3.1.12)$$

თუ (3.1.10)-ში (3.1.12)-ს შევიტანთ, მივიღებთ (3.1.11) განტოლების შემდეგ *ზოგად ამონახსნს*

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} A(t)dt}\left[\int_{t_0}^{t} f(t)e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}dt + c\right]. \qquad (3.1.13)$$

c მუდმივის განსასაზღვრავად უნდა განვიხილოთ კოშის ამოცანა, რომელსაც (3.1.11), (3.1.5) სახე ექნება. (3.1.5)-ის გათვალისწინებით (3.1.13)-დან გვექნება, რომ

$$x_0 = x(t_0) = c\,. \qquad (3.1.14)$$

თუ (3.1.14) ტოლობით განსზღვრულ c-ს მნიშვნელობას (3.1.13)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ (3.1.11), (3.1.5) კოშის ამოცანის

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} A(t)dt}\left[\int_{t_0}^{t} f(t)e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}dt + x_0\right]$$

ამონახსნს, რომელიც ერთადერთია და (3.1.11) განტოლების კერძო ამონახსნს წარმოადგენს.