ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები
(ლექციების კურსი)

ლექტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
თსუ სრული პროფესორი თამაზ თადუმაძე

თბილისი - 2011

შინაარსი

შესავალი

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ანუ დიფერენციალური განტოლე ბა ეწოდება ტოლობას, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ერთ დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადის უცნობ ფუნქციას და მის წარმოებულებს. როგორც წესი, მრავალი ფიზიკური , ეკონომიკური, ტექნიკური, ბიოლოგიური და სხვა სახის პროცესები (მოვლენები, სისტემები) აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით. დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევა და მათი ამონახსნების თვისებების დადგენა არის დიფერენციალური განტოლებების თეორიის საგანი. დიფერენციალური განტოლებები გამოიყენება მათემატიკის ისეთ დარგებში როგორიცაა: მათემატიკური ფიზიკა, ვარიაციული აღრიცხვა, ოპტიმალური მართვის თეორია, დიფერენციალური თამაშები, მათემატიკური ეკონომიკა, ოპერაციათა აღრიცხვა, მათემატიკური ბიოლოგია და სხვა.

ლექციათა კურსი შეეხება დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ფუნდამენტურ საკითხებს: ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა, მუდმივ და ცვლად კოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლებების ზოგადი ამონახსნების აგება, ავტონომიური სისტემის ამონახსნების თვისებები და წონასწორობის მდგომარეობის მდგრადობა და ა.შ. გარდა ამისა, კურსში გადმოცემულია დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება ოპტიმალური მართვის თეორიის წრფივ ამოცანებში.

საქართველოში ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების განვითარებას საფუძველი ჩაუყარა ი. კიღურაძემ, ხოლო ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარებას რ. გამყრელიძემ და გ. ხარატიშვილმა.

კურსი სავალდებულოა და განკუთვლილია მათემატიკის მიმართულების ბაკალავრიატის მე-2 კურსის სტუდენტებისათვის, მისი მიზანია სტუდენტებს მისცეს საბაზო ცოდნა დიფერენციალურ განტოლებებში, გამოუმუშავოს მათ დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევისა და ამოხსნის უნარ-ჩვევები. კურსი ერთ სემესტრიანია (5 კრედიტი), საკონტაქტო 60 სთ: 30 სთ ლექცია, 30 სთ პრაქტიკული.

ლექციათა კურსში გამოყენებულია ორციფრიანი ნუმერაცია: პირველი ციფრი მიუთითებს პარაგრაფის ნომერს, ხოლო მეორე ციფრი-ფორმულის ნომერს. სტუდენტები უზრუნველყოფილნი იქნებიან ძირითადი და დამხმარე ლიტერატურით.

სალექციო კურსის შედგენისას ჩვენ ძირითადად ვსარგებლობდით [1]-[6] სახელმძღვანელოებით.

§ 1. ამოცანები, რომელთა ამოხსნა დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებზე. ძირითადი ცნებები

ამოცანა 1.1. იპოვეთ ჰორიზონტალურ წრფეზე (რიცხვით ღერძზე) მოძრავი სხეულის გადაადგილების კანონი, თუ მისი სიჩქარე ყოველ $t \in [t_0, \infty)$ მომენტში არის $v(t)$ ($v(t)$-უწყვეტი ფუნქციაა), ხოლო საწყის t_0 მომენტში სხეული იმყოფება x_0 წერტილში.

ამოხსნა. ვთქვათ სხეულის მოძრაობის კანონი აღიწერება უწყვეტად წარმოებადი $x = x(t), t \geq t_0$ ფუნქციით, მაშინ სხეულის სიჩქარე t მომენტში იქნება $\dot{x}(t) \overset{def}{=} x'(t)$. თუ გავითვალისწინებთ ამოცანის მოცემულობას, მაშინ $x(t)$ უცნობი ფუნქციის მიმართ, მივიღებთ ტოლობას

$$\dot{x}(t) = v(t). \qquad (1.1)$$

(1.1) განტოლება შეიცავს უცნობი $x(t)$ ფუნქციის წარმოებულს, მას ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. (1.1) ტოლობის ინტეგრებით $[t_0, t]$ მონაკვეთზე მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t} v(s)ds.$$

აქედან, $x(t_0) = x_0$ ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, t \geq t_0.$$

ეს არის სხეულის მოძრაობის კანონი.

ამოცანა 1.2. იპოვეთ რადიაქტიური ნივთიერების დაშლის კანონი, თუ მისი მასა საწყის t_0 მომენტში არის m_0.

ამოხსნა. ვთქვათ ნივთიერების დაშლის კანონი აღიწერება უწყვეტად წარმოებადი $m(t), t \geq t_0$ ფუნქციით ე.ი. ნივთიერების მასა t მომენტში არის $m(t)$. ცნობილია, რომ ნივთიერების დაშლის სიჩქარე $\dot{m}(t) \overset{def}{=} m'(t) = \frac{dm}{dt}$ ($\overset{def}{=}$ სიმბოლო ნიშნავს სიტყვას „აღნიშნავს") პროპორციულია $m(t)$ მასის. ამიტომ, უცნობი $m(t)$ ფუნქციის მიმართ გვექნება ტოლობა

$$\dot{m}(t) = -km(t), k > 0. \qquad (1.2)$$

ნიშანი მინუსი მიუთითებს იმაზე, რომ დაშლისას მასა მცირდება. (1.2) განტოლება შეიცავს უცნობ ფუნქციას და მის წარმოებულს, მას ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. დიფერენციალურ განტოლებაში, როგორც წესი, უცნობი ფუნქცია და მისი წარმოებული იწერება t-ს გარეშე (მათი დამოკიდებულება t-ზე ყოველთვის იგულისხმება). ამრიგად (1.2) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\dot{m} = -km.$$

ახლა (1.2) გადავწეროთ ასე

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = -k\,.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{m}(s)}{m(s)} ds = -k \int_{t_0}^{t} ds\,,\ \ \ln m(t) - \ln m(t_0) = \ln \frac{m(t)}{m(t_0)} = -k(t - t_0)\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}\,,$$

რომელიც არის რადიაქტიური ნივთიერების დაშლის კანონი.

ამოცანა 1.3. ვთქვათ $N(t)$ არის დროის t მომენტში გამოშვებული ერთი სახის პროდუქციის რაოდენობა გამოსახული ფულად ერთეულში. შეადგინეთ ეკონომიკური ზრდის მათემატიკური მოდელი.

ეკონომიკური ზრდის ობიექტური კანონის თანახმად $N(t)$ წარმოდგენილი უნდა იქნეს ორი შესკრების სახით

$$N(t) = C(t) + I(t)\,. \qquad (1.3)$$

$C(t)$ არის თანხა, რომელიც ხმარდება თანამშრომელთა ხელფასებს, სოციალურ დახმარებებს და ა.შ. $I(t)$ არის თანხა, რომელიც ხმარდება ახალი დანადგარების შეძენას, ახალი ტექნოლოგიების დანერგვას და ა.შ. (შიგა ინვესტიცია). ვთქვათ

$$C(t) = \alpha N(t), 0 < \alpha < 1, I(t) = \beta N(t) + \gamma \dot{N}(t), 0 < \beta < 1 - \alpha, \gamma > 0\,. \qquad (1.4)$$

(1.3)-დან, (1.4)-ის გათვალისწინებით, მოვიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{N}(t) = \frac{1 - \alpha - \beta}{\gamma} N(t)\,. \qquad (1.5)$$

(1.5) არის ეკონომიკური ზრდის უმარტივესი მათემატიკური მოდელი.

ძირითადი ცნებები. ტოლობას, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადის უცნობ ფუნქციას და მის წარმოებულებს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ანუ დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. ტოლობას

$$F(t, x, \dot{x}, x^{(2)} ..., x^{(n)}) = 0\,, \qquad (1.6)$$

სადაც t დამოუკიდებელი ცვლადია, $x = x(t)$ უცნობი ფუნქციაა, ხოლო

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, x^{(i)} \overset{def}{=} \frac{d^i x}{dt^i}, i = \overline{2, n}\,,$$

ეწოდება n რიგის დიფერენციალური განტოლება.

შენიშვნა 1.1. დიფერნციალურ განტოლებაში მონაწილეობს ერთ ცვლადზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქცია. განტოლებაში შეიძლება არ შედიოდეს დამოუკიდებელი ცვლადი ან უცნობი ფუნქცია, ხოლო უცნობი ფუნქციის წარმოებული აუცილებლად უნდა შედიოდეს.

$x = \varphi(t), t \in (a, b)$ ფუნქციას ეწოდება n რიგის (1.6) განტოლების **ამონახსნი,** თუ იგი უწყვეტად წარმოებადია n რიგამდე ჩათვლით და ამავე დროს ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t),...,\varphi^{(n)}(t))=0,\forall t\in(a,b).$$

თუ (a,b) ინტერვალის ნაცვლად გვაქვს მონაკვეთი $[a,b]$, მაშინ a და b წერტილებში იგულისხმება ცალმხრივი წარმოებულები ე.ი. $\dot{\varphi}(a)=\dot{\varphi}(a+)$, $\dot{\varphi}(b)=\dot{\varphi}(b-)$ და ა.შ.

განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლეს რიგს განტოლების **რიგი** ეწოდება.

განტოლებას, რომელიც ამოხსნილია წარმოებულის უმაღლესი რიგის მიმართ **ნორმალური განტოლება** ეწოდება. ლექციათა კურსში განხილული იქნება მხოლოდ ნორმალური განტოლებები.

განვიხილოთ პირველი რიგის არაწრფივი განტოლება

$$\dot{x}=f(t.x). \qquad (1.7)$$

t და x ცვლადების $f(t,x)$ ფუნქციას ეწოდება განტოლების მარჯვენა მხარე, იგი არის განსაზღვრული და უწყვეტი $D\subset R^2$ ღია სიმრავლეზე (არეზე) .

$x=\varphi(t),t\in(a,b)$ ფუნქციას ეწოდება (1.7) განტოლების **ამონახსნი**, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) $(t,\varphi(t))\in D,t\in(a,b)$ ე.ი. $\varphi(t)$ ფუნქციის გრაფიკი ძევს D-ში;

ბ) $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t)),\forall t\in(a,b).$$

ვთქვათ $\varphi(t)$ ამონახსნია, მაშინ მის გრაფიკს **ინტეგრალური წირი** ეწოდება.

განტოლებას ეწოდება **წრფივი,** თუ იგი უცნობ ფუნქციას და მის წარმოებულებს შეიცავს პირველ ხარისხში.

განვიხილოთ წრფივი განტოლება $\dot{x}=2t$. მისი ამონახსნია $x=t^2+c$ ფუნქცია, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად განტოლებას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. იმისათვის, რომ (1.7) განტოლებას ქონდეს ერთადერთი ამონახსნი საჭიროა მისი მარჯვენა მხარე $f(t,x)$ აკმაყოფილებდეს გარკვეულ პირობებს, ხოლო ამონახსნი პირობას $x(t_0)=x_0$. მოცემულ რიცხვებს t_0 და x_0 ეწოდება **საწყისი მონაცემები (საწყისი მნიშვნელობები),** ხოლო ტოლობას $x(t_0)=x_0$ **საწყისი პირობა**.

კოშის ამოცანა. იპოვეთ (1.7) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $x(t_0)=x_0$.

გეომეტრიულად კოშის ამოცანა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: ვთქვთ $(t_0,x_0)\in D$ მოცემული წერტილია, იპოვეთ (1.7) განტოლების ისეთი ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (t_0,x_0) წერტილზე.

კოშის ამოცანა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}$$

თუ განტოლების რიგია n, მაშინ კოშის ამოცანაში საწყისი პირობა შედგება n ტოლობისგან:

$$x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0,...,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)},$$

სადაც $t_0, x_0, \dot{x}_0, ..., x_0^{(n-1)}$ რიცხვები საწყისი მნიშვნელობებია. $\dot{x}_0, ..., x_0^{(n-1)}$ სიმბოლოები აღნიშნავენ რიცხვებს და არ უკავშირდებიან წარმოებულებს, ხოლო $\dot{x}(t_0), ..., x^{(n-1)}(t_0)$ სიმბოლოები აღნიშნავენ $x(t)$ ფუქციის შესაბამისი რიგის წარმოებულებს გამოთვლილს t_0 წერტილში .

მიმართულების ველი (განტოლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია). R^2 სიბრტყეში განვიხილოთ $t0x$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ (1.7) განტოლების მარჯვენა მხარე უწყვეტია $D \subset R^2$ არეზე. ნებისმიერ $(t, x) \in D$ წერტილში გავავლოთ მონაკვეთი, რომელიც ეკუთვის წრფეს რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $f(t, x)$. ამრიგად, ეს წრფე $0t$ ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს კუთხეს α, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $tg\alpha = f(t, x)$. ყოველ წერტილში, აღნიშნული წესით, გავლებული მონაკვეთების შედეგად მიღებულ სურათს ეწოდება მიმართულების ველი. დიფერენციალურ განტოლებას ერთადერთი მიმართულების ველი შეესაბამება. $(t, \varphi(t)) \in D, t \in (a, b)$ წირი ინტეგრალურია, თუ $(t, \varphi(t))$ წერტილში გავლებული მიმართულების ველის მონაკვეთი წირს ეხება. თუ შესაძლებელია განტოლების მიმართულების ველის აგება, მაშინ ეს საშუალებას იძლევა გეომეტრიულად ვიპოვოთ მიახლოებითი ინტეგრალური წირი. განტოლების ამონახსნის მოძებნის ამ მეთოდს იზოკლინების მეთოდი ეწოდება.

§ 2. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. კოშის ფორმულა

განვიხილოთ განტოლება

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \tag{2.1}$$

სადაც $a(t), b(t), t \in R$ უწყვეტი ფუნქციებია.

თეორემა 2.1. (2.1) განტოლების ყველა ამონახსნი გამოისახება კოშის ფორმულით

$$x = e^{\int a(t)dt}(c + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt), \tag{2.2}$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

დამტკიცება. პირველ რიგში ვიპოვოთ ერთგვაროვანი

$$\dot{y} = a(t)y \tag{2.3}$$

განტოლების ამონახსნი.

(2.3) განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია $y(t) \equiv 0$, ხოლო დანარჩენი ამონახსნები, ამონახსნის ერთადერთობის გამო, ყველგან R-ზე იღებს მხოლოდ დადებით ან უარყოფით მნიშვნელობებს.

(2.3)-დან მივიღებთ

$$\frac{dy}{y} = a(t)dt.$$

ინტეგრების შედეგად გვექნება

$$\ln|y| - \ln c_1 = \int a(t)dt, c_1 > 0.$$

აქედან მივიღებთ

$$|y| = c_1 e^{\int a(t)dt}.$$

ამრიგად, თუ $y > 0$

$$y = c_1 e^{\int a(t)dt}, \qquad (2.4)$$

ხოლო, თუ $y < 0$

$$y = -c_1 e^{\int a(t)dt}. \qquad (2.5)$$

ნულოვანი და (2.4),(2.5) ამონახსნების გაერთიანება ჩაიწერება ფორმულით

$$y = ce^{\int a(t)dt},$$

სადაც c ნებისმიერი რიცხვია.
(2.1) განტოლების ამონახსნების მოძებნის ქვემოთმოყვანილ მეთოდს ეწოდება მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი. (2.1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი ფუნქციის სახით

$$x = c(t)e^{\int a(t)dt}. \qquad (2.6)$$

შევარჩიოთ $c(t)$ ისეთნაირად, რომ (2.6) ფუნქციამ დააკმაყოფილოს (2.1) განტოლება. (2.6) ჩავსვათ (2.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\dot{c}(t)e^{\int a(t)dt} + c(t)a(t)e^{\int a(t)dt} = a(t)c(t)e^{\int a(t)dt} + b(t).$$

აქედან

$$\dot{c}(t)e^{\int a(t)dt} = b(t) \quad \text{ანუ} \quad \dot{c}(t) = e^{-\int a(t)dt} b(t).$$

ინტეგრების შედეგად გვექნება

$$c(t) = c + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt.$$

$c(t)$-ს (2.6)-ში ჩასმის შედეგად მივიღებთ (2..2) ფორმულას.

შენიშვნა 2.1. კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით

$$x = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds\right). \quad \text{(შეამოწმეთ)}$$

§ 3. ლიფშიცის პირობა

ფუნქცია $f(t,x),(t,x)\in D\subset R^2$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას D არეზე x ცვლადის მიმართ, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $L>0$, რომ ნებისმიერი წერტილებისთვის $(t,x)\in D,(t,y)\in D$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|.$$

L რიცხვს ეწოდება ლიფშიცის მუდმივი.
D არეს ეწოდება ამოზნექილი x კოორდინატის მიმართ, თუ მას ნებისმიერ ორ წერტილთან $(t,x)\in D$, $(t,y)\in D$ ერთად ეკუთვნის მათი შემაერთებელი მონაკვეთი.

ლემა 3.1. ვთქვათ D ამოზნექილი არეა x კოორდინატის მიმართ, ხოლო $f(t,x)$ ფუნქცია უწყვეტია D არეზე და უწყვეტად წარმოებადია x-ის მიმართ. გარდა ამისა, არსებობს ისეთი რიცხვი $M>0$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|\le M,\forall(t,x)\in D.$$

მაშინ $f(t,x)$ ფუნქცია x ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

დამტკიცება. ვთქვათ $(t,x)\in D,(t,y)\in D$ ნებისმიერი ორი წერტილია. ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად

$$|f(t,x)-f(t,y)|=\left|\frac{\partial f(t,y+\theta(x-y))}{\partial x}(x-y)\right|\le M|x-y|,\theta\in[0,1].$$

ფუნქცია შეიძლება აკმაყოფილებდეს ლიფშიცის პირობას, მაგრამ იგი ყველა წერტილში წარმოებადი არ იყოს.

მაგალითი 3.1. $f(t,x)=|x|$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $|f(t,x)-f(t,y)|=||x|-|y||\le|x-y|$, ლიფშიცის მუდმივით $L=1$, მაგრამ მას $x=0$ წერტილში არა აქვს წარმოებული.

§ 4. თეორემა პირველი რიგის არაწრფივი განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ

განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}\qquad(4.1)$$

თეორემა 4.1. ვთქვათ $f(t,x)$ ფუნქცია უწყვეტია $D\subset R^2$ არეზე და x ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას: $|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|$. მაშინ ნებისმიერი $(t_0,x_0)\in D$ წერტილისათვის

არსებობს (4.1) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x=\varphi(t)$, რომელიც განმარტებულია $[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$ მონაკვეთზე, სადაც $\delta_0>0$ რიცხვის სიდიდე დამოკიდებულია საწყის მონაცემებზე, განტოლების მარჯვენა მხარეზე და ლიფშიცის მუდმივზე.

არსებობა. ვთქვათ $(t_0,x_0)\in D$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. მოიძებნება ისეთი რიცხვები $q>0, a>0$, რომ $t0x$ სისტემაში მართკუთხედი

$$\Pi=\left\{(t,x)\in D:\begin{matrix}|\,t-t_0\,|\le q\\ |\,x-x_0\,|\le a\end{matrix}\right\}$$

შედის D არეში.

ვთქვათ $\delta\in(0,q]$, მაშინ

$$\Pi_\delta=\left\{(t,x)\in D:\begin{matrix}|\,t-t_0\,|\le \delta\\ |\,x-x_0\,|\le a\end{matrix}\right\}$$

მართკუთხედი იქნება Π-ს ქვესიმრავლე.

Ω_δ-თი აღვნიშნოთ ისეთი უწყვეტი $\varphi(t), t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$ ფუნქციების სიმრავლე, რომელთა გრაფიკი ძევს Π_δ მართკუთხედში. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ შესრულებულია უტოლობა

$$|\,\varphi(t)-x_0\,|\le a, t\in[t_0-\delta,t_0+\delta].$$

Ω_δ სიმრავლეზე განვმარტოთ ასახვა (ოპერატორი) $\varphi^*=F(\varphi)$ შემდეგი ფორმულით

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds, t\in[t_0-\delta,t_0+\delta].$$

შევარჩიოთ $\delta\in(0,q]$ რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

ა) თუ $\varphi\in\Omega_\delta$, მაშინ $\varphi^*\in\Omega_\delta$;

ბ) თუ $\varphi,\chi\in\Omega_\delta$, მაშინ ადგილ აქვს უტოლობას

$$\|\,\varphi^*-\chi^*\,\|=\max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}|\,\varphi^*(t)-\chi^*(t)\,|=\|\,F(\varphi)-F(\chi)\,\|\le k\,\|\,\varphi-\chi\,\|, 0<k<1\ ,$$

სადაც k რიცხვი არ არის დამოკიდებული φ და χ ფუნქციებზე. თუ ბ) პირობა შესრულებულია მაშინ ამბობენ, რომ F ასახვა კუმშვადია. $\|\varphi\|$ სიმბოლო აღნიშნავს φ ფუნქციის ნორმას, $\|\varphi\|=\max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}|\,\varphi(t)\,|$.

ა) პირობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$|\,\varphi^*(t)-x_0\,|\le a, t\in[t_0-\delta,t_0+\delta].$$

შევაფასოთ სხვაობა

$|\,\varphi^*(t)-x_0\,|=|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\,|\le|\int_{t_0}^{t}|\,f(s,\varphi(s))\,|ds\,|$ (რიმანის ინტეგრალის თვისება).

ფუნქცია $f(t,x)$ უწყვეტია D-ზე, ამიტომ ამავე სიმრალეზე უწყვეტია $|\,f(t,x)\,|$. Π კომპაქტია (შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლე), ამიტომ ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად $M=\max_{(t,x)\in\Pi}|\,f(t,x)\,|$ რიცხვი სასრულია . ამრიგად, გვექნება

$$|\varphi^*(t)-x_0|\le M|t-t_0|\le M\delta .$$

ცხადია $\varphi^*\in\Omega_\delta$, თუ $\delta\le\frac{a}{M}$.

ახლა δ შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს ბ) პირობა. შევაფასოთ სხვაობა

$$|\varphi^*(t)-\chi^*(t)|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi(s))-f(s,\chi(s))|ds|\le\int_{t_0}^{t}L|\varphi(s)-\chi(s)|ds|\le L\delta\|\varphi-\chi\|,$$

სადაც L ლიფშიცის მუდმივია.

ცხადია, თუ $\delta<\frac{1}{L}$ მაშინ $k=L\delta<1.$ ამრიგად, თუ $\delta>0$ რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\delta<\min(q,\frac{a}{M},\frac{1}{L}), \qquad (4.2)$$

მაშინ შესრულებული იქნება ა) და ბ) პირობები. $\delta_0>0$ რიცხვის როლში (იხ. თეორემის ფორმულირება) ავიღოთ რომელიმე რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს (4.2) უტოლობას.

ავაგოთ ფუნქციათა მიმდევრობა $\varphi_0(t),...,\varphi_i(t),...$ შემდეგი რეკურენტული წესით: $\varphi_i=F(\varphi_{i-1}),i=1,2,...,$ სადაც $\varphi_0(t)=x_0.$ ცხადია $\varphi_i\in\Omega_{\delta_0},i=0,1,....$

მეთოდს, სადაც განტოლების ამონახსნის მოსაძებნად გამოიყენება ასეთი რეკურენტული წესით აგებული მიმდევრობა, მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი ეწოდება.

დავამტკიცოთ $\varphi_i(t),i=0,1,...$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა $[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$ მონაკვეთზე. აღნიშნული მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა (ნორმით კრებადობა) ტოლფასია $[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$ მონაკვეთზე შემდეგი ფუქციონალარი მწკრივის თანაბრად კრებადობის

$$\varphi_0(t)+(\varphi_1(t)-\varphi_0(t))+...+(\varphi_i(t)-\varphi_{i-1}(t))+...,$$

რადგანაც მწკრივის კერძო ჯამები ტოლია მიმდევრობის წევრების.
შევაფასოთ მწკრივის წევრები დაწყებული მეორედან, მივიღებთ

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|\le a,\ \|\varphi_2-\varphi_1\|=\|F(\varphi_1)-F(\varphi_0)\|\le k\|\varphi_1-\varphi_0\|\le ka,...,\ \|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|\le k^{i-1}a,\ .\ .\ .$$

ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|\le a\sum_{i=0}^{\infty}k^i .$$

მწკრივი $a\sum_{i=0}^{\infty}k^i$ კრებადია (დალამბერის ნიშანი), იგი ფუნქციონალური მწკრივის მაჟორანტს წარმოადგენს. ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად ფუნქციათა მწკრივი თანაბრად კრებადია და აქედან გამომდინარე ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\varphi_i(t)\}$ თანაბრად კრებადია უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქციისკენ ე.ი.

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_i(t)=\varphi(t),\ \text{თანაბრად}\ \ t\in[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$$

ანუ

$$\lim_{i\to\infty}\|\varphi_i-\varphi\|=0.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(t)$ არის კოშის ამოცანის ამონახსენი. ცხადია, რომ $\varphi \in \Omega_{\delta_0}$. გადავიდეთ ზღვარზე ტოლობაში

$$\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i-1}(s))ds$$

მივიღებთ

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$ (რიმანის ინტეგრალის თვისება)

აქედან, ინტეგრალის თვისებების გამოყენებით, მიიღება ტოლობები

$$\varphi(t_0) = x_0, \ \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0].$$

ამრიგად, $\varphi(t), t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ არის კოშის ამოცანის ამონახსნი.

ერთადერთობა. ვთქვათ $\varphi(t)$ და $g(t)$ ამონახსნები განსაზღვრულია $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ მონაკვეთზე და აკმაყოფილებენ პირობას $\varphi(t_0) = g(t_0) = x_0$. დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(t) = g(t)$, $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$. შემოვიღოთ ფუნქცია $z(t) = \varphi(t) - g(t)$. ვთქვათ $\varepsilon \in (0, \delta_0]$ რიცხვი ისეთია , რომ შესრულებულია უტოლობა $L\varepsilon \le \frac{1}{2}$. ცხადია $z(t_0) = 0$ და $\mu = \max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |z(t)|$ სასრული რიცხვია.

ერთის მხრივ,

$$|\dot{z}(t)| = |f(t, \varphi(t)) - f(t, g(t))| \le L|\varphi(t) - g(t)| \le L\mu, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

მეორეს მხრივ, როცა $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ გვექნება

$$|z(t)| = |z(t) - z(t_0)| = |t - t_0| \, |\dot{z}(t_0 + \theta(t - t_0))| \le L\mu\varepsilon \le \frac{\mu}{2}, 0 \le \theta \le 1, .$$

ე.ი. $\mu \le \frac{\mu}{2}$, ამიტომ $\mu = 0$. ამრიგად, $\varphi(t) = g(t), \ t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. ანლოგიური მსჯელობით დამტკიცდება $\varphi(t)$ და $g(t)$ ფუნქციების ტოლობა $t_0 + \varepsilon$ და $t_0 - \varepsilon$ წერტილების მარჯვნივ და მარცხნივ ε სიგრძის მონაკვეთზე. ეს პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ მივაღწევთ $t_0 - \delta_0$ და $t_0 + \delta_0$ წერტილებამდე.

შენიშვნა 4.1. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი.

მაგალითი. 4.1. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით იპოვეთ

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ამოცანის ამონახსნი.

ამოხსნა. ავაგოთ მიმდევრობა $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$

$$\varphi_0(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2!})ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

. . . . . .

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

. . . . . .

როგორც ცნობილია

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^t .$$

ამრიგად, $x = e^t$ არის ამოცანის ამონახსნი.

შენიშვნა 4.2. თუ $f(t,x)$ ფუნქცია უწყვეტია D-ზე, მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

აქვს ერთი ამონახსნი მაინც, რომელიც განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია დაირღვეს ამონახსნის ერთადერთობა.

მაგალითი 4.2. განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

$x_1 = 0$ და $x_2 = t^3$ არის ამოცანის ამონახსნები, ერთადერთობა დარღვეულია **(ახსენით ერთადერთობის დარღვევის მიზეზი)**.

სავარჯიშო 4.1. დაამტკიცეთ შემდეგი დებულებების სამართლიანობა:

ა) ვთქვათ $f(t,x)$ ფუნქცია უწყვეტია D არეზე და ნებისმიერ $K \subset D$ კომპაქტზე x ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას ე.ი. არსებობს ლიფშიცის მუდმივი $L_K > 0$ (ლიფშიცის მუდმივი, საზოგადოდ, დამოკიდებულია K კომპაქტზე), რომ ადგილი ,აქვს უტოლობას $|f(t,x) - f(t,y)| \le L_K |x - y|$. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

ბ) ვთქვათ $f(t,x)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებილი $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ უწყვეტია D არეზე. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

§ 5. თეორემა ამონახსნის გაგრძელების შესახებ

განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), x \in R \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

ვთქვათ $\varphi(t), t \in [r_1, r_2]$ და $g(t), t \in [s_1, s_2]$ არის (5.1) კოშის ამოცანის ამონახსნები. $g(t)$-ს ეწოდება $\varphi(t)$ ამონახსნის გაგრძელება, თუ $[r_1, r_2] \subset [s_1, s_2]$ და $\varphi(t) = g(t), t \in [r_1, r_2]$.

თეორემა 5.1. ვთქვათ $D \subset R^2$ კომპაქტური სიმრავლეა. ფუნქცია $f(t,x)$ და მისი კერძო წარმოებული $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ უწყვეტია D-ზე. მაშინ D სიმრავლის ნებისმიერი შიგა (t_0, x_0) წერტილის შესაბამისი (5.1) კოშის ამოცანის ამონახსნი შეიძლება გაგრძელებული იქნეს მონაკვეთზე $[a,b]$, მასთან $(a, x(a))$ და $(b, x(b))$ იქნება D სიმრავლის საზღვრის წერტილები. a და b რიცხვების მნიშვნელობები დამოკიდებულია საწყის მომაცემებზე.

დამტკიცება. D სიმრავლის საზღვარი აღვნიშნოთ Γ-თი. ვთქვათ (t_0, x_0) არის D სიმრავლის შიგა წერტილი. (t_0, x_0) წერტილისთვის არსებობს (5.1) კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x(t), t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ (იხ. წინა პარაგრაფი). მოვახდინოთ ამონახსნის გაგრძელება მარჯვნივ. თუ $(t_0 + \delta_0, x(t_0 + \delta_0)) \in \Gamma$, მაშინ $b = t_0 + \delta$. ამ შემთხვევაში მარჯვნივ გაგრძელება არ შეიძლება. ვთქვათ $(t_1, x(t_1))$, სადაც $t_1 = t_0 + \delta_0, x_1 = x(t_1)$, არის D სიმრავლის შიგა წერტილი. განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_1) = x_1. \end{cases} \tag{5.2}$$

არსებობს (5.2) კოშის ამოცანის ამონახსნი $x_0(t), t \in [t_1 - \delta_{01}, t_1 + \delta_{01}]$. ცხადია,რომ $x(t_1) = x_0(t_1)$ ამიტომ ერთადერთობის გამო $x(t) = x_0(t), t \in [t_0, t_1] \cap [t_1 - \delta_{01}, t_1 + \delta_{01}]$. ამრიგად მივიღეთ ახალი ამონახსნი განმარტებული $[t_0, t_1 + \delta_{01}]$ მონაკვეთზე, რომელიც თავდაპირველი $x(t)$ ამონახსნის გაგრძელებაა მარჯვნივ. შევთანხმდეთ, რომ გაგრძელებული ამონახსნი ყოველთვის აღნიშნული იქნება $x(t)$-თი. პროცესი გავაგრძელოთ.

შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

ა) პროცესი სასრულია. ამ შემთხვევაში სასრული ბიჯის შემდეგ ინტეგრალური წირის ბოლო წერტილი ეკუთვნის Γ. მაშინ თეორემის დამტკიცება დასრულებულია;

ბ) პროცესი უსასრულოა. ამ შემთხვევაში მივიღებთ D სიმრავლის შიგა წერტილთა უსასრულო მიმდევრობას $(t_k, x(t_k)), k = 1,2,....$

მიმდევრობა $t_k, k = 1,2,...$ ზრდადია და შემოსაზღვრული. $\{t_k\}$ მიმდევრობის ზღვარი აღვნიშნოთ b-თი. გაგრძელებული ამონახსნი $x(t)$ ყოველი $k = 1,2,...$ განმარტებულია $[t_0, t_k]$ მონაკვეთზე. აქედან დავასკვნით, რომ გაგრძელებული ამონახსნი $x(t)$ განმარტებულია $[t_0, b)$-ზე. ვაჩვენოთ $\lim\limits_{t \to b-} x(t)$ ზღვარის არსებობა. ავიღოთ b წერტილის მარცხენა რაიმე ნახევარ მიდამო $[b - \delta, b]$, სადაც

დადებითი რიცხვი δ ისეთია, რომ $b-\delta > t_0$. ნებისმიერი $t,s \in (b-\delta, b)$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x(t)-x(s)| = \left|\int_s^t \dot{x}(\tau)d\tau\right| \le \left|\int_s^t |\dot{x}(\tau)|\,d\tau\right| = \left|\int_s^t |f(\tau,x(\tau))|\,d\tau\right| \le M\delta,$$

სადაც $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t,x)|$.

ანალიზში ცნობილი კოშის კრიტერიუმის ძალით არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{t\to b-} x(t) = x^*$. ჩავთვალოთ $x(b) = x^*$, მაშინ $x(t)$ გახდება უწყვეტი ფუნქცია $[t_0, b]$-ზე და ამავე დროს ადგილი ექნება ტოლობას $\dot{x}(b-) = f(b, x(b))$. აქედან გამომდინარე $x(t)$ იქნება თავდაპირველი ამონახსნის გაგრძელება მარჯვნივ მაქსიმალურ მონაკვეთზე $[t_0, b]$. წერტილი $(b, x(b)) \in \Gamma$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $[t_0, b]$ არ იქნებოდა ამონახნის მარჯვნივ გაგრძელების მაქსიმალური მონაკვეთი. ანალოგიურად შეიძლება ამონახსნის გაგრძელება მარცხნივ მაქსიმალურ მონაკვეთზე $[a, t_0]$.

ადგილი აქვს დებულებებს:

თეორემა 5.2. ვთქვათ $f(t,x)$ ფუნქცია და მისი კერძო წრმოებული x-ის მიმართ უწყვეტია $D \subset R^2$ არეზე. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნი შეიძლება გაგრძელებული იქნეს მაქსიმალურ (a,b) ინტერვალზე (არ გამოირიცხება შემთხვევა, როცა $a = -\infty$ და $b = \infty$).

თეორემა 5.3. ვთქვათ $f(t,x)$ ფუნქცია და მისი კერძო წრმოებული x-ის მიმართ უწყვეტია $D = \{(t,x) : a < t < b, x \in R\}$ სიმრავლეზე. გარდა ამისა შესრულებულია უტოლობა $|f(t,x)| \le \alpha(t)|x| + \beta(t)$, სადაც $\alpha(t) \ge 0$ და $\beta(t) \ge 0$ უწყვეტი ფუნქციებია. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნი შეიძლება გაგრძელებული იქნეს (a,b) ინტერვალზე.

თეორემა 5.4. ვთქვათ $f(t,x)$ ფუნქცია უწყვეტია $D = \{(t,x) : a \le t \le b, x \in R\}$ სიმრავლეზე და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|, \forall (t,x),(t,y) \in D.$$

მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის კოშის ამოცანის ამონახსნი შეიძლება გაგრძელებული იქნეს (a,b) ინტერვალზე.

თეორემა 5.5. ვთქვათ $\alpha(t)$ და $\beta(t)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a,b]$ ინტერვალზე. მაშინ წრფივ ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D = \{(t,x) : a \le t \le b, x \in R\}$ საწყისი მონაცემისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია $[a,b]$ მონაკვეთზე.

§ 6. ბრონშოლის უტოლობა

ლემა 6.1. ვთქვათ $w(t)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$ მონაკვეთზე. გარდა ამისა, ვთქვათ $\alpha > 0, w_0 > 0$ და $t_0 \in [a,b]$ მოცემული რიცხვებია და ადგილი აქვს უტოლობას

$$w(t) \le w_0 + \alpha \left| \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds \right|, t \in [a,b], \tag{6.1}$$

მაშინ

$$w(t) \le w_0\, e^{\alpha(b-a)}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $t_0 \in (a,b)$. უტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ორი შეთხვევა.

ა) ვთქვათ $t \in [t_0, b]$. შემოვიღოთ ფუნქცია $r(t) = \alpha \int_{t_0}^{t} w(s)ds$. ამ შემთხვევაში (6.1) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$w(t) \le w_0 + \alpha \int_{t_0}^{t} w(s)ds = w_0 + r(t), t \in [t_0, b], \tag{6.2}$$

ამავე დროს გვექნება $r(t_0) = 0, r(t) \ge 0, \dot{r}(t) = \alpha w(t), t \in [t_0, b]$.

ამრიგად

$$\dot{r}(t) \le \alpha w_0 + \alpha r(t) \quad \text{ანუ} \quad \dot{r}(t) - \alpha r(t) \le \alpha w_0.$$

$e^{-\alpha(t-t_0)}$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$(\dot{r}(t) - \alpha w_0) e^{-\alpha(t-t_0)} \le \alpha w_0 e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

ეს უტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{d}{dt}(r(t)e^{-\alpha(t-t_0)}) \le \alpha w_0 e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

t_0 -დან t -მდე ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(r(s)e^{-\alpha(s-t_0)})ds \le \alpha w_0 \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s-t_0)}ds,$$

საიდანაც, $r(t_0) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$r(t)e^{-\alpha(t-t_0)} \le -w_0[e^{-\alpha(t-t_0)} - 1].$$

აქედან მივიღებთ

$$r(t) \le w_0 e^{\alpha(t-t_0)} - w_0.$$

ამ უტოლობის და (6.2)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$w(t) \le w_0 + r(t) \le w_0 e^{\alpha(t-t_0)} \le w_0 e^{\alpha(b-a)}.$$

ბ) ვთქვათ $t \in [a, t_0]$. შემოვიღოთ ფუნქცია $r(t) = \alpha \int_t^{t_0} w(s)ds$. ამ შემთხვევაში (6.1) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$w(t) \le w_0 + \alpha \int_t^{t_0} w(s)ds = w_0 + r(t), t \in [a, t_0], \qquad (6.3)$$

ამავე დროს გვექნება $r(t_0) = 0, r(t) \ge 0, \dot{r}(t) = -\alpha w(t), t \in [a, t_0]$.
ამრიგად,

$$\dot{r}(t) \ge -\alpha w - \alpha r(t) \quad \text{ანუ} \quad \dot{r}(t) + \alpha r(t) \ge -\alpha w_0.$$

$e^{\alpha(t-t_0)}$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ

$$(\dot{r}(t) + \alpha w_0) e^{\alpha(t-t_0)} \ge -\alpha w_0 e^{\alpha(t-t_0)}.$$

ეს უტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{d}{dt}(r(t)e^{\alpha(t-t_0)}) \ge -\alpha w_0 e^{\alpha(t-t_0)}.$$

t-დან t_0-მდე ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\int_t^{t_0} \frac{d}{ds}(r(s)e^{\alpha(s-t_0)})ds \ge -\alpha w_0 \int_t^{t_0} e^{\alpha(s-t_0)}ds,$$

საიდანაც , $r(t_0) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$-r(t)e^{\alpha(t-t_0)} \ge -w_0[1 - e^{\alpha(t-t_0)}].$$

აქედან მივიღებთ

$$r(t) \le w_0 e^{\alpha(t_0-t)} - w_0.$$

ამ უტოლობის და (6.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$w(t) \le w_0 + r(t) \le w_0 e^{\alpha(t-t_0)} \le w_0 e^{\alpha(b-a)}.$$

თუ $t_0 = a$, მაშინ უტოლობა მტკიცდება ა) შემთხვევის მსგავსად. თუ $t_0 = b$, მაშინ უტოლობა მტკიცდება ბ) შემთხვევის მსგავსად.

§ 7. ამონახსნის უწყვეტობა პარამეტრისა და საწყისი მონაცემების მიმართ

ამონახსნის უწყვეტობა პარამეტრის მიმართ. განვიხილოთ $\mu \in R$ პარამეტრზე დამოკიდებული დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), x \in R.$$

ვთქვათ $(t_0, x_0) \in D = \{(t, x) : a \le t \le b, x \in R\}$ მოცემული წერტილია. კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu), x \in R, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.1}$$

ამონახსნი აღვნიშნოთ $\varphi(t; \mu)$.

თეორემა 7.1. ვთქვათ ფუნქცია $f(t, x, \mu)$ უწყვეტია $[a,b] \times R \times R$ სიმრავლეზე და x, μ ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას

$$|f(t, x, \mu_1) - f(t, y, \mu_2)| \le L_1 |x - y| + L_2 |\mu_1 - \mu_2|, \forall (t, x, \mu_1), (t, y, \mu_2) \in [a,b] \times R \times R.$$

მაშინ ამონახსნი $\varphi(t; \mu), t \in [a,b]$ უწყვეტია μ პარამეტრის მიმართ. ეს უკანასკნელი ტოლფასია შემდეგის: ვთქვათ μ_0 ფიქსირებული პარამეტრია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ ნებისმიერი μ რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|\mu_0 - \mu| \le \delta$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\varphi(t; \mu_0) - \varphi(t; \mu)| \le \varepsilon, \forall t \in [a,b].$$

დამტკიცება. შედეგი 4.1-ის თანახმად ყოველი $\mu \in R$ პარამეტრისათვის (7.1) კოშის ამოცანის ამონახსნი $\varphi(t; \mu)$ განმარტებულია მონაკვეთზე $[a,b]$. შევაფასოთ სხვაობა

$$|\varphi(t; \mu_0) - \varphi(t; \mu)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s; \mu_0), \mu_0) ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s; \mu), \mu) ds \right| \le$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s; \mu_0), \mu_0) - f(s, \varphi(s; \mu), \mu)| ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} \{L_1 |\varphi(s; \mu_0) - \varphi(s; \mu)| + L_2 |\mu_0 - \mu|\} ds \right| \le$$

$$L_2 (b - a) |\mu_0 - \mu| + L_1 \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(t; \mu_0) - \varphi(t; \mu)| ds \right|.$$

გრონუოლის უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$|\varphi(t; \mu_0) - \varphi(t; \mu)| \le L_2 (b - a) |\mu_0 - \mu| e^{L_1 (b-a)}, \forall t \in [a,b].$$

თუ

$$\delta = \varepsilon / L_2 (b - a) e^{L_1 (b-a)},$$

მაშინ გვექნება

$$|\varphi(t; \mu_0) - \varphi(t; \mu)| \le \varepsilon.$$

ამონახსნის უწყვეტობა საწყისი მონაცემების მიმართ. კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), x \in R, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.2}$$

ამონახსნი აღვნიშნოთ $\varphi(t;t_0,x_0)$.

თეორემა 7.2. ვთქვათ ფუნქცია $f(t,x)$ უწყვეტია $[a,b]\times R$ სიმრავლეზე და x ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას

$$|f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y|, \forall (t,x),(t,y) \in [a,b]\times R.$$

მაშინ ამონახსნი $\varphi(t;t_0,x_0), t \in [a,b]$ უწყვეტია (t_0,x_0) საწყისი მონაცემების მიმართ. ეს უკანასკნელი ტოლფასია შემდეგის: ვთქვათ $(\hat{t}_0,\hat{x}_0)$ ფიქსირებული საწყისი მონაცემია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ ნებისმიერი $(t_0,x_0) \in D$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|\hat{t}_0 - t_0| \le \delta, |\hat{x}_0 - x_0| \le \delta$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0) - \varphi(t;t_0,x_0)| \le \varepsilon, \forall t \in [a,b].$$

დამტკიცება. შედეგი 4.1-ის თანახმად ყოველი $(t_0,x_0) \in D$ საწყისი მონაცემისთვის (7.2) კოშის ამოცანის ამონახსნი $\varphi(t;t_0,x_0)$ განმარტებულია მონაკვეთზე $[a,b]$. შევაფასოთ სხვაობა

$$|\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0) - \varphi(t;t_0,x_0)| = \left|\hat{x}_0 + \int_{\hat{t}_0}^{t} f(s,\varphi(s;\hat{t}_0,\hat{x}_0)ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s;t_0,x_0)ds\right| \le$$

$$|\hat{x}_0 - x_0| + \left|\int_{\hat{t}_0}^{t_0} |f(t,\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0))|dt\right| + L\left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(s;\hat{t}_0,\hat{x}_0) - \varphi(s;t_0,x_0)|ds\right|.$$

გრონუოლის უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$|\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0) - \varphi(t;t_0,x_0)| \le \left\{|\hat{x}_0 - x_0| + \left|\int_{\hat{t}_0}^{t_0} |f(t,\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0))|dt\right|\right\} e^{L(b-a)}, \forall t \in [a,b].$$

თუ $\delta > 0$ იმდენად მცირეა, რომ

$$|\hat{x}_0 - x_0| + \left|\int_{\hat{t}_0}^{t_0} |f(t,\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0))|dt\right| \le \varepsilon / e^{L(b-a)},$$

მაშინ გვექნება

$$|\varphi(t;\hat{t}_0,\hat{x}_0) - \varphi(t;t_0,x_0)| \le \varepsilon.$$

შენიშვნა 7.1. თეორემა 7.1-ის სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა μ პარამეტრი ვექტორია.

§ 8. თეორემა n რიგის არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ

განტოლებათა სისტემა ეწოდება ორი ან ორზე მეტი განტოლების ერთობლიობას. სისტემაში განტოლებების და უცნობი ფუნქციების

რაოდენობა ტოლია. სისტემის რიგი ეწოდება მასში შემავალი განტოლებების რიგების ჯამს.

განვიხილოთ n რიგის სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ ..... \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{8.1}$$

უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა ერთობლიობას $x_i = \varphi_i(t), i = \overline{1,n}$ ეწოდება სისტემის ამონახსნი, თუ გარკვეულ ინტერვალზე ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\dot{\varphi}_i(t) = f_i(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)), i = \overline{1,n}.$$

კოშის ამოცანა. ვთქვათ მოცემულია საწყისი მნიშვნელობები $t_0, x_1^0, ..., x_n^0$. იპოვეთ (8.1) სისტემის ისეთი ამონახსნი $x_i = \varphi_i(t), i = \overline{1,n}$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $\varphi_i(t_0) = x_0^i, i = \overline{1,n}$.

აღვნიშნავთ, რომ საწყის პირობაში შემავალი ტოლობების რაოდენობა სისტემის რიგის ტოლია.

განტოლებათა სისტემის ვექტორული ფორმით ჩაწერის მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები : R^n აღნიშნავს $x = (x_1, ..., x_n)$ ვექტორთა n განზომილებიან სივრცეს; $|x|$ სიმბოლო აღნიშნავს x ვექტორის მოდულს (სიგრძეს),

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 ; \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n), \quad f(t,x) = (f_1(t,x), ..., f_2(t,x)).$$

შემოღებული აღნიშვების საფუძველზე (4.1) სისტემა ვექტორული ფორმით ასე ჩაიწერება

$$\dot{x} = f(t,x), x \in R^n \quad . \tag{8.2}$$

$f(t,x), (t,x) \in D$ ფუნქციას ეწოდება განტოლების მარჯვენა მხარე,სადაც $D \subset R^{1+n}$ არეა (ღია სიმრავლე).

$x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ ვექტორ ფუნქციას ეწოდება (8.2) განტოლების ამონახსნი (a,b) ინტერვალზე, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადია ე.ი. მისი კოორდინატები $\varphi_i(t), i = \overline{1,n}$ უწყვეტად წარმოებადია;

ბ) $(t, \varphi(t)) \in D, t \in (a,b)$ და ადგილი აქვს ტოლობას $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), t \in (a,b).$

თუ (a,b) ინტერვალის ნაცვლად გვაქვს მონაკვეთი $[a,b]$, მაშინ $\dot{x}(a)$ აღნიშნავს a წერტილში მარცხნიდან წარმოებულს, ხოლო $\dot{x}(b)$ აღნიშნავს b წერტილში მარჯვნიდან წარმოებულს.

კოშის ამოცანა (8.2) განტოლებისათვის. მოცემული საწყისი მნიშვნელო ბისათვის $(t_0, x_0) \in D \subset R^{1+n}$ იპოვეთ ისეთი ამონახსნი $x = \varphi(t)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(t_0) = x_0$.

კოშის ამოცანა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), x \in R^n, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

თეორემა 8.1. ვთქვათ $f(t,x)$ ვექტორ ფუნქცია უწყვეტია $D \subset R^{1+n}$ არეზე და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას x-ის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x = \varphi(t), t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, სადაც $\delta_0 > 0$ და მისი სიდიდე დამოკიდებულია საწყის მნიშვნელობებზე, განტოლების მარჯვენა მხარეზე და ლიფშიცის მუდმივზე.

თეორემა 8.1 მტკიცდება თეორემა 3.1-ის ანალოგიურად.

თეორემა 8.2. ვთქვათ $f(t,x)$ ვექტორ ფუნქცია უწყვეტია $D \subset R^{1+n}$ არეზე და ნებისმიერ $K \subset D$ კომპაქტზე x ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის, t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

თეორემა 8.3. ვთქვათ $f(t,x)$ ვექტორ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ უწყვეტია $D \subset R^{1+n}$ არეზე. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის, t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

თეორემა 8.4. ვთქვათ $f(t,x)$ ვექტორ ფუნქცია უწყვეტია $D \subset R^{1+n}$ არეზე. მაშინ ნებისმიერი $(t_0, x_0) \in D$ წერტილისათვის, t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, არსებობს კოშის ამოცანის ერთი ამონახსნი მაინც.

§ 9. მაღალი რიგის განტოლების დაყვანა სისტემაზე და მათი ეკვივალენტობა. თეორემა ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ

განვიხილოთ n რიგის სკალარული განტოლება

$$x^{(n)} = g(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}), \tag{9.1}$$

რომლის მარჯვენა მხარე $g(t, x_1, ..., x_n)$ უწყვეტია $D \subset R^{1+n}$ არზე.

$x = \varphi(t), t \in (a,b)$ სკალარულ ფუნქციას ეწოდება (9.1) განტოლების ამონახსნი, თუ შესრულებულია პირობები:

ა) $\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია n რიგამდე ჩათვლით;

ბ) $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)) \in D, t \in (a,b)$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi^{(n)}(t) = g(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)), t \in (a,b).$$

კოშის ამოცანა. ვთქვათ $t_0, x_0, \dot{x}_0, ..., x_0^{(n-1)}$ მოცემული საწყისი მნიშვნელობებია თანაც $(t_0, x_0, \dot{x}_0, ..., x_0^{(n-1)}) \in D$. იპოვეთ ისეთი $x = \varphi(t)$ ამონახსი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას: $\varphi(t_0) = x_0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{x}_0, ..., \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$.

განტოლება (9.1) გარკვეული აღნიშვნების შემოტანით დაიყვანება სისტემაზე. ვთქვათ $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, ..., x_n = x^{(n-1)}$, მაშინ (9.1) განტოლება დაიყვანება შემდეგ სისტემაზე

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ ..... \\ \dot{x}_n = g(t, x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{9.2}$$

თეორემა 9.1. (9.1) და (9.2) განტოლებები ეკვივალენტურია ე.ი. თუ $\varphi(t)$ არის (9.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ ვექტორ ფუნქცია $(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),...,\varphi^{(n-1)}(t))$ იქნება (9.2) სისტემის ამონახსნი. თუ ვექტორ ფუქცია $(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$ არის (9.2) განტოლების ამონახსნი, მაშინ სკალარული ფუნქცია $\varphi_1(t)$ იქნება (9.1) განტოლების ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ $\varphi(t)$ არის (9.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ ფუნქციათა სისტემა $x_1=\varphi(t), x_2=\dot{\varphi}(t),...,x_n=\varphi^{(n-1)}(t)$ იქნება (9.2) განტოლების ამონახსნი.

ვთქვათ ფუნქციათა სისტემა $x_i=\varphi_i(t), i=\overline{1,n}$ ანუ ვექტორ ფუნქცია $((\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)))$ არის (9.2) განტოლების ამონახსნი. მაშინ გვექნება $\varphi_2(t)=\dot{\varphi}_1(t), \varphi_3(t)=\ddot{\varphi}_1(t),...,\varphi_n(t)=\varphi_1^{(n-1)}(t)$ და $\varphi_1^{(n)}(t)=g(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$.
აქედან ჩანს, რომ $\varphi_1(t)$ არის (9.1) განტოლების ამონახსნი.
თეორემა 9.1 საშუალებას გვაძლევს (9.1) განტოლებაზე გავავრცელოთ ყველა თეორემა, რომელიც სამართლიანია სისტემისათვის.

თეორემა 9.2. ვთქვათ ფუნქცია $g(t,x_1,...,x_n)$ უწყვეტია $D\subset R^{1+n}$ არეზე და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $x_i, i=\overline{1,n}$ ცვლადების მიმართ ე.ი.

$$|g(t,x_1,...x_n)-g(t,y_1,...,y_n)|\le L\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \forall (t,x_1,...,x_n),(t,y_1,...,y_n)\in D.$$

მაშინ ნებისმიერი წერტილისთვის $(t_0,x_0,\dot{x}_0,...,x_0^{(n-1)})\in D$ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x=\varphi(t), t\in[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$.

თეორემა 9.3. ვთქვათ ფუნქცია $g(t,x_1,...,x_n)$ უწყვეტია $D\subset R^{1+n}$ არეზე და ნებისმიერ $K\subset D$ კომპაქტზე აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $x_i, i=\overline{1,n}$ ცვლადების მიმართ. მაშინ ნებისმიერი წერტილისთვის $(t_0,x_0,\dot{x}_0,...,x_0^{(n-1)})\in D$ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x=\varphi(t)$, $t\in[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$.

თეორემა 9.4. ვთქვათ $g(t,x_1,...,x_n)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial g(t,x_1,...,x_n)}{\partial x_i}, i=\overline{1,n}$ უწყვეტია $D\subset R^{1+n}$ არეზე. მაშინ ნებისმიერი წერტილისთვის $(t_0,x_0,\dot{x}_0,...,x_0^{(n-1)})\in D$ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x=\varphi(t)$, $t\in[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$.

თეორემა 9.5. ვთქვათ ფუნქცია $g(t,x_1,...,x_n)$ უწყვეტია $D\subset R^{1+n}$ არეზე. მაშინ ნებისმიერი წერტილისათვის $(t_0,x_0,\dot{x}_0,...,x_0^{(n-1)})\in D$ კოშის ამოცანას აქვს ერთი ამონახსნი მაინც.

სავარჯიშო. 9.1 დაიყვანეთ განტოლება $x^{(3)}=2x+3\dot{x}+4\ddot{x}+5t^2$ სისტემაზე.

§ 10. n რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური ოპერატორის თვისებები

p სიმბოლოთი აღვნიშნოთ გაწარმოების ოპერაცია (ოპერატორი): $p \overset{def}{=} \frac{d}{dt}$, მაშინ $pz = \frac{d}{dt} z = \dot{z}$, $p^2 z = \ddot{z}, ..., p^n z = z^{(n)}$, $p^0 z = z.$ განვიხილოთ n რიგის მუდმივკოეფიციენტეიანი მრავალწევრი p ოპერატორის მიმართ: $L(p) = p^n + a_1 p^{(n-1)} + \cdots a_{n-1} p + a_n$, სადაც $a_i, i = \overline{1,n}$ ნამდვილი რიცხვებია. $L(p)$ ეწოდება n რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური ოპერატორი. ვთქვათ $z = z(t)$ მოცემული ფუნქციაა, მაშინ

$$L(p)z = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z .$$

თვისებები:

1. $L(p)$ წრფივი ოპერატორია,

$$L(p)(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha L(p) z_1 + \beta L(p) z_2;$$

2. $$(M(p) + N(p))z = M(p)z + N(p)z;$$

3. $$(M(p)N(p))z = (N(p)M(p))z \quad , \quad (M(p)N(p))z = M(p)(N(p)z);$$

4. $$L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}, \text{ სადაც } \lambda \in R.$$

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $pe^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, p^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}, ..., p^n e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}$. ამ ტოლობების გათვალისწინებით მიიღება დასამტკიცებელი ფორმულა.

5. ვთქვათ $f(t)$ ფუნქცია წარმოებადია n რიგამდე ჩათვლით, მაშინ ადგილი აქვს ფორმულას

$$L(p)(f(t)e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t).$$

დამტკიცება. ფორმულა დავამტკიცოთ, დიფერენციალური ოპერატორის რიგის მიმართ, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ვთქვათ $n = 1$, მაშინ $L(p) = p + a_1 p^0$, გვექნება

$$(p + a_1 p^0)(f(t)e^{\lambda t}) = p(f(t)e^{\lambda t}) + a_1 f(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} pf(t) + \lambda f(t)e^{\lambda t} + a_1 f(t)e^{\lambda t} =$$
$$e^{\lambda t}(pf(t) + \lambda f(t) + a_1 f(t)) = e^{\lambda t}(p + \lambda + a_1) f(t) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t)$$

ვთქვათ ფორმულა სამართლიანია $n-1$ რიგის დიფერენციალური ოპერატორი სათვის. ცნობილია რომ $L(p) = M(p)N(p)$, სადაც $M(p)$ და $N(p)$ მრავლწევრების ხარისხი ნაკლებია $n-1$-ზე. მივიღებთ

$$L(p)(e^{\lambda t} f(t)) = (M(p)N(p))(e^{\lambda t} f(t)) = M(p)[N(p)(e^{\lambda t} f(t))] = M(p)[e^{\lambda t} N(p + \lambda) f(t)] =$$
$$e^{\lambda t} M(p + \lambda) N(p + \lambda) f(t) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t).$$

შენიშვნა 10.1. ზემოთ დამტკიცებული ფორმულები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{(n-1)} + \cdots a_{n-1} p + a_n$ და λ კომპლექსური რიცხვია.

§ 11. n რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა

განტოლებას

$$L(p)z = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z = 0 \qquad (11.1)$$

ეწოდება წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლება. განტოლებას $L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ ეწოდება (11.1) განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება. (11.1) განტოლება დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ განტოლებათა სისტემაზე (**დაიყვანეთ,** იხ. § 9), ამიტომ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} L(p)z = 0, \\ z(t_0) = z_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0, ..., z^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)} \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $z(t)$, რომელიც განსაზღვრულია მთელ $R = (-\infty, \infty)$ ინტერვალზე (ღერძზე).

$c_i, i = \overline{1,n}$ მუდმივებზე (პარამეტრებზე) დამოკიდებულ ფუნქციას $z = \varphi(t, c_1, ..., c_n)$ ეწოდება (11.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ ნებისმიერი კერძო (კონკრეტული) $\varphi_0(t)$ ამონახსნისათვის არსებობს რიცხვების ერთადერთი ერთობლიობა $c_{i0}, i = \overline{1,n}$, ისეთი რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi_0(t) = \varphi(t, c_{10}, ..., c_{n0})$.

თეორემა 11.1. ვთქვათ $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ არის $L(\lambda) = 0$ მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვები (მათ შორის შეიძლება იყოს კომპლექსურიც). მაშინ ფუნქციები $z_i(t) = e^{\lambda_i t}, i = \overline{1,n}$ არის (11.1) განტოლების ამონახსნები. ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $z = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t)$, სადაც $c_i, i = \overline{1,n}$ ნებისმიერი მუდმივებია.

დამტკიცება. $L(p)$ ოპერატორის მე-4 თვისებიდან გამომდინარე გვაქვს $L(p)e^{\lambda_i t} = L(\lambda_i)e^{\lambda_i t} = 0$. ამრიგად $z_i(t) = e^{\lambda_i t}, i = \overline{1,n}$ ფუნქციები არის (11.1) განტოლების ამონახსნები. $L(p)$ ოპერატორი წრფივია, ამიტომ წრფივი კომბინაციაც $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t)$ იქნება (11.1) განტოლების ამონახსნი. ახლა დავამტკიცოთ, რომ $z = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t)$ არის ზოგადი ამონახსნი. ვთქვათ $\varphi_0(t)$ კერძო ამონახსნია. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $z_0 = \varphi_0(0), \dot{z}_0 = \dot{\varphi}_0(0), ..., z_0^{(n-1)} = \varphi_0^{(n-1)}(0)$. განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $c_i, i = \overline{1.n}$ უცნობების მიმართ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(0) = z_0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{z}_i(0) = \dot{z}_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (11.2)$$

(11.2) განტოლების მთავარი დეტერმინანტია

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1(0),\ldots\ldots,z_n(0) \\ \dot{z}_1(0),\ldots\ldots,\dot{z}_n(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{(n-1)}(0),\ldots\ldots z_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} .$$

ვთქვათ $\Delta = 0$, მაშინ სტრიქონ-ვექტორები $e_i = (z_1^{(i)}(0),\ldots,z_n^{(i)}(0)), i = \overline{0,n-1}$, სადაც იგულისხმება რომ $z_1^{(0)}(0) = z_1(0),\ldots,z_n^{(0)}(0) = z_0(0)$, არიან წრფივად დამოკიდებული. ამრიგად, არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი რიცხვები $b_i, i = \overline{0,n-1}$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\sum_{i=0}^{n-1} b_i e_i = 0$. ეს ტოლობა გაშლილი სახით (კოორდინატებში) ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} b_i z_1^{(i)}(0) = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} b_i z_2^{(i)}(0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=0}^{n-1} b_i z_n^{(i)}(0) = 0. \end{cases} \qquad (11.3)$$

$n-1$ რიგის დიფერენციალური $M(p) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$ ოპერატორის გამოყენებით (11.3) სისტემის j-ური $(j = \overline{1,n})$ განტოლება ასე ჩაიწერება

$$M(p)z_j(t)|_{t=0} = 0.$$

ვისარგებლოთ დიფერენციალური ოპერატორის მე-4 თვისებით და იმით, რომ $z_j(t) = e^{\lambda_j t}$ მივიღებთ

$$M(p)z_j(t)|_{t=0} = M(p)e^{\lambda_j t}|_{t=0} = M(\lambda_j)e^{\lambda_j t}|_{t=0} = M(\lambda_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

ამრიგად, $n-1$ ხარისხის $M(\lambda)$ მრავალწევრს აქვს n რაოდენობის ნოლი. ეს ეწინააღმდეგება ალგებრის ცნობილ დებულებას (n ხარისხის პოლინომს აქვს n რაოდენობის ნოლი). ამრიგად $\Delta \neq 0$, ამიტომ განტოლებათა სისტემას (8.2) აქვს ერთადერთი ამონახსნი $c_{i0}, i = \overline{1,n}$. ამონახსნები $z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} z_i(t)$ და $\varphi_0(t)$ აკმაყოფილებენ ერთნაირ საწყის პირობებს

$$z_0(0) = \varphi_0(0) = z_0, \dot{z}_0(0) = \dot{\varphi}_0(0) = \dot{z}_0,\ldots, \quad z_0^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

ერთადერთობის გამო მივიღებთ $\varphi_0(t) \equiv z_0(t)$.

ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა ეწოდება $L(p)z = 0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ $\varphi_i(t), i = \overline{1,n}$ ამონახსნთა ერთობლიობას. ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაში ამონახსნების რაოდენობა განტოლების რიგის ტოლია. ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაში შემავალი ამონახსნების წრფივი კომბინაცია არის განტოლების ზოგადი ამონახსნი. თუ $L(\lambda) = 0$ მახასიათებელი

განტოლების ფესვები $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ მარტივია, მაშინ $e^{\lambda_i t}, i=\overline{1,n}$ ამონახსნთა ერთობლიობა არის ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა.

გამოსახულებას $\sum_{i=1}^{r} P_i(t)e^{\lambda_i t}$, სადაც $\lambda_i, i=\overline{1,r}$ ერთმანეთისგან განსხვავებული რიცხვებია,ხოლო $P_i(t)$ პოლინომია, ეწოდება კვაზი-პოლინომი. თუ $\sum_{i=1}^{r} P_i(t)e^{\lambda_i t}=0$, მაშინ $P_i(t)=0, i=\overline{1,r}$.

თეორემა 11.2. ვთქვათ $\lambda_i, i=\overline{1,m}$ არის $L(\lambda)=0$ გატოლების ფესვები, შესაბამისად, ჯერადობით $k_i, i=\overline{1,m}$ ($\sum_{i=1}^{m} k_i = n$). მაშინ ფუნქციათა ერთობლიობა

$z_1 = e^{\lambda_1 t}$, $z_2 = te^{\lambda_1 t}$, . . . , $z_{k_1} = t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}$, . . . , $z_{k_1+\ldots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m t}$, . . . , $z_n = t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}$

არის განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა. ზოგადი ამონახსნი მოიცემა $z=\sum_{i=1}^{n} c_i z_i = \sum_{i=1}^{m} P_i(t)e^{\lambda_i t}$ კვაზი-პოლინომის სახით. (**დაადგინეთ $P_i(t)$ პოლინომის სახე და ხარისხი**)

მაგალითი 11.1. იპოვეთ $\ddot{z}-3\dot{z}+2z=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: ვიპოვოთ ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა. ჩვენს შემთხვევაში $L(p)=p^2-3p+2$, ამიტომ მახასიათებელი განტოლება იქნება $\lambda^2-3\lambda+2=0$, $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა e^t, e^{2t}, ზოგადი ამონახსნია $z=c_1e^t+c_2e^{2t}$.

მაგალითი 11.2. იპოვეთ $\ddot{z}-6\dot{z}+9z=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. $\lambda^2-6\lambda+9=0$, $\lambda_1=\lambda_2=3$. ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა e^{3t}, te^{3t}. ზოგადი ამონახსნია $z=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$.

მაგალითი 11.3. იპოვეთ $\ddot{z}-2\dot{z}+2z=0$ განტოლების ნამდვილი ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. $\lambda^2-2\lambda+2=0, \lambda_1=1+i, \lambda_2=1-i$. ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა $e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}$. ეს ფუნქციები კომპლექსურია და მათი წრფივი კომბინაცია იძლევა კომპლექსურ ზოგად ამონახსნს. ნამდვილი ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ ნამდვილ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. აღვნიშნავთ, რომ თუ $u(t)+iv(t)$ კომპლექსური ფუნქცია არის $L(p)z=0$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ $u(t)$ და $v(t)$ ფუნქციებიც ამონახსნებია.

ვისარგებლოთ ეილერის ფორმულებით

$$e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i\sin t), \quad e^{(1-i)t} = e^t(\cos t - i\sin t).$$

ფუნქციები $e^t\cos t$ და $e^t\sin t$ არის განტოლების ამონახსნები და ქმნიან ნამდვილ ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ზოგადი ნამდვილი ამონახსნია $z=e^t(c_1\cos t+c_2\sin t)$.

§ 12. n რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

n რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება განტოლებას

$$L(p)z = f(t), \qquad (12.1)$$

სადაც $L(p)$ არის n რიგის დიფერენციალური ოპერატორი, ხოლო $f(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა.
განტოლებას

$$L(p)z = 0 \qquad (12.2)$$

ეწოდება (12.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება.
ვთქვათ $z_i, i = \overline{1,n}$ არის (12.2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ $z_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$ იქნება ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თეორემა 12.1. ვთქვათ $\varphi_i, i = \overline{1,r}$ არის $L(p)z = f_i(t)$, $i = \overline{1,r}$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ $\sum_{i=1}^{r} \varphi_i$ იქნება $L(p)z = \sum_{i=1}^{r} f_i(t)$ განტოლების ამონახსნი.

თეორემა 12.2. ვთქვათ φ_1 არის (12.1) განტოლების ამონახსნი, ხოლო φ_2 არის (12.2) განტოლების ამონახსნი. მაშინ $\varphi_1 + \varphi_2$ იქნება (12.1) განტოლების ამონახსნი. ეს თეორემები გამომდინარეობს $L(p)$ ოპერატორის წრფივობიდან. (**დარწმუნდით**)

თეორემა 12.3. ვთქვათ φ_0 არის (12.1) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ (12.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $z = \varphi_0 + z_0$, სადაც $z_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$ არის (12.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

დამტკიცება. ფუნქცია $\varphi_0 + z_0$ არის (12.1) განტოლების ამონახსნი: $L(p)(\varphi_0 + z_0) = L(p)\varphi_0 + L(p)z_0 = f(t)$. ვთქვათ φ_1 არის (12.1) განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ სხვაობა $\varphi_1 - \varphi_0$ იქნება (12.2) განტოლების ამონახსნი. მართლაც, $L(p)(\varphi_1 - \varphi_0) = L(p)\varphi_1 - L(p)\varphi_0 = f(t) - f(t) = 0$. ზოგადი ამონახსნის განმარტების თანახმად არსებობს რიცხვების ერთადერთი ერთობლიობა $c_{i0}, i = \overline{1,n}$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi_1 - \varphi_0 = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} z_i$. ამრიგად $\varphi_1 = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} c_{i0} z_i$.

მაგალითი 12.1. იპოვეთ $\ddot{z} - 2\dot{z} - 3z = -4e^t$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.
ამოხსნა. $\varphi_0(t) = e^t$ არის განტოლების კერძო ამონახსნი. ვიპოვოთ ერთგვაროვანი განტოლების $\ddot{z} - 2\dot{z} - 3z = 0$ ზოგადი ამონახსნი. გვექნება $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია $c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$, ხოლო არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + e^t$.

§ 13. კვაზიპოლინომური არაერთგვაროვნება. კერძო ამონახსნის მოძებნის ხერხი

განვიხილოთ განტოლება

$$L(p)z = P_n(t)e^{\lambda_0 t} \quad , \qquad (13.1)$$

სადაც $P_n(t)$ არის n ხარისხის პოლინომი.

თეორემა 13.1. ვთქვათ λ_0 არის $L(\lambda) = 0$ განტოლების k ჯერადი ფესვი. მაშინ (13.1) განტოლების კერძო ამონახსნია $t^k Q_n(t)e^{\lambda_0 t}$ ფუნქცია, სადაც $Q_n(t)$

n ხარისხის პოლინომია, რომლის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ტოლობას $L(p+\lambda_0)[t^k Q_n(t)] = P_n(t)$.

დამტკიცება. (13.1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ

$$\varphi_0(t) = t^k Q_n(t) e^{\lambda_0 t}$$

ფუნქციის სახით, სადაც $Q_n(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \cdots + b_{n-1} t + b_n$ არის პოლინომი უცნობი კოეფიციენტებით. ჩავსვათ $\varphi_0(t)$ ფუნქცია (13.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$L(p)[t^k Q_n(t) e^{\lambda_0 t}] = P_n(t) e^{\lambda_0 t}.$$

დიფერენციალური ოპერატორის მე-5 თვისების გამოყენებით და $e^{\lambda_0 t}$-ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ

$$L(p+\lambda_0)[t^k Q_n(t)] = P_n(t). \qquad (13.2)$$

λ_0 არის k ჯერადობის ფესვი, ამიტომ $L(p) = M(p)(p-\lambda_0)^k$ და $M(\lambda_0) \neq 0$. ამრიგად $L(p+\lambda_0) = M(p+\lambda_0)p^k$, ამიტომ (13.2) ტოლობიდან გვექნება $M(p+\lambda_0)p^k[t^k Q_n(t)] = P_n(t)$.

ვთქვათ $P_n(t) = a_0 t^n + P^*_{n-1}(t)$, $Q_n(t) = b_0 t^n + Q^*_{n-1}(t)$ და $M(p+\lambda_0) = M(\lambda_0) + M^*(p)p$ (ასეთი სახით ჩაწერა ყოველთვის შესაძლებელია). მივიღებთ

$$[M(\lambda_0)p^k + M^*(p)p^{k+1}][b_0 t^{n+k} + t^k Q^*_{n-1}(t)] = a_0 t^n + P^*_{n-1}(t).$$

შემდეგ

$$b_0 M(\lambda_0)p^k(t^{n+k}) + M(\lambda_0)p^k(t^k Q^*_{n-1}(t)) + M^*(p)p^{k+1}[b_0 t^{n+k} + t^k Q^*_{n-1}(t)] = a_0 t^n + P^*_{n-1}(t). \quad (13.3)$$

ცხადია, რომ

$$b_0 M(\lambda_0)p^k(t^{n+k}) = [b_0 M(\lambda_0)(n+k)(n+k-1)\times\cdots\times(n+1)]\, t^n.$$

პოლინომები ტოლია, თუ t-ს ერთნაირი ხარისხების წინ მდგომი კოეფიციენტები ტოლია. აქედან გამომდინარე გვექნება ტოლობა

$$b_0 M(\lambda_0)(n+k)(n+k-1)\times\cdots\times(n+1) = a_0,$$

საიდანაც ვიპოვით b_0 კოეფიციენტს.

(13.3) ტოლობიდან მივიღებთ

$$M(\lambda_0)p^k(t^k Q^*_{n-1}(t)) + M^*(p)p^{k+1}(t^k Q^*_{n-1}(t) = P^*_{n-1}(t) - M^*(p)p^{k+1}(b_0 t^{n+k}). \quad (13.4)$$

$L(p+\lambda_0) = M(p+\lambda_0)p^k$ და $M(p+\lambda_0) = M(\lambda_0) + M^*(p)p$ ტოლობების გათვალისწინებით (13.4)-დან გამომდინარეობს

$$L(p+\lambda_0)(t^k Q^*_{n-1}(t)) = P^*_{n-1}(t) - M^*(p)p^{k+1}(b_0 t^{n+k}).$$

აქედან ანალოგიური გზით ვიპოვით b_1 და ა.შ.

შენიშვნა 13.1. განტოლების

$$L(p)z = R_n(t)e^{\lambda_1 t} + S_m(t)e^{\lambda_2 t} \qquad (13.5)$$

კერძო ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია მოვძებნოთ $L(p)z = R_n(t)e^{\lambda_1 t}$ და $L(p)z = S_m(t)e^{\lambda_2 t}$ განტოლებების კერძო ამონახსნები და შემდეგ შევკრიბოთ.

შემთხვევა $L(p)z = e^{\alpha t}(M_n(t)\cos\beta t + N_k(t)\sin\beta t)$ დაიყვანება (13.5) სახის განტოლებაზე

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}, \quad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2},$$

ფორმულების გამოყენებით.

§ 14. მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი

მუდმვთა ვარიაციის მეთოდი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ზოგადი არაერთგვაროვანი

$$L(p)z = f(t) \qquad (14.1)$$

განტოლების კერძო ამონახსნი, სადაც $f(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა.

ვთქვათ $z_i = z_i(t), i = \overline{1,n}$ არის $L(p)z = 0$ განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. (14.1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)z_i \qquad (14.2)$$

ფუნქციის სახით (მეთოდის არსი).

საჭიროა შევარჩიოთ $c_i(t), i = \overline{1,n}$ ფუნქციები (კოეფიციენტები) ისე, რომ (14.2) ფუნქცია გახდეს (14.1) განტოლების ამონახსნი.

განვიხილოთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $\dot{c}_i(t), i = \overline{1,n}$ უცნობების მიმართ

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)z_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\dot{z}_i = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)z_i^{(n-1)} = f(t). \end{cases} \qquad (14.3)$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ $\dot{c}_i(t), i = \overline{1,n}$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (14.3) სისტემას, მაშინ (14.2) იქნება (14.1) განტოლების ამონახსნი.

მართლაც, (14.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$pz = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)z_i + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\dot{z}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\dot{z}_i, \quad p^2 z = p(\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\dot{z}_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\ddot{z}_i, \ldots,$$

$$p^{n-1}z = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)z_i^{(n-1)}, \; p^n z = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)z_i^{(n)} + f(t).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$L(p)z = L(p)(\sum_{i=1}^{n} c_i(t)z_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)L(p)z_i + f(t) = f(t).$$

ვაჩვენოთ, რომ (14.3) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახნი. მისი მთავარი დეტერმინანტია

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} z_1(t),....., z_n(t) \\ \dot{z}_1(t),....., \dot{z}_n(t) \\ ..... \\ z_1^{(n-1)}(t),....., z_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

დავამტკოცოთ, რომ ყოველი t-თვის $\Delta(t) \neq 0$. ვთქვათ რაიმე t_0 წერტილში $\Delta(t_0) = 0$, მაშინ სვეტ-ვექტორები $e_i = (z_i^{(0)}(t_0),..., z_i^{(n-1)}(t_0))^T, i = \overline{i,n}$, სადაც $z_i^{(0)}(t_0) = z_i(t_0)$, არიან წრფივად დამოკიდებული. ამრიგად, არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი რიცხვები $b_i, i = \overline{1,n}$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\sum_{i=1}^{n} b_i e_i = 0$ ე.ი. $\sum_{i=1}^{n} b_i z_i^{(j)}(t_0) = 0, j = \overline{0.n-1}$. ფუნქცია $z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i(t)$ არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი და აკმაყოფილებს საწყის პირობას $z_0(t_0) = 0$, $\dot{z}_0(t_0) = 0$, . . . , $z_0^{(n-1)}(t_0) = 0$. ერთადერთობის გამო $z_0(t) = 0$ ყოველი t-თვის, ეს ეწინააღმდება $z_i, i = \overline{1,n}$ სისტემის ფუნდამენტურობას. (14.3) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\dot{c}_i(t) = \psi_i(t), i = \overline{1,n}$. ამ ტოლობის ინტეგრებით ვიპოვით $c_i(t)$-ს , რომლის ჩასმით (14.2)-ში მივიღებთ კერძო ამონახსნს.

§ 15. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი

განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (15.1)$$

სადაც $a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$ ნამდვილი რიცხვებია.
(15.1) განტოლება ვექტორული ფორმით ასე ჩაიწერება

$$\dot{x} = Ax, x \in R^n \quad , \qquad (15.2)$$

სადაც $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ არის მატრიცი განზომილებით $n \times n$, R^n ამ პარაგრაფში არის $x = (x_1,..., x_n)^T$ სვეტ-ვექტორების სივრცე (T აღნიშნავს ტრანსპონირებას) Ax ნიშნავს A მატრიცის და x სვეტ-ვექტორის ნამრავლს.
კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, x \in R^n, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია მთელ ღერძზე. თუ $x_0 = 0_n = (0,0,...,0)^T \in R^n$, მაშინ მისი შესაბამისი ამონახსნია $x(t) \equiv 0_n$. ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი არანულოვანი ამონახსნი $x(t)$ აკმაყოფილებს პირობას $x(t) \neq 0_n$ ნებისმიერი t-თვის.

(15.2) განტოლების არანულოვანი ამონახსნი ვეძებოთ

$$x = he^{\lambda t} \tag{15.3}$$

ვექტორ-ფუნქციის სახით, სადაც $h = (h_1,...,h_n)^T$.

ფუნქცია (15.3) ჩავსვათ (15.2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\lambda he^{\lambda t} = Ahe^{\lambda t}.$$

$e^{\lambda t}$-ზე გაყოფის შედეგად გვექნება

$$Ah = \lambda h. \tag{15.4}$$

$h \neq 0_n$ ვექტორს და λ რიცხვს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (15.4) ტოლობას, ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი და საკუთრივი რიცხვი.

(15.4) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$(A - \lambda E)h = 0_n, \tag{15.5}$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა.

(15.5) განტოლება ჩავწეროთ სისტემის სახით

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)h_1 + a_{12}h_2 + \cdots + a_{1n}h_n = 0 \\ a_{21}h_1 + (a_{22} - \lambda)h_2 + \cdots + a_{2n}h_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}h_1 + a_{n1}h_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)h_n = 0 \end{cases} \tag{15.6}$$

(15.6) სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნი $h = (h_1,...,h_n)^T$, თუ

$$\det(A - \lambda I) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{15.7}$$

(15.7) განტოლებას ეწოდება (15.2) განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება.

ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ (15.3) ფუნქცია აკმაყოფილებს (15.2) განტოლებას, თუ h და λ აკმაყოფილებენ (15.6) და (15.7) განტოლებას.

თეორემა 15.1. ვთქვათ $\lambda_i, i = \overline{1,k}$ მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვებია, მაშინ მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები $h^i, i = \overline{1,k}$ წრფივად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით k-ს მიმართ. თუ $k=1$, მაშინ მტკიცებულება ცხადია. ვთქვათ თეორემა სამართლიანია $k-1$ ვექტორისთვის და დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა k ვექტორისთვის. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda_k \neq 0$. განვიხილოთ ტოლობა

$$\alpha_1 h^1 + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_k h^k = 0_n . \qquad (15.8)$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A მატრიცზე და λ_k რიცხვზე, მივიღებთ.

$$\alpha_1 \lambda_1 h^1 + \alpha_2 \lambda_2 h^2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k h^k = 0_n ,$$
$$\lambda_k(\alpha_1 h^1 + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_k h^k) = 0_n .$$

გამოკლების შემდეგ გვექნება

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)h^1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)h^2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)h^{k-1} = 0_n \ .$$

$h^i, i = \overline{1,k-1}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $\alpha_i = 0, i = \overline{1,k-1}$. ამის გათვალისწინებთ (15.8)-დან გამომდინარეობს $\alpha_k h^k = 0_n$ ე.ი. $\alpha_k = 0$.

$h^i, i = \overline{1,k}$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობა დამტკიცებულია.

თეორემა 15.2. ვთქვათ $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ მახასიათებელი განტოლების მარტივი ფესვებია, ხოლო $h^i, i = \overline{1,n}$ არის (15.6) განტოლების შესაბამისი არანულოვანი ამონახსნები (საკუთრივი ვექტორები). მაშინ $h^i e^{\lambda_i t}, i = \overline{1,i}$ ფუნქციები ქმნიან ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. (15.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i h^i e^{\lambda_i t} .$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ტოლობა

$$\alpha_1 h^1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 h^2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \alpha_n h^2 e^{\lambda_n t} = 0_n$$

ვექტორები $h^i, i = \overline{1,n}$ წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $\alpha_i e^{\lambda_i t} = 0, i = \overline{1,n}$. აქედან გამომდინარეობს $\alpha_i = 0, i = \overline{1,n}$. ამრიგად, ამონახსნები $h^i e^{\lambda_i t}, i = \overline{1,n}$ ქმნიან ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ვთქვათ $\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))^T$ არის (15.2) განტოლების ნებისმიერი ფიქსირებული ამონახსნი. ვექტორი $\varphi(0) \in R^n$, ამიტომ არსებობს რიცხვთა ერთადერთი ერთობლიობა $c_{i0}, i = \overline{1,n}$ ისეთი რომ, ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi(0) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} h^i$. ამონახსნები $x_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} h^i e^{\lambda_i t}$ და $\varphi(t)$ აკმაყოფილებენ პირობას $x_0(0) = \varphi(0)$. ერთადერთობის გამო $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{10} h^i e^{\lambda_i t}$.

შენიშვნა 15.1. ჯერადი ფესვების შემთხვევა მაგალითის სახით განხილულია ქვემოთ.

მაგალითი 15.1. იპოვეთ სისტემის

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$(2-\lambda)(4-\lambda)-3=0$, $\lambda^2-6\lambda+5=0$, $\lambda_1=1, \lambda_2=5.$

ვიპოვოთ λ_1 და λ_2-ის შესაბამისი ვექტორები $h^1=(h_1^1,h_2^1)^T$ და $h^2=(h_1^2,h_2^2)^T$.

$$\begin{cases}(2-\lambda_1)h_1^1+h_1^2=0\\ 3h_1^1+(4-\lambda_1)h_1^2=0\end{cases}, \begin{cases}h_1^1+h_2^1=0\\ 3h_1^1+3h_1^1=0\end{cases}, \quad h_1^1=-h_2^1.$$

ვთქვათ $h_2^1=-1$, მაშინ $h_1^1=1$. ამრიგად $\lambda_1=1$ შესაბამისი ვექტორია $h^1=(1,-1)$.

$$\begin{cases}-3h_1^2+h_2^2=0\\ 3h_1^2-h_2^2=0\end{cases}, \quad h_2^2=3h_1^2, \quad h_1^2=1, h=h_2^2=3.$$

$\lambda_2=5$ შესაბამისი ვექტორია $h^2=(1,3)$.

განტოლების ზოგადი ამონახსნი სკალარული ფორმით იქნება

$$\begin{cases}x_1=c_1e^t+c_2e^{5t},\\ x_2=-c_1e^t+3c_2e^{5t}.\end{cases}$$

მაგალითი 15.2. იპოვეთ სისტემის

$$\begin{cases}\dot{x}_1=4x_1-x_2\\ \dot{x}_2=5x_1+2x_2\end{cases}$$

ნამდვილი ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0, \lambda^2-6\lambda+13=0, \quad \lambda_1=3+2i, \lambda_2=3-2i.$$

ვიპოვოთ λ_1 და λ_2 შესაბამისი ვექტორები $h^1=(h_1^1,h_2^1)^T$ და $h^2=(h_1^2,h_2^2)^T$.

$$\begin{cases}(4-\lambda_1)h_1^1-h_1^2=0\\ 5h_1^1+(2-\lambda_1)h_1^2=0\end{cases}, \begin{cases}(1-2i)h_1^1-h_2^1=0\\ 5h_1^1-(1+2i)h_2^1=0\end{cases}, \begin{cases}(1-2i)h_1^1-h_2^1=0\\ (1-2i)h_1^1-h_2^1=0\end{cases}, \quad h_2^1=(1-2i)h_1^1.$$

ავიღოთ $h_1^1=1$, მაშინ $h_2^1=1-2i$. ამრიგად $h^1=(1,1-2i)^T$.

$$\begin{cases}(1+2i)h_1^2-h_2^2=0\\ 5h_1^2-(1-2i)h_2^2=0\end{cases}, \quad h_2^2=(1+2i)h_1^2 \quad , h_1^2=1, h_2^2=1+2i.$$

$\lambda_2=3-2i$ შესაბამისი ვექტორია $h^2=(1,1+2i)^T$.

ამონახსნები $h^1e^{\lambda_1 t}$ და $h^2e^{\lambda_2 t}$ ურთიერთ შეუღლებულია , ამიტომ ისინი იძლევიან ერთნაირ ორ ნამდვილ ამონახსნს, რომელთა წრფივი კომბინაცია იქნება ზოგადი ნამვილი ამონახსნი.

$$h^1e^{\lambda_1 t}=(1,1-2i)e^{(3+2i)t}= e^{3t}(1,1-2i)e^{2it}=e^{3t}(\cos 2t+i\sin 2t,(1-2i)(\cos 2t+i\sin 2t))=$$
$$e^{3t}(\cos 2t+i\sin 2t,\cos 2t+2\sin 2t+i(\sin 2t-2\cos 2t))=e^{3t}(\cos 2t,\cos 2t+2\sin 2t)+$$

$$ie^{3t}(\sin 2t, \sin 2t - 2\cos 2t).$$

ფუნქციები

$$\begin{cases} x_1^1 = e^{3t}\cos 2t \\ x_2^1 = e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^2 = \sin 2t \\ x_2^2 = \sin 2t - 2\cos 2t \end{cases}$$

განტოლების ამონახსნებია, ხოლო

$$\begin{cases} x_1 = e^{3t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) \\ x_2 = e^{3t}[c_1(\cos 2t + 2\sin 2t) + c_2(\sin 2t - 2\cos 2t)] \end{cases}$$

არის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 15.3 (ჯერდი ფესვების შემთხვევა). იპოვეთ სისტემის

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლება

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (1-\lambda)(5-\lambda) = -4, \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$\begin{cases} x_1 = (a+bt)e^{3t} \\ x_2 = (c+dt)e^{3t} \end{cases}$$

ეს ფუნქციები შევიტანოთ განტოლებაში მივიღებთ

$$\begin{cases} 3(a+bt)e^{3t} + be^{3t} = (a+bt)e^{3t} - 2(c+dt)e^{3t} \\ 3(c+dt)e^{3t} + de^{3t} = 2(a+bt)e^{3t} + 5(c+dt)e^{3t} \end{cases}$$

შევკვეცოთ e^{3t}-ზე და შევკრიბოთ მსგავსი წევრები, გვექნება

$$\begin{cases} 3a + b + 3bt = a - 2c + (b-2d)t \\ 3c + d + 3dt = 2a + 5c + (2b+5d)t \end{cases}$$

აქედან გამომდინარობს

$$\begin{cases} 3a + b = a - 2c \\ 3b = b - 2d \\ 3c + d = 2a + 5c \\ 3d = 2b + 5d \end{cases}, \quad \begin{cases} 2a + b = -2c \\ b = -d \\ 2a - d = -2c \\ b = -d \end{cases}, \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}(d - 2c) \\ b = -d \end{cases}$$

ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\begin{cases} x_1 = [\frac{1}{2}(d-2c) - dt]e^{3t} \\ x_2 = (c+dt)e^{3t} \end{cases}$$

§ 16. წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. ზოგადი ამონახსნის აგება

განვიხილოთ ერთგვაროვანი ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \qquad (16.1)$$

სადაც $a_{ij}(t), i, j = \overline{1,n}$ ფუნქციები უწყვეტია $I = (a,b)$ ინტერვალზე.
(16.1) განტოლება ვექტორული ფორმით ასე ჩაიწერება

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n \quad , \qquad (16.2)$$

სადაც $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$.
ნებისმიერი $t_0 \in I$ და $x_0 \in R^n$ საწყისი მნიშვნელობებისათვის კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, x \in R^n, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

აქვს I - ზე განმარტებულ ერთადერთი ამონახსნი.

1) ვთქვათ $\varphi(t)$ ვექტორ-ფუნქცია (16.2) განტოლების ამონახსნია და $\varphi(t_0) = 0_n$ მაშინ $\varphi(t) \equiv 0_n$.
2) ვთქვათ $\varphi_i(t), i = \overline{1,r}$ განტოლების ამონახსნებია, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $\sum_{i=1}^{r} c_i\varphi_i(t)$ აგრეთვე ამონახსნია.
3) ვთქვათ $\varphi_i(t), i = \overline{1,r}$ განტოლების ამონახსნებია. თუ რაიმე $t_1 \in I$ მომენტისათვის ვექტორები $\varphi_i(t_1)$ $i = \overline{1,r}$, წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ფუნქციათა სისტემა $\varphi_i(t), i = \overline{1,r}$ იქნება წრფივად დამოკიდებული.

დამტკიცება. არსებობს ერთდროულად ნულის არატოლი რიცხვები $\alpha_i, i = \overline{1,r}$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\varphi_i(t_1) = 0_n$. ფუნქცია $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\varphi_i(t)$ არის განტოლების ამონახსნი და აკმაყოფილებს პირობას $\varphi(t_1) = 0_n$. ამიტომ $\varphi(t) \equiv 0_n$. თვისება დამტკიცებულია.

4) $\varphi_i(t), i=\overline{1,r}$ ამონახსნების წრფივად დამოუკიდებლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი ფიქსირებული $t_1 \in I$-თვის ვექტორები $\varphi_i(t_1), i=\overline{1,r}$ იყოს წრფივად დამოუკიდებელი **(დაამტკიცეთ).**

$\varphi_i(t), i=\overline{1,n}$ ამონახსნთა ერთობლიობას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ ისინი წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემა 16.1. (16.2) გატოლებათა სისტემისათვის არსებობს ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა.

დამტკიცება. ვთქვათ $e_i \in R^n, i=\overline{1,n}$ ვექტორთა სისტემა სივრცის ბაზისია, ხოლო $\varphi_i(t)$ კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, x \in R^n, \\ x(t_0) = e_i \end{cases}$$

ამონახსნი.

ვთქვათ $\varphi_i(t), i=\overline{1,n}$ ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ ვექტორები $\varphi_i(t_0) = e_i, i=\overline{1,n}$ იქნება წრფივად დამოკიდებული. ეს ეწინააღმდეგება $e_i \in R^n, i=\overline{1,n}$ ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობას . ამრიგად $\varphi_i(t), i=\overline{1,n}$ ამონახსნები ქმნიან ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემას.

თეორემა 16.2. ვთქვათ $\varphi_i(t), i=\overline{1,n}$ ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა, მაშინ ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\varphi_0(t)$ ნებისმიერი კერძო ამონახსნია და $t_0 \in I$ ფიქსირებული წერტილია. ვექტორები $\varphi_i(t_0), i=\overline{1,n}$ ქმნიან R^n სივრცის ბაზისს, ამიტომ $\varphi_0(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} \varphi_i(t_0)$. $x_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} \varphi_i(t)$ და $\varphi_0(t)$ ამონახსნები აკმაყოფილებენ პირობას $\varphi_0(t_0) = x_0(t_0)$. აქედან გამომდინარეობს ტოლობა $\varphi_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0} \varphi_i(t)$.

§ 17. ვრონსკის დეტერმინანტი და ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი სისტემისათვის

ვთქვათ $\varphi_i(t) = (\varphi_{1i}(t), ..., \varphi_{ni}(t))^T$, $i=\overline{1,n}$, $t \in I = (a,b)$, არის

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n$$

სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

$$\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{i,j}^{n} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t).....\varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t).....\varphi_{21}(t) \\ ..... \\ \varphi_{n1}(t).....\varphi_{n1}(t) \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება ფუნდამენტური მატრიცა, იგი აკმაყოფილებს მატრიცულ განტოლებას $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$.

$$W(t) = \det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t).....\varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t).....\varphi_{2n}(t) \\ ..... \\ \varphi_{n1}(t).....\varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს ეწოდება ვრონსკის დეტერმინანტი. ყოველი t-თვის $W(t) \neq 0$. ეს გამომდინარეობს ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის თვისებიდან **(დარწმუნდით)**. გამოსახულებას $s(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ ეწოდება $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1}^{n}$ მატრიცის კვალი.

თეორემა 17.1. ნებისმიერი $t_0, t \in I$ ადგილი აქვს ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულას

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau\right\}. \quad (\exp\{\alpha\} \overset{def}{=} e^{\alpha}) \qquad (17.1)$$

დამტკიცება. ვისარგებლოთ დეტერმინანტის გაწარმოების ფორმულით

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + ... + W_n(t), \qquad (17.2)$$

სადაც

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t)\cdots\varphi_{1n}(t) \\ ..... \\ \dot{\varphi}_{i1}(t)\cdots\dot{\varphi}_{in}(t) \\ ..... \\ \varphi_{n1}(t)\cdots\varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

$W_i(t)$ დეტერმინანტი მიიღება $W(t)$ ვრონსკის დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის გაწარმოებით. რადგანაც $\varphi_i(t) = (\varphi_{1i}(t),...,\varphi_{ni}(t))^T$, $i = \overline{1,n}$ სისტემის ამონახსნებია, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{\varphi}_i(t) = A(t)\varphi_i(t), i = \overline{1,n},$$

რომელიც გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება

$$\dot{\varphi}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\varphi_{kj}(t), \quad i, j = \overline{1,n}.$$

ამრიგად,

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}(t).....\varphi_{1n}(t) \\ ..... \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\varphi_{k1}(t)....\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\varphi_{kn}(t) \\ ..... \\ \varphi_{n1}(t).....\varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{ii}(t)W(t)$$ (დეტერმინანტის თვისება).

(17.2)-დან, უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\dot{W}(t) = s(t)W(t) \quad \text{ანუ} \quad \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = s(t). \qquad (17.3)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $W(t) > 0$, წინააღმდეგ შეთხვევაში $W(t)$ შევცვლით $-W(t)$-თი. ინტეგრების შედეგად გვექნება

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{W}(\tau)}{W(\tau)} d\tau = \int_{t_0}^{t} s(\tau) d\tau \quad \text{ანუ} \quad \ln \frac{W(t)}{W(t_0)} = \int_{t_0}^{t} s(\tau) d\tau .$$

აქედან მიიღება (17.1) ფორმულა.

შენიშვნა 17.1. თუ $\Phi(t_0)$ ერთეულოვანი მატრიცაა, მაშინ $W(t_0) = 1$, ხოლო ფორმულა მიიღებს სახეს

$$W(t) = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} s(\tau) d\tau \right\}.$$

თუ (17.3) ტოლობის ინტეგრებისას ვისარგებლებთ განუსაზღვრელი ინტეგრალით, მაშინ ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$W(t) = c \exp\left\{ \int s(t) dt \right\}.$$

§ 18. წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი. მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი, კოშის ფორმულა

წრფივი არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა ვექტორული ფორმით ასე ჩაიწერება

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), x \in R^n , \qquad (18.1)$$

სადაც $A(t)$ მატრიც-ფუნქცია და $f(t)$ ვექტორ-ფუნქცია უწყვეტია $I = (a,b)$ ინტერვალზე.

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n \qquad (18.2)$$

განტოლებას ეწოდება (18.1) განტოლების შესაბამისი ეთგვაროვანი განტოლება. ვთქვათ $\Phi(t)$ ფუნდამენტური მატრიცაა, მაშინ (18.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით $\Phi(t)C$, სადაც $C = (c_1,...,c_n)^T$. **(დარწმუნდით)**

თეორემა 18.1. ვთქვათ $\varphi_0(t)$ (18.1) განტოლების კერძო ამონახსნია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $\varphi_0(t) + \Phi(t)C$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\hat{\varphi}(t)$ არის (18.1) განტოლების ნებისმიერი ფიქსირებული ამონახსნი, მაშინ სხვაობა $\hat{\varphi}(t)-\varphi_0(t)$ იქნება (18.2) ერთგვაროვანი სიტემის ამონახსნი. ამიტომ არსებობს ერთადერთი $\hat{C}$ ვექტორი, რომ $\hat{\varphi}(t)-\varphi_0(t)=\Phi\hat{C}$. ამრიგად $\hat{\varphi}(t)=\varphi_0(t)+\Phi(t)\hat{C}$.

მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი. (18.1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$\varphi_0(t)=\Phi(t)C(t) \qquad (18.3)$$

ფუნქციის სახით. ვექტორ ფუნქცია $C(t)$ შევარჩიოთ ისე, რომ (18.3) ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (18.1) განტოლებას. (18.3) ფუნქცია ჩავსვათ (18.1) განტოლებაში მივიღებთ

$$\dot{\Phi}(t)C(t)+\Phi(t)\dot{C}(t)=A(t)\Phi(t)C(t)+f(t). \qquad (18.4)$$

$\Phi(t)$ ფუნდამენტური მატრიცა აკმაყოფლებს მატრიცულ განტოლებას $\dot{\Phi}=A(t)\Phi$, ამიტომ $\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t)$. (18.4) ტოლობიდან გვექნება

$$\Phi(t)\dot{C}(t)=f(t)$$

ე.ი.

$$\dot{C}(t)=\Phi^{-1}(t)f(t),\ \ C(t)=\int\Phi^{-1}(t)f(t)dt.$$

ამრიგად კერძო ამონახსნი იქნება

$$\varphi_0(t)=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)f(t)dt,$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნი-

$$x(t)=\Phi(t)(C+\int\Phi^{-1}(t)f(t)dt). \qquad (18.5)$$

(18.5)-ს ეწოდება კოშის ფორმულა.

კოშის ამოცანის

$$\begin{cases}\dot{x}=A(t)x, x\in R^n,\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$\Phi(t)(x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds),\Phi(t_0)=E, E\text{ - ერთეულოვანი მატრიცაა.}$$

§ 19. მაღალი რიგის წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. ზოგადი ამონახსნის აგება

მაღალი რიგის ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლებაა

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{z} + a_n(t)z = 0, \qquad (19.1)$$

სადაც $a_i(t), i = \overline{1,n}, t \in I = (a,b)$, კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია.

კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{z} + a_n(t)z = 0, \\ z(t_0) = z_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0, \cdots, z^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)} \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განმარტებულია I მონაკვეთზე.

(19.1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ $\psi_1(t),...,\psi_n(t)$ ამონახსნებს ეწოდება ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

თეორემა 19.1. (19.1) განტლებისათვის არსებობს ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა.

დამტკიცება. (19.1) განტოლება დავიყვანოთ სისტემაზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები $x^1 = z, x^2 = \dot{z} \cdots x^n = z^{(n-1)}$, მაშინ (19.1) განტოლება დაიყვანება სისტემაზე

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n, \qquad (19.2)$$

სადაც $x = (x^1,...,x^n)^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 01\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 001\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 00\cdots\cdots\cdots .1 \\ -a_n(t),...-a_1(t) \end{pmatrix}.$$

განტოლებათა (19.2) სისტემისათვის არსებობს ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა $\varphi_i(t) = (\varphi_{1i}(t),...,\varphi_{ni}(t))^T, i = \overline{1,n}$ (იხ. თეორემა 16.1). ფუნქციები $\varphi_{1i}(t), i = \overline{1,n}$ წრფივად დამოუკიდებელია და აკმაყოფილებენ (19.1) განტოლებას (იხ. თეორემა 9.1).

თეორემა 19.2. ვთქვათ $\psi_i(t), i = \overline{1,n}$ ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა. მაშინ (19.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(t).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $z_0(t)$ არის (19.1) განტოლების ნებისმიერი ფიქსირებული ამონახსნი, მაშინ $x_0(t) = (z_0(t), \dot{z}_0(t),..., z_0^{(n-1)}(t))^T$ იქნება (19.2) სისტემის ამონახსნი. ფუნქციები $\varphi_i(t) = (\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t)..., \psi_i^{(n-1)}(t))^T$, $i = \overline{1,n}$ ქმნიან (19.2) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას, ამიტომ არსებობს ერთადერთი $c_{i0}, i = \overline{1,n}$ რიცხვები, რომ $x_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0}\varphi_i(t)$. ამ ტოლობის კოორდინატებში ჩაწერის შედეგად მივიღებთ $z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i0}\psi_i(t)$.

§ 20. ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა მაღალი რიგის წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლებისთვის

განვიხილოთ განტოლება

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{z} + a_n(t)z = 0, \qquad (20.1)$$

სადაც $a_i(t), i = \overline{1,n}, t \in I = (a,b)$, უწყვეტი ფუნქციებია.

ვთქვათ $\psi_i(t), i = \overline{1,n}$ ამონსნთა ფუნდამენტური სისტემაა.

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \ldots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \ldots & \dot{\psi}_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს ეწოდება (20.1) განტოლების შესაბამისი ვრონსკის დეტერმინანტი. ნებისმიერი $t \in I$ ვრონსკის დეტერმინანტი $W(t) \neq 0$. **(დარწმუნდით)**

თეორემა 20.1. ნებისმიერი $t_0, t \in I$ ადგილი აქვს ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულას

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a_1(t)d\tau\right\}.$$

დამტკიცება. (20.1) განტოლება დავიყვანოთ სისტემაზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები $x^1 = z, x^2 = \dot{z}, \cdots, x^n = z^{(n-1)}$, მაშინ (20.1) განტოლება დაიყვანება სისტემაზე

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n, \qquad (20.2)$$

სადაც $x = (x^1, \ldots, x^n)^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 1 \cdots \cdots \cdots \cdots 0 \\ 0 0 1 \cdots \cdots \cdots 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ 0 0 \cdots \cdots \cdots 1 0 \\ -a_n(t), \ldots -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში $s(t) = -a_1(t)$. ცხადია, რომ $W(t)$ არის ვრონსკის დეტერმინანტი (20.2) სისტემისათვის, რომლისთვის სამართლიანია ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau\right\}.$$

აქედან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ფორმულა.

შენიშვნა 20.1. განუსაზღვრელი ინტეგრალით ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$W(t) = c\exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\}.$$

მაგალითი 20.1. იპოვეთ განტოლების

$$\ddot{x}-\frac{2t}{t^2+1}\dot{x}+\frac{2}{t^2+1}x=0$$

ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. განტოლების კერძო ამონახსნია $x_1=t$. ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი მეორე ამონახსნი x_2, რომ ფუნქციათა წყვილი $x_1(t)$ და $x_2(t)$ იქნება ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. მართლაც, ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულის ძალით გვექნება

$$\begin{vmatrix} t & x_2 \\ 1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \exp\left\{\int \frac{2t}{t^2+1}dt\right\}.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$t\dot{x}_2 - x_2 = t^2+1.$$

ორივე მხარე გავყოთ t^2-ზე

$$\frac{t\dot{x}_2 - x_2}{t^2} = 1+\frac{1}{t^2}$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{t}\right) = 1+\frac{1}{t^2}.$$

ამ განტოლების კერძო ამონახსნია $x_2(t)=t^2-1$. ამონახსნები $x_1(t)=t, x_2(t)=t^2-1$ ქმნიან ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ამრიგად, ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=c_1t+c_2(t^2-1).$$

§ 21. მაღალი რიგის წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი განტოლება

$$z^{(n)}+a_1(t)z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\dot{z}+a_n(t)z=f(t), \qquad (21.1)$$

სადაც $a_i(t), i=\overline{1,n}$, $f(t), t\in I=[a,b]$, უწყვეტი ფუნქციებია.

თეორემა 21.1. ვთქვათ $\psi_i(t), i=\overline{1,n}$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა, ხოლო $z_0(t)$ არის (21.1) განტოლების კერძო ამონახსნი. მაშინ (21.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $z=z_0(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i\psi_i(t)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $z_1(t)$ არის (21.1) განტოლების ნებისმიერი ფიქსირებული ამონახსნი, მაშინ სხვაობა $z_1(t)-z_0(t)$ იქნება ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. არსებობს ერთადერთი $c_{i0}, i=\overline{1,n}$, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $z_1(t)-z_0(t)=\sum_{1=1}^{n}c_{i0}\psi_i(t)$. აქედან გამომდინარეობს ტოლობა $z_1(t)=z_0(t)+\sum_{1=1}^{n}c_{i0}\psi_i(t)$.

მუდმივთა ვრიაციის მეთოდი. (21.1) განტოლების კერძო ამონახსნი ვეძებოთ

$$z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\psi_i(t) \qquad (21.2)$$

ფუნქციის სახით. ფუნქციები $c_i(t), i = \overline{1,n}$ შევარჩიოთ ისე, რომ (21.2) ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (21.1) განტოლებას. (21.2) ფუნქცია არის (21.1) განტოლების ამონახსნი, თუ $\dot{c}_i(t), \overline{1,n}$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას **(შეამოწმეთ)**

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\psi_i(t) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\dot{\psi}_i(t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\psi_i^{(n-2)}(t) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t)\psi_i^{(n-1)}(t) = f(t). \end{cases} \qquad (21.3)$$

(21.3) სისტემის მთავარი დეტერმინანტია $W(t)$ (ვრონსკის დეტერმინანტი), ამიტომ (21.3) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\dot{c}_i(t) = \alpha_i(t), i = \overline{1,n}$ ე.ი. $c_i(t) = \int \alpha_i(t)dt$. ამრიგად,

$$z_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i(t)dt\,\psi_i(t).$$

§ 22. ავტონომიური სისტემის ამონახსნების თვისებები

განტოლებას ეწოდება ავტონომიური, თუ მისი მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე. ზოგადი ავტონომიურ განტოლებთა სისტემაა

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n. \qquad (22.1)$$

განტოლების მარჯვენა მხარე $f(x)$ და მისი კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$$

უწყვეტია R^n-ზე.

ვთქვათ $x = \varphi(t)$ ამონახსნია. თუ t იცვლება რაიმე ინტერვალში, მაშინ R^n სივრცეში $\varphi(t)$ ფუნქცია აღწერს წირს, რომელსაც $\varphi(t)$ ამონახსნის შესაბამისი ტრაექტორია ეწოდება. R^n ეწოდება ფაზური სივრცე, თუ მასში (22.1) განტოლების ამონახსნები განიხილება როგორც ტრაექტორიები, ხოლო (22.1) განტოლება განიხილება როგორც მიმართულების ველი. ამ შემთხვევაში ტრაექტორიას ფაზური ტრაექტორია ეწოდება, ხოლო $f(x)$-ს ფაზური სიჩქარე x წერილში. (22.1) განტოლების მიხედვით, ფაზურ $\varphi(t)$ ტრაექტორიაზე მოძრავი წერტილის სიჩქარე t მომენტში ტოლია $f(\varphi(t))$ ფაზური სიჩქარის.

$x = a \in R^n$ წერტილს ეწოდება წონასწორობის მდგომარეობა (განსაკუთრებული წერტილი), თუ $f(a) = 0.$ ცხადია, რომ წონასწორობის მდგომარეობა არის განტოლების ამონახსნი.

თეორემა 22.1. ვთქვათ $\varphi(t), t \in R$ განტოლების ამონახსნია, მაშინ ნებისმიერი $c \in R$ ფუნქცია $\varphi(t+c)$ კვლავ იქნება ამონახსნი.

დამტკიცება. ცხადია $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$. ცვლადი t შევცვალოთ $t+c$, მივიღებთ $\dot{\varphi}(t+c) = f(\varphi(t+c))$.

შენიშვნა 22.1. $\varphi(t)$ და $\varphi(t+c)$ ამონახსნების შესაბამისი ტრაექტორიები ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 22.2. ვთქვათ $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ ამონახსნების შესაბამისი ტრაექტორიები ერთმანეთს კვეთენ ე.ი. არსებობს t_1 და t_2 , რომ $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. მაშინ ეს ტრაექტორიები ერთმანეთს ემთხვევა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია $\varphi_3(t) = \varphi_2(t + t_2 - t_1)$, რომელიც არის ამონახსნი და შეესაბამება იგივე ტრაექტორია რაც $\varphi_2(t)$. ცხადია $\varphi_3(t_1) = \varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$. ერთადერთობის გამო $\varphi_1(t) \equiv \varphi_3(t)$, ამიტომ მათი შესაბამისი ტრაექტორიებიც ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 22.3. ვთქვათ $\varphi(t)$ ამონახსნია და $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$,სადაც $t_1 \neq t_2$,მაშინ ადგილი აქვს ერთერთს:

ა) $\varphi(t) \equiv const$ (წონასწორობის მდგომარეობა);

ბ) $\varphi(t)$ პერიოდული ფუნქციაა (ტრაექტორია შეკრული წირია) ე.ი. არსებობს ისეთი $T > 0$, რომ ადგლი აქვს ტოლობას $\varphi(t+T) = \varphi(t), \forall t \in R.$.

დამტკიცება. F-ით აღვნიშნოთ ისეთი c რიცხვების სიმრავლე, რომლებისთვისაც შესრულებულია ტოლობა $\varphi(t) = \varphi(t+c), \forall t \in R$. ცხადია $F \neq \varnothing$.

F სიმრავლეს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) თუ $c \in F$, მაშინ $-c \in F$ ე.ი. F სიმეტრიულია რიცხვითი ღერძის სათავის მიმართ.

   მართლაც, ვთქვათ $c \in F$ ე.ი. $\varphi(t) = \varphi(t+c), \forall t \in R$. ამ ტოლობაში t შევცვალოთ $t-c$-თი, მივიღებთ $\varphi(t-c) = \varphi(t), \forall t \in R$ ე.ი. $-c \in F.$

2) თუ $c_1, c_2 \in F$ მაშინ $c_1 + c_2 \in F$. ამრიგად თუ $c \in R$ მაშინ ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისთვი $mc \in F$.

   ცხადია, რომ $\varphi(t + c_1 + c_2) = \varphi(t + c_1) = \varphi(t), \forall t \in R.$

3) F ჩაკეტილია.

ვთქვათ, $c_i \in F, i = 1,2,...$ მიმდევრობის ზღვარია c_0. გადავიდეთ ზღვარზე ტოლობაში $\varphi(t + c_i) = \varphi(t)$, როცა $i \to \infty$, მაშინ მივიღებთ $\varphi(t + c_0) = \varphi(t), \forall t \in R$. გავაგრძელოთ თეორემის დამტკიცება. ვთქვათ F-ში არ არსებობს უმცირესი დადებითი რიცხვი და ვთქვათ $c \in R$ ნებისმიერი დადებითი ფიქსირებული რიცხვია. მაშინ არსებობს $\varepsilon \in F$ ისეთი, რომ $0 < \varepsilon < c$. გარდა ამისა, არებობს ნატურლური რიცხვი m, რომ ადგილი აქვს უტოლობას $0 < c - m\varepsilon < \varepsilon$.

ვთქვათ $\varepsilon_i \in F$ და $\varepsilon_i \to 0$. არსებობს ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა m_i ისეთი, რომ $0 < c - m_i\varepsilon_i < \varepsilon_i$ ე.ი. $m_i\varepsilon_i \to c.$ მე-2 თვისების ძალით $m_i\varepsilon_i \in F$, ხოლო მე-3 თვისების თანახმად $c \in F$. პირველი თვისების გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $F = R$. ამრიგად ტოლობა $\varphi(t) = \varphi(t+c)$ სრულდება ნებისმიერი t და c-თვის. ეს კი შესაძლებელია ა) პირობის შემთხვევაში.

ვთქვათ F-ში არსებობს მინიმალური დადებითი რიცხვი T. ვაჩვენოთ, რომ F შედგება mT სახის რიცხვებისგან,სადაც m ნებისმიერი მთელი რიცხვია. მართლაც, ვთქვათ $c \in F$, $c > 0$ და $c \neq mT$. ცხადია $T < c$, არსებობს

ნატურალური m_0 რიცხვი ისეთი, რომ $0 < c - m_0 T < T$. $c, m_0 T \in F$ ამიტომ $c - m_0 T \in F$. ეს ეწინააღმდეგება $T \in F$ რიცხვის მინიმალურობას. ამრიგად c არის mT სახის რიცხვი, ე.ი. $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ ნებისმიერი t-თვის. ეს ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ბ)-ს.

შენიშვნა 22.1. ვთქვათ a წონასწორობის მდგომარეობაა, მაშინ $x(t) \neq a$ ამონახსნის ტრაექტორია a-ს შეიძლება უახლოვდებოდეს როცა $t \to \infty$ ან $t \to -\infty$.

§ 23. ავტონომიური სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის მდგრადობა. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის ნულოვანი ამონახნის მდგრადობის საკმარისი პირობა

ვთქვათ $x = a$ არის

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n$$

განტოლების წონასწორობის მდგომარეობა.
კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), x \in R^n \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ამონახსნი აღვნიშნოთ $\varphi(t; x_0)$.

განსაზღვრება 23.1. $x = a$ წონასწორობის მდგომარეობას ეწოდება მდგრადი (ლიაპუნოვის აზრით), თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) არსებობს $\rho > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი x_0-თვის რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|a - x_0| < \rho$ ამონახსნი $\varphi(t; x_0)$ განმარტებულია ინტერვალზე $[0, \infty)$;

ბ) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ არსებობს რიცხვი $\delta \in (0, \rho)$, რომ ნებისმიერი x_0-თვის რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|a - x_0| < \delta$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a - \varphi(t; x_0)| < \varepsilon, t \geq 0.$$

განსაზღვრება 23.2. $x = a$ წონასწორობის მდგომარეობას ეწოდება ასიმპტოტურად მდგრადი, თუ იგი მდგრადია და ამავე დროს შესრულებულია პირობა

ა) არსებობს $\sigma \in (0, \rho)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი x_0-თვის რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|a - x_0| < \sigma$ ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t; x_0) = a .$$

განვიხილოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x} = Ax, x \in R^n . \qquad (23.1)$$

ქვემოთ მოყვანილი თეორემა იძლევა ნულოვანი $0_n = (0,0,...,0)^T \in R^n$ ამონახსნის ანუ წონასწორობის მდგომარეობის ასიპტოტურად მდგრადობის საკმარის პირობას.

თეორემა 23.1. განტოლებათა (23.1) სისტემის $0_n = (0,0,...,0)^T \in R^n$ წონასწორობის მდგომარეობა ასიმპტოტურად მდგრადია, თუ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვების ნამდვილი ნაწილი უარყოფითია.

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ $n = 2$ შემთხვევისთვის. ე.ი. განიხილება სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{23.2}$$

სისტემის შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0. \tag{23.3}$$

$p = \dfrac{d}{dt}$ ოპერატორის საშუალებით (23.2) სისტემა ასე შეიძლება გადავწეროთ

$$\begin{cases} (p - a_{11})x_1 = a_{12}x_2, \\ (p - a_{22})x_2 = a_{21}x_1. \end{cases}$$

პირველ განტოლებაზე $p - a_{22}$ ოპერატორის მოქმედების შედეგად მივიღეთ

$(p - a_{22})(p - a_{11})x_1 = a_{12}(p - a_{22})x_2 = a_{12}a_{21}x_1$ ანუ $p^2x_1 - (a_{11} + a_{22})px_1 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

ანალოგიურად, მე-2 განტოლებაზე $p - a_{11}$ ოპერატორის მოქმედების შედეგად მივიღებთ

$$p^2x_2 - (a_{11} + a_{22})px_2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

ამრიგად, თუ $x = (x_1, x_2)^T$ არის (23.2) განტოლების ამონახსნი, მაშინ x_1 და x_2 აკმაყოფილებენ მუდმივკოეფიციენტებიან მე-2 რიგის განტოლებას

$$\ddot{z} - (a_{11} + a_{22})\dot{z} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \tag{23.4}$$

რომლის მახასიათებელი განტოლებაა (23.3).

ვთქვათ (23.3) განტოლების ფესვები კომპლექსურია ე.ი. $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ და $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$. თეორემის პირობის თანახმად $\alpha_1 < 0$.

ამ შემთხვევაში ფუნქციები $z_1 = e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t$ და $z_2 = e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t$ ქმნიან ამონახსნთა ფუნამენტურ სისტემას.

ვთქვათ z_0 არის (23.4) განტოლების რაიმე ამონახსნი, მაშინ არსებობს რიცხვები c_{10} და c_{20}, რომ

$$z_0 = e^{\alpha_1 t}(c_{10}\cos\beta_1 t + c_{20}\sin\beta_1 t).$$

აქედან მივიღებთ

$$|z_0| \le e^{\alpha_1 t}(|c_1| + |c_2|) \le e^{-\alpha t}(|c_1| + |c_1|),$$

სადაც $\alpha > 0$ რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობას $\alpha_1 < -\alpha$.

ვთქვათ (23.3) განტოლების ფესვები მარტივია ე.ი. $\lambda_1 = \alpha_1 < 0$ და $\lambda_2 = \alpha_2 < 0$. მაშინ

$$z_0 = c_{10}e^{\alpha_1 t} + c_{20}e^{\alpha_2 t},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$|z_0| \le e^{-\alpha t}(|c_1| + |c_1|),$$

ვთქვათ (23.3) განტოლების ფესვები ჯერადია ე.ი. $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha_1 < 0$. მაშინ

$$z_0 = c_{10}e^{\alpha_1 t} + c_{20}te^{\alpha_1 t}.$$

ფუნქცია

$$\frac{te^{\alpha_1 t}}{e^{-\alpha t}} = te^{(\alpha_1+\alpha)t}, t \ge 0,$$

სადაც $\alpha_1 < -\alpha, \alpha > 0$, მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $t \to \infty$. ამრიგად ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია ე.ი. არსებობს ისეთი რიცხვი $M > 0$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$te^{\alpha_1 t} \le Me^{-\alpha t}, t \ge 0.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება

$$|z_0| \le e^{-\alpha t}(|c_1| + M|c_2|).$$

თუ გავითვალიწინებთ ზემოთმოყვანილ შეფასებებს დავასკვნით, რომ (23.4) განტოლების ნებისმიერი z ამონახსნისთვის არსებობს რიცხვები $M_1(z) > 0$ და $\alpha > 0$, რომ ადგილი აქვს შეფასებას

$$|z| \le M(z)e^{-\alpha t}. \qquad (23.5)$$

ვთქვათ $\varphi_i(t) = (\varphi_{1i}(t), \varphi_{2i}(t))^T, i = 1,2$ არის (23.2) განტოლების ამონახსნები საწყისი პირობით $\varphi_i(0) = e_i, i = 1,2$, სადაც $e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T$. ეს ამონახსნები ქმნიან (23.2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. შევაფასოთ $|\varphi_i(t)|$:

$$|\varphi_i(t)| = \sqrt{\varphi_{1i}^2(t) + \varphi_{2i}^2(t)} \le \sqrt{2}\hat{M}e^{-\alpha t}, \hat{M} = \max(M(\varphi_{11}), M(\varphi_{21}), M(\varphi_{21}), M(\varphi_{22})) \qquad (23.6)$$

იხ. უტოლობა (23.5).

ვთქვათ $\varphi(t; x_0)$ არის (23.2) განტოლების ამონახსნი საწყისი პირობით $\varphi(t_0; x_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$. ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის საშუალებით ეს ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$\varphi(t; x_0) = x_{10}\varphi_1(t) + x_{20}\varphi_2(t).$$

(23.6) შეფასების გამოყენებით მივიღებთ

$$|\varphi(t; x_0)| \le \sqrt{2}\hat{M}e^{-\alpha t}(|x_{10}| + |x_{20}|) \le 2\sqrt{2}\hat{M}|x_0|e^{-\alpha t}.$$

აქედან გამომდინარეობს 0_2 ნულოვანი ამონახსნის ანუ 0_2 წონასწორობის მდგომარეობის ასიმპტოტური მდგრადობა.

§ 24. მე-2 რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი სისტემის ფაზური სივრცე

განვიხილოთ მე-2 რიგის სისტემა

$$\dot{x} = Ax, \ x \in R^2 \ , \qquad (24.1)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

თუ $\det(A) \neq 0$, მაშინ $0_2 = (0,0)^T$ წერტილი იქნება სისტემის ერთადერთი წონასწორობის მდგომარეობა.

R^2 ფაზურ სივრცეში (სიბრტყეში) ავაგოთ (24.1) განტოლები ფაზური ტრაექტორიები. ვთქვათ λ_1 და λ_2 არის A მატრიცის განსხვავებული საკუთრივი რიცხვები, ხოლო h_1 და h_2- საკუთრივი ვექტორები. (24.1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$x = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (24.2)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $h_1 = (1,0)^T$ და $h_2 = (0,1)^T$. ასეთ შემთხვევაში (24.2) ამონახსნი კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \\ x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \qquad (24.3)$$

რომელიც არის (24.2) ამონახსნის შესაბამისი ტრაექტორიების პარამეტრული განტოლება.

1) ვთქვათ λ_1 და λ_2 ნამდვილი რიცხვებია.

1.1) c_1 და c_2 რიცხვები განსხვავებულია ნულისგან.

ა) ვთქვათ $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, მაშინ $x_1 \to 0, x_2 \to 0$ როცა $t \to \infty$ (იხ .24.3). ტრაექტორიები $x_1 0 x_2$ სისტემაში იქნება პარაბოლას შტოების მსგავსი. ამრიგად, 0_2 წონასწორობის მდგომარეობა ასიმპტოტურად მდგრადია.

ბ) ვთქვათ $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, მაშინ $x_1 \to \infty, x_2 \to \infty$ როცა $t \to \infty$. ტრაექტორიები იქნება კვლავ პარაბოლას შტოების მსგავსი. 0_2 წონასწორობის მდგომარეობა არამდგრადია.

გ) ვთქვათ $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, მაშინ $x_1 \to 0, x_2 \to \infty$ როცა $t \to \infty$. ტრაექტორიები მსაგავსია ჰიპერბოლას. 0_2 წონასწორობის მდგომარეობა არამდგრადია.

დ) ვთქვათ $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, მაშინ $x_1 \to \infty, x_2 \to 0$ როცა $t \to \infty$. ტრაექტორიები მსაგავსია ჰიპერბოლას . 0_2 წონასწორობის მდგომარეობა არამდგრადია.

1.2) c_1, c_2 რიცხვებიდან ერთ-ერთი ნულია. ამ შემთხვევაში ტრაექტორიები განლაგდება საკორდინატო ღერძებზე. გვექნება ასიმპტოტურად მდგრადობის და არამდგრადობის შემთხვევები **(დარწმუნდით).**

2) ვთქვათ $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ და $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, მაშინ გვექნება ორი ტიპის ტრაექტორია.

ა) სპირალი, თუ $\alpha \neq 0$. თუ $\alpha < 0$, მაშინ წონსწორობის მდგომარეობა 0_2 ასიმპტოტურად მდგრადია. თუ $\alpha > 0$-არამდგრადია;

ბ) წრეწირი, თუ $\alpha = 0$. ამ შემთხვევაში წონასწორობის მდგომარეობა 0_2 მდგრადია.

შენიშვნა 24.1. ანალოგიურ შემთხვევებს ადგილი აქვს, როცა h_1 და h_2 ნებისმიერი საკუთრივი ვექტორებია

§ 25. მე-2 რიგის წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების ნულების შესახებ. შედარების თეორემა

განვიხილოთ მე-2 რიგის ერთგვაროვანი განტოლება

$$\ddot{z} + a_1(t)\dot{z} + a_2(t)z = 0,$$

სადაც $a_1(t)$ და $a_2(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $I = (a,b)$ მონაკვეთზე.

თეორემა 25.1. ვთქვათ $z(t)$ არანულოვანი ამონახსნია და $z(t_0) = 0$, მაშინ $\dot{z}(t_0) \neq 0.$

დამტკიცება. დავუშვათ $\dot{z}(t_0) = 0$, მაშინ ერთადერთობის გამო $z(t) \equiv 0$. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

თეორემა 25.2. ვთქვათ $z(t)$ არანულოვანი ამონახსნია, მაშინ მას I მონაკვეთზე არ შეიძლება ქონდეს უსასრულოდ ბევრი ნული.

დამტკიცება. ვთქვათ $z(t)$-ს I მონაკვეთზე აქვს უსასრულოდ ბევრი ნული. ავიღოთ ნულების კრებადი მიმდევრობა $\{t_k\}$ და ვთქვათ $t_k \to t_0$. ადვილი მისახვედრია, რომ $t_0 \in I$ და $z(t_0) = 0.$ გარდა ამისა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z(t_k) - z(t_0)}{t_k - t_0} = \dot{z}(t_0).$$

მრიცხველი ნულია ამიტომ $\dot{z}(t_0) = 0$. ერთადერთობის ძალით $z(t) \equiv 0$. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

თეორემა 25.3. ვთქვათ $z_1(t)$ და $z_2(t)$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონასნებია. მაშინ I ინტერვალზე $z_1(t)$ ორ მეზობელ ნულს შორის ყოველთვის არსებობს $z_2(t)$-ს ერთადერთი ნული.

დამტკიცება. თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ ფუნქციებს $z_1(t)$ და $z_2(t)$ არ შეიძლება ქონდეთ საერთო ნული. მართლაც, ვთქვათ $z_1(s) = z_2(s) = 0$ მაშინ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) \end{vmatrix} = z_1(t)\dot{z}_2(t) - z_1(t)\dot{z}_2(t)$$

s წერტილში იქნება ნულის ტოლი. ეს კი ეწინააღმდეგება ვრონსკის დეტერმინანტის თვისებას.

ვთქვათ $t_1, t_2 \in I$ არის $z_1(t)$ ფუნქციის უახლესი ნულები ე.ი. $z_1(t_1) = z_2(t_2) = 0$ და ვთქვათ (t_1, t_2) ინტერვალში არარსებობს $z_2(t)$ ფუნქციის ნული.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z_1(t)}{z_2(t)}\right) = \frac{\dot{z}_1(t)z_2(t) - z_1(t)\dot{z}_2(t)}{z_2^2(t)} = -\frac{W(t)}{z_2^2(t)} \neq 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია $z_1(t)/z_2(t)$ მკაცრად მონოტონურია, რაც არ შეიძლება რადგანაც $z_1(t_1) = z_2(t_2) = 0$. ამრიგად (t_1, t_2) ინტერვალში არსებობს $z_2(t)$ ფუნქციის ნული.

ვთქვათ (t_1, t_2) ინტერვალში არსებობს $z_2(t)$ ფუნქციის ორი s_1 და s_2 ნული. მაშინ ანალოგიური გზით დავამტკიცებთ (s_1, s_2) ინტერვალში $z_1(t)$ ფუნქციის ნულის არსებობას. ეს შეუძლებელია, რადგანაც t_1, t_2 იყო უახლესი ნულები.

შედარების თეორემა. ვთქვათ $z(t)$ არის

$$\ddot{z} + q(t)z = 0$$

განტოლების ამონახსნი, ხოლო t_1 და t_2 მისი უახლესი ნულებია.
ვთქვათ $y(t)$

$$\ddot{y} + Q(t)y = 0$$

განტოლების ნებისმიერი არანულოვანი ფიქსირებული ამონახსნია.
თუ $Q(t)$ და $q(t)$ უწყვეტი ფუნქციები აკმაყოფილებენ უტოლობას $Q(t) \geq q(t)$, მაშინ (t_1, t_2) ინტერვალში არსებობს $y(t)$-ს ერთი ნული მაინც ან ერთდროულად ადგილი აქვს ტოლობებს $y(t_1) = y(t_2) = 0,\ Q(t) = q(t)$.

დამტკიცება. ვთქვათ არ არსებობს $y(t)$ ფუნქციის ნული (t_1, t_2) ინტერვალში. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $z(t) > 0, y(t) > 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ამონახსნს გავამრავლებთ მინუს ნიშანზე). პირველი განტოლება გავამრავლოთ $y(t)$-ზე, მე-2 განტოლება- $z(t)$-ზე და გამოვაკლოთ მივიღებთ

$$\ddot{z}(t)y(t) - z(t)\ddot{y}(t) + (q(t) - Q(t))z(t)y(t) = 0.$$

ცხადია,რომ

$$\ddot{z}(t)y(t) - z(t)\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{z}(t)y(t) - z(t)\dot{y}(t)) = (Q(t) - q(t))z(t)y(t).$$

ინტეგრების შემდეგ, $z(t_1) = z(t_2) = 0$ ტოლობის და $Q(t) - q(t) \geq 0, z(t)y(t) > 0$ უტოლობების გათვალისწინებით, გვექნება

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\dot{z}(t)y(t) - z(t)\dot{y}(t))dt = \dot{z}(t_2)y(t_2) - \dot{z}(t_1)y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - q(t))z(t)y(t)dt \geq 0. \qquad (25.1)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\dot{z}(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{z(t)}{t - t_1} > 0,\ \ (t > t_1);\ \ \dot{z}(t_2) = \lim_{t \to t_2} \frac{z(t)}{t - t_2} < 0,\ \ (t < t_2)\ \ .$$

ამრიგად $\dot{z}(t_2)y(t_2) - \dot{z}(t_1)y(t_1) < 0$, ეს კი ეწინააღმდეგება (25.1) თანაფარდობას. ჩვენი დაშვება არასწორია ე.ი. $y(t)$ ფუნქციას (t_1, t_2) ინტერვალზე აქვს ნული.
თუ დარღვეულია ერთ-ერთი შემდეგი ტოლობებიდან $y(t_1) = y(t_2) = 0,\ Q(t) = q(t)$, მაშინ ადგილი არ ექნება (25.1) თანაფარდობას.

§ 26. სასაზღვრო ამოცანა მე-2 რიგის წრფივი ცვლადკოეფიციენტებიანი არაერთგაროვანი განტოლებისთვის

აქამდე ჩვენს მიერ განხილული იყო კოშის ამოცანა, რომელიც შეიცავდა უცნობი ფუნქციის ან უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ პირობას მხოლოდ ერთ t_0 წერტილში.

თუ პირობა შეიცავს უცნობი ფუნქციის ან უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობას t-ს ორი ან მეტ წერტილში, მაშინ მას სასაზღვრო პირობა ეწოდება.

განვიხილოთ მე-2 რიგის განტოლება

$$\ddot{z} + a_1(t)\dot{z} + a_2(t)z = f(t) \qquad (26.1)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$\alpha_1 \dot{z}(t_1) + \beta_1 z(t_1) = \gamma_1, \qquad (26.2)$$
$$\alpha_2 \dot{z}(t_2) + \beta_2 z(t_2) = \gamma_2,$$

სადაც $a_1(t), a_2(t), f(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[t_1, t_2]$ მონაკვეთზე, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$. თუ $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, t_1 = t_2$, მაშინ (26.2) სასაზღვრო პირობა გადაიქცევა საწყის პირობად $z(t_1) = \gamma_1, \dot{z}(t_1) = \gamma_2$.

კოშის ამოცანისგან განსხვავებით სასაზღვრო ამოცანას შეიძლება ერთი ან მრავალი ამონახსნი, ან საერთოდ არ ჰქონდეს ამონახსნი.

ამოცანას

$$\begin{cases} \ddot{z} + z = 0, \\ z(0) = 0, z(\pi/2) = a \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $z = a \sin t$, რადგანაც ყველა ამონახსნს რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $z(0) = 0$ აქვს სახე $z = c \sin t$;

ამოცანას

$$\begin{cases} \ddot{z} + z = 0, \\ z(0) = 0, z(\pi) = b, b \neq 0, \end{cases}$$

არა აქვს ამონახსნი, რადგანაც $z = c \sin t$ არ აკმაყოფილებს პირობას $z(\pi) = 0$;

ამოცანას

$$\begin{cases} \ddot{z} + z = 0, \\ z(0) = 0, z(\pi) = 0, \end{cases}$$

აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი $z = c \sin t$.

თეორემა 26.1. (ალტერნატივის შესახებ) შესაძლებელია ადგილი ქონდეს შემდეგ შემთხვევებს:

1) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი;
2) სასაზღვრო ამოცანას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი;
3) სასაზღვრო ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.

დამტკიცება. ვთქვათ z_1 და z_2 ერთგვაროვანი განტოლების

$$\ddot{z} + a_1(t)\dot{z} + a_2(t) = 0 \qquad (26.3)$$

ფუნდამენტურ ამონახსნთა სიტემაა, ხოლო z_0 არის (26.1) განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + z_0, \qquad (26.4)$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმერი რიცხვებია იქნება (26.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ჩავსვათ (26.4) ფუნქცია (26.2) სასაზღვრო პირობაში, მაშინ c_1 და c_2-ის მიმართ მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} (\alpha_1 \dot{z}_1(t_1) + \beta_1 z_1(t_1))c_1 + (\alpha_1 \dot{z}_2(t_1) + \beta_1 z_2(t_1)) = \gamma_1 - \alpha_1 \dot{z}_0(t_1) - \beta_1 z_0(t_1) \\ (\alpha_2 \dot{z}_1(t_2) + \beta_2 z_1(t_2))c_1 + (\alpha_2 \dot{z}_2(t_2) + \beta_2 z_2(t_2)) = \gamma_2 - \alpha_2 \dot{z}_0(t_2) - \beta_2 z_0(t_2) \end{cases} \qquad (26.5)$$

თუ (26.5) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ (26.1)-(26.2) სასაზღვრო ამოცანას ექნება ერთადერთი ამონახსნი; თუ (26.5) სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, მაშინ (26.1)-(26.2) სასაზღვრო ამოცანას ექნება უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი; თუ (26.5) სისტემას არა აქვს ამონახსნი, მაშინ (26.1)-(26.2) სასაზღვრო ამოცანას არ ექნება ამონახსნი.

ვთქვათ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, მაშინ (26.2)-ს ეწოდება ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობა. გრინის ფუნქცია ეწოდება $G(t,s),(t,s) \in [t_1,t_2] \times (t_1,t_2)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1^0. ყოველი ფიქსირებული s-თვის ფუნქცია $z(t) = G(t,s)$, როცა $t \neq s$ აკმაყოფილებს (26.3) ერთგვაროვან განტოლებას;

2^0. ფუნქცია $G(t;s)$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\alpha_1 \frac{\partial G(t_1;s)}{\partial t} + \beta_1 G(t_1;s) = 0,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial G(t_2;s)}{\partial t} + \beta_2 G(t_2;s) = 0;$$

3^0. შესრულებულია პირობები

$$G(s+;s) = G(s-;s), \quad \frac{\partial G(s+;s)}{\partial t} = \frac{\partial G(s-;s)}{\partial t} + 1.$$

თეორემა 26.2. თუ სასაზღვრო ამოცანას

$$\ddot{z} + a_1(t)\dot{z} + a_2(t) = 0, \qquad (26.6)$$
$$\alpha_1 \dot{z}(t_1) + \beta_1 z(t_1) = 0, \qquad (26.7)$$
$$\alpha_2 \dot{z}(t_2) + \beta_2 z(t_2) = 0 \qquad (26.8)$$

აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი მაშინ არსებობს გრინის ფუნქცია, რომელსაც აქვს სახე

$$G(t;s) = \begin{cases} a(s)z_1(t), t \in [t_1,s], \\ b(s)z_2(t), t \in (s,t_2], \end{cases} \qquad (26.9)$$

სადაც z_1 და z_2 არის (26.6) განტოლების არანულოვანი ამონახსნები, რომლებიც შესაბამისად აკმაყოფილებენ (26.7) და (26.8) პირობებს. ფუნქციები $a(s)$ და $b(s)$ აკმაყოფილებენ პირობებს

$$a(s)z_1(s) = b(s)z_2(s), \quad b(s)\dot{z}_2(s) = a(s)\dot{z}_1(s) + 1. \qquad (26.10)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $z_1(t)$ და $z_2(t)$ არის (26.6) განტოლების ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$z_1(t_1) = \alpha_1, \dot{z}_1(t_1) = -\beta_1, \quad z_2(t_2) = \alpha_2, \dot{z}_2(t_2) = -\beta_2.$$

არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$ პირობების გათვალისწინებთ, არსებობს ასეთი ერთადერთი არანულოვანი ამონახსნები. ცხადია $z_1(t)$ და $z_2(t)$ აკმაყოფილებენ (26.7) და (26.8) პირობებს. თუ $z_1(t)$ და $z_2(t)$ წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ $z_1(t) = cz_2(t)$ და იგი იქნება (26.6)-(26.8) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას სასაზღვრო ამოცანისთვის ერთადერთი ნულოვანი ამონახსნის არსებობის შეახებ. ამრიგად z_1 და z_2 წრფივად დამოუკიდებელია ე.ი. ნებისმიერი ამონახსნს აქვს $z = c_1 z_1 + c_2 z_2$ სახის სტრუქტურა. ეს მიუთითებს იმაზე, რომ (26.9) აკმაყოფილებს 1) და 2) პირობებს. 3) მოთხოვნიდან, თუ ვიგულისხმებთ $a(s)$ და $b(s)$ ფუნქციების უწყვეტობას, მიიღება (26.10) პირობა.

განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a(s)z_1(s) - b(s)z_2(s) = 0, \\ -a(s)\dot{z}_1(s) + b(s)\dot{z}_2(s) = 1, \end{cases}$$

$a(s)$ და $b(s)$ უცნობების მიმართ აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რადგანაც მისი მთავარი დეტერმინანტი არის ვრონსკის დეტერმინანტი $W(s) \neq 0$. ცხადია, რომ ეს ამონახსნები უწყვეტი ფუნქციებია.

თეორემა 26.3. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 26.2 პირობები, მაშინ (26.6)-(26.8) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$z(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t;s) f(s) ds ,$$

სადაც $G(t;s)$ გრინის ფუნქციას აქვს (26.9) სახე.

დამტკიცება. ინტერვალი (t_1, t_2) დავყოთ ორ ქვეინტერვალად (t_1, t) და (t, t_2), მივიღებთ

$$z(t) = \int_{t_1}^{t} G(t;s) f(s) ds + \int_{t}^{t_2} G(t;s) f(s) ds = z_2(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s) ds + z_1(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s) ds . \quad (26.11)$$

გამოვთვალოთ $\dot{z}(t)$,

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_2(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s) ds + z_2(t) b(t) f(t) + \dot{z}_1(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s) ds - z_1(t) a(t) f(t) .$$

აქედან, $z_2(t)b(t) - z_1(t)a(t) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით (იხ. (26.10)), გვექნება

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_2(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s) ds + \dot{z}_1(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s) ds . \quad (26.12)$$

გამოვთვალოთ $\ddot{z}(t)$,

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}_2(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s) ds + \dot{z}_2(t) b(t) f(t) + \ddot{z}_1(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s) ds - \dot{z}_1(t) a(t) f(t) .$$

აქედან, $\dot{z}_2(t)b(t) - \dot{z}_1(t)a(t) = 1$ ტოლობის გათვალისწინებით (იხ. (26.10)), გვექნება

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}_2(t) \int_{t_1}^{t} b(s) f(s) ds + \ddot{z}_1(t) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s) ds + f(t) . \quad (26.13)$$

(26.11)-(26.13) ტოლობების გამოყენებით და გარკვეული დაჯგუფებით მივიღებთ

$$\ddot{z}(t) + a_1(t)\dot{z}(t) + a_2(t)z(t) = (\ddot{z}_2(t) + a_1(t)\dot{z}_2(t) + a_2(t)) \int_{t_0}^{t} b(s) f(s) ds +$$

$$(\ddot{z}_1(t) + a_1(t)\dot{z}_1(t) + a_2(t)z_1(t)) \int_{t}^{t_2} a(s) f(s) ds + f(t) = f(t) .$$

ამრიგად $z(t)$ აკმაყოფილებს (26.1) განტოლებას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $z(t)$ აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

$$\alpha_1\dot z(t_1)+\beta_1 z(t_1)=\alpha_1\dot z_1(t_1)\int_{t_1}^{t_2}a(s)f(s)ds+\beta_1 z_1(t_1)\int_{t_1}^{t_2}a(s)f(s)ds=$$

$$(\alpha_1\dot z_1(t_1)+\beta_1 z_1(t_1))\int_{t_1}^{t_2}a(s)f(s)ds=0.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$\alpha_2\dot z(t_2)+\beta_2 z(t_2)=0.$$

მაგალითი 26.1. იპოვეთ

$$\begin{cases}\ddot z+z=f(t),\\ z(0)=0,\dot z(\pi)=0,\end{cases}$$

სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქცია.

ამოხსნა. $\ddot z+z=0$ განტოლების ამონახსნი საწყისი პირობით $z(0)=0$ არის $z=c\sin t$. რადგანაც $\dot z(\pi)=-c$, ამიტომ სასაზღვრო ამოცანას

$$\begin{cases}\ddot z+z=0,\\ z(0)=0,\dot z(0)=0,\end{cases}$$

აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი. ამრიგად, თეორემა 26.2 პირობა შესრულებულია. ფუნქციები $z_1=\sin t$ და $z_2=\cos t$ აკმაყოფილებს განტოლებას და პირობებს $z_1(0)=0,\dot z_2(\pi)=0$. მიტომ (26.9) თანახმად

$$G(t;s)=\begin{cases}a(s)\sin t, t\in[0,s],\\ b(s)\cos t, t\in(s,\pi].\end{cases}$$

ახლა (26.10) პირობიდან ვიპოვოთ $a(s)$ და $b(s)$. ჩვენ შემთხვევაში (26.10) პირობას აქვს სახე

$$\begin{cases}a(s)\sin s-b(s)\cos s=0,\\ a(s)\cos s+b(s)\sin s=-1.\end{cases}$$

სისტემის ამონახსენია $a(s)=-\cos s$, $b(s)=-\sin s$.

ამოცანის ამონახსნია

$$G(t;s)=\begin{cases}-\cos s\ \sin t, t\in[0,s],\\ -\sin s\ \cos t, t\in(s,\pi].\end{cases}$$

§ 27. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი სამართი სისტემა და მისი ამონახსნი

R^n სივრცეში გავიხილოთ პარამეტრზე დამოკიდებული წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\dot x=Ax+Bu,\ \ x\in R^n, \qquad (27.1)$$

სადაც A და B მუდმივი მატრიცებია $n\times n$ და $n\times r$ განზომილებით. $u=(u_1,...,u_r)^T\in R^r$ პარამეტრს ეწოდება მართვა (მართვის პარამეტრი), ხოლო (27.1) განტოლებას სამართი დიფერენციალური განტოლება.

$u(t) \in R^r, t \in I = [a,b]$, ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი, თუ მონაკვეთი I შეიძლება დანაწილდეს სასრულ რაოდენობა $I_i, i = \overline{1,k}$ ქვემონაკვეთებად, რომლებზედაც $u(t)$ ფუნქცია უწყვეტია. $u(t)$ ფუნქციას მართვა ეწოდება.

განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{27.2}$$

სადაც $t_0 \in (a,b), x_0 \in R^n$.

განტოლების მარჯვენა მხარე $Ax + Bu(t)$ უბან-უბან უწყვეტია t-ს მიმართ, ამიტომ (27.2) ამოცანისთვის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემას უშუალოდ ვერ გამოვიყენებთ.

(27.2) ამოცანის ამონახსნი განიმარტება შემდეგნაირად. ვთქვათ $s_1 > t_0$ პირველი წერტილია, რომელზეც $u(t)$ განიცდის წყვეტას. $t \in [t_0, s_1]$ მონაკვეთზე განტოლების მარჯვენა მხარე უწყვეტია t-ს მიმართ, ამიტომ არსებობს (27..2) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t)$. ვთქვათ $s_2 > s_1$ არის $u(t)$ მართვის შემდეგი წყვეტის წერტილი, მაშინ $[s_1, s_2]$ მონაკვეთზე კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t), \\ x(s_1) = x_1(s_1), \end{cases}$$

ექნება ერთადერთი ამონახსნი $x_2(t), t \in [s_1, s_2]$.

ფუნქციას

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in [t_0, s_1] \\ x_2(t), t \in [s_1, s_2] \end{cases}$$

ეწოდება (27.2) ამოცანის ამონახსნი $[t_0, s_2]$ მონაკვეთზე. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ t_0 წერტილის მარჯვნივ და მარცხნივ , მაშინ ჩვენ ავაგებთ $u(t)$ მართვის შესაბამის $x(t)$ ამონახსნს I მონკვეთზე. აღსანიშნავია, რომ ასეთი წესით აგებული ამონახსნი ერთადერთია და მას , საზოგადოდ, $u(t)$ მართვის წყვეტის წერტილებში შეიძლება არ გააჩნდეს წარმოებული ე.ი. ამ წერტილებში იგი არ დააკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას.

ვთქვათ $U \subset R^r$ მოცემული სიმრავლეა. Ω-თი აღვნიშნოთ უბან-უბან უწყვეტი $u(t) \in U, t \in I$, მართვების სიმრავლე.

ყოველ ელემენტს $w = (t_0, x_0, u) \in W = I \times R^n \times \Omega$ შევუსაბამოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), x \in R^n \tag{27.3}$$

საწყისი პირობით

$$x(t_0) = x_0. \tag{27.4}$$

განსაზღვრება 27.1. $x(t) = x(t; w), t \in I$, ფუნქციას ეწოდება $w \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (27.4) პირობას. $x(t)$ ფუნქცია I მონაკვეთზე უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი და ყოველ $t \in I$ წერტილში, გარდა სასრულო რაოდენობა წერტილებისა, აკმაყოფილებს (27.3) დიფერენციალურ განტოლებას.

თეორემა 27.1. ყოველ $w \in W$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი.

ეს თეორემა არის ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის შედეგი.

სამართი განტოლების მაგალითი. ვთქვათ ერთეული მასის მქონე სხეული F ძალის მოქმედებით მოძრაობს ჰორიზონტალურ წრფეზე (სწორხაზოვნად). იპოვეთ სხეულის მოძრაობის აღმწერი დიფერენციალური განტოლება, თუ მხედველობაში არ მიიღება გარეშე ძალები (ხახუნი, ქარი და ა.შ.).

ვთქვათ $x = x(t)$ სხეულის მოძრაობის კანონია. ნიუტონის მეორე კანონის ($ma = F$) თანახმად სხეულის მოძრაობა აღიწერება მე-2 რიგის დიფერენციალური განტოლებით: $\ddot{x} = F$. ცხადია, რომ F ძალის ცვლილება მოქმედებს სხეულის მოძრაობაზე. ამიტომ F ძალა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მართვის პარამეტრი $u = F$.

ამრიგად სხეულის მოძრაობა აღიწერება შემდეგი სამართი დიფერენციალური განტოლებით

$$\ddot{x} = u,$$

რომელიც ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u. \end{cases}$$

§ 28. წრფივი სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანა. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

ვთქვათ ფაზურ სივრცეში ობიექტის მოძრაობის კანონი აღიწერება წრფივი მუდივკოეფიციენტებიანი სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n,$$

სადაც $u \in U$ მართვის პარამეტრია, $U \subset R^r$ მოცემული სიმრავლეა, A და B მუდმივი მატრიცებია $n \times n$ და $n \times r$ განზომილებით.

Ω-თი აღვნიშნოთ უბან-უბან უწყვეტი $u(t) \in U, t \in I = [a,b]$, მართვების სიმრავლე. ვთქვათ $x_0 \in R^n$ და $t_0 \in [a,b)$ მოცემული წერტილებია.

ყოველ $w = (t_1, u(t)) \in W = (t_0, b] \times \Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ დიერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), t \in [t_0, t_1] \tag{28.1}$$

საწყისი პირობით

$$x(t_0) = x_0. \tag{28.2}$$

განსაზღვრება 28.1. $x(t) = x(t; w)$, $t \in [t_0, t_1]$, ფუნქციას ეწოდება $w \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (28.2) პირობას. $x(t)$ ფუნქცია $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადი და ყოველ $t \in [t_0, t_1]$ წერტილში, გარდა სასრულო რაოდენობა წერტილებისა, აკმაყოფილებს (28.1) განტოლებას.

ყოველ $w \in W$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი $x(t)$.

განსაზღვრება 28.2. ვთქვათ $x_1 \in R^n$ მოცემული წერტილია, განსხვავებული x_0-გან. $w = (t_1, u(t)) \in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$x(t_1) = x_1. \tag{28.3}$$

ვთქვათ $w=(t_1,u(t))$ ელემენტი დასაშვებია, მაშინ ამბობენ რომ $u(t),t\in[t_0,t_1]$ მართვას ობიექტი გადაყავს ფაზური სივრცის x_0 წერტილიდან x_1 წერტილში t_1-t_0 დროის განმავლობაში.

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0.

ოპტიმალური არჩევანი ნიშნავს დასაშვებ ვარიანტებიდან საუკეთესოს არჩევას.

განსაზღვრება 28.3. $w_0=(t_{10},u_0(t))\in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $w=(t_1,u(t))\in W$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$t_{10}-t_0\le t_1-t_0. \qquad (28.4)$$

ვთქვათ $w_0=(t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, მაშინ $u_0(t)$ მართვას ეწოდება ოპტიმალური მართვა, ხოლო $x_0(t)=x(t;w_0),t\in[t_0,t_{10}]$ ტრაექტორიას (ამონახსნს) –ოპტიმალური ტრაექტორია. t_{10} ეწოდება ოპტიმალური მოენტი. $t_{10}-t_0$ დროს ეწოდება გადასვლის ოპტიმალური (საუკეთესო) დრო. ამრიგად, w_0 ელემენტი ოპტიმალურია, თუ გადასვლის დრო მინიმალურია.

(28.1)-(28.4) ამოცანას ეწოდება წრფივი სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანა. ამ ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს ოპტიმალური ელემენტი მოძებნას.

განხილული ოპტიმალური ამოცანა მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1,\\ t_1-t_0\to\min,\\ w=(t_1,u(t))\in W=(t_0,b]\times\Omega,\end{cases}$$

თეორემა 28.1. ვთქვათ $w_0=(t_{10},u_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi}=-\psi A,\psi=(\psi_1,...,\psi_n)$$

ერთგვაროვანი განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\psi(t),t\in[t_0,t_{10}]$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) ყოველი $t\in[t_0,t_{10}]$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\psi(t)Bu_0(t)=\max_{u\in U}\psi(t)Bu;$$

2) t_{10} მომენტში ადგილი აქვს უტოლობას

$$\psi(t_{10})[Ax_1+Bu_0(t_{10})]\ge 0.$$

1) პირობას ეწოდება პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი, იგი გვიჩვენებს რომ ყოველ $t\in[t_0,t_{10}]$ მომენტში $\psi(t)Bu$, როგორც $u\in U$ ცვლადის სკალარული ფუნქცია, თავის უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს $u_0(t)$ წერტილში. იგულისხმება, რომ $u(t)=u(t-),t\in(t_0,t_{10})$. 1) პირობა არის $u_0(t)$ მართვის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა. 2) არის t_{10} მომენტის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა. თეორემა 28.1 პირველად დამტკიცებული იყო რევაზ გამყრელიძის მიერ.

შენიშვნა 28.1. თუ $x_1 = 0_n$ და $0_r \in U$, მაშინ 2) პირობა ყოველთვის სრულდება. **(შეამოწმეთ)**

მაგალითი 28.1(ურიკას მინიმალურ დროში გაჩერების ამოცანა). დაწერეთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები ამოცანისთვის

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20},$$
$$x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0,$$

$$t_1 \to \min,$$

სადაც $U = [-1,1]$.

ამ შემთხვევაში $n = 2, r = 1$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \psi = (\psi_1, \psi_2).$$

განტოლებას ψ მიმართ ექნება სახე

$$(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = (\psi_1, \psi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

ეს განტოლება ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \end{cases}$$

რომლის ამონახსნია $\psi_1(t) \equiv c_1 = const$, $\psi_2(t) = -c_1 t + c_2$.

მაქსიმუმის პრინციპი:

$$(c_1, -c_1 t + c_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_0(t) = \max_{u \in [-1,1]} (c_1, -c_1 t + c_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

აქედან მიიღება

$$(-c_1 t + c_2) u_0(t) = \max_{u \in [-1,1]} (-c_1 t + c_2) u$$

ანუ

$$u_0(t) = sign(-c_1 t + c_2) = sign\, \psi_2(t)..$$

თუ $-c_1 t + c_2 \equiv 0$, მაშინ $c_1 = 0$ ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემა 28.1-ს ე.ი. ოპტიმალური $u_0(t)$ მართვის სტრუქტურა შეიძლება იყოს:

ა)

$$u_0(t) = \begin{cases} -1, & \psi_2(t) < 0, \\ 1 & \psi_2(t) > 0, \end{cases}$$

ბ)

$$u_0(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 0, \\ -1 & \psi_2(t) < 0, \end{cases}$$

ბ) $u_0(t)$ მუდმივია და იღებს მნიშვნელობას -1 ან 1.

პირობა t_{10} მომენტისთვის შესრულებულია, იხ. შენიშვნა 28.1.

§ 29. დიფერენციალური განტოლება დაგვიანებული არგუმენტით

დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობებზე t და წინა $t-\tau$ მომენტებში , სადაც τ დადებითი რიცხვია, ეწოდება დიფერენციალური განტოლება დაგვიანებული არგუმენტით ანუ დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლება.

არაწრფივი დაგვიანებულარგუმენტიანი განტოლებათა სისტემაა

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad x(t) \in R^n, \tag{29.1}$$

სადაც განტოლების მარჯვენა მხარე $f(t,x,y)$ უწყვეტია სიმრავლეზე $[t_0, t_1] \times R^n \times R^n$.

(29.1) განტოლების კერძო შემთხვევაა განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t) \in R^n.$$

ვთქვათ $\varphi(t) \in R^n, t \in [t_0 - \tau, t_0]$ უწყვეტი ფუნქციაა. $\varphi(t)$-ს ეწოდება საწყისი ფუნქცია.

განსაზღვრება 29.1. $x(t) \in R^n, t \in [t_0 - \tau, t_1]$ ფუნქციას ეწოდება კოშის ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \tag{29.2}$$

ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობებს:

29.1) $[t_0 - \tau, t_0]$ მონაკვეთზე $x(t) = \varphi(t)$;

29.2) $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე $x(t)$ უწყვეტად წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)).$$

(29.2) ამოცანას ეწოდება კოშის ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით.

გარკვეულ პირობებში, ბიჯის მეთოდით შეიძლება აგებული იქნას (29.2) ამოცანის ამონახსნი. ვიგულისხმოთ, რომ $t_0 + i\tau \le t_1$ გარკვეული $i = 1,2,...$-თვის.

$[t_0, t_0 + \tau]$ მონაკვეთზე (29.2) ამოცანა ეკვივალენტურია კოშის ამოცანის ჩვეულებრივი დიფერნციალური განტოლებისთვის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varphi(t-\tau)), \\ x(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases} \tag{29.3}$$

ვთქვათ $[t_0, t_0 + \tau]$ მონაკვეთზე არსებობს (29.3) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t)$. ახლა განვიხილოთ მონაკვეთი $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$. ამ მონაკვეთზე (29.2) ამოცანა ეკვივალენტურია ამოცანის

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, x_1(t-\tau)), \\ x(t_0 + \tau) = x_1(t_0 + \tau). \end{cases} \tag{29.4}$$

ვთქვათ არსებობს ამონახსნი $x_2(t), t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$x(t)=\begin{cases}x_1(t), t\in[t_0,t_0+\tau],\\ x_2(t), t\in[t_0+\tau,t_0+2\tau].\end{cases}$$

ცხადია

$$\dot{x}(t_0+\tau-)=\dot{x}_1(t_0+\tau-)=f(t_0+\tau,x_1(t_0+\tau),\varphi(t_0))=$$
$$f(t_0+\tau,x_2(t_0+\tau),x_1(t_0))=\dot{x}_2(t_0+\tau+)=\dot{x}(t_0+\tau+).$$

ფუნქცია $x(t)$ უწყვეტად წარმოებადია $t_0+\tau$ წერტილში. ამრიგად იგი არის $[t_0,t_0+2\tau]$ მონაკვეთზე (29.2) კოშის ამოცანის ამონახსნი.

ვთქვათ $x_0\in R^n$ და $\varphi(t_0)\neq x_0$. ამოცანას

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\qquad(29.5)$$

ეწოდება კოშის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით.

განსაზღვრება 29.2. $x(t)\in R^n, t\in[t_0-\tau,t_1]$ ფუნქციას ეწოდება (29.5) კოშის ამოცანის ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობებს:

29.3) $x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0), x(t_0)=x_0;;$

29.4) $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე $x(t)$ უწყვეტია და უბან-უბან უწვეტად წარმოებადი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau))$$

ყველგან გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

თეორემა 29.1. ვთქვათ ფუნქცია $f(t,x,y)$ უწყვეტია $[t_0,t_1]\times R_x^n\times R_y^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ. გარდა ამისა,

$$\left|f_x(t,x,y)\right|+\left|f_y(t,x,y)\right|\le M, \forall(t,x,y)\in[t_0,t_1]\times R^n\times R^n\ ,\ M>0.$$

მაშინ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\varphi(t), t\in[t_0-\tau,t_0]\end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t), t\in[t_0,t_1]$.

თეორემა 29.2. ვთქვათ ფუნქცია $f(t,x,y)$ უწყვეტია $[t_0,t_1]\times R^n\times R^n$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ. გარდა ამისა,

$$\left|f_x(t,x,y)\right|+\left|f_y(t,x,y)\right|\le M, \forall(t,x,y)\in[t_0,b]\times R^n\times R^n\ ,\ M>0.$$

მაშინ კოშის ამოცანას

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t), t \in [t_0, t_1]$.

სავარჯიშო 29.1. ბიჯის მეთოდით ავაგოთ, რომ $[t_0, t_0 + 2\tau]$ მონაკვეთზე

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0), \\ x(t_0) = x_0 \neq \varphi(t_0), \end{cases}$$

ამოცანის ამონახსნი $x(t)$ უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადია.

ძირითადი ლიტერატურა

1. ხაჟალია გ. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. „ცოდნა", თბილისი, 1961.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
4. Филиппов А.Ф. Сворник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979 (ქართული თარგმანი, ფილიპოვი ა.ფ. დიფერენციალური განტოლებების ამოცანათა კრებული, თბილისი, 1989).
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория птимальных процессов.-М. Наука, 1983.
6. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.Наука, 1969.

დამხმარე ლიტერატურა

1. მეცხვარიშვილი ი. მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებანი. „განათლება", თბილისი, 1968.
2. ჯანგველაძე თ. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები. თსუ, თბილისი, 2005.
3. მელაძე ჰ, სხირტლაძე ნ. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები. თსუ, თბილისი, 2000.
4. Кигурадзе И. Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений I. Тбилиси, 1997.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциалные уравнения. М. Наука, 1975.
6. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
8. АлексеевВ.М., Тихомиров В.М.,Фомин С.В., Оптимальное управление.М.Наука, 1979.
9. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.Наука, 1984.
10. Koplatadze R. On oscillatory properties of solutions of functional differential equations.

Memoirs on differential equations and mathematical physics, v.3,1994 , 1-179.
11. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси, Тб. Ун.-т, 1977.
12. Харатишвили Г.Л., Тадумадзе Т.А. Формулы вариации решения и задачи оптимального управления для дифференцианых уравнений с запаздывающими аргументами. Современная математика и ее приложения , т.25, Оптимальное управление, 2005, 3-166.