თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ინტერდისციპლინური (მათემატიკა, კომპიუტერული მეცნიერებები)
ქვემიმართულება: მათემატიკური ლოგიკა და დისკრეტული სტრუქტურები

ფაზილოგიკის საფუძვლები

ლექციათა კურსი

პეტრ ჰაეკის წიგნის

“ფაზილოგიკის მეტამათემატიკა”-ს საფუძველზე

რევაზ გრიგოლია

თბილისი

2011

I

1.1 შესავალი

ტერმინ "ფაზილოგიკა"-ს გააჩნია ორი განსვავებული მნიშვნელობა – ფართე და ვიწრო. ეს განსხვავება მითითებული იყო ლ. ზადეს მიერ: "ვიწრო გაგებით, ფაზილოგიკა, FLn, არის ლოგიკური სისტემა, რომელიც ისახავს მიზნად მიახლოებითი მსჯელობების ფორმალიზაციას. ამ აზრით, FLn არის მრავალნიშნა ლოგიკის გაფართოება. ფართო აზრით, ფაზილოგიკა, FLw, დაახლოებით სინონიმია ფაზისიმრავლის თეორიისა, FST, რომელიც წარმოადგენს კლასების თეორიას არამკაფიო საზღვრით. FST გაცილებით ფართოა ვიდრე FLn და შეიცავს მას როგორც ერთერთ "განშტოებას".

ჩვენი მთვარი მიზანია ყველაზე მნიშვნელოვანი მრავალნიშნა ლოგიკის მკაცრი ლოგიკური თვისებების დეტალური განხილვა, რომლის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს ერთეულ ინტერვალს [0,1] (პროპოზიციული და პრედიკატული ლოგიკის).

საიდან წარმოიშვება ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები ? უპირველესად, რატომ ერთეული ინტერვალი? და მეორე, რას ნიშნავს, რომ წინადადების ჭეშმარიტობის ხარისხი არის 0.7? შემოქთავაზებთ ტიპიურ მაგალითს *კითხვის სახით*: *გიყვართ ჰაიდნი?* და თქვენ უნდა აირჩიოთ ერთერთი ოთხი შესაძლო პასუხიდან: *აბსოლუტურად დიახ, მეტნაკლებად, უფრო არა, აბსოლუტურად არა.* ან თქვენ შეგიძლიათ იქონიოთ სხვა სკალა 11 შესაძლებლობებით, და ა. შ..

მეორე ქვეკითხვასთან დაკავშირებით, რას ნიშნავს, რომ წინადადების ჭეშმარიტობის ხარისხი არის 0.7, ჩვენ უნდა განვასხვავოთ, როგორც კლასიკურ ლოგიკაში, ატომური და შედგენილი წინადადებების შემთხვევა. პროპოზიციულ შემთხვევაში ჩვენ ვმუშაობთ მხოლოდ ატომური წინადადებების ჭეშმარიტობის შეფასებებით.

მრავალნიშნა ლოგიკების უმრავლესობა ჭეშმარიტ-ფუნქციონალურია. ეს ნიშნავს, რომ შედგენილი ფორმულის ჭეშმარიტობის ხარისხი, რომელიც აგებულია მისი შემადგენლობებისგან ლოგიკური კავშირების (იმპლიკაციისა, კონიუნქციისა და ა. შ.) გამოყენებით წარმოადგენს შემადგენლობების ჭეშმარიტობის ხარისხის ფუნქციას - კავშირების ჭეშმარიტობის ფუნქციები.

1.2.1 ბულის პროპოზიციული ლოგიკის მიმოხილვა

ბულის (კლასიკურ) პროპოზიციულ ლოგიკაში პროპოზიციები (გამონათქვამები) ან ჭეშმარიტია ან მცდარი. ჩვენ ვიყენებთ “ჭეშმარიტობას” და “მცდარობას” ორი *ჭეშმარიტობის მნიშვნელობებისთვის.* თითქმის ყოველთვის გაიგივებულია ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა “ჭეშმარიტი” რიცხვ 1 და “მცდარი” რიცხვ 0. გამოყენებულია *პროპოზიციული ცვლადები* p_1, p_2, … . *ჭეშმარიტობის შეფასება* (ან *შეფასება*) არის ასახვა e, რომელიც ანიჭებს ყოველ პროპოზიციულ ცვლად p-ს მის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას $e(p)$-ს. *ფორმულები* აიგება პროპოზიციული ცვლადების და პროპოზიციული კონსტანტების *0, 1 კავშირების* საშუალებით: *იმპლიკაცია* $\rightarrow$, *კონიუნქცია* $\wedge$, *დიზიუნქცია* $\vee$, *ექვივალენტობა* $\equiv$ და *უარყოფა* $\neg$. ფორმულები განისაზღვრება შემდეგნაირად: პროპოზიციული ცვლადები და პროპოზიციული კონსტანტები ფორმულებია; თუ φ და ψ ფორმულებია, მაშინ $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $\neg\varphi$ ფორმულებია. სხვა ფორმულები არ არსებობს.

ჭეშმარიტობის ფუნქციონალური პრინციპი გვეუბნება, რომ ფორმულის შემადგენელი ნაწილები ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები ცალსახად განსაზღვრავენ შედგენილი ფორმულის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობას. ეს მიიღწევა კავშირების *ჭეშმარიტობის ფუნქციების* განსაზღვრით შემდეგნაირად:

	$(-)$
1	0
0	1

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\cap$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\cup$	1	0
1	1	0
0	1	0

$\Leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

(აქ $(-)$ არის $\neg$ -ის ჭეშმარიტობის ფუნქცია, $\Rightarrow$ $\rightarrow$ -ის, და ა.შ.). ამის გამოყენებით, ყოველი შეფასება e ფართოვდება ცალსახად ყველა ფორმულებზე (რომელიც აგრეთვე აღინიშნება e –თი) შემდეგნაირად:

$$e(\neg\varphi) = (-)e(\varphi),$$

$$e(\varphi \rightarrow \psi) = (e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)),$$

$$e(\varphi \wedge \psi) = (e(\varphi) \cap e(\psi)),$$

$$e(\varphi \vee \psi) = (e(\varphi) \cup e(\psi)),$$

$$e(\varphi \equiv \psi) = (e(\varphi) \Leftrightarrow e(\psi)).$$

ეს შეიძლება აისახოს შემდეგი ცხრილით:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

1.2.2 ფორმულა φ-ის ეწოდება *ტავტოლოგია* თუ $e(\varphi) = 1$ ფორმულა φ-ის ნებისმიერი შეფასებისათვის. ფორმულები φ და ψ არიან *სემანტიკურად ექვივალენტურები* თუ $e(\varphi) = e(\psi)$ ნებისმიერი e-ათვის.

ლემა 1.2.3 შემდეგი ფორმულები ბულის ტავტოლოგიებია, ნებისმიერი φ და ψ ფორმულებისათვის:

$$\neg\varphi \equiv (\varphi \to \mathbf{0}),$$

$$\mathbf{1} \equiv (\mathbf{0} \to \mathbf{0}),$$

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi),$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv ((\varphi \to \psi) \to \psi),$$

$$(\varphi \equiv \psi) \equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)).$$

შედეგი 1.2.4 *ბულის პროპოზიციულ აღრიცხვაში ყოველი ფორმულა სემანტიკურად ექვივალენტურია ფორმულისა, რომელიც აგებულია პროპოზიციული ცვლადების და კონსტანტა* $\mathbf{0}$*-ის გამოყენებით მხოლოდ* $\to$ *-ის საშუალებით.*

ცხადია, წინა ლემის ექვივალენტობები მიუთითებენ როგორ უნდა მოვაშოროთ წარმატებით უარყოფა, $\mathbf{1}$, კონიუნქცია, დიზიუნქცია და ექვივალენტობა.

ლემა 1.2.5 *ნებისმიერი φ, ψ, χ ფორმულებისათვის, შემდეგი ფორმულები ბულის ტავტოლოგიებია:*

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \qquad (Bool\ 1)$$

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \qquad (Bool\ 2)$$

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \psi) \qquad (Bool\ 3)$$

ჩვენ ამ ფორმულებს ვიღებთ ბულის ლოგიკის დედუქციური სისტემა *Bool* – თვის. 1.2.4 –ის თანახმად ჩვენ შემოვიფარგლებით ფორმულებით, რომლებიც აგებულია პროპოზიციული ცვლადების და **O**-ის საშუალებით მხოლოდ $\rightarrow$-ის გამოყენებით.

განსაზღვრება 1.2.6 *Bool –ის* ***აქსიომებს*** *წარმოადგენენ ფორმულები* (*Bool* 1), (*Bool* 2), (*Bool* 3) (*ნებისმიერი φ, ψ, χ ფორმულებისათვის*). ***გამოყვანის წესს*** *წარმოადგენს* ***მოდუს პონენსი***: *φ და $\varphi \rightarrow \psi$ ფორმულებიდან გამოიყვანება ფორმულა ψ.*

დამტკიცება *Bool* –ში არის ფორმულების მიმდევრობა $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ისეთი, რომ φ_i არის ან *Bool –ის* აქსიომა ან გამომდინარეობს წინამდებარე ფორმულებიდან φ_j, φ_k ($j, k < i$) მოდუს პონენსის საშუალებით. ფორმულა *დამტკიცებადია (ან თეორემაა)* (აღინიშნება როგორც $\vdash \varphi$), თუ ის დამტკიცების ბოლო წევრია *Bool* –ში.

ლემა 1.2.7 *(კორექტულობა.) ყოველი ფორმულა, რომელიც დამკიცებადია Bool –ში არის ბულის ტავტოლოგია.*

განსაზღვრა 1.28 *თეორია არის ფორმულათა სიმრავლე, რომელსაც უწოდებენ თეორიის სპეციალურ აქსიომებს. დამტკიცება T თეორიაში არის ფორმულების მიმდევრობა $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ისეთი, რომ φ_i* არის ან *Bool –ის აქსიომა ან თეორია T-ეს სპეციალური აქსიომა ან გამომდინარეობს წინამდებარე ფორმულებიდან φ_j, φ_k ($j, k < i$) მოდუს პონენსის საშუალებით. ფორმულა დამტკიცებადია (ან თეორემაა) (აღინიშნება როგორც $T \vdash \varphi$), თუ ის დამტკიცების ბოლო წევრია. შეფასება e არის T-ეს მოდელი, თუ $e(\varphi) = 1$ ნებისმიერი $\varphi \in T$.*

ლემა 1.2.9 *(მკაცრი კორექტულობა.) თუ $T \vdash \varphi$, მაშინ φ ჭეშმარიტია T-ეს ყოველ მოდელში (ე.ი. როცა e T-ეს მოდელია, მაშინ $e(\varphi) = 1$).*

თეორემა 1.2.10 *დედუქციის თეორემა. დავუშვათ φ, ψ T თეორიის ფორმულებია.*

$$(T \cup \{\varphi\}) \vdash \psi \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } T \vdash (\varphi \rightarrow \psi).$$

თეორემა 1.2.10 *(სისრულე.)* (1) *ნებისმიერი φ ფორმულისათვის, φ დამტკიცებადია* *Bool* –ში *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ბულის ტავტოლოგიაა.*

(2) *(მკაცრი სისრულე.) დავუშვატ T არის თეორია, φ ფორმულა. $T \vdash \varphi$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა φ ჭეშმარიტია T-ეს ნებისმიერ მოდელში.*

1.2.13 *ლიტერალი* არის შემდეგი ფორმის ფორმულა: p_i ან $\neg p_i$, სადაც p_i არის პროპოსიციული ცვლადი. *n სიგრძის ელემენტარული კონიუნქცია* არის არის ფორმულა $\bigwedge^n_{i=1} L_i$, სადაც L_i არის ლიტერალი.

ლემა 1.2.14 *(ნორმალური ფორმა). ნებისმიერი ფორმულა, რომელიც არ შეიცავს პროპოზიციულ ცვლადებს გარდა $p_1,\ldots,p_n$, სემანტიკურად ექვივალენტურია სასრული რაოდენობა ელემენტარული კონიუნქციების დიზიუნქციისა.*

1.3 ბულის (კლასიკური) პრედიკატული აღრიცხვა

განსაზღვრება 1.3.1 *პრედიკატული ენა* შედგება *პრედიკატთა* არაცარიელი სიმრავლისგან, ყოველი მათგანი დადებითი ნატურალური რიცხვით – *რამდენადგილიანია* ის და *საგნობრივი კონსტანტთა* (შესაძლო ცარიელი) სიმრავლისგან. პრედიკატები ზოგადად აღინიშნებიან *P, Q, R, …* სიმბოლოებით, კონსტანტები *c,d, ….* სიმბოლოებით. *ლოგიკური სიმბოლოები* არიან *საგნობრივი ცვლადები x, y, …, ლოგიკური კავშირი -* $\to$, *ჭეშმარიტობის კონსტანტები* 0, 1 და კვანტორი $\forall$. დანარჩენი კავშირები ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\equiv$) განისაზღვრება ისევე როგორც პროპოზიციულ აღრიცხვაში; *არსებობის კვანტორი* $\exists$ განისაზღვრება როგორც $\neg\forall\neg$. *ტერმებს* წარმოადგენენ საგნობრივი ცვლადები და საგნობრივი კონსტანტები.

ატომურ ფორმულებს გააჩნიათ სახე $P(t_1, \ldots , t_n)$, სადაც P არის n-ადგილიანი პრედიკატი და $t_1, \ldots , t_n$ არის ტერმები. თუ φ და ψ ფორმულებია და x საგნობრივი ცვლადია, მაშინ $\varphi \to \psi$, $(\forall x)\psi$, 0, 1 ფორმულებია; ყოველი ფორმულა აიგება ატომური ფორმულებიდან მოცემული წესის საშუალებით.

$\mathcal{L}$ იყოს პრედიკატული ენა. $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c\rangle$ *სრუქტურას* $\mathcal{L}$ პრედიკატული ენისთვის გააჩნია არაცარიელი *დომეინი M,* ყოველი n-არული P პრედიკატისთვის n-არული მიმართება $r_P \subseteq M^n$ M-ზე (რომელიც წარმოადგენს $(m_1, \ldots , m_n)$ n-ულების სიმრავლეს M^n–დან, სადაც $r_P(m_1, \ldots , m_n)=1 \Leftrightarrow (m_1, \ldots , m_n)\in r_P$, და ყოველ საგნობრივ c კონსტანტას შეუსაბამებს რომელიღაც ელემენტ m_c-ეს M–დან.

განსაზღვრება 1.3.3 $\mathcal{L}$ იყოს პრედიკატული ენა და $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c\rangle$ სრუქტურა $\mathcal{L}$ ენისთვის. M– *შეფასება საგნობრივი ცვლადებისთვის* არის ასახვა v, რომელიც ანიჭებს ყოველ საგნობრივ x ცვლადს ელემენტს $v(x)\in M$, ხოლო $v(c) = m_c)\in M$. თუ v, v' ორი შეფასებაა, მაშინ $v \equiv_x v'$ ნიშნავს, რომ $v(y) = v'(y)$ ნებისმიერი y ცვლადისთვის, რომელიც განსხვავებულია x-გან.

M–შეფასება v შეგვიძლია გავაფართოვოთ ყველა ფორმულებზე შემდეგნაირად.

$$v(P(t_1, \dots , t_n)) = r_P(v(t_1), \dots , v(t_n));$$

$$v(\varphi \to \psi) = v(\varphi) \Rightarrow v(\psi);$$

$$v(\mathbf{0}) = 0; \ v(\mathbf{1}) = 1;$$

$$v((\forall x)\varphi) = \min \{ v'(\varphi): v \equiv_x v'\}.$$

განსაზღვრება 1.3.4 ფორმულის *თავისუფალი და ბმული ცვლადები* განისაზღვრება შემდეგნაირად:

- ჭეშმარიტობის კონსტანტები არ შეიცავენ არც ბმულ და არც თავისუფალ ცვლადებს.
- თუ φ ატომურია, ვთქვათ $P(t_1, \dots , t_n)$, x არის თავისუფალი φ-ში, თუ x არის ერთერთი $t_1, \dots , t_n$ –გან; არცერთი ცვლადი φ-ში არ არის ბმული.
- ცვლადი x არის თავისუფალი $\varphi \to \psi$-ში, თუ ის თავისუფალია ან φ -ში ან ψ-ში; x არის ბმული $\varphi \to \psi$-ში, თუ ის ბმულია ან φ -ში ან ψ-ში.
- ცვლადი x არის ბმული $(\forall x)\varphi$ -ში და არ არის თავისუფალი $(\forall x)\varphi$ -ში. ნებისმიერი ცვლადი y, რომელიც განსხვავებულია x-გან, არის თავისუფალი ან ბმული $(\forall x)\varphi$-ში, თუ ის თავისუფალია ან ბმულია φ-ში.

განსაზღვრება 1.3.6 განვსაზღვროთ შედეგი, რომელიც მიიღება ტერმ t-ს *ჩანაცვლებით* ცვლად x-ის ნაცვლად φ-ში, აღნიშვნაში $\varphi(x/t)$.

- თუ φ ატომურია, მაშინ $\varphi(x/t)$ მიიღება ყველა x-ების ჩანცვლებით φ-ში t-თი. $\mathbf{0}(x/t) = \mathbf{0}$; $\mathbf{1}(x/t) = \mathbf{1}$.
- $(\varphi \to \psi)(x/t)$ არის $\varphi(x/t) \to \psi(x/t)$
- $[(\forall x)\varphi](x/t)$ არის $(\forall x)\varphi$ (ცვლილების გარეშე); ყოველი y ცლადისთვის, რომელიც განსხვავებულია x-გან, $[(\forall x)\varphi](x/t)$ არის $(\forall y)[\varphi(x/t)]$.

ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ქვეფორმულის ცნება:

- ყოველი ფორმულა φ არის თავის თავის ქვეფორმულა.
- თუ φ არის ψ-ს ან χ-ის ქვეფორმულა, მაშინ φ არის $\psi \to \chi$ -ის ქვეფორმულა. თუ φ არის ψ-ს ქვეფორმულა, მაშინ φ არის $(\forall x)\varphi$-ის ქვეფორმულა.

განსაზღვრება 1.3.7 ცლადი y არის *ჩანაცვლებადი x-სთვის ფორმულა* φ-ში, თუ არ არსებობს φ-ის ქვეფორმულა $(\forall x)\psi$ სახის, რომელიც შეიცავს x-ს თავისუფლად φ-ში.

განსაზღვრება 1.3.8 (1) φ იყოს $\mathcal{L}$ ენის ფორმულა და $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c \rangle$ სრუქტურა $\mathcal{L}$ ენისთვის. φ-ის *ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა* M–ში არის

$$\|\varphi\|_{\mathrm{M}} = \min\{v(\varphi) : v \ \mathrm{M}\text{-შეფასებაა}\}.$$

(2) $\mathcal{L}$ ენის ფორმულა φ არის *ტავტოლოგია*, თუ $\|\varphi\|_{\mathrm{M}}=1$ ნებისმიერი M სტრუქტური-სათვის.

განსაზღვრება 1.3.9 *Bool*$\forall$ ბულის (კლასიკურ) პრედიკატთა აღრიცხვის *ლოგიკური აქსიომები* შედგება ბულის (კლასიკურ) პროპოზიციული აღრიცხვის აქსიომებისგან დამატებული შემდეგი *კვანტორების ლოგიკური აქსიომები:*

($\forall$1) $(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(t)$ (t ჩანაცვლებადია x-თვის $\varphi(x)$-ში)

($\forall$1) $(\forall x)(\psi \to \varphi) \to (\psi \to (\forall x)\varphi)$ (x არ არის თავისუფალი ψ–ში)

გამოყვანის წესებია მოდუს პონენსი (φ და $\varphi \to \psi$ - დან გამომდინარეობს ψ) და *განოგადოების წესი* (φ-დან გამოიყვანება $(\forall x)\varphi$).

განსაზღვრება 1.3.10 დავუშვათ, რომ T არის *Bool*$\forall$-ის თეორია, M არის სტრუქტურა *T-ს* ენისთვის. M არის *T-ს მოდელი*, თუ T-ს ყველა აქსიომები ჭეშმარიტია M–ში, ე. ი. $\|\varphi\|_{\mathrm{M}}=1$ ნებისმიერი $\varphi \in T$.

განსაზღვრება 1.3.11 *(მკაცრი სისრულე)* (1) ნებისმიერი φ ფორმულისათვის φ დამტკიცებადია *Bool*$\forall$-ში (თეორემაა) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა φ ტავტოლოგიაა.

(2) ნებისმიერი φ ფორმულისათვის და ნებისმიერი T თეორიისათვის, $T \vdash_{Bool(\forall)} \varphi$ (ე. ი. T-ში დამტკიცებადია φ) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\|\varphi\|_{\mathrm{M}}=1$ ნებისმიერ T-ს მოდელში.

განსაზღვრება 1.3.12 თეორია T *წინააღმდეგობრივია*, თუ რომელიღაც φ-თვის, T-ში დამტკიცებადია φ და დამტკიცებადია $\neg\varphi$. *T არაწინააღმდეგობრივია,* თუ არ არის წინააღმდეგობრივი.

შედეგი 1.3.13 T არაწინააღმდეგობრივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მოდელი.

1.4. ფუნქციონალური სიმბოლოები; ალგებრათა მრავალსახეობები

აქ ჩვენ განვიხილავთ ბულის პრედიკატულ ლოგიკას ფუნქციონალური სყმბოლოებით. ამ ლოგიკაში ჩვენ გვაქვს ფორმულები მსგავსად $x + y = y + x$. ერთის მხრივ, ეს ლოგიკა სრულად დაიყვანება Bool∀ ლოგიკამდე; მეორეს მხრივ, ფორმულები მსგავსად ზემოდ მოყვანილისა (ტერმების ტოლობა) ძალიან სასარგებლოა სხვადასხვა ალგებრების კლასების განსაზღვრისთვის.

განსაზღვრება 1.4.1 *პრედიკატული ენა $\mathcal{I}$ ფუნქციონალური სიმბოლოებითურთ* შედგება პრედიკატთა სიმბოლოების $P, Q, \ldots$ არაცარიელი სიმბოლოებისგან (თავისი ადგილების მითითებით) სიმრავლისგან, საგნობრივი კონსტანტების $c, d, \ldots$ (შესაძლო ცარიელი) სიმრავლისგან და ფუნქციონალურ სიმბოლოების $F, G, \ldots$ (არაცარიელი) სიმრავლისგან (თავისი ადგილების მითითებით). *ტერმები* განისაზღვრება შემდეგნაირად: საგნობრივი ცვლადები და საგნობრივივი ცვლადები არის ტერმები; თუ F არის n-არული ფუნქციონალური სიმბოლო და $t_1, \ldots, t_n$ *ტერმებია,* მაშინ $F(t_1, \ldots, t_n)$ ტერმია; სხვა ტერმები არ არსებობს. $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c, (f_F)_F \rangle$ *სრუქტურას* $\mathcal{I}$ პრედიკატული ენისთვის გააჩნია არაცარიელი *დომეინი* M, ყოველი n-არული P პრედიკატისთვის n-არული მიმართება $r_P \subseteq M^n$ M-ზე (რომელიც წარმოადგენს $(m_1, \ldots, m_n)$ n-ულების სიმრავლეს M^n–დან, სადაც $r_P(m_1, \ldots, m_n)=1 \Leftrightarrow (m_1, \ldots, m_n) \in r_P$), $f_F : M^n \to M$ არის n-არული ოპერაცია M-ზე, და ყოველ საგნობრივ c კონსტანტას შეუსაბამებს რომელიღაც ელემენტ m_c-ეს M–დან.

თუ გვაქვს შეფასება r საგნობრივი ცვლადებისთვის, მაშინ $r(t)$ t ტერმისთვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$r(x) \in M$ ყოველი საგნობრივი x ცვლადისთვის,

$r(c) = m_c \in M$ ყოველი საგნობრივი c კონსტანტასათვის,

$r(F(t_1, \ldots, t_n)) = f_F(r(t_1), \ldots, r(t_n))$.

ფორმულა φ-ის შეფასება $r(\varphi)$ განისაზღვრება ისევე, როგორც 1.3.3-ში.

განსაზღვრება 1.4.3 ლოგიკური აქსიომები არის იგივე, რაც 1.3.9-ში, ოღონდ ჩანაცვლადებადობის განსაზღვრება მოდიფიცირებულია შემდეგნაირად:

ტერმი t ჩანაცვლებადია x-სთვის φ-ში, თუ ყოველი y ცვლადისთვის შემავალი t-ში, არცერთი $(\forall x)\varphi$ სახის φ-ის ქვეფორმულა არ შეიცავს b-ის თავისუფალ შემავლობას φ-ში.

განსაზღვრება 1.4.11 *ალგებრა* არის $\langle M, f_1, \dots, f_n\rangle$ სახის სტრუქტურა, სადც $f_1, \dots, f_n$ არის ოპერაციები M–ში. ასეთი ალგებრა არის ბუნებრივი სტრუქტურა $\mathcal{I}$ პრედიკატული ენისა, რომელსაც გააჩნია ტოლობის პრედიკატი = და შესაბამისი ადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლოები $F_1, \dots, F_n$.

განსაზღვრება 1.4.12 $\mathcal{I}$ იყოს ეანა $(=, F_1, \dots, F_n)$ n ფუნქციებით, $\mathcal{K}$ სტრუქტურების კლასი $\mathcal{I}$ ენისთვის (= ინტრპრეტირებულია როგორც იგივეობა). $\mathcal{K}$ არის *მრავალსახეობა*, თუ არსებობს T ტოლობების ($\mathcal{I}$ –ს ატომური ფორმულები), ისეთი, რომ $\mathcal{K}$ არის $\mathcal{I}$ –ს ყველა M სტრუქტურების კლასი (= ინტრპრეტირებულია როგორც იგივეობა), ისეთი, რომ ყველა ტოლობები T-დან ჭეშმარიტია M –ში.

შენიშვნა 1.413 ნახევარჯგუფები, მესერები, ბულის ალგებრები ჰქმნიან მრავალსახეობას.

განსაზღვრება 1.4.14 დავუშვათ გვაქვს $\mathcal{I}$ ენის (ტოლობით) სტრუქტურები $\mathrm{M}_1= \langle M_1, f_1, \dots, f_n\rangle$, $\mathrm{M}_2=\langle M, g_1, \dots, g_n\rangle$.

(1) M_1 არის M_2-ის *ქვეალგებრა,* თუ M_1 არის M_2-ის *ქვესიმრავლე* და ყოველი $i = 1, \dots, n$, f_i არის g_i–ის შეზღუდვა $M_1^{\mathrm{ar}(f_i)}$-ზე.

(2) M_1 არის M_2-ის *ჰომომორფული სახე,* თუ არსებობს ასახვა h M_2-დან M_1-ზე, რომელიც კომუტირებს ოპერაციებთან, ე. ი. ყოველი $i = 1, \dots, n$, და ნებისმიერი $a_1, \dots, a_n \in M_2$, $h(a_1, \dots, a_n) = g(h(a_1), \dots, h(a_n))$.

(3) *პირდაპირი ნამრავლი* $\Pi_{i\in I} M_i$ არის ალგებრა $\mathrm{M}= \langle M, f_1, \dots, f_n\rangle$, სადაც $M=\{\boldsymbol{a}\colon \boldsymbol{a} =(a_1, \dots, a_i, \dots), a_i\in M_i\}$ და n ადგილიანი f_i ოპერაციისათვის $f_i(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}) = (f_i(a_{11}, \dots, a_{1n}), f_i(a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, f_i(a_{j1}, \dots, a_{jn}), \dots)$, სადც $\boldsymbol{a_1}=(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots)$, $\boldsymbol{a_2}=(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots)$, ..., $\boldsymbol{a_n}=(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots)$.

თეორემა 1.4.15 *ბიკჰოფის თეორემა.* ალგებრათა კლასი არის მრავალსახეობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჩაკეტილია ქვეალგებრები, ჰომომორფული ასახვების და პირდაპირი ნამრავლების მიმართ.

1.5 მესერები და ბულის ალგებრები.

განსაზღვრება 1.5.1 ალგებრა $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup\rangle$ არის მესერი, თუ $\mathbf{L}$ –ში ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობები:

$$x \cap x = x \qquad x \cup x = x \qquad \text{(იდემპოტენტურობა)}$$

$$x \cap y = y \cap x \qquad x \cup y = y \cup x \qquad \text{(კომუტაციურობა)}$$

$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z \qquad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ (ასოციაციურობა)

$x \cap (x \cup y) = x \qquad x \cup (x \cap y) = x$ (შთანთქმის)

ლემა 1.5.3 $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup\rangle$ იყოს მესერი.

(1) ნებისმიერი $a,b \in L$, $a \cap b = a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \cup b = b$.

(2) მიმართება $x \leq y$ განსაზღვრულია როგორც $x \cap y = x$ (ექვივალენტურად, $x \cup y = y$).

მაშინ $\langle L, \leq\rangle$ არის დალაგებული სიმრავლე და:

$x \cap y \leq x,\ x \cap y \leq y,\ (\forall z)((z \leq x \wedge z \leq y) \rightarrow z \leq x \cap y);$

$x \leq x \cup y,\ y \leq x \cup y,\ (\forall z)((x \leq z \wedge y \leq z) \rightarrow x \cup y \leq z).$

3) მეორეს მხრივ, თუ $\langle L, \leq\rangle$ არის დალაგებული სიმრავლე, სადაც ელემენტთა ყოველ წყვილს გააჩნია მისი სუპრემუმი და ინფიმუმი, მაშინ ჩვენ ვუშვებთ $x \cap y = \inf(x,y)$, $x \cup y = \sup(x,y)$ და ვღებულობთ ალგებრას $\langle L, \cap, \cup\rangle$, რომელიც მესერია.

განსაზღვრება 1.5.4 ყოველი $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup\rangle$ მესერისთვის, დალაგებას $\leq$ წინამდებარე ლემიდან უწოდებენ *დალაგებას განსაზღვრულ* **L***-ით* ან უბრალოდ **L**-ის *დალაგებას.* ჩვენ ვაიგივებთ $\langle L, \cap, \cup\rangle$-ს $\langle L, \cap, \cup, \leq\rangle$-თან.

ლემა 1.5.5 ყოველ **L** მესერში $\cap$ და $\cup$ არის არაკლებადი $\leq$ დალაგების მიმართ.

განსაზღვრება 1.5.6 **L** მესერი *დისტრიბუციულია,* თუ ან ტოლობა

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z),$$

ან ტოლობა

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z),$$

ჭეშმარიტია **L**-ში.

განსაზღვრება 1.5.9 ალგებრა $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup, 0, 1, -\rangle$ არის *ბულის ალგებრა,* თუ $\langle L, \cap, \cup\rangle$ დისტრიბუციული მესერია, 0 არის **L**-ის უმცირესი ელემენტი, 1 არის **L**-ის უდიდესი ელემენტი და $-$ არის დამატება, ე. ი. ტოლობებს, რომლებიც განსაზღვრავენ დისტრიბუციულ მესერს, ემატება შემდეგი ჭეშმარიტი ტოლობები **L**-ში:

$$x \cap 0 = 0 \qquad\qquad x \cup 1 = 1,$$

$$x \cup -x = 1,$$

$$x \cap -x = 0.$$

განსაზღვრება 1.5.11 **L** იყოს მესერი და $X \subseteq L$. X-ის *სუპრემუმი* არის ელემენტი $a \in L$, რომელიც არის X-ის უმცირესი ზედა საზღვარი, ე. ი. $b \le a$ ნებისმიერი $b \in X$ და როცა $b \le c$ ნებისმიერი $b \in X$, მაშინ $a \le c$. ჩვენ ვწერთ $\sup X$ X-ის სუპრემუმისთვის. ანალოგიურად (დუალურად) განისაზღვრება X-ის ინფიმუმი, როგორც უდიდესი ქვედა საზღვარი.

შენიშვნა 1.5.12 შესაძლებელია, რომ X-ს არ გააჩნდეს სუპრემუმი; მაგრამ, თუ ის არსებობს ის ცალსახად განისაზღვრება. ანალოგიურად ინფიმუმისათვის. **L** მესერი არის *სრული,* თუ ყოველ $X \subseteq L$ გააჩნია თავისი sup და inf.

II

მრავალნიშნა პროპოზიციული აღრიცხვა

2.1 ნამდვილ რიცხვთა ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები, *t*-ნორმები და მათი რზიდუალობა

აღვნიშნოთ, რომ თავში ჩვენ განვიხილავთ *პროპოზიციულ ლოგიკას.* ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს [0,1] ინტერვალი, სადაც 1 წარმოადგენს აბსოლუტურ ჭეშმარიტობას, ხოლო 0 აბსოლუტურ მცდარობას.

ჩვენ განვიხილავთ ისეთ ლოგიკურ აღრიცხვებს სდაც ყოველ კავშირ c-ეს, ვთქვათ ბინარულ კავშირს, გააჩნია ჭეშმარიტობის ფუნქცია f_c:$[0,1]^2 \to [0,1]$ (ე. ი. $f_c(x,y)\in[0,1]$ ნებისმიერი $x,y\in[0,1]$), რომელიც ყოველი წყვილი φ, ψ ფორმულებისთვის ჭეშმარიტობის ხარისხი შედგენილი ფორმულისათვის $c(\varphi,\psi)$ (ან $\varphi c\psi$ თუ ასე უფრო მოსახერხებელია) განისაზღვრება შემადგენელი ფორმულების ჭეშმარიტობის ხარისხებით.

მრავალნიშნა ლოგიკა არის კლასიკური ლოგიკის განზოგადოება იმ გაგებით, რომ ჭეშმარიტობის 0, 1 მნიშვნელობებზე ჭეშმარიტობის ფუნქციები ერთმანეთს ემთხვევა.

განსაძღვრება 2.1.1 *t-ნორმა* არის ბინარული ოპერაცია $*$ [0,1]-ზე (ე. ი. t:$[0,1]^2 \to [0,1]$), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) $*$ კომუტაციური და ასოციაციურია, ე. ი. ნებისმიერი $x,y,z\in[0,1]$,

$$x * y = y * x,$$

$$(x * y) * z = x * (y * z),$$

(ii) $*$ არაკლებადია ორივე არგუმენტის მიმართ, ე. ი.

$$x_1 \le x_2 \quad\Rightarrow\quad x_1 * y \le x_2 * y,$$

$$y_1 \le y_2 \quad\Rightarrow\quad x * y_1 \le x * y_2,$$

(iii) $1 * x = x$ და $0 * x = 0$ ნებისმიერი $x\in[0,1]$.

$*$ არის *უწყვეტი t-ნორმა,* თუ ის t-ნორმაა და ასახვა უწყვეტია $[0,1]^2$-დან [0,1]-ში.

მაგალითი 2.1.2 მნიშვნელოვანი უწყვეტი t-ნორმები წარმოდგენილია შემდეგი მაგალითებით:

(i) *ლუკასევიჩის t-ნორმა*: $x * y = \max(0, x + y - 1)$,

(ii) *გოედელის t-ნორმა*: $x * y = \min(x,y)$,

(iii) *ნამრავლის t-ნორმა*: $x * y = x \cdot y$ (ნამდვილ რიცხვთა ნამრავლი).

ლემა 2.1.4 დავუშვათ, რომ $*$ არის უწყვეტი t-ნორმაა. მაშინ არსებობს ერთადერთი ოპერაცია $x \Rightarrow y$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $(x * z) \le y$ მაშინ და მოლოდ მაშინ, როცა $z \le (x \Rightarrow y)$, სახელდობრ $x \Rightarrow y = \max\{z : x * z \le y\}$, ნებისმიერი $x,y,z \in [0,1]$.

დამტკიცება. ნებისმიერი $x,y \in [0,1]$ დავუშვათ $x \Rightarrow y = \sup\{ z : x * z \le y\}$. დავუშვათ, ფიქსირებული z-თვის $f(x) = x*z$; f უწყვეტია და არაკლებადი და მაშასადამე კომუტირებს sup–თან. მაშასადამე

$$x *(x \Rightarrow y) = x *\sup\{ z : x * z \le y\} = \sup\{ x * z : x * z \le y\} \le y.$$

ე. ი. $x \Rightarrow y = \max\{z : x * z \le y\}$. ერთადერთობა ცხადია. □

განსაზღვრება 2.1.5 ოპერაციას $x \Rightarrow y$ 2.1.4-დან უწოდებენ t-ნორმის *რეზიდუუმს.*

ადვილად მტკიცდება შემდეგი

ლემა 2.1.6 ყოველი $*$ t-ნორმისათვის და მისი $\Rightarrow$ რეზიდუუმისათვის

(i) $x \le y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \Rightarrow y = 1$.

(ii) $1 \Rightarrow x = x$.

თეორემა 2.1.7 შემდეგი ოპერაციები წარმოადგენენ სამი t-ნორმის რეზიდუუმს: $x \Rightarrow y = 1$, თუ $x \le y$ და

(i) *ლუკასევიჩის იმპლიკაცია*: $x \Rightarrow y = 1 - x + y$

(ii) *გოედელის იმპლიკაცია*: $x \Rightarrow y = y$

(iii) *გოგენის იმპლიკაცია*: $x \Rightarrow y = y/x$, თუ $x > y$.

განსაზღვრება 2.1.8 შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ [0,1] ინტერვალს როგორც ალგებრას, რომელიც აღჭურვილია ოპერაციებით min და max, ფიქსირებული t ნორმით $*$ და მისი რეზიდუუმით $\Rightarrow$, ასევე ელემენტებით 0, 1. ეს ალგებრა აღინიშნება $L(*)$-ით. ჩვენ გამოვიყენებთ $\cap$ და $\cup$ min და max აღსანიშნავათ.

შევნიშნოთ, რომ დალაგება $\le$ განისაზღვრება: $x \le y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \cap y = x$.

ლემა 2.1.9 ნებისმიერი უწყვეტი t ნორმისთვის $*$, შემდეგი ტოლობები ჭეშმარიტია $L(*)$-ში:

(i) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$,

(ii) $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap (y \Rightarrow x) \Rightarrow x))$.

განსაზღვრება 2.1.11 რეზიდუუმით $\Rightarrow$ განსღვრავს შესაბამის *დამატებას* $(-)x = (x \Rightarrow 0)$ (უარყოფა).

ლემა 2.1.12 შემდეგი ოპერაციები წარმოადგენენ განსხვავებული t ნორმების დამატებებს:

(i) ლუკასევიჩის უარყოფა $(-)x = 1 - x$.

(ii) გოედელის უარყოფა $(-)0 = 1$, $(-)x = 0$ roca $x > 0$.

შემდგომში, $*$-ით აღვნიშნავთ უწყვეტ t ნორმას; ჩვენ გამოვიკვლევთ კომუტაციურ დალაგებულ ნახევარჯგუფს $\langle [0,1], *, \leq \rangle$. გავიხსენოთ, რომ ელემენტი x *იდემპოტენტურია,* თუ $x * x = x$. ე. ი. ორივე 0 და 1 იდემპოტენტურია; t ნორმას შეიძლება გააჩნდეს ან არ გააჩნდეს სხვა იდემპოტენტური ელემენტები.

2.2. ბაზისური მრავალნიშნა ლოგიკა

თუ ჩვენ ვაფიქსირებთ t-ნორმას $*$, მაშინ ჩვენ ვაფიქსირებთ პროპოზიციულ აღრიცხვას (რომლის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის [0,1]): $*$ აღებულია (მკაცრი) კონიუნქციის & ჭეშმარიტობის ფუნქციისთვის, $*$-ის რეზიდუუმი ხდება იმპლიკაციის ჭეშმარიტობის ფუნქციად.

განსაზღვრება 2.2.1 *პროპოზიციული აღრიცხვას* $PC(*)$, რომელიც მოცემულია $*$-ით, გააჩნია პროპოზიციული ცვლადები $p_1, p_2, \ldots$, კავშირები $\&$, $\rightarrow$ და ჭეშმარიტობის კონსტანტა $\mathbf{0}$ 0-სთვის. *ფორმულები* განისაზღვრება ჩვეულებრივი გზით: ყოველი პროპოზიციული ცვლადი ფორმულაა; $\mathbf{0}$ ფორმულაა; თუ φ, ψ ფორმულებია, მაშინ $\varphi \,\&\, \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ ფორმულებია. დანარჩენი კავშირები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\varphi \wedge \psi \quad \text{არის} \quad \varphi \,\&\, (\varphi \rightarrow \psi),$$

$$\varphi \vee \psi \quad \text{არის} \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi),$$

$$\neg\varphi \quad \text{არის} \quad \varphi \rightarrow \mathbf{0},$$

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{არის} \quad (\varphi \rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \rightarrow \varphi).$$

პროპოზიციული ცვლადების შეფასება არის ასახვა *e*, რომელიც ანიჭებს ყოველ პროპოზიციულ p ცვლადს მის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა $e(p)\in[0,1]$. ეს ასახვა ფართოვდება ყველა ფორმულებზე შემდეგნაირად:

$$e(\mathbf{O}) = 0,$$

$$e(\varphi \to \psi) = (e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)),$$

$$e(\varphi \& \psi) = (e(\varphi) * e(\psi)).$$

ლემა 2.2.2 *ნებისმიერი φ და ψ ფორმულებისათვის*

$$e(\varphi \wedge \psi) = \min(e(\varphi), e(\psi)),$$

$$e(\varphi \vee \psi) = \max(e(\varphi), e(\psi)).$$

ე. ი. 1 ტავტოლოგია არის ფორმულა, რომელიც აბსოლუტურად ჭეშმარიტია ნებისმიერი შეფასებისათვის. ჩვენ ვაპირებთ ამოვარჩიოთ ისეთი ფორმულები, რომლებიც 1 ტავტოლოგიებია ყოველ $PC(*)$-ის (ნებისმიერი $*$ t ნორმისთვის) აქსიომებისათვის და ჩამოვაყალიბებთ ლოგიკას, რომელიც იქნება საერთო ყველა დანარჩენი $PC(*)$ ლოგიკებისთვის.

განსაზღვრება 2.2.4 შემდეგი ფორმულები წარმოადგენენ BL ბაზისური ლოგიკის აქსიომებს:

(A1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(A2) $(\varphi \& \psi) \to \varphi$

(A3) $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$

(A4) $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$

(A5a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$

(A5b) $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

(A6) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

(A7) $\mathbf{O} \to \varphi$

BL –ის გამოყვანის წესია მოდუს პონენსი:

$\varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \psi$

ლემა 2.2.6 BL-ის ყველა აქსიომა 1 ტავტოლოგიაა ყოველ $PC(*)$-ში. თუ φ და $\varphi \to \psi$ 1 ტავტოლოგიებია $PC(*)$-ში, მაშინ ψ-ც 1 ტავტოლოგიაა $PC(*)$-ში. ე. ი., ყოველი ფორმულა, რომელიც დამტკიცებადია $PC(*)$-ში 1 ტავტოლოგიაა ყოველ $PC(*)$-ში.

ლემა 2.2.7 BL-ში მტკიცდება იმპლიკაციის შემდეგი თვისებები:

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

(3) $\varphi \to \varphi$

ლემა 2.2.8 BL-ში მტკიცდება მკაცრი კონიუნქციის შემდეგი თვისებები:

(4) $(\varphi \,\&\, (\psi \to \varphi)) \to \psi$

(5) $(\varphi \to (\psi \to (\varphi \,\&\, \chi))$

(6) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \,\&\, \chi) \to (\varphi \,\&\, \chi))$

(7) $((\varphi_1 \to \psi_1) \,\&\, (\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \to (\psi_1 \,\&\, \psi_2))$

(8) $(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \to \varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)$, $(\varphi \,\&\, (\psi \,\&\, \chi)) \to ((\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi)$.

ლემა 2.2.9 BL-ში მტკიცდება min კონიუნქციის შემდეგი თვისებები:

(9) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$, $(\varphi \,\&\, \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$

(10) $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$

(11) $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

(12) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$

ლემა 2.2.10 BL-ში მტკიცდება max დიზიუნქციის შემდეგი თვისებები:

(13) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$, $\psi \to (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$

(14) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi))$

(15) $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

(16) $((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (\varphi \vee \psi) \to \chi$.

შედეგი 2.2.11 BL-ში მტკიცდება

(11') $((\varphi \to \psi) \,\&\, (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$, (16’) $((\varphi \to \chi) \ \& \ (\psi \to \chi)) \to (\varphi \vee \psi) \to \chi$.

ლემა 2.2.12 BL-ში მტკიცდება უარყოფის შემდეგი თვისებები:

(17) $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$, კერძოდ, $\varphi \to \neg\neg\varphi$ და $(\varphi \ \& \ \neg\varphi) \to \mathbf{0}$.

(18) $(\varphi \to (\psi \ \& \ \neg\psi)) \to \neg\varphi$

(18’) $(\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)$

(18’’) $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$

განსაზღვრება 2.2.13 $\mathbf{1}$ აღნიშნავს $\mathbf{0} \to \mathbf{0}$.

ლემა 2.2.14 BL-ში მტკიცდება

(19) $\mathbf{1}$

(20) $\varphi \to (\mathbf{1} \ \& \ \varphi)$,

(20’) $(\mathbf{1} \to \varphi) \to \varphi$

ლემა 2.2.15 BL-ში მტკიცდება $\wedge$ და $\vee$ დმატებითი თვისებები:

(21) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$
$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \to (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ ($\wedge$-ის ასოციაციურობა),

(22) ანალოგიურად ასოციაციურობა $\vee$-სთვის,

(23) $\varphi \to \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \to \varphi$

ლემა 2.2.16 BL-ში მტკიცდება

(24) $\varphi \equiv \varphi$, $(\varphi \equiv \psi) \to (\psi \equiv \varphi)$, $(\varphi \equiv \psi) \ \& \ (\psi \equiv \chi) \to (\varphi \equiv \chi)$,

(25) $(\varphi \equiv \psi) \to (\varphi \to \psi)$, $(\varphi \equiv \psi) \to (\psi \to \varphi)$

(26) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \ \& \ \chi) \equiv (\psi \ \& \ \chi))$,

(27) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \chi) \equiv (\psi \to \chi))$,

(28) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\chi \to \varphi) \equiv (\chi \to \psi))$,

(29) $(\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

განსაზღვრება 2.2.17 BL –ის *თეორია* არის რაღაც ფორმულათა სიმრავლე T. *დამტკიცება* T თეორიაში არის ფორმულების $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, რომლის ყოველი წევრი არის ან BL –ის აქსიომა, ან ეკუთვნის T-ს (სპეციალური აქსიომები) ან გამომდინარეობს მიმდევრობის წინამდებარე წევრებიდან გამოყვანის წესის მოდუს პონენსის საშუალებით.

$T|\!- \varphi$ ნიშნავს, რომ φ დამტკიცებადია (თეორემაა) T-ში, ე. ი. ის დამტკიცების ბოლო წევრია. შემდეგი არის *დედუქციის თეორემის* ვარიანტი:

თეორემა 2.2.18 T იყოს თეორია და φ, ψ ფორმულები. $T \cup \{\varphi\}|\!- \psi$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს n ისეთი, რომ $T|\!- \varphi^n \to \psi$ (სადაც φ^n არის φ & ... & φ n ჯერ).

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $n > 1$ და $T|\!- \varphi^n \to \psi$. მაშინ $T|\!- (\varphi \,\&\varphi^{n-1}) \to \psi$, $T|\!- \varphi \to (\varphi^{n-1} \to \psi)$, მაშასადამე $T \cup \{\varphi\}|\!- \varphi^{n-1} \to \psi$. იგივე პროცედურის გამეორებით საბოლოოდ მივიღებთ $T \cup \{\varphi\}|\!- \varphi \to \psi$, და მაშასადამე $T \cup \{\varphi\}|\!- \psi$.

ეხლა დავუშვათ, რომ $T \cup \{\varphi\}|\!- \psi$ და $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ $T \cup \{\varphi\}$ შესაბამისი ψ-ის დამტკიცება T-ში. ინდუქციით დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $j = 1, \dots, k$, არსებობს n_j ისეთი, რომ $T|\!- \varphi^{n_j} \to \gamma_j$. შედეგი ცხადია, თუ γ_j აქსიომაა ან ეკუთვნის $T \cup \{\varphi\}$. თუ γ_j არის მოდუს პონენსის შედეგი წინამდებარე ფორმულებიდან γ_i, $\gamma_i \to \gamma_j$, მაშინ ინდუქციის დაშვების თანახმად ჩვენ გვაქვს $T|\!- \varphi^n \to \gamma_i$, $T|\!- \varphi^m \to (\gamma_i \to \gamma_j)$, მაშადამე (7)-ის თანახმად, $T|\!- (\varphi^n \,\&\, \varphi^m) \to (\gamma_i \,\&\, (\gamma_i \to \gamma_j))$, ე. ი. $T|\!- \varphi^{n+m} \to \gamma_i$ (იხილე (4)). ამით დასრულდა დამკიცება. □

განსაზღვრება 2.2.20 T თეორია *წინაამღდეგოგრივია* თუ $T|\!- \mathbf{0}$; სხვა შემთხვევაში *არაწინაამღდეგობრივია*.

ლემა 2.2.21 T არაწინაამღდეგობრივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T|\!- \varphi$ ნებისმიერი φ-ათვის.

დამტკიცება. თუ T ამტკიცებს ნებისმიერ ფორმულას, მაშინ ის ამტკიცებს $\mathbf{0}$. პირიქით, თუ $T|\!- \mathbf{0}$, მაშინ $T|\!- \varphi$, ვინაიდან $T|\!- \mathbf{0} \to \varphi$ (აქსიომა A7). □

ლემა 2.2.22 თუ $T \cup \{\varphi\}$ წინაამღდეგობრივია, მაშინ რომელიღაც n-თვის, $T|\!- \neg(\varphi^n)$.

დამტკიცება. თუ $T \cup \{\varphi\}|\!- \mathbf{0}$, მაშინ, დედუქციის თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი n, რომ $T|\!- \varphi^n \to \mathbf{0}$. □

ლემა 2.2.23 BL-ში მტკიცდება მტკიცდება შემდეგი დისტრიბუციული კანონები:

(30) $(\varphi \,\&\, (\psi \vee \chi)) \equiv (\varphi \,\&\psi) \vee (\varphi \,\&\chi)$, $\varphi \,\&\, (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \,\&\, \psi) \wedge (\varphi \,\&\, \chi)$

(31) $(\varphi \vee(\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$, $(\varphi \wedge (\psi \vee\chi)) \equiv ((\varphi \wedge\psi) \vee(\varphi \wedge\chi))$

ლემა 2.2.24 BL-ში მტკიცდება

(32) $(\varphi \vee \psi) \,\&\, (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \,\&\, \varphi) \vee (\psi \vee \psi))$,

$(\varphi \wedge \psi)\ \&\ (\varphi \wedge \psi) \to ((\varphi\ \&\ \varphi) \wedge (\psi \vee \psi))$

(33) $(\varphi \to \psi)^n \vee (\psi \to \varphi)^n$, n-თვის, სადაც α^n არის $\alpha\ \&\ \ldots\ \&\ \alpha$, n *ჯერ.*

თეორემა 2.2.25 (34) $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \vee \psi)$,

(35) $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$

2.3. რეზიდუალური მესერები; სისრულის თეორემა

2.3.1 წინა ორ თავში ჩვენ შევისწავლეთ t-ნორმები როგორც კანდიდატები კონიუნქციის ჭეშმარიტობის ფუნქციისა, შესაბამისი რეზიდუმი როგორც იმპლიკაციის ჭეშმარიტობის ფუნქცია და ვუჩვენეთ სხვა ჭეშმარიტობის ფუნქციების განსაზღვრებადობა (შესაბამისი უარყოფა, მინიმუმ და მაქსიმუმი). ყოველი ფიქსირებული * t-ნორმისათვის ჩვენ ვღებულობთ შესაბამის პროპოზიციულ აღრიცხვას $PC(*)$; ჩვენ ჩამოვაყალიბეთ ლოგიკური აქსიომები, რომლებიც არიან 1 ტავტოლოგიები ყოველ $PC(*)$–ში, განვსაზღვრეთ დამტკიცება და ვუჩვენეთ მრავალი ფორმულები, რომლებიც დამტკიცებადია BL-ში. ეს ლოგიკა კორექტულია (sound): ყოველი დამტკიცებადი ფორმულა (თეორემა) 1 ტავტოლოგიაა ყოველ $PC(*)$–ში.

ეხლა ჩვენ იმ მდგომარეობაში ვართ, რომ შევუდგეთ BL-ის *ალგებრაიზაციას.* ჩვენ განვსაზღვრავთ მრავალსახეობას ალგებრებისა, რომელთაც ეწოდება *BL-ალგებრები* და ვუჩვენებთ, რომ

(i) ყოველი * t-ნორმისათვის, ერთეული ინტერვალი [0,1] და მასზედ განსაზღვრული ჭეშმარიტობის ფუნქციები ლოგიკური კავშირებისა არის წრფივად დალაგებული *BL*-ალგებრება.

(ii) BL კორექტულია აგრეთვე ყოველი წრფივად დალაგებული *BL*-ალგებრისთვის, ე. ი. ყოველი დამტკიცებადი ფორმულა არის 1 ტავტოლოგია ყოველი ასეთი მესერისთვის.

(iii) ყველა ფორმულათა სიმრავლე, დაყოფილი დამტკიცებადობის ექვივალენტობით, მასზედ განსაზღვრულიი ოპერაციებით განსაზრვრულს კავშირებით, არის *BL*-ალგებრა (არაწრფივად დალაგებული).

(iv) ფორმულა, რომელიც ტავტოლოგიაა ყველა წრფივად დალაგებული *BL*-ალგებრების მიმართ, ტავტოლოგიაა ყველა *BL*-ალგებრების მიმართ. ეს მოგვცემს ჩვენ სასურველ სისრულის თეორემას. *BL*-ალგებრები განსაძღვრული იქნება როგორც რეზიდუალური მესერების კერძო შემთხვევა.

განსაზღვრება 2.3.2 *რეზიდუალური მესერი* არის ალგებრა

$$(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0. 1)$$

ოთხი ბინარული ოპერაციით და ორი ცონსტანტათი ისეთები, რომ

(i) $(L, \cap, \cup, 0, 1)$ არის მესერი ელემენტით 1 და უმცირესი ელემენტით 0 (მესერული დალაგების $\leq$ მიმართ),

(ii) $(L, *, 1)$ არის კომუტაციური ნახევარჯგუფი ერთეული ელემენტით 1 (ე. ი. არის მონოიდი), ე.ი. $*$ არის კომუტაციური, ასოციაციური, $1*x = x$ ნებისმიერი x-სთვის.

(iii) $*$ და $\Rightarrow$ ჰქმნიან შეუღლებულ წყვილს, ე. ი. (1) $z \leq (x \Rightarrow y)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x * z \leq y$ ნებისმიერი x,y,z-თვის.

განსაზღვრება 2.3.3 რეზიდუალური მესერი $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0. 1)$ არის *BL-ალგებრა* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შემდეგი ორი ტოლობა სრულდება ნებისმიერი $x,y \in L$:

(2) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$

(3) $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$.

ლემა 2.3.4 ყოველ რეზიდუალურ მესერში სრულდება შემდეგი თვისებები ნებისმიერი x,y,z-თვის:

(4) $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ და $x \leq (y \Rightarrow (x * y))$;

(5) თუ $x \leq y$, მაშინ $x * z \leq y * z$, $(z \Rightarrow y) \leq (z \Rightarrow x)$, $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$;

(6) $x \leq y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \Rightarrow y = 1$;

(7) $(x \cup y) * z = (x * z) \cup (y * z)$;

(8) $(x \cup y) = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap (y \Rightarrow x) \Rightarrow x))$.

განსაზღვრება 2.3.5 რეზიდუალური მესერი $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0. 1)$ არის *წრფივად დალაგებული,* თუ მისი მესერული დალაგება წრფივია, ე. ი. ნებისმიერი წყვილი x,y-სათვის $x \cap y = x$ an $x \cap y = y$.

ლემა 2.3.6 წრფივად დალაგებული რეზიდუალური მესერი არის *BL*-ალგებრა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მასში სრულდება ტოლობა $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$.

განსაზღვრება 2.3.7 დავუშვათ $\mathbf{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0. 1)$ არის *BL*-ალგებრაა. 2.2.2-ის ანალოგიურად განვსაზღვროდ **L** შეფასება პროპოზიციული ცვლადებისთვის, როგორც ასახვა e, რომელიც ანიჭებს ყოველ პროპოზიციულ ცვლად p-ს ელემენტ $e(p)$ –ს **L** -დან. როგორც ცნობილია ეს შეფასება გაფართოვებადია ფორმულების ყველა სიმრავლეზე ჭეშმარიტობის ფუნქციების გამოყენებით **L**-ზე, ე. ი.

$$e(\mathbf{O}) = 0,$$

$$e(\varphi \to \psi) = (e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)),$$

$$e(\varphi \& \psi) = (e(\varphi) * e(\psi)).$$

(და მაშადამე $e(\varphi \wedge \psi) = e(\varphi) \cap e(\psi)$, $e(\varphi \vee \psi) = e(\varphi) \cup e(\psi)$, $e(\neg\varphi) = e(\varphi) \Rightarrow 0$.)

ფორმულა φ არის **L** *ტავტოლოგია*, თუ $e(\varphi) = 1$ ყოველი e **L** შეფასებისთვის.

თეორემა 2.3.9 *BL* ლოგიკა კორექტულია *BL* ტავტოლოგიების მიმართ: თუ φ დამტკიცებადია *BL*- ში, მაშინ φ არის **L** ტავტოლოგია ნებისმიერი BL ალგებრისთვის.

ლემა 2.3.10 BL ალგებრის კლასი ჰქმნის მრავალსახეობას.

ლემა 2.3.16 ყოველი BL ალგებრა არის წრფივად დალაგებული BL ალგებრის დეკარტული ნამრავლის ქვეალგებრა.

განსაზღვრება 2.3.17 ყოველ BL ფორმულა φ-ს შევუსაბამოთ ტერმი $\varphi^{\bullet}$ რეზიდუალური მესერის ენიდან $\to$, &, $\wedge$, $\vee$, **O**, **1** კავშირების შენაცვლებით შესაბამისად ფუნქციონალური სიმბოლოებით და კონსტანტებით $*$, $\Rightarrow$, $\cap$, $\cup$, 0,1 და ყოველი p_i პროპოზიზიონალური ცვლადის შესაბამისი საგნობრივი ცვლადით x_i- თ.

ლემა 2.3.18 (1) ყოველი ფორმულა, რომელიც არის **L** ტავტოლოგია ყოველ წრფივად დალაგებულ BL ალგებრაში არის **L** ტავტოლოგია *ყოველ* BL ალგებრაში.

(2) φ არის **L** ტავტოლოგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varphi^{\bullet} = 1$ ჭეშმარიტია **L**-ში.

თეორემა 2.3.19 (*სისრულე*) შემდეგი დებულებები ექვივალენტურია:

(i) φ დამტკიცებადია (თეორემაა) BL – ში,

(ii) ნებისმიერი წრფივად დალაგებული **L** BL ალგებრისთვის, φ არის **L** ტავტოლოგია;

(iii) ნებისმიერი **L** BL ალგებრისთვის, φ არის **L** ტავტოლოგია.

III

ლუკასევიჩის პროპოზიციული ლოგიკა

ლუკასევიჩის ლოგიკა მიიღება, თუ დავუმატებთ ამ ლოგიკის ერთ 1 ტავტოლოგიას *BL*–ის აქსიომებს, კერძოდ ორმაგ უარყოფის აქსიომას (¬¬)

$$\neg\neg\varphi \to \varphi.$$

თეორიას BL + (¬¬) ეწოდება *ლუკასევიჩის პროპოზიციული ლოგიკა* და აღინიშნება *L*-ით.

თვით ლუკასევიჩის მიერ ლუკასევიჩის პროპოზიციული ლოგიკა აქსიომატიზირებული იყო ოთხი აქსიომით (L1) - (L4).

3.1 ლუკასევიჩის ლოგიკა

ჩვენ შევისწავლით პროპოზიციულ აღრიცხვას $PC(*_L)$, სადაც $*_L$ არის ლუკასევიჩის t ნორმა – ჭეშმარიტობის კონიუნქციის ფუნქცია:

$x * y = \max(0, x + y - 1)$.

ლემა 3.1.1 (1) $L \vdash \neg\neg\varphi \equiv \varphi$,

(2) $L \vdash (\varphi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\varphi)$,
(3) $L \vdash (\varphi \to \psi) \equiv \neg(\varphi \;\&\; \neg\psi)$,
(4) $L \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$.

განსაზღვრება 3.1.3 *ლუკასევიჩის აქსიომებია:*

(L1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(L2) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$,

(L3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$,

(L4) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$.

3.2 *MV*-ალგებრები; სისრულის თეორემა

3.2.1 როგორც ჩვენ ვნახეთ, ლუკასევიჩის პროპოზიციული აღრიცხვა L შეგვიძლია გავიგოთ როგორც BL ბაზისური ლოგიკის სქემატური გაფართოება შემდეგი სქემით $\neg\neg\varphi \to \varphi$. მაშასადამე, ლუკასევიჩის ლოგიკისათვის სისრულე მტკიცდება L-ალგებრების მიმართ, ე. ი. იმ BL-ალგებრების მიმართ, სადაც სრულდება ტოლობა $x = ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0)$. L-ალგებრები ცნობილია სხვა სახელით:

განსაზღვრება 3.2.2 *MV*-ალგებრა არის *BL*-ალგებრა სადაც სრულდება ტოლობა $x = ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0)$.

განსაზღვრება 3.2.4 *ვაისბერგის ალგებრა* არის ალგებრა $\mathrm{A} = \langle A, \Rightarrow, 0\rangle$, რომელშიც შემდეგი ტოლობები სრულდება:

დავუშვათ $-x = x \Rightarrow 0$, $1 = (0 \Rightarrow 0)$. მაშინ

(W1) $(1 \Rightarrow y) = y$,

(W2) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$,

(W3) $((-x \Rightarrow -y) \Rightarrow (y \Rightarrow x)) = 1$,

(W4) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) = ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$.

თეორემა 3.2.7 (i) თუ A *MV*-ალგებრაა, მაშინ $\langle A, \Rightarrow, 0\rangle$ ვაისბერგის ალგებრაა.

(ii) თუ $\mathrm{A} = \langle A, \Rightarrow, 0\rangle$ ვაისბერგის ალგებრაა და თუ $-$, $*$, $\cap$, $\cup$, 1 განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$x * y = -(x \Rightarrow -y),$$
$$x \cap y = x * (x \Rightarrow y),$$
$$x \cup y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow y,$$

მაშინ $\mathrm{A}' = \{A, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1\}$ არის *MV*-ალგებრა.

ლემა 3.2.12 (1) თუ ტოლობა $\sigma = \tau$ *MV*-ალგებრის ენაში სრულდება სტანდარტულ [0,1] *MV*-ალგებრაში ჭეშმარიტობის ფუნქციებით, მაშინ ის სრულდება ყოველ წრფივად დალაგებულ *MV*-ალგებრაში.
(2) მაშასადამე, თუ ფორმულა φ არის 1 ტავტოლოგია სტანდარტულ [0,1] *MV*-ალგებრაში, მაშინ φ არის A ტავტოლოგია ყოველი წრფივად დალაგებულ *MV*-ალგებრა A-ში.

(3) უფრო ზოგადად, თუ T არის სასრული თეორია და φ ჭეშმარიტია T თეორიის ყოველ $[0,1]_L$ მოდელში, მაშინ ყოველი წრფივად დალაგებული *MV*-ალგებრა A-სთვის, φ ჭეშმარიტია T თეორიის ყოველ A მოდელში.

თეორემა 3.2.14 (სისრულის თეორემა).

(1) ფორმულა φ დამტკიცებადია ლუკასევიჩის ლოგიკა L-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ლუკასევიჩის ლოგიკის 1 ტავტოლოგიაა.

IV

ნამრავლის ლოგიკა, გოედელის ლოგიკა

ჩვენ ეხლა შევისწავლით პროპოზიციულ აღრიცხვას PC($*_\Pi$), სადაც $*_\Pi$ არის ნამრავლის T ნორმა; ამ ლოგიკას ჩვენ ვუწოდებთ *ნამრავლის ლოგიკას* და აღვნიშნავთ Π. გავიხსენოთ, რომ შესაბამისი იმპლიკაცია არის *გოგენის იმპლიკაცია*: $x \Rightarrow y = y/x$, თუ $x > y$, და $x \Rightarrow y = 1$ თუ $x \le y$; ხოლო უარყოფა გოედელის უარყოფაა; ნამრავლის კონიუნქცია აღინიშნება $\otimes$. შემდგომში $\to$ ნიშნავს გოგენის იმპლიკაციას.

განსაზღვრება 4.1.1 Π-ს *აქსიომები* არის BL აქსიომებს დამატებული
(Π1) $\neg\neg\chi \to ((\varphi \otimes\chi \to \psi \otimes\chi) \to (\varphi \to \psi))$,
(Π2) $\varphi \wedge \neg\varphi \to$ **0**.

ლემა 4.1.2 აქსიომები არის 1 ტავტოლოგიები $[0,1]_\Pi$ ალგებრაში ჭეშმარიტობის ფუნქციებით.

განსაზღვრება 4.1.1 Π-*ალგებრა* არის BL-ალგებრა, რომელიც აკმაყოფილებს

$$(-)(-)z \le ((x * z \Rightarrow y * z) \Rightarrow (x \to y)),$$
$$x \cap (-)x = 0.$$

შენიშვნა 4.1.7 ცხადია, რომ Π-ალგებრების კლასი წარმოადგენს მრავალსახეობას და Π კორექტულია ნამრავლის ალგებერების მიმართ, ე. ი. ყოველი ფორმულა, რომელიც დამტკიცებადია Π-ში არის **L** ტავტოლოგია ყოველი ნამრავლის ალგებრა **L**–თვის.

თეორემა 4.1.13 (სისრულის თეორემა).

(1) ფორმულა φ დამტკიცებადია ნამრავლის ლოგიკა Π-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ნამრავლის ლოგიკის 1 ტავტოლოგიაა.

4.2. გოედელის ლოგიკა

ბოლო ლოგიკა, უმნიშვნელოვანესი ლოგიკებს შორის, რომლებიც მოცემულია უწყვეტი T ნორმით არის გოედელის ლოგიკა G, სადაც & ინტერპრეტირებულია როგორც მინიმუმი.

განსაზღვრება 4.2.1 G ლოგიკის აქსიომათა სისტემა წარმოადგენს BL ლოგიკის აქსიომათა სისტემას დამატებული ერთი აქსიომა

(G) $\varphi \to (\varphi \ \& \ \varphi)$

რომელიც ამტკიცებს &-ის ($(\varphi \ \& \ \varphi) \to \varphi$ ფორმულასთან ერთად) იდემპოტენტ-ურობას.

ლემა 4.2.2 G-ში მტკიცდება $(\varphi \ \& \ \varphi) \equiv (\varphi \wedge \varphi)$.

გოედელის ლოგიკა წარმოადგენს ინტუიციონისტური ლოგიკის გაფართოებას.

განსაზღვრება 4.2.6 *ინტუიციონისტურ ლოგიკას* I –ს გააჩნია ლოგიკური კავშირები $\to, \wedge, \vee, \neg$ და შემდეგი აქსიომები

(I1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,
(I2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,
(I3) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,
(I4) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,
(I5) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$,
(I6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,
(I7) $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$,
(I8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$,
(I9) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha$

ლემა 4.2.7 G-ში მტკიცდება I-ს ყველა აქსიომები.

ლემა 4.2.2 G არის I-ს გაფართოვება შემდეგი აქსიომით

$$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi).$$

ლემა 4.2.10 G-ში მართებულია კლასიკური დედუქციის თეორემა: ნებისმიერი T თეორიისათვის G-ში და ფორმულებისთვის φ, ψ,

$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $T \vdash (\varphi \to \psi)$.

განსაზღვრება 4.2.12 BL-ალგებრას, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $x * x = x$ ეწოდება *G-ალგებრა.*

ლემა 4.2.16 თუ ტოლობა $\tau = \sigma$ G-ალგებრის ენაში სრულდება სტანდარტულ G-ალგებრაში $[0,1]_G$ ჭეშმარიტობის ფუნქციებით, მაშინ ის სრულდება ყველა წრფივად დალაგებულ G-ალგებრებში.

თეორემა 4.2.17 (*სისრულის თეორემა*).

(1) ფორმულა φ დამტკიცებადია გოედელის ლოგიკა G-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის გოედელის ლოგიკის 1 ტავტოლოგიაა.

V

მრავალნიშნა პრედიკატული ლოგიკა

5.1 ბაზისური მრავალნიშნა პრედიკატული ლოგიკა

განსაზღვრება 5.1.1 *პრედიკატული ენა* შედგება *პრედიკატთა* არაცარიელი სიმრავლისგან, ყოველი მათგანი დადებითი ნატურალური რიცხვით – *რამდენადგილიანია* ის და *საგნობრივი კონსტანტთა* (შესაძლო ცარიელი) სიმრავლისგან. პრედიკატები ზოგადად აღინიშნებიან $P, Q, R, \ldots$ სიმბოლოებით, კონსტანტები $c,d, \ldots.$ სიმბოლოებით. *ლოგიკური სიმბოლოები* არიან *საგნობრივი ცვლადები* $x, y, \ldots$, *ლოგიკური კავშირი* - $\&, \to$, *ჭეშმარიტობის კონსტანტები* 0, 1 და კვანტორები $\forall$, $\exists$. დანარჩენი კავშირები ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\equiv$) განისაზღვრება ისევე როგორც ჭინა თავებში. *ტერმებს* წარმოადგენენ საგნობრივი ცვლადები და საგნობრივი კონსტანტები.

ატომურ ფორმულებს გააჩნიათ სახე $P(t_1, \ldots, t_n)$, სადაც P არის n-ადგილიანი პრედიკატი და $t_1, \ldots, t_n$ არის ტერმები. თუ φ და ψ ფორმულებია და x საგნობრივი ცვლადია, მაშინ $\varphi \to \psi$, $\varphi \;\&\; \psi$, $(\forall x)\psi$, $(\exists x)\psi$ 0, 1 ფორმულებია; ყოველი ფორმულა აიგება ატომური ფორმულებიდან მოცემული წესის საშუალებით.

$\mathcal{L}$ იყოს პრედიკატული ენა და **L** წრფივად დალაგებული BL-ალგებრა. **L**-*სტრუქტურა* $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c\rangle$ $\mathcal{L}$ პრედიკატული ენისთვის გააჩნია არაცარიელი *დომეინი* M, ყოველი n-არული P პრედიკატისთვის **L**-ფაზი n-არული მიმართება $r_P : M^n \to \mathbf{L}$ M-ზე (რომელიც შეუსაბამებს $(m_1, \ldots, m_n)$ n-ულს სიმრავლეს M^n–დან $(m_1, \ldots, m_n)$-ის კუთვნილების ხარიხს $r_P(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{L}$ ფაზი მიმართებას), და ყოველ საგნობრივ c კონსტანტას შეუსაბამებს რომელიღაც ელემენტ m_c-ეს M–დან.

განსაზღვრება 5.1.3 $\mathcal{L}$ იყოს პრედიკატული ენა და $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c\rangle$ **L**-სრუქტურა $\mathcal{L}$ ენისთვის. M– *შეფასება საგნობრივი ცვლადებისთვის* არის ასახვა v, რომელიც ანიჭებს ყოველ საგნობრივ x ცვლადს ელემენტს $v(x) \in M$, ხოლო $v(c) = m_c \in M$. თუ v, v' ორი შეფასებაა, მაშინ $v \equiv_x v'$ ნიშნავს, რომ $v(y) = v'(y)$ ნებისმიერი y ცვლადისთვის, რომელიც განსხვავებულია x-გან.

M–შეფასება v შეგვიძლია გავაფართოვოთ ყველა ფორმულებზე შემდეგნაირად.

$$v(P(t_1, \ldots, t_n)) = r_P(v(t_1), \ldots, v(t_n));$$

$$v(\varphi \to \psi) = v(\varphi) \Rightarrow v(\psi);$$

$$v(\varphi \,\&\, \psi) = v(\varphi) * v(\psi);$$

$$v(\mathbf{0}) = 0; \;\; v(\mathbf{1}) = 1;$$

$$v((\forall x)\varphi) = \inf \{ v'(\varphi) \colon v \equiv_x v' \};$$

$$v((\forall x)\varphi) = \sup \{ v'(\varphi) \colon v \equiv_x v' \}$$

იმ შემთხვევაში თუ ინფიმუმი და სუპრემუმი არსებობს **L**–ში; სხვა შემთხვევაში ფორმულის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა ზოგადად განუსაზღვრელია.

სტრუქტურა M **L**-*სრულია*, თუ საჭირო ინფიმუმი და სუპრემუმი არსებობს, ე. ი. $v(\varphi)$ განსაზღვრულია ყველა φ და v-სთვის.

განსაზღვრება 5.1.6 (1) φ იყოს $\mathcal{L}$ ენის ფორმულა და $\mathrm{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c \rangle$ სრული **L**-სრუქტურა $\mathcal{L}$ ენისთვის. φ-ის *ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა* M–ში არის

$$\|\varphi\|_{\mathrm{M}} = \inf\{v(\varphi) \colon v \text{ M-შეფასებაა}\}.$$

(2) $\mathcal{L}$ ენის ფორმულა φ არის **L**-*ტავტოლოგია*, თუ $\|\varphi\|_{\mathrm{M}} = 1_{\mathbf{L}}$ ნებისმიერი M **L**-სტრუქტურისათვის და საგნობრივი ცვლადების ნებისმიერი M-შეფასებისათვის.

განსაზღვრება 5.1.7 (1) შემდეგი ფორმულები წარმოადგენენ *კვანტორების ლოგიკურ აქსიომებს*:

($\forall$1) $(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(t)$ (t თავისუფალია x–თვის $\varphi(x)$-ში)

($\exists$1) $\varphi(t) \to (\exists x)\varphi(x)$ (t თავისუფალია x–თვის $\varphi(x)$-ში)

($\forall$2) $(\forall x)(v \to \varphi) \to (v \to (\forall x)\varphi)$ (x არ არის თავისუფალი v-ში)

($\exists$2) $(\forall x)(\varphi \to v) \to ((\exists x)\varphi \to v)$ (x არ არის თავისუფალი v-ში)

($\forall$3) $(\forall x)(\varphi \vee v) \to ((\exists x)\varphi \vee v)$ (x არ არის თავისუფალი v-ში)

ლემა 5.1.9 აქსიომები ($\forall$1), ($\forall$2), ($\forall$3), ($\exists$1), ($\exists$2) წარმოადგენენ **L**-ტავტოლოგიებს ნებისმიერი *BL*–ალგებრისათვის.

ლემა 5.1.10 (გამოყვანის წესების კორექტულობა.)

(1) ნებისმიერი φ, ψ ფორმულებისათვის, სრული **L**-სტრუქტურა M-თვის და შეფასება v-თვის,

$$v(\psi) \geq v(\varphi) * v(\varphi \to \psi);$$

კერძოდ, თუ $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1_{\mathbf{L}}$, მაშინ $v(\psi) = 1_{\mathbf{L}}$.

(2) მაშასადამე, თუ φ, $\varphi \to \psi$ $1_{\mathbf{L}}$-ჭეშმარიტია M–ში, მაშინ ψ $1_{\mathbf{L}}$-ჭეშმარიტია M–ში,

(3) $v(\varphi) = v((\forall x)\varphi)$; ე. ი. φ $1_{\mathbf{L}}$-ჭეშმარიტია M–ში, მაშინ $(\forall x)\varphi$ $1_{\mathbf{L}}$-ჭეშმარიტია M–ში.

თეორემა 5.1.14 φ იყოს ნებისმიერი ფორმულა, ხოლო ψ ფორმულაა, რომელიც არ შეიცავს x-ს თავისუფლათ. მაშინ ბაზისური მრავალნიშნა პრედიკატულ ლოგიკაში BL$\forall$-ში მტკიცდება შემდეგი ფორმულები:

(1) $(\forall x)(\psi \to \varphi) \equiv (\psi \to (\forall x)\varphi)$
(2) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \equiv ((\exists x)\varphi \to \psi)$
(3) $(\exists x)(\psi \to \varphi) \to (\psi \to (\exists x)\varphi)$
(4) $(\exists x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to \psi)$
(5) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi)$
(6) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\exists x)\varphi \to (\exists x)\psi)$
(7) $((\forall x)\varphi \,\&\, (\exists x)\psi) \to (\exists x)(\varphi \,\&\, \psi)$
(8) $(\exists x)\varphi \to \neg(\forall x)\neg\varphi$
(9) $\neg(\exists x)\varphi \equiv (\forall x)\neg\varphi$
(10) $(\exists x)(\psi \wedge \varphi) \equiv (\psi \wedge (\exists x)\varphi)$ (x არ არის თავისუფალი ψ-ში)
(11) $(\exists x)(\psi \vee \varphi) \equiv (\psi \vee (\exists x)\varphi)$ (x არ არის თავისუფალი ψ-ში)
(12) $(\forall x)(\psi \wedge \varphi) \equiv (\psi \wedge (\forall x)\varphi)$ (x არ არის თავისუფალი ψ-ში)

თეორემა 5.1.23 T იყოს თეორია და φ, ψ ჩაკეტილი ფორმულები T –ს ენაში. მაშინ $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს n ისეთი, რომ $T \vdash \varphi^n \to \psi$ (სადაც φ^n არის $\varphi \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi$ n ჯერ).

5.2 სისრულე

განსაზღვრება 5.2.1 დავუშვათ T C ლოგიკის (რომელიც BL$\forall$ ლოგიკის სქემატური გაფართოვებაა) თეორიაა.

(1) *T არაწინააღმდეგობრივია*, თუ არსებობს ფორმულა φ, რომელიც არაა დამტკიცებადი *T*–ში.

(2) *T სრულია*, თუ ყოველი წყვილი φ, ψ ჩაკეტილი ფორმულებისთვის, $T|\!- \varphi \to \psi$ ან $T|\!- \psi \to \varphi$.

ლემა 5.2.2 *T* წინააღმდეგობრივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ $T|\!-$ **0**.

ლემა 5.2.3 *T* სრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი წყვილი φ, ψ ჩაკეტილი ფორმულებისთვის, ისეთებისთვის, რომ $T|\!- \varphi \vee \psi$, *T*-ში მტკიცდება φ ან ψ.

თეორემა 5.2.9 (*სისრულე.*) φ დამტკიცებადია *T* თეორიაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი **L**-ალგებრისთვის და *T* თეორიის წრფივად დალაგებული M **L**-მოდელისთვის, $\|\varphi\|_{\mathrm{M}}=1_{\mathbf{L}}$.

5.3 გოედელის ლოგიკის აქსიომატიზაცია

ლემა 5.3.3 (სისრულე.) $T|\!-_{G\forall}\ \varphi$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\|\varphi\|_{\mathrm{M}}=1_{\mathbf{L}}$ G∀-ას M $[0,1]_{G}$- მოდელისთვის.

5.4. ლუკასევიჩის და ნამრავლის პრედიკატული ლოგიკა

ლემა 5.4.1 დავუშვათ φ, ψ ფორმულებია, *x* არ არის თავისუფალი ψ-ში. L∀ ლოგიკაში მტკიცდება $(\exists x)\varphi \equiv \neg(\forall x)\neg\varphi$.

ლემა 5.4.12 L∀ ლოგიკაში მტკიცდება

$(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta) \equiv ((\forall x)(\alpha(x)) \vee \beta)$ (*x* არ არის თავისუფალი β-ში).

ლემა 5.4.14 L∀ ლოგიკაში მტკიცდება

$(\forall x)(\alpha(x)\ \&\ \beta) \equiv ((\forall x)(\alpha(x))\ \&\ \beta)$ (*x* არ არის თავისუფალი β-ში).

ლემა 5.4.16 ნებისმიერი ნატურალური $n \geq 1$,

(1) $L\forall|\!- (\exists x)\varphi^{n} \equiv ((\exists x)\varphi)^{n}$,

(2) $L\forall|\!- (\exists x)n\varphi \equiv n((\exists x)\varphi)$.

თეორემა 5.4.25 (*სისრულე.*) T იყოს L∀-ლოგიკის თეორია; L∀-ს ჩაკეტილი ფორმულა φ არის 1-ჭეშმარიტი *T* თეორიის ყოველ მოდელში $[0,1]_{L}$ ალგებრისათვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $n \geq 1$, T-ში მტკიცდება $\varphi \veebar \varphi^{n}$.

თეორემა 5.4.30 L∀-ლოგიკის ფორმულა φ არის $[0,1]_L$-ტავტოლოგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $n \geq 2$, φ არის L_n-ტავტოლოგია.