ამოცანების კრებული გეომეტრიაში

მალხაზ ბაკურაძე, რუსლან სურმანიძე

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2013

წინამდებარე ამოცანების კრებული გეომეტრიაში არის სახელმძღვანელო, რომელიც 2011 წლიდან არსებობს ელექტრონული ფორმით და სარგებლობენ თსუ ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მეორე სემესტრის სტუდენტები.

მ. ბაკურაძე , რ. სურმანიძე

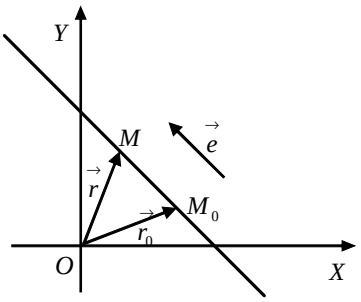
თბილისი , 2013 წ.

შინაარსი

§1. წრფე სიბრტყეზე

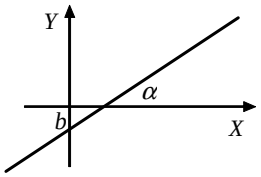
წრფის ვექტორულ-პარამეტრული სახის განტოლება: $\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{e},\ t \in R$,

სადაც $\vec{e}$ წრფის პარალელურ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორია, მას წრფის მიმმართველი ვექტორი ეწოდება, $\vec{r_0}$ –წრფეზე ნებისმიერად აღებული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის რადიუს-ვექტორია, ხოლო $\vec{r}$ –წრფის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის რადიუს-ვექტორი. $t \in R$ პარამეტრი ეწოდება.



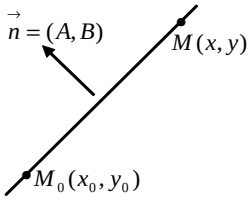
წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით: $y = k \cdot x + b$,

სადაც $k = tg\alpha$ საკუთხო კოეფიციენტია და ტოლია იმ კუთხის ტანგენსის, რომელსაც მოცემული წრფე ადგენს აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან (კუთხე გადაზომილია საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით), ხოლო b, აბსოლუტური მნიშვნელობით, ტოლია იმ მონაკვეთის სიგრძის, რომელსაც ეს წრფე ორდინატთა ღერძზე ჩამოკვეთს.



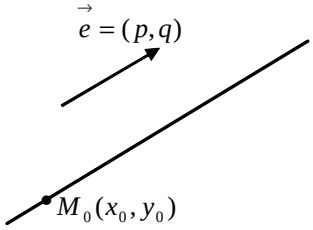
წრფის ზოგადი სახის განტოლება: $Ax + By + C = 0$,

სადაც A, B და C ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია და A და B რიცხვებს შორის ერთი მაინც არაა ნულის ტოლი ($A^2 + B^2 \neq 0$). ვექტორი $\vec{n} = (A, B)$ ამ წრფის მართობული ვექტორია, მას წრფის ნორმალი ეწოდება.



წრფის კანონიკური სახის განტოლება: $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$,

სადაც $M_0(x_0, y_0)$ წრფეზე მდებარე რაიმე წერტილია, ხოლო $\vec{e} = (p, q)$ არანულოვანი ვექტორი –წრფის მიმმართველი ვექტორია.



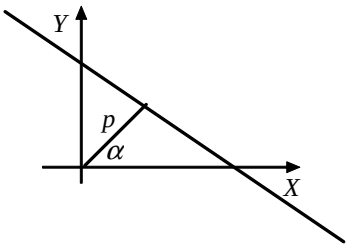
წრფის პარამეტრული სახის განტოლება:

$$x = x_0 + p \cdot t$$
$$y = y_0 + q \cdot t$$
$$t \in R.$$

ამ სახის განტოლება უშუალოდ მიიღება წრფის კანონიკური სახის განტოლებიდან.

წრფის ნორმალური სახის განტოლება: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$,

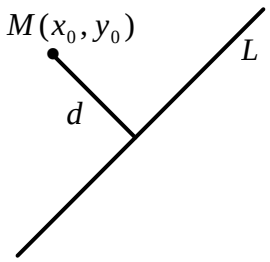
სადაც p კოორდინატთა სათავიდან წრფემდე მანძილის ტოლია, ხოლო α არის კუთხე, რომელსაც შეადგენს კოორდინატთა სათავიდან წრფეზე დაშვებული მართობი აბსცისთა ღერძთან.



წრფის განტოლება მონაკვეთებში: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$,

სადაც a და b, აბსოლუტური მნიშვნელობით, იმ მონაკვეთების სიგრძეების ტოლია, რომლებსაც წრფე ჩამოკვეთს აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებზე, შესაბამისად.

მანძილი წერტილიდან წრფემდე: d –მანძილი $M(x_0, y_0)$ წერტილიდან $Ax + By + C = 0$ განტოლებით მოცემულ L წრფემდე გამოითვლება ფორმულით $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$



ამოცანები

1. რა ფიგურა მოიცემა $r = r_0 + ta$ განტოლებით თუ t იღებს მნიშვნელობებს შემდეგი სიმრავლიდან: (ა) $(-\infty, 0]$, (ბ) $[-1,1]$, (გ) $(-1,1)$, (დ) $\{\sin\tau \mid \tau \in R\}$.

2. დაწერეთ წრფის პარამეტრული განტოლება რომელიც გადის $M_0(2,5)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{a} = (4,-3)$ ვექტორისა.

3. დაწერეთ წრფის პარამეტრული განტოლება რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და პარალელურია $\vec{b} = (3,2)$ ვექტორისა.

4. დაწერეთ წრფის პარამეტრული განტოლება რომელიც გადის $A(1,9)$ წერტილზე და პარალელურია Oy ღერძისა.

5. დაწერეთ წრფის პარამეტრული განტოლება რომელიც გადის $M_1(2,7)$ და $M_2(2,-3)$ წერტილებზე.

6. წრფე მოცემულია პარამეტრული განტოლებით $x = 2 - 5t$ და $y = -1 + t$. იპოვეთ:

(ა) ამ წრფის მიმმართველი ვექტორი;

(ბ) იმ წერტილების კოორდინატები რომლებიც ეთანადება პარამეტრის შემდეგ მნიშვნელობებს: $t_1 = 3$, $t_2 = -2$, $t_3 = 0$, $t_4 = 5$, $t_5 = 20$;

(გ) იმ პარამეტრის მნიშვნელობები რომლისთვისაც წრფე საკოორდინატო ღერძებს გადაკვეთს;

(დ) შემდეგი წერტილებისათვის დაადგინეთ თუ რომელი მათგანი მდებარეობს მოცემულ წრფეზე:

$A(1,5)$, $B(7,-2)$, $C(2,-1)$, $D(3,-7)$.

7. M წერტილის მოძრაობის განტოლებებია: $x = 3 - 2t$ და $y = -1 + 7t$. იპოვეთ:

(ა) M წერტილის სიჩქარე;

(ბ) სიბრტყის იმ წერტილის კოორდინატები რომელშიც იქნება M წერტილი $t = 6$ მომენტში;

(გ) დროის ის მომენტი როდესაც M წერტილი მიაღწევს $x = 7 + 2t'$, $y = 5 + 3t'$ წრფეს;

8. შეადგინეთ მოძრაობის განტოლებები იმ მატერიალური M წერტილისა რომელიც გამოსულია კოორდინატთა სათავიდან და მოძრაობს წრფივად და თანაბრად სიჩქარით, რომლის მდგენელლებია $v_x = 3$ სმ/წ და $v_y = 4$ სმ/წ. ჩათვალეთ რომ $|i| = |j| = 1$ სმ.

9. M წერტილი იწყებს მოძრაობას წრფივად და თანაბრად $M_0(8,-5)$ წერტილიდან $|v| = 40$ სმ/წ სიჩქარით $\vec{a} = (4,3)$ ვექტორის გასწვრივ. იგულისხმება რომ $|i| = |j| = 1$ სმ. რა დრო დასჭირდება M წერტილს მისი ტრაექტორიის იმ ნაწილის გასავლელად რომელიც მოქცეულია საკოორდინატო ღერძებს შორის?

10. სინათლის სხივი მიმართულია $x = -4 - 2t$, $y = 3 + t$ წრფიის გასწვრივ. Ox ღერძთან მიღწევის შემდეგ სხივი ირეკლება. იპოვეთ სხივის Ox ღერძთან შეხვედრის წერტილი, და არეკლილი სხივის განტოლება.

11. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $k = -7$ და რომელიც გადის წერტილზე $A(2,-3)$.

12. დაწერეთ წრფის განტოლება რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $k = 5$ და რომელიც ჩამოკვეთს Oy ღერძზე 3-ის ტოლ მონაკვეთს.

13. დაწერეთ წრფის განტოლება რომელიც გადის წერტილებზე $A(1,-4)$ და $B(-2,1)$.

14. დაწერეთ წრფის განტოლება რომელიც გადის წერტილზე $A(2,-3)$ და რომელიც Ox ღერძთან ადგენს $60°$-იან კუთხეს.

15. დაწერეთ წრფის განტოლება რომელიც გადის წერტილზე $A(2,5)$ და რომელიც ორთოგონულია $\vec{n} = (4,3)$ ვექტორისა.

16. დაწერეთ შემდეგ წრფეთა პარამეტრული განტოლებანი:

(ა) $y = 3x - 5$; (ბ) $y = \frac{1}{2}x + 2$; (გ) $6x - 7y + 5 = 0$; (დ) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$;

(ე) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; (ვ) $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{3}$; (ზ) $5x - 3 = 0$; (თ) $4y + 9 = 0$

17. დაწერეთ შემდეგ წრფეთა ზოგადი განტოლებანი:

(ა) $x = 2 + t$ და $y = 1 - 3t$; (ბ) $x = -2$ და $y = 3 + t$; (გ) $x = t$ და $y = 2$;

(დ) $y = \frac{2}{3}x - 1$; (ე) $y = -5x$; (ვ) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$; (ზ) $2x + \frac{y}{-3} = 1$; (თ) $\frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{3}$

18. მოცემულია სამკუთხედი ABC: $A(1,1)$, $B(-2,3)$ და $C(4,7)$. შეადგინეთ ამ სამკუთხედის გვერდებისა და A წვეროდან გავლებული მედიანის განტოლებები.

19. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება რომელიც გადის $A(-2,7)$ წერტილზე და რომელიც კოორდინატთა ღერძებზე ტოლი სიდიდის მონაკვეთებს ჩამოკვეთს.

20. გამოთვალეთ იმ სამკუთხედის ფართობი რომელიც მოქცეულია საკოორდინატო ღერძებსა და $3x - 5y - 30 = 0$ განტოლებით მოცემულ წრფეს შორის.

21. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება რომელიც გადის წერტილზე $A(5,-2)$ და საკოორდინატო ღერძებთან ერთად ქმნის 150 კვადრატული ერთეული ფართობის მქონე სამკუთხედს.

22. მოცემულია ორი წრფე $ax+by+c=0$ და $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$. იპოვეთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა რომ ეს წრფეები (ა) თანაიკვეთებოდეს; (ბ) იყოს პარალელური; (გ) ერთმანეთს დაემთხვეს; (დ) იყოს ურთიერთმართობული.

23. გამოარკვიეთ თითოეულ წრფეთა წყვილისათვის რომელი ემთხვევა ერთმანეთს, პარალელურია, თანაიკვეთება. თანაკვეთის შემთხვევაში იპოვეთ თანაკვეთის წერტილი.

(ა) $2x+3y=0$ და $x=3+t$, $y=2-t$; (ბ) $x+2y-15=0$ და $x=5+4t$, $y=-2-2t$;

(გ) $3x+4y-20=0$ და $x=4-8t$, $y=2+6t$; (დ) $x-2y+4=0$ და $-3x+6y-12=0$;

(ე) $x-5y=0$ და $2x-10y=0$; (ვ) $2x+3y-8=0$ და $x+y-3=0$.

24. მოცემულია ორი წრფე $x=x_1+l_1t$, $y=y_0+mt$ და $x=x_0+l_2t'$, $y=y_2+m_2t'$. იპოვეთ აუცილებელი და საკმარისი ირობა იმისა რომ ეს წრფეები (ა) თანაიკვეთებოდეს; (ბ) იყოს პარალელური; (გ) ერთმანეთს დაემთხვეს; (დ) იყოს ურთიერთმართობული.

25. გამოარკვიეთ თითოეულ წრფეთა წყვილისათვის რომელი ემთხვევა ერთმანეთს, პარალელურია, თანაიკვეთება, პერპენდიკულარულია. თანაკვეთის შემთხვევაში იპოვეთ თანაკვეთის წერტილი.

(ა) $x=2+t$, $y=-9-t$ და $x=1+5t'$, $y=-1+2t'$;

(ბ) $x=-3+4t$, $y=1-3t$ და $x=1-4t'$, $y=-2+3t'$;

(გ) $x=1-2tt$, $y=7+t$ და $x=5+8t'$, $y=-2-4t'$;

(დ) $x=-2+2t$, $y=-9+5t$ და $x=9-5t'$, $y=4+2t'$.

26. მოცემულია სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები: $M_1(1,2)$, $M_2(3,4)$ და $M_3(5,-1)$. შეადგინეთ ამ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები.

27. მოცემულია პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლება $x+y-2=0$ და $2x-y+4=0$, და დიაგონალების გადაკვეტის წერტილი $M(3,1)$. შეადგინეთ პარალელოგრამის დანარჩენი ორი გვერდის განტოლება.

28. შეადგინეთ $ABCD$ პარალელოგრამის გვერდების განტოლებები თუ ცნობილია რომ დიაგონალები თანაიკვეთება $M(1,6)$ წერტილში, ხოლო გვერდები AB, BC, CD და DA გადის წერტილებზე $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$ და $S(-5,4)$ შესაბამისად.

29. მოცემულია სამკუთხედი ABC წვეროებით $A(1,5)$, $B(-4,3)$ და $C(2,9)$. შეადგინეთ ამ სამკუთხედის A წვეროდან BC გვერდისადმი გავლებული სიმაღლის განტოლება.

30. რა ტრაექტორიაზე უნდა იმოძრაოს წერტილმა რომლის საწყისი მდებარეობაა $M_0(5,-12)$, რომ უახლოესი გზით მივიდეს $2x-3y+6=0$ წრფემდე? რომელ წერტილში მიაღწევს ის ამ წრფეს?

31. იპოვეთ $M(10,10)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები $3x+4y-20=0$ წრფის მიმართ.

32. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო $A(-6,2)$ და $B(2,-2)$, და სიმაღლეთა გადაკვეთის წერტილი $H(1,2)$. იპოვეთ მესამე წვერო C-ს კოორდინატები.

33. იპოვეთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრის კოორდინატები თუ მოცემულია წვეროები $A(1,2)$, $B(3,-2)$, და $C(5,6)$.

34. ცნობილია რომ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობია 20 კვ. ერთეული, ჰიპოტენუზა მდებარეობს Ox ღერძზე, და მართი კუთხის წვერო ემთხვევა $C(1,-4)$ წერტილს. იპოვეთ ამ სამკუთხედის კათეტების შემცველი წრფეების განტოლებები.

35. დაადგინეთ წრფეთა საკუთხო კოეფიციენტი (დახრილობა)

(ა) $x=2+3t,\ y=3-2t$; (ბ) $x=-3t,\ y=4t$; (გ) $x=2,\ y=1-4t$; (დ) $3x-4y=4$

36. გამოთვალეთ კუთხე წრფეებს შორის

(ა) $y=2x+4$ და $y=-x+3$; (ბ) $3x-5y+4=0$ და $-x-3y+4=0$;

(გ) $y=-3x+4$ და $x=3+t,\ y=1-2t$; (დ) $x=1-3t,\ y=2+t$ და $x=3+4t,\ y=2-5t$

37. შეადგინეთ იმ წრფეთა განტოლებები, რომლებიც გადიან $A(3,1)$ წერტილზე და $y=-(2/3)x+1/3$ წრფესთან $\pi/4$ კუთხეს ადგენენ

38. მოცემულია $L_1: x=3t,\ y=-t$ და $L_2: y=x+8$ წრფეები. იპოვეთ ისეთი L_3 წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, რომ L_2 წრფე L_1 და L_3 წრფეებით განსაზღვრული კუთხის ბისექტრისაა

39. დაადგინეთ $x+3y=0$, $x=3$ და $x-2y+3=0$ განტოლებებით განსაზღვრული გვერდების მქონე სამკუთხედის წვეროები და კუთხეები

40. შეადგინეთ $A(1,-2)$, $B(5,4)$ და $C(-2,0)$ წვეროებით მოცემული სამკუთხედის A წვეროსთან არსებული შიგა და გარე კუთხეების ბისექტრისების განტოლებები

41. შეადგინეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების განტოლებები, თუ $y=3x+5$ მისი ჰიპოტენუზის განტოლებაა, ხოლო $M(4,-1)$ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროა

42. $6x-2y+5=0$ და $x+3y-1=0$ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია. შეადგინეთ მისი ფუძის განტოლება თუ ის $M(1,1)$ წერტილზე გადის

43. შეადგინეთ იმ კვადრატის გვერდების განტოლებები, რომლის წვეროა $M(-4,5)$ და დიაგონალი $7x-y+8=0$

44. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $3x-5y+2=0$ და $5x-2y+4=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გადის და: (ა) გადის კოორდინატთა სათავეზე; (ბ) გადის $M(1,2)$ წერტილზე; (გ) აბსცისთა ღერძის პარალელურია; (დ) $2x-y+4=0$ წრფის პარალელურია; (ე) $x+3y+2=0$ წრფის პერპენდიკულარულია

45. შეადგინეთ სამკუთხედის სიმაღლეების განტოლებები, თუ მისი გვერდების განტოლებებია $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$ და $x-4y+11=0$

46. სამკუთხედის AB გვერდის განტოლებაა $2x-3y+6=0$, მისი AH სიმაღლის განტოლებაა $2x+y-2=0$, ხოლო BK სიმაღლისა $x+3y-12=0$. შეადგინეთ სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდის განტოლებები

47. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(8,9)$ წერტილზე და ამ წრფის იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც $x-2y=0$ და $x-2y+5=0$ წრფეებს შორისაა მოქცეული 5-ის ტოლია

48. იპოვეთ მანძილი $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(-5,7)$ და $D(8,-3)$ წერტილებიდან $6x+8y-15=0$ წრფემდე

49. იპოვეთ პარალელურ წრფეებს შორის მანძილი:

(ა) $x-3y+5=0$ და $2x-6y+9=0$; (ბ) $2x-3y+1=0$ და $x=2+3t,\ y=1+2t$;

(გ) $6x-2y+5=0$ და $y=3x+4$; (დ) $x=2+4t,\ y=1+6t$ და $x=1+2\tau,\ y=2+3\tau$

50. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც შემდეგი ორი პარალელური წრფეებიდან თანაბარი მანძილებით არიან დაშორებულნი:

(ა) $4x-5y+7=0$ და $4x-5y-11=0$; (ბ) $x-3y+7=0$ და $x-3y+5=0$

51. შეადგინეთ $x+2y-11=0$ და $3x-6y-5=0$ წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხის ბისექტრისის განტოლება, თუ მას $M(1,-3)$ წერტილი ეკუთვნის

52. შეადგინეთ $2x-3y-5=0$ და $6x-4y+7=0$ წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხის ბისექტრისის განტოლება, თუ $M(2,-1)$ წერტილი ამ ბისექტრისაზე ძევს

53. შეადგინეთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება, თუ ის $x-y=0$ წრფიდან ორჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული ვიდრე აბსცისთა ღერძიდან

54. შეადგინეთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება, თუ ის, დროის ყოველი მომენტისათვის, სამჯერ ნაკლები მანძილითაა დაშორებული $x+2y=0$ წრფიდან, ვიდრე კოორდინატთა სათავიდან

55. იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლეების სიგრძეები, თუ მისი წვეროებია $A(2,5)$, $B(1,3)$ და $C(7,0)$

56. $A(-2,1)$, $B(3,1)$ და $C(1,5)$ სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ მანძილი B წვეროდან BC გვერდის მედიანამდე

57. აჩვენეთ, რომ $x-3y+1=0$, $x-3y+12=0$, $3x+y-1=0$ და $3x+y+10=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურა კვადრატს წარმოადგენს. იპოვეთ მისი ფართობი

58. $A(0,6)$ და $B(8,0)$ კვადრატის ორი მეზობელი წერტილია. შეადგინეთ მისი გვერდების განტოლებები

59. $5x+12y-10=0$ და $5x+12y+29=0$ კვადრატის ორი გვერდის განტოლებებია. შეადგინეთ მისი დანარჩენი გვერდების განტოლებები თუ ცნობილია, რომ $A(-3,5)$ მის გვერდზე ძევს

60. $x+3y-5=0$ კვარდატის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა, ხოლო $O(-1,\ 0)$ მისი სიმეტრიის ცენტრია. შეადგინეთ კვადრატის დანარჩენი გვერდების განტოლებები

61. შეადგინეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის განტოლება და დაადგინეთ წვეროების კოორდინატები თუ $O(0,\ 0)$ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია და მისი ორი გვერდის განტოლებებია $x+y-4=0$ და $2x+y-1=0$

62. შეადგინეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის განტოლება თუ მისი ორი გვერდის განტოლებებია $3x-2y+1=0$ და $x-y+1=0$, ხოლო $2x-y-1=0$ ერთ-ერთი მედიანის განტოლებაა

63. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ მისი ორი მედიანის განტოლებებია $x-y-3=0$ და $5x+4y-9=0$, ხოლო $A(-1,2)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

64. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროები თუ მისი მედიანების განტოლებებია $x-y-3=0$, $4x+5y-6=0$ და $5x+4y-9=0$, ხოლო ფართობია $S=6$

65. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ მისი ორი სიმაღლის განტოლებებია $2x-5y+8=0$ და $x+y-4=0$, ხოლო $A(3,4)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

66. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ მისი ორი ბისექტრისის განტოლებებია $x-3y-6=0$ და $x+y-2=0$, ხოლო $A(2,-4)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

67. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ $x-7y+15=0$ და $7x+y+5=0$ ერთი წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და ბისექტრისის განტოლებებია, ხოლო $A(2,6)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

68. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ $3x-4y+27=0$ და $x+2y-5=0$ სხვა და სხვა წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და ბისექტრისის განტოლებებია, ხოლო $A(2,-1)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

69. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ $3x+y+11=0$ და $x+2y+7=0$ სხვა და სხვა წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და მედიანის განტოლებებია, ხოლო $A(2,-7)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

70. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები თუ $x+2y-5=0$ და $4x+13y-10=0$ ერთი წვეროდან გამოსული ბისექტრისისა და მედიანის განტოლებებია, ხოლო $A(4,3)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა

71. $x+2y-5=0$ და $2x+y+10=0$ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია. იპოვეთ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, თუ $M(-1,\,2)$ მის ფუძეზე ძევს

72. $3x+4y-30=0$ და $3x-4y+12=0$ წრფეები $R=5$ რადიუსიანი წრეწირის მხებებია. იპოვეთ მხებებითა და შეხების წერტილებში გავლებული წრეწირის რადიუსებით შედგენილი ოთხკუთხედის ფართობი

პასუხები:

35. (ა) $-2/3$; (ბ) $-4/3$; (გ) არ არსებობს; (დ) $3/43$; **36.** (ა) $-arctg\,3$; (ბ) $arctg\,(7/6)$; (გ) $arctg\,(1/7)$; (დ) $arctg\,(11/17)$; **37.** $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$; **38.** $x=-5+t$, $y=-1-3t$; **39.** $A(3,-1)$, $B(3,3)$ და $C(-9/5;\,3/5)$, $\cos\alpha_1=1/\sqrt{10}$, $\cos\alpha_2=1/\sqrt{2}$, $\cos\alpha_3=1/\sqrt{5}$; **40.** $5x+y-3=0$, $x-5y-11=0$; **41.** $y=-2x+7$, $y=0{,}5x-3$; **42.** $x-2y+1=0$, $2x+y-3=0$; **43.** $3x-4y+32=0$, $3x-4y+7=0$, $4x+3y-24=0$, $4x+3y+1=0$; **44.** (ა) $x-8y=0$, (ბ) $8x-7y+6=0$, (გ) $19y+2=0$, (დ) $38x-19y+30=0$, (ე) $57x-19y+46=0$; **45.** $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$; **46.** $3x-y+2=0$, $3x-6y+14=0$; **47.** $4x-3y-5=0$; **49.** (ა) $\sqrt{10}/20$; (2) $2\sqrt{13}/13$; (გ) $3\sqrt{10}/20$; (დ)

$5\sqrt{13}/13$; **50.** (ა) $4x-5y-2=0$; (ბ) $x-3y+4=0$; **51.** $3x-19=0$; **52.** $10x-10y-3=0$; **53.** $x-(1\pm 2\sqrt{2})y=0$; **54.** $2x=(-9\pm 5\sqrt{2})y$; **55.** $3\sqrt{5}$, $3/\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; **56.** $\sqrt{5}$; **57.** 12,1; **58.** $3x+4y-24=0$, $3x+4y-74=0$, $4x-3y+18=0$ და $4x-3y-32=0$ ან $3x+4y-24=0$, $3x+4y+26=0$, $4x-3y+18=0$ და $4x-3y-32=0$; **59.** $12x-5y+61=0$, $12x-5y+22=0$ ან $12x-5y+61=0$, $12x-5y+100=0$; **60.** $3x-y+9=0$, $3x-y-3=0$, $x+3y+7=0$; **61.** $A(-3,\ 7)$, $B(-6,10)$, $C(9,-17)$, $9x+5y+4=0$; **62.** $x-3=0$ და $5x-3y-1=0$; **63.** $x+2y-3=0$, $x+y-1=0$, $2x+y-6=0$; **64.** $A(-1,\ 2)$, $B(3,0)$, $C(5,-4)$; **65.** $5x+2y-23=0$, $x-y+1=0$, $3x+4y-11=0$; **66.** $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$; **67.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$; **68.** $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$; **69.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$; **70.** $x+y-7=0$, $x+7y+5=0$, $x-8y+20=0$; **71.** $A(-13/3,\ 8/3)$; **72.** $100/3$ და $75/2$.

დამატებითი ამოცანები

1. შეადგინეთ $A(0,1)$ წერტილზე გავლებულიიმ წრფის განტოლება, რომ წრფის მონაკვეთი, რომელიც $x-3y+10=0$ და $2x+y-8=0$ წრფეებს შორისაა მოქცეული, ამ წერტილით შუაზე იყოფა

2. შეადგინეთ წრფის განტოლება, თუ პირველ საკოორდინატო მეოთხედშია მოქცეული მისი მონაკვეთის სიგრძე ორჯერ მეტია მანძილზე კოორდინატთა სათავიდან ამ წრფემდე, ხოლო წრფითა და საკოორდინატო რერძებით შედგენილი სამკუთხედის ფართობია $9/2$

3. $2x-3y+1=0$ და $x+4y-5=0$ წრფეებით განსაზღვრული კუთხის გვერდები $y=2x+b$ პარალელური წრფეებითაა გადაკვეთილი. დაადგინეთ: (ა) პარალელური წრფეების კუთხის გვერდებს შორის მოქცეული მონაკვეთების შუა წერტილების გეომეტრიული ადგილი; (ბ) იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც პარალელური წრფეების კუთხის გვერდებს შორის მოქცეულ თითოეულ მონაკვეთს $\lambda=3$ ფარდობით ყოფს

4. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილისა და მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრის კოორდინატები, თუ $x+y-7=0$ და $7x-y-9=0$ მისი ფერდების განტოლებებია, ხოლო $M(3,-8)$ წერტილი მის ფუძეზე ძევს

5. ტოლფერდა სამკუთხედში $x-2y+3=0$ ფუძის, ხოლო $4x-y+5=0$ ფერდის განტოლებებია. $M(6/5;\ 28/5)$ წერტილი სამკუთხედის მეორე ფერდზე ძევს. იპოვეთ: (ა) ფერდის სიგრძე; (ბ) მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები; (გ) სამკუთხედის ფართობი

6. $A(-3,-1)$, $B(1,-5)$, $C(9,3)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის AB და AC გვერდები, საერთო წვეროს მხრიდან, $\lambda=3$ ფარდობითაა დაყოფილი. აჩვენეთ, რომ დაყოფის წერტილების სამკუთხედის მოპირდაპირე წვეროებთან შემაერთებელი წრფეები და AM მედიანა ერთ წერტილში იკვეთებიან

7. აჩვენეთ, რომ $A(3,-2)$, $B(1,5)$, $C(-4,3)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის სიმაღლეები ერთ წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებსაც სამკუთხედის სიმაღლეების ფუძეები წარმოადგენს

პასუხები:

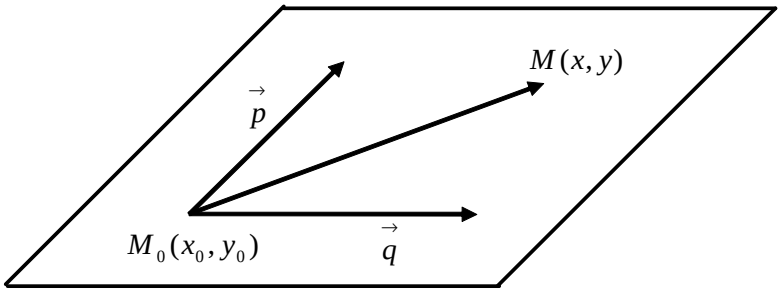
1. $x+4y+4=0$; **2.** პას: $x+y-3=0$; **3.** (ა) $11x-43y+29=0$; (ბ) $2x-26y+23=0$;

4. $(7-\sqrt{5};\ 3\sqrt{5}-10)$; **5.** (ა) $21/\sqrt{17}$; (ბ) $(17/16;\ 11/8)$; (გ) $66/5$

§2. სიბრტყე

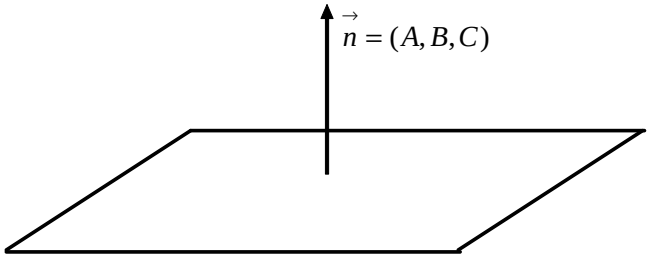
სიბრტყის ვექტორულ-პარამეტრული სახის განტოლება: $\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{p}+\tau\cdot\vec{q},\ t,\tau\in R$,

სადაც $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ და $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებული არაკოლინეარული ვექტოებია, $\vec{r_0}$ –სიბრტის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის რადიუს-ვექტორია, ხოლო $\vec{r}$ –სიბრტყის $M(x,y)$ მიმდინარე წერტილის რადიუს-ვექტორი. $t,\tau\in R$ პარამეტრები ეწოდებათ



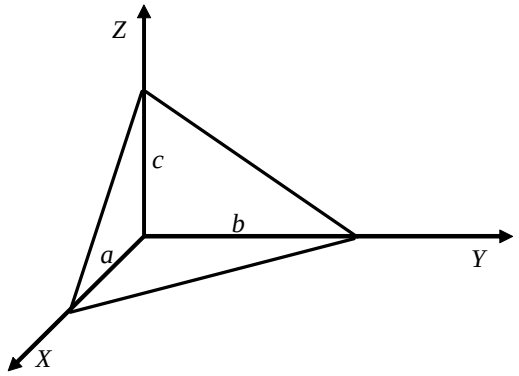
სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება: $Ax+By+Cz+D=0$,

სადაც $A,\ B,\ C$ და D ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან A, B და C რიცხვებს შორის ერთი მაინც არაა ნულის ტოლი ($A^2+B^2+C^2\neq 0$). ვექტორი $\vec{n}=(A,B,C)$ სიბრტყის მართობული ვექტორია, მას სიბრტყის ნორმალი ეწოდება.



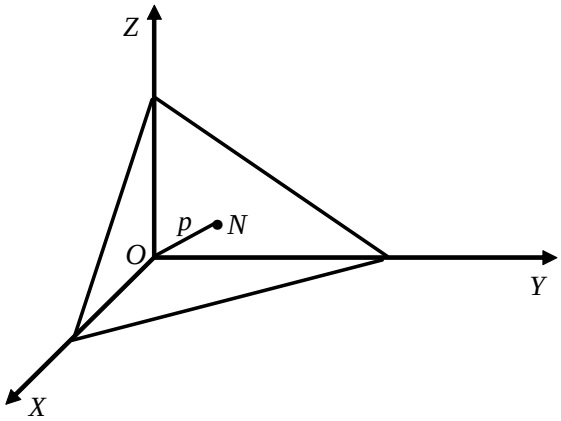
სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$

სადაც a, b და c, აბსოლუტური მნიშვნელობით, იმ მონაკვეთების სიგრძეების ტოლია, რომლებსაც სიბრტყე საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოკვეთს.



სიბრტყის ნორმალური სახის განტოლება $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$

სადაც p –კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყემდე მანძილის ტოლია, ხოლო α, β და γ კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის, შესაბამისად, OX, OY და OZ ღერძთან შედგენილი კუთხეებია.



სიბრტყის პარამეტრული სახის განტოლება

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot p_1 + \tau\cdot q_1 \\ y = y_0 + t\cdot p_2 + \tau\cdot q_2 \\ z = z_0 + t\cdot p_3 + \tau\cdot q_3 \end{cases}, \qquad t,\tau\in R$$

ეს ტოლობები მიიღება, თუ სიბრტყის ვექტორულ პარამეტრული სახის განტოლებას ჩავწერთ კოორდინატობრივად.

მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე $M_0(x_0,y_0)$ წერტილიდან $Ax+By+Cz+D=0$ განტოლებით მოცემულ სიბრტყემდე მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

სიბრტყეთა კონა: თუ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ და $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ განტოლებებით მოცემული სიბრტყეები იკვეთებისნ, მაშინ მათი თანაკვეთა წრფეს წარმოადგენს. ყველა იმ სიბრტყეთა ერთობლიობას, რომლებიც ამ წრფეზე გადის –სიბრტყეთა კონა ეწოდება.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

განტოლება, $\lambda\in R$, განსაზღვრავს კონაში შემავალ ნებისმიერი სიბრტყეს.

ამოცანები

1. შეადგინეთ იმ სიბრტყის პარამეტრული სახის განტოლებ, რომელიც გადის:

(1) $A(1,0,2)$ წერტილზე $\vec{p}=(1,\ 2,\ 3)$ და $\vec{q}=(0,3,\ 1)$ ვექტორების პარალელურად

(2) $A(1,2,1)$ წერტილზე i და j ვექტორების პარალელურად

(3) $A(1,7,1)$ წერტილზე OXZ სიბრტყის პარალელურად

(4) $A(5,3,2)$ და $B(1,0,1)$ წერტილებზე $\vec{p}=(1,\ 3,\ -3)$ ვექტორის პარალელურად

(5) $A(1,5,7)$ წერტილზე და OX ღერძზე

(6) OY ღერძზე $\vec{p}=(1,\ 2,\ 1)$ ვექტორის პარალელურად

(7) კოორდინატთა სათავეზე და $A(1,0,1)$ და $B(-2,-3,1)$ წერტილებზე

(8) $A(1,2,3)$, $B(2,4,4)$ და $C(3,3,1)$ წერტილებზე

2. შეადგინეთ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება, რომელიც გადის:

(1) $A(1,1,1)$ წერტილზე $\vec{p}=(1,\ 2,\ 0)$ და $\vec{q}=(0,1,\ 3)$ ვექტორების პარალელურად

(2) $A(31,0,1)$ წერტილზე და აბსცისთა ღერძზე

(3) $A(1,2,2)$ წერტილზე OXZ სიბრტყის პარალელურად

(4) კოორდინატთა სათავეზე და $A(1,0,2)$ და $B(0,0,3)$ წერტილებზე

(5) $A(1,0,1)$, $B(0,2,3)$ და $C(0,2,1)$ წერტილებზე

3. შეადგინეთ იმ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე $A(1,2,-2)$ და მართობულია ვექტორის $\vec{n}=(2,-1,3)$

4. დაადგინეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემული სიბრტყის, საკოორდინატო სისტემის მიმართ, განლაგების თავისებურებები:

(1) $D=0$; (2) $A=0$; (3) $B=0$; (4) $C=0$; (5) $A=0,\ D=0$; (6) $B=0,\ D=0$; (7) $C=0,\ D=0$;

(8) $B=0,\ C=0$; (9) $A=0,\ C=0$; (10) $A=0,\ B=0$; (11) $B=0, C=0,\ D=0$;

(12) $A=0, C=0,\ D=0$; (13) $A=0, B=0,\ D=0$

5. შეადგინეთ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება

(1) $x=2+3\cdot u-4\cdot v,\quad y=4-v,\quad z=2+3\cdot u$; (2) $x=u+v,\quad y=u-v,\quad z=5+6\cdot u-4\cdot v$

6. შეადგინეთ სიბრტყის პარამეტრული სახის განტოლება

(1) $3x-6y+z=0$; (2) $2x-y-z-3=0$

7. იპოვეთ სიბრტყის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოკვეთილი მონაკვეთების სიგრძეები:

(1) $2x+3y-9z+18=0$; (2) $x-2y+5z-20=0$;

(3) $x=1+u+v,\quad y=2+u,\quad z=3+u-v$; (4) $x=3+2u,\quad y=2-2u+4v,\quad z=1+u+3v$

8. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე $A(3,5,-7)$ და საკოორდინატო ღერძებზე ტოლი სიგრძის მონაკვეთებს ჩამოკვეთს

9. გამოთვალეთ იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყეებითა და $3x-5y+15z-30=0$ სიბრტყით

10. $A(2,1,0)$, $B(1,3,5)$, $C(6,3,4)$ და $D(0,-7,8)$ ტეტრაედრის წვეროებია. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც AB წიბოსა და CD წიბოს შუა წერტილზე გადის

11. შეადგინეთ $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$ და $D(4,1,2)$ წვეროების მქონე ტეტრაედრის წახნაგების განტოლებები

12. დადგინეთ შემდეგი სიბრტყეებიდან რომლები კვეთენ ერთმანეთს, არიან პარალელური ან ერთმანეთს ემთხვევიან

(1) $x-y+3z+1=0$ და $2x-y+5z-2=0$; (2) $2x+y+2z+4=0$ და $4x+2y+4z+8=0$;

(3) $3x+2y-z+2=0$ და $6x+4y-2z+1=0$;

(4) $x=1+u+v,\quad y=2+u,\quad z=3+u-v$ და $x=3+2u',\quad y=2-2u'+4v',\quad z=1+u'+3v'$;

(5) $x=u+2v,\quad y=1+v,\quad z=u-v$ და $x=2+3u'+v',\quad y=1+u'+v',\quad z=2-2v'$;

(6) $x=2+u+2v,\quad y=2+v,\quad z=3+u-v$ და $x=3u'+v',\quad y=u'+v',\quad z=-2v'$

13. იპოვეთ შემდეგ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული კუთხის კოსინუსები

(1) $2x+y-2z+6=0$ და $2x-2y+z+8=0$;

(2) $2x-2y+z+2=0$ და $x+y+z-5=0$;

(3) $x=1+u+v,\quad y=2+u,\quad z=3+u-v$ და $x=3+2u',\quad y=2-2u'+4v',\quad z=1+u'+3v'$;

14. შეადგინეთ $A(1,-2,3)$ წერტილზე გავლებული იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $B(1,1,1)$, $C(2,0,-1)$ და $D(3,4,5)$ წერტილებზე გავლებული სიბრტყის პარალელურია

15. მოცემულის პარალელეპიპედის $A(1,1,1)$ წვერო და მისი $x+y+2z-1=0$, $2x+y+3z+2=0$ და $x-y-z+3=0$ არაპარალელური წახნაგების განტოლებები. შეადგინეთ მისი დანარჩენი სამი წახნაგის განტოლებები

16. აჩვენეთ, რომ $2x+y-2z+6=0$, $2x-2y+z+8=0$ და $x+2y+2z+10=0$ არაპარალელური წახნაგების მქონე პარალელეპიპედი მართკუთხაა

17. იპოვეთ $A(1,3,5)$ წერტილიდან $2x+y+z-1=0$ და $3x+y+2z-3=0$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის B ფუძე

18. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელზედაც კოორდინატთა სათავიდან დაშვებული მართობის ფუძეა $A(1,-1,3)$

19. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც OZ ღერძზე გადის და $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ სიბრტყესტან 45°-იან კუთხეს ადგენს

20. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $2x+3y-z+5=0$, $3x-2y+2z-1=0$ წრფეზე გადის და პარალელურია ვექტორის: (1) $\vec{n}=(1,1,1)$; (2) $\vec{n}=(4,-7,-13)$

21. $x+5y+z=0$, $x-z+4=0$ წრფით განსაზღვრული კონიდან იპოვეთ ის სიბრტყე, რომელიც $x-4y-8z+12=0$ სიბრტყესთან $\pi/4$-ის ტოლ კუთხეს ადგენს

22. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $5x-y+3z-2=0$ სიბრტყის მართობულია და:

(1) მათი გადაკვეთის წრფე OXY სიბრტყეში ძევს; (2) გადის $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ წრფეზე; (3) გადის $2x-y+3z-5=0$, $x-2y+z+2=0$ წრფეზე

23. გამოარკვიეთ რომელი საკოორდინატო სიბრტყე მიეკუთვნება კონას, რომელიც $4x-y+2z-6=0$ და $6x+5y+3z-9=0$ სიბრტყეებითაა განსაზღვრული

24. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც სამი $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ და $2x+y-5=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე და: (1) აბსცისთა ღერძზე; (2) კოორდინატთა სათავეზე და $A(1,3,2)$ წერტილზე; (3) პარალელურია OXZ სიბრტყის

25. იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის
(1) $x-2y-2z+7=0$ და $2x-4y-4z+17=0$; (1) $6x+2y-4z+15=0$ და $9x+3y-6z+10=0$

26. შეადგინეთ იმ სიბრტყეთა განტოლებები, რომლებიც $3x-y+7z-4=0$ და $5x+3y-5z+2=0$ სიბრტყეებით განსაზღვრულ ორწახნაგა კუთხეს შუაზე ჰყოფს

27. იპოვეთ $A(0,6,4)$, $B(3,5,3)$, $C(-2,11,-5)$ და $D(1,-1,4)$ წვეროების მქონე ტეტრაედრის A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე

28. შეადგინეთ იმ სიბრტყეთა განტოლებები, რომლებიც $2x-2y-z-6=0$ სიბრტყიდან $d=7$-ის ტოლ მანძილზეა მოთავსებული

29. იპოვეთ იმ სფეროს ცენტრი და რადიუსი, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყეებითა და $11x-10y-2z-57=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრულ ტეტრაედრშია ჩახაზული

30. იპოვეთ $x+4y+8z+8=0$, $x-2y+2z+2=0$ და $3x+4y+12=0$ სიბრტყეების მიერ OXY სიბრტყეში შედგენილი სამკუთხედის ის წერტილი, რომელიც თანაბარი მანძილებითაა დაშორებული ამ სიბრტყეებიდან

პასუხები

1. (1) $x=1+t,\ \ y=2t+3\tau,\ \ z=2+3t+\tau$; (2) $x=1+t,\ \ y=2+\tau,\ \ z=1$; (3) $x=1+t,\ \ y=7,\ \ z=1+\tau$; (4) $x=5+4t+\tau,\ \ y=3+3t+3\tau,\ \ z=2+t-3\tau$; (5) $x=1,\ \ y=5+t,\ \ z=7+\tau$;

(6) $x=t,\ \ y=t+2\tau,\ \ z=\tau$; (7) $x=t-2\tau,\ \ y=-3\tau,\ \ z=t+\tau$;

(8) $x=1+t+2\tau,\ \ y=2+2t+\tau,\ \ z=3+t-2\tau$;

2. (1) $6x-3y+z-4=0$; (2) $y=0$; (3) $y-2=0$; (4) $y=0$; (5) $2x+y-2=0$;

3. $2x-y+3z+6=0$; **5.** (1) $x-4y-z+16=0$; (2) $x+5y-z+5=0$;

6. (1) $x=u-v,\ \ y=u,\ \ z=3u+3v$; (2) $x=1+u,\ \ y=-1-u-v,\ \ z=u+3v$;

7. (1) $-9,\ \ -6,\ \ 2$; (2) $20,\ \ -10,\ \ 4$; (3) $0,\ \ 0,\ \ 0$; (4) $17/5,\ \ 17/3,\ \ -17/4$;

8. $x+y+z-1=0$; **9.** 20; **10.** $27x+11y+z-65=0$; **11.** $x-3y-z+2=0$, $x-4y-z+2=0$, $2x-8y-3z+6=0$, $2x-11y-3z+9=0$; **12.** (1) და (4) გადაიკვეთებიან; (2) და (5) ერთმანეთს ემთხვევიან; (3) და (6) პარალელურები არიან; **13.** (1) 0; (2) $1/3\sqrt{3}$; (3) $\sqrt{3}/6$;

14. $2x-8y+5z-33=0$; **15.** $x+y+2z-4=0$, $2x+y+3z-6=0$, $x-y-z+1=0$; **17.** $B(-2,\ 1,\ 4)$;

18. $x-y+3z-11=0$; **19.** $x+3y=0$, $3x-y=0$; **20.** (1) $6x-17y+11z-19=0$; (2) კონაში შემავალი ნებისმიერი სიბრტყე; **21.** $x+20y+7z-12=0$, $x-z+4=0$; **22.** (1) $15x-3y-26z-6=0$;

(2) $x+2y-z+2=0$; (3) $3x+z-9=0$; **23.** OXZ; **24.** (1) $2y-z=0$; (2) $3x-y=0$; (3) $y-3=0$; **25.** (1) $1/2$; (2) $25/6\sqrt{14}$; **26.** $x+2y-6z+3=0$; **27.** 3; **28.** $2x-2y-z-27=0$; **29.** $(3/2,\ -3/2,\ -3/2)$; **30.** $(-19/6,\ -5/6,\ 0)$

$ 3. წრფე და სიბრტყე სივრცეში

ვთქვათ, მოცემულია წრფე კანონიკური სახის განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

და სიბრტყე ზოგადი სახის განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0\,.$$

წრფისა და სიბრტყის **პარალელურობის პირობა** $Ap+Bq+Cr=0$

წრფისა და სიბრტყის **მართობულობის პირობა** $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$

α **კუთხე** წრფესა და სიბრტყეს შორის: $\sin\alpha=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

პირობა იმისა, რომ წრფე სიბრტყეზე ძევს: $\begin{cases}Ap+Bq+Cr=0\\Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$

ამოცანები

1. გამოარკვიეთ, მოცემული წრფე მოცემულ სიბრტყეზე მდებარეობს, მისი პარალელურია თუ კვეთს მას. თუ კვეთს–იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი

(1) $x=2+4t,\ y=-1+t,\ z=2-t$ და $4x+y-z+13=0$; (2) $x=2-3t,\ y=-1+t,\ z=-2t$ და $x+y-z+3=0$; (3) $x=t,\ y=-8-4t,\ z=-3-3t$ და $x+y-z+5=0$; (4) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ და $4x+3y-z+3=0$; (5) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ და $3x-y+2z-5=0$; (6) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ და $3x-3y+2z-5=0$; (7) $2x-y+3z+4=0,\ x-2y-2z+2=0$ და $4x-5y-z+8=0$; (8) $2x-3y-3z-9=0,\ x-2y+z+3=0$ და $x-2y+z-1=0$; (9) $3x+5y-7z+16=0,\ 2x-y+z-6=0$ და $5x-z-4=0$

2. დაადგინეთ, m-ის რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს $x=-1+3t,\ y=2+mt,\ z=-3-2t$ წრფეს $x+3y+3z-2=0$ სიბრტყესთან საერთო წერტილი

3. დაადგინეთ, a და d პარამეტრების რა მნიშვნელობისათვის ძევს $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ წრფე $ax+y-2z+d=0$ სიბრტყეზე

4. დაადგინეთ, a და c პარამეტრების რა მნიშვნელობისაა
$3x-2y+z+3=0,\ 4x-3y+4z+1=0$ წრფე $ax+8y+cz+2=0$ სიბრტყის მართობული

5. მოცემული $\vec{r}=\vec{r_1}+u\cdot\vec{a_1}+v\cdot\vec{a_2}$ სიბრტყისა და $\vec{r}=\vec{r_0}+t\,\vec{a}$ წრფისათვის, დაადგინეთ უაცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ: (1) წრფეს სიბრტყესთან არა აქვს საერთო წერტილი, (2) წრფე ძევს სიბრტყეზე, (3) წრფე კვეთს სიბრტყეს

6. იპოვეთ $\vec{r}=\vec{r_0}+t\,\vec{a}$ წრფისა და $\vec{r}=\vec{r_1}+u\cdot\vec{a_1}+v\cdot\vec{a_2}$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის რადიუს ვექტორი

7. გამოარკვიეთ წრფისა და სიბრტყის ურთიერთ მდებარეობა:

(1) $x=2-3t,\ y=7-2t,\ z=-1+4t$ და $x=1+v,\ y=1+4u+2v,\ z=u-v$;

(2) $x-2y+3z-2=0,\ 3x+y-5z+1=0$ და $x=4+u+3v,\ y=3+4u+2v,\ z=8u-v$;

(3) $\dfrac{x-1}{10}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$ და $x=3+10u-2v,\ y=2-4u+3v,\ z=-2+u+2v$

8. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და წრფეზე $x=1+3t,\ y=-2+4t,\ z=5-2t$

9. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის
$x+3y-2z-4=0,\ 2x-y+3z-1=0$ წრფეზე და პარალელურია წრფის
$x=2+3t,\ y=-1+6t,\ z=4t$

10. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის OZ ღერძზე და პარალელურია წრფის $x=2+t,\ y=2t,\ z=1+3t$

11. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც ძევს $x-y+2z-2=0$ სიბრტყეში და კვეთს წრფეებს: $x=1+t,\ y=2+2t,\ z=4+3t$, $x=1-t',\ y=4+2t',\ z=-t'$

12. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და კვეთს წრფეებს: $x=t,\ y=1+4t,\ z=1-3t$, $x=1+7t',\ y=-8t',\ z=1+5t'$

13. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, რომელიც $3x-2y-3z-7=0$ სიბრტყის პარალელურია, გადის წერტილზე $A(3,-2,-4)$ და კვეთს
$x=2+3t,\ y=-4-2t,\ z=1+2t$ წრფეს

14. იპოვეთ კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის:

(1) $x=1+11t,\ y=2-7t,\ z=5-8t$ და $7x-8y+2z-10=0$;

(2) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$ და $2x-4y+2z-9=0$

(3) $x+4y-2z+7=0,\ 3x+7y-2z=0$ და $3x+y-z+1=0$;

15. შეადგინეთ $A(1,2,1)$ წერტილიდან $3x+7y-2z+5=0$ სიბრტყეზე დაშვებული მართობი წრფის განტოლება

16. იპოვეთ $A(2,11,-5)$ წერტილის გეგმილი $x+4y-2z+7=0$ სიბრტყეზე

17. იპოვეთ $M(6,-5,5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x-3y+z-4=0$ სიბრტყის მიმართ

18. იპოვეთ $N(4,-5,4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი იმ სიბრტყის მიმართ, რომელიც $x+y+z-3=0,\ x-y+z-1=0$ და $x+z=0,\ y=0$ წრფეებზე გადის

19. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $x=2+5t,\ y=3+t,\ z=-1+2t$ წრფეზე გადის და $4x+3y-z+3=0$ სიბრტყის მართობულია

20. იპოვეთ გეგმილი $3x-2y-z+15=0$ სიბრტყეზე შემდეგი წრფისა:

(1) $x=1+2t,\ y=3+t,\ z=2+t$; (2) $x+y+z-5=0,\ 2x-3y+z-4=0$

21. აჩვენეთ, რომ $x=8+5t,\ y=1+2t,\ z=6+4t$ და $x=11+3t',\ y=2+t',\ z=4-2t'$ წრფეები იკვეთებიან და შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელშიც ეს წრფეები ნდებარეობენ

22. შეადინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელშიც $A(1,2,-1)$ წერტილიდან $x+y-z+1=0$ და $2x+3y=0$ სიბრტყეებისადმი გავლებული პერპენდიკულარები მდებარეობენ

23. აჩვენეთ, რომ $x=3t,\ y=1-t,\ z=3+2t$ და $x=-1-6t',\ y=2t',\ z=3-4t'$ წრფეები პარალელურია და შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელშიც ეს წრფეები ნდებარეობენ

24. შეადგინეთ $x=t,\ y=2t,\ z=-3t$ და $x=1+5t',\ y=3+4t',\ z=4+2t'$ წრფეების პარალელური სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(4,-1,3)$ წერტილზე გადის

25. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $x=-5+4t,\ y=2+7t,\ z=1+2t$ წრფეზე გადის და $x=t',\ y=1-2t',\ z=-3t'$ წრფის პარალელურია

26. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ ის $x+y+z-2=0$ სიბრტყის პარალელურია და $x=2t,\ y=5-t,\ z=-1-t$ წრფე მასზე ძევს

27. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(1,2,-2)$ წერტილზე გადის და $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$ წრფის მართობულია

28. იპოვეთ $A(1,2,3)$ წერტილიდან $x=8+3t,\ y=1+t,\ z=6-2t$ წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე

29. იპოვეთ მანძილი $P(1,-3,2)$ წერტილიდან $x=1-2t,\ y=1+3t,\ z=2t$ წრფემდე

30. შეადგინეთ $D(5,2,4)$ წერტილიდან $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ წრფეზე დაშვებული მართობი წრფის პარამეტრული სახის განტოლება

31. იპოვეთ:

(1) $P(-3,1,-1)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $4x-3y-13=0,\ y-2z+5=0$ წრფის მიმართ;

(2) $Q(4,3,10)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$ წრფის მიმართ

32. შეადგინეთ შემდეგი წრფეების საერთო პერპენდიკულარის განტოლება:

(1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ და $x=-1+3t,\ y=2+2t,\ z=1;$

(2) $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ და $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

პასუხები

1. (1) $A(-2,-2,3)$; (2), (6), (8) წრფე სიბრტყის პარალელურია; (3), (4), (7) წრფე ძევს სიბრტყეზე; (5) $A(2,3,1)$; (9) $A(2,4,6)$; **2.** $m=1$; **3.** $a=-2,\ d=11$; **4.** $a=5,\ d=1$;

5. (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0,\ (\vec{r}_1-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$; (2) $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0,\ (\vec{r}_1-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$; (3) $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$;

6. $\vec{r}=\vec{r}_0+\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}\vec{a},\quad \vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$; **7.** (1) წრფე სიბრტყის პარალელურია; (2) $A(1,1,1)$; (3) წრფე ძევს სიბრტყეზე; **8.** $16x-17y-10z=0$; **9.** $2x-7y+9z+5=0$; **10.** $2x-y=0$; **11.** $x=2t,\ y=2t,\ z=1$; **12.** $7x-y+z=0,\ 4x+y-4z=0$; **13.** $x=3+5t,\ y=-2-6t,\ z=-4+9t$; **14.** (1) 45°; (2) 30°; (6) $\arcsin\frac{19}{11\sqrt{7}}$; **15.** $x=1+3t,\ y=2+7t,\ z=1-2t$; **16.** $A'(-1,-1,1)$; **17.** $M'(-2,7,1)$; **18.** $N'(-2,7,-2)$; **19.** $7x-13y-11z+14=0$; **20.** (1) $3x-2y-z+15=0,\ x+5y-7z-2=0$; (2) $x+y+z-5=0,\ 3x-2y-z+15=0$; **21.** $8x-22y+z-48=0$; **22.** $3x-2y+z+2=0$; **23.** $x-y-2z+7=0$; **24.** $16x-17y-6z-63=0$; **25.** $17x-14y+15z+98=0$; **26.** $x+y+z-4=0$; **27.** $4x-3y+2z+6=0$; **28.** $A'(5,0,8)$; **29.** $d=2\sqrt{69/17}$; **30.** $x=5,\ y=2-t,\ z=4+2t$; **31.** (1) $P'(5,-7,3)$; (2) $Q'(2,9,6)$; **32.** (1) $18x+22y-5z-14=0,\ 12x-18y+13z+35=0$; (2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$

§4. წრფე სივრცეში

$\vec{a} = (p, q, r)$ მიმმართველი ვექტორისა და მოცემულ $M(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გავლებული წრფის **ვექტორულ პარამეტრული სახის** განტოლებაა

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\,\vec{a},\ t \in R,$$

სადაც $\vec{r_0}$ არის M წერტილის რადიუს ვექტორი, $\vec{r}$ არის წრფის მიმდინარე წერტილის რადიუს ვექტორი, ხოლო t პარამეტრია.

თუ წრფის ამ ტოლობას ჩავწერთ კოორდინატობრივად, მივიღებთ წრფის **პარამეტრული სახის** განტოლებას

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,p \\ y &= y_0 + t\,q,\ \ t \in R. \\ z &= z_0 + t\,r \end{aligned}$$

თუ $pqr \neq 0$, მაშინ უკანასკნელი ტოლობებიდან პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ წრფის **კანონიკური სახის** განტოლებას

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

წრფე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი არაპარალელური წრფის თანაკვეთის წერტილების სიმრავლე, ამიტომ გვაქვს წრფის **ზოგადი სახის** განტოლება

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

ამოცანები

1. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, რომელიც გადის:

(1) $M(2, 0, 3)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{a} = (3, -2, -2)$ ვექტორის

(2) $A(1, 2, 3)$ წერტილზე და პარალელურია აბსცისთა ღერძის

(3) $M(1, 2, 3)$ და $N(4, 4, 5)$ წერტილზე

2. გამოარკვიეთ, $A_1(3, 4, 7)$, $A_2(2, 0, 4)$, $A_3(0, -5, 1)$ და $A_4(-1, 3, -2)$ წერტილებიდან რომელი მიეკუთვნება $x = 2 + t,\ y = 1 + 3t,\ z = 5 + 2t$ წრფეს

3. შეადგინეთ $A_1(3, 7, 5)$, $A_2(1, 2, 3)$ და $A_3(3, 0, 1)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A_1 წვეროდან გავლებული მედიანის პარამეტრული სახის განტოლება

4. შეადგინეთ $A_1(1,2,-7)$, $A_2(2,2,-7)$ და $A_3(3,4,-5)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A_1 წვეროდან გავლებული ბისექტრისის პარამეტრული სახის განტოლება

5. ჩაწერეთ შემდეგი წრფეები ზოგადი სახის განტოლების სახით:

(1) $x=1+2t,\ y=2+3t,\ z=3+6t$; (2) $x=8+3t,\ y=-6t,\ z=1+2t$

6. შეადგინეთ შემდეგი წრფეები პარამეტრული სახის განტოლების სახით:

(1) $x+y+2z-3=0,\ x-y+z-1=0$; (2) $x+2y+4z-7=0,\ 2x+y-z-5=0$

7. შეადგინეთ $A_1(1,-2,-4)$, $A_2(3,1,-3)$ და $A_3(5,1,-7)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A_2 წვეროდან გავლებული სიმაღლის პარამეტრული სახის განტოლება

8. შეადგინეთ შემდეგი წრფეები კანონიკური სახის განტოლების სახით:

(1) $5x+y+z=0,\ 2x+3y-2z+5=0$; (2) $3x-2y+z-2=0,\ 4x+y-3z-2=0$

9. შეადგინეთ იმ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, რომელიც $A(0,1,-4)$ წერტილზე გადის და პარალელურია წრფის $x+2y+z-1=0,\ 2x+2y-3z+6=0$

10. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები პარალელურია და იპოვეთ მანძილი მათ შორის:

(1) $x=1-2t,\ y=3t,\ z=-2+t$ და $x=7+4t',\ y=5-6t',\ z=4-2t'$

(2) $x=2t,\ y=0,\ z=-2t$ და $x+y+z-3=0,\ x-y+z-1=0$

(3) $x+y-3z+1=0,\ x-y+z+3=0$ და $x+2y-5z-1=0,\ x-2y+3z-9=0$

11. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები ემთხვევიან ერთმანეთს:

(1) $x=8+3t,\ y=7-2t,\ z=11+t$ და $x=5-6t',\ y=9+4t',\ z=10-2t'$

(2) $3x+y-2z-6=0,\ 41x-19y+52z-68=0$ და
$x-2y+5z-1=0,\ 33x+4y-5z-63=0$

(3) $x=-t,\ y=-4-5t,\ z=3+3t$ და $4x+y+3z-5=0,\ 7x-2y-z-5=0$

12. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები იკვეთებიან და იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

(1) $x=-3t,\ y=2+3t,\ z=1$ და $x=1+5t',\ y=1+13t',\ z=1+10t'$

(2) $x=-2+3t,\ y=-1,\ z=4-t$ და $2y-z+2=0,\ x-7y+3z-17=0$

(3) $x+z-1=0,\ 3x+y-z+13=0$ და $x-2y+3=0,\ y-2z-8=0$

12. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები აცდენილი წრფეებია და იპოვეთ მანძილი მათ შორის:

(1) $x=3+t,\ y=1-t,\ z=2+2t$ და $x=-t',\ y=2+3t',\ z=3t'$

(2) $x=3-6t,\ y=-1+4t,\ z=t$ და $x=-2+3t',\ y=4,\ z=3-t'$

(3) $x+2y-z+1=0,\ 2x-3y+z-4=0$ და $x+y+z-9=0,\ 2x-y-z=0$

(4) $x=2+3t,\ y=3-2t,\ z=1+2t$ და $x=-2t',\ y=1+3t',\ z=2-t'$

პასუხები

1. (1) $\vec{r} = 2i + 3k + t(3i - 2j - 2k)$; (2) $\vec{r} = i + 2j + 3k + t\,i$; (3) $\vec{r} = i + 2j + 3k + t(3i + 2j + 2k)$; **2.** A_1 და A_3; **3.** $x = 3 + t,\ y = 7 + 6t,\ z = 5 + 3t$; **4.** $x = 1 + (1 + \sqrt{3})t,\ y = 2 + t,\ z = -7 + t$; **5.** (1) $2y - z - 1 = 0,\ 3x - 2y + 1 = 0$; (2) $y + 3z - 3 = 0,\ 2x + y - 16 = 0$; **6.** (1) $x = 2 + 3t,\ y = 1 + t,\ z = -2t$; (2) $x = 5 - 2t,\ y = -3 + 3t,\ z = 2 - t$; **7.** $x = 3 + 3t,\ y = 1 + 15t,\ z = -3 + 19t$; **8.** (1) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$; (2) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-1}{11}$; **9.** $x = 8t,\ y = 1 - 5t,\ z = -4 + 2t$; **10.** (1) $\sqrt{91\frac{3}{14}}$; (2) $\sqrt{3}$; (3) $\sqrt{347}/3$; **11.** (1) $(1,1,1)$; (2) $(10,-1,0)$; (3) $(-3,0,4)$; **12.** (1) $18/\sqrt{110}$; (2) $31/13$; (3) $16/\sqrt{102}$

§5. მეორე რიგის წირები

სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთაგან თითოეული თანაბარი მანძილითაა დაშორებული სიბრტყის ერთ არჩეულ წერტილამდე (ცენტრი) **წრეწირი** ეწოდება. ცენტრით $O(a,b)$ წერტილში, R-რადიუსიანი წრეწირის განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

როცა წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სისტემის სათავეშია, მაშინ მისი განტოლებაა

$$x^2+y^2=R^2.$$

წრეწირის $M(x_0,y_0)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის განტოლებაა

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2 \quad \text{ან} \quad xx_0+yy_0=R^2$$

სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთათვის სიბრტყის ორ ფიქსირებულ F_1 და F_2 წერტილებამდე (ფოკუსებამდე) მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა **ელიფსი** ეწოდება. სიბრტყის F_1 და F_2 ამორჩეულ წერტილებს ელიფსის **ფოკუსები** ეწოდებათ.

$F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$ ფოკუსების მქონე ელიფსის კანონიკური სახის განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

სადაც a, $(c<a)$ და b ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარ ღერძებია და $c^2=a^2-b^2$. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი ტოლია: $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$. ელიფსის დირექტრისა ეწოდებათ წრფეებს: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, თუ $a>b$ და $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ თუ $b>a$. ელიფსის ნებისმიერი წერტილიდან მის ფოკუსებამდე r_1 და r_2 მანძილებს ფოკალური რადიუსები ეწოდებათ, ამასთან:

$$r_1=a+\varepsilon x \quad \text{და} \quad r_2=a-\varepsilon x.$$

ელიფსის $M(x_0,y_0)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის განტოლებაა

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთათვის სიბრტყის ორ ფიქსირებულ F_1 და F_2 წერტილებამდე (ფოკუსებამდე) მანძილების სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა მუდმივი სიდიდეა **ჰიპერბოლა** ეწოდება.

$F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$ ფოკუსების მქონე ჰიპერბოლის კანონიკური სახის განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

სადაც a-ს ნამდვილი ნახევარღერძი, ხოლო b-ს წარმოსახვითი ნახევარღერძი ეწოდება, ამასთან $c^2=a^2+b^2$.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

განტოლება განსაზღვრავს კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული ჰიპერბოლას, რომლის ფოკუსებიც ორდინატთა ღერძზე მოთავსებული (ამ შემთხვევაში ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძია $2b$).

ერთ და იმავე საკოორდინატო სისტემაში აგებულ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ და $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლებს ერთმანეთის შეუღლებულებს უწოდებენ. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი ტოლია: $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$. ჰიპერბოლის დირექტრისა ეწოდებათ $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ ($y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$) წრფეებს.

ჰიპერბოლის ასიმპტოტები ეწოდებათ წრფეებს: $y=\pm\frac{b}{a}x$. ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან მის ფოკუსებამდე r_1 და r_2 მანძილებს ფოკალური რადიუსები ეწოდებათ, ამასთან:

$r_1=\varepsilon x+a$ და $r_2=-a+\varepsilon x$ მარჯვენა შტოსათვის

$r_1=-\varepsilon x-a$ და $r_2=a-\varepsilon x$ მარცხენა შტოსათვის

ჰიპერბოლის $M(x_0,y_0)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის განტოლებაა

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთათვის სიბრტყის ფიქსირებულ F წერტილამდე და სიბრტყის არჩეულ წრფემდე მანძილები ერთმანეთის ტოლია, **პარაბოლა** ეწოდება. სიბრტყის ამორჩეულ წერტილს პარაბოლის ფოკუსი, ხოლო ამორჩეულ წრფეს პარაბოლის დირექტრისა ეწოდება.

$F(\frac{p}{2}, 0)$ ფოკუსისა და $x = -\frac{p}{2}$ დირექტრისის მქონე პარაბოლის კანონიკური სახის განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$y^2 = 2px,$$

$p > 0$ რიცხვს– პარაბოლის პარამეტრიც ეწოდება. პარაბოლის ნებისმიერი წერტილი ფოკალური რადიუსია $r = x + \frac{p}{2}$. თუ პარაბოლის ორდინატთა ღერძის მარჯვენა მხარესაა, მაშინ მისი განტოლება $y^2 = -2px$ სახით ჩაიწერება, ხოლო თუ მისი სიმეტრიის ღერძია ორდინატთა ღერძია, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$x^2 = 2py$ როცა ის მდებარეობს ზედა ნახევარსიბრტყეში

$x^2 = -2py$ როცა ის მდებარეობს ქვედა ნახევარსიბრტყეში

პარაბოლის $M(x_0, y_0)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის განტოლებაა

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

ამოცანები:

წრეწირი

1. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის $M(2,5)$ წერტილზე და რომლის ცენტრია $O(1,-2)$ წერტილი

2. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე წრეწირის შემდეგი განტოლებები:

(1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$; (2) $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$; (3) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$; (4) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

3. შეადგინეთ შემდეგ წერტილებზე გავლებული წრეწირის განტოლება: $A(0,1)$, $B(3,0)$, $C(-1,0)$.

4. შეადგინეთ $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 25$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც $2x - 5y - 7 = 0$ წრფის მართობულია

5. შეადგინეთ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ წრეწირისადმი გავლებული მხების განტოლება, თუ ის გადის წერტილზე: (1) $A(0,4)$; (2) $B(7,0)$, (3) $C(5,3)$

6. შეადგინეთ $N(7,5)$ წერტილიდან $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$ წრეწირისადმი გავლებული მხების განტოლება.

7. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია $A(1,4)$ და $B(3,2)$ წერტილები

8. შეადგინეთ $O(2,-3)$ ცენტრის მქონე წრეწირის განტოლება, თუ $6x-8y-24=0$ წრფე მისი მხებია

9. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც $M(2,4)$ წერტილზე გადის და საკოორდინატო ღერძებს ეხება

10. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $(x-1)^2+(y+2)^2 \geq 9$; (2) $1 \leq (x-1)^2+(y+2)^2 \leq 9$;

(3) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 25\\(x-4)^2+(y-6)^2 \leq 9\end{cases}$; (4) $\begin{cases}x^2+y^2-4y \leq 0\\|x| \geq 1\end{cases}$; (5) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y<0\\y<2x\end{cases}$

11. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის $A(1,2)$ წერტილზე გადის და ეხება წრფეებს:

(1) $x-y+3=0$ და $x-y-1=0$; (2) $x-2y+2=0$ და $2x+y-2=0$;

12. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის ეხება წრფეებს: $x-1=0$, $y-1=0$ და $x-y-1=0$

13. შეადგინეთ $x^2+y^2+2x-19=0$ წრეწირისადმი გავლებული იმ მხების განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე: (1) $A(1,1)$; (2) $B(1,4)$; (3) $C(5,2)$

14. $O(3,-1)$ ცენტრის მქონე წრეწირი $2x-5y+18=0$ წრფეზე 6-ის ტოლი სიგრძის ქორდას ჩამოკვეთს. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება

15. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი რადიუსია $\sqrt{5}$ და $x-2y-1=0$ წრფე მას $A(3,1)$ წერტილში ეხება

16. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $2x+y-5=0$ და $2x+y+15=0$ პარალელურ წრფეებს, ამასთან ერთ-ერთს $A(2,1)$ წერტილში

17. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც $A(1,0)$ წერტილზე გადის და ეხება ორ პარალელურ $2x+y+2=0$ და $2x+y-18=0$ წრფეს

18. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ცენტრი $2x+y=0$ წრფეზე ძევს და რომელიც ეხება $4x-3y+10=0$ და $4x-3y-30=0$ წრფეებიდან თითოეულს

19. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $7x-y-5=0$ და $x+y+13=0$ ურთიერთგადამკვეთ წრფეებიდან თითოეულს, და ერთ-ერთს $A(1,2)$ წერტილში

20. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და ეხება $x+2y-9=0$ და $2x-y+2=0$ ურთიერთ გადამკვეთ წრფეებიდან თითოეულს

21. შეადგინეთ იმ წრეწირთა განტოლებები, რომელთა ცენტრებიც $4x-5y-3=0$ წრფეზე მდებარეობენ და რომლებიც $2x-3y-10=0$ და $3x-2y+5=0$ წრფეებს ეხებიან

22. შეადგინეთ იმ წრეწირების განტოლებები, რომლებიც ეხებიან $4x-3y-10=0$, $3x-4y-5=0$ და $3x-4y-15=0$ სამი წრფიდან თითოეულს

23. დადგინეთ როგორი მდებარეობა აქვს $A(1,-2)$ წერტილს შემდეგი წრეწირების მიმართ:

(1) $x^2+y^2=1$; (2) $x^2+y^2=5$; (3) $x^2+y^2=9$; (4) $x^2+y^2-8x-4y-5=0$;

(5) $x^2+y^2-10x+8y=0$

24. შეადგინეთ წრეწირების ცენტრების გეომეტრიული ადგილის განტოლება:

(1) $(x-3)^2+y^2=9$ და $(x+2)^2+(y-1)^2=1$;

(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ და $(x+2)^2+(y+5)^2=25$;

(3) $x^2+y^2-4x+6y=0$ და $x^2+y^2-6x=0$;

(4) $x^2+y^2-x+2y=0$ და $x^2+y^2+5x+2y=1$

25. შეადგინეთ $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც $5x+2y-13=0$ წრფის მართობულია

26. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი:

(1) $A(6,-8)$ წერტილიდან $x^2+y^2=9$ წრეწირამდე;

(2) $A(3,9)$ წერტილიდან $x^2+y^2-26x+30y+313=0$ წრეწირამდე;

(3) $A(-7,2)$ წერტილიდან $x^2+y^2-10x-14y-151=0$ წრეწირამდე

27. იპოვეთ $7x-y+12=0$ წრფის $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ წრეწირტან გადაკვეთის წერტილები

28. გამოარკვიეთ, მოცემული წრფე წრეწირს კვეთს, ეხება თუ არ იკვეთება მასთან:

(1) $y=2x-3$ და $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

(2) $y=0{,}5x-0{,}5$ და $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

(3) $y=x+10$ და $x^2+y^2-1=0$

29. k-ს რა მნიშვნელობისათვის $y = kx$ წრფე $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ წრეწირს:

(1) კვეთს; (2) ეხება; (3) არ კვეთს მას

30. შეადგინეთ $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 169$ წრეწირის იმ ქორდის განტოლება, რომელიც $A(8{,}5;\ 3{,}5)$ წერტილით შუაზე იყოფა

31. იპოვეთ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$ წრეწირის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც $A(1;\ 2)$ წერტილით შუაზე იყოფა

32. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ და

$x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებზე და $A(1,-1)$ წერტილზე

33. შეადგინეთ $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ და $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებზე გავლებული წრფის განტოლება

34. იპოვეთ $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ და $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$ წრეწირების სერთო ქორდის სიგრძე

35. შეადგინეთ $x^2 + y^2 = 5$ წრეწირისადმი $A(-1, 2)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება

36. შეადგინეთ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ წრეწირისადმი $A(-5, 7)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება

37. დაადგინეთ თუ რა კუთხით იკვეთებიან $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ და
$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$ წრეწირები

38. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 = R_1^2$ და
$(x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = R_2^2$ წრეწირები მართი კუთხით იკვეთებიან

39. დაამტკიცეთ, რომ $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny - m^2 + n^2 = 0$ და
$x^2 + y^2 - 2nx + 2my + m^2 - n^2 = 0$ წრეწირები მართი კუთხით იკვეთებიან

40. შეადგინეთ $x^2 + y^2 = 5$ წრეწირისადმი $A(5/3, -5/3)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება

41. შეადგინეთ $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ წრეწირისადმი $A(1, 6)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება

42. იპოვეთ კუთხე $A(4, 2)$ წერტილიდან $x^2 + y^2 = 10$ წრეწირისადმი გავლებულ მხებებს შორის

43. შეადგინეთ $A(2, -3)$ წერტილიდან $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 4$ წრეწირისადმი გავლებულ მხებების წრეწირთან შეხების წერტილებზე გავლებული ქორდის განტოლება

ელიფსი

44. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ:

(1) ფოკუსებს შორის მანძილია 12, ხოლო დიდი ნახევარღერძი 10

(2) დიდი ნახევარღერძია 13, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $5/13$

45. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ:

(1) მცირე ნახევარღერძია $2\sqrt{7}$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $3/4$

(2) ნახევარღერძების ჯამია 10, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი $4\sqrt{5}$

46. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსებისა:

(1) $4x^2+9y^2=16$; (2) $x^2+4y^2=9$; (3) $25x^2+36y^2=4$

47. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ერთ ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 9 და 3

48. ელიფსზე განტოლებით $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ იპოვეთ წერტილები, რომლებიც $\sqrt{7}$-ის ტოლი მანძილით არიან დაშორებულნი მცირე ღერძიდან

49. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარცხენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარჯვენადან

50. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური სახის განტოლება, თუ მის დირექტრისებს შორის მანძილია 5, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი 4

51. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $2/3$-ის ტოლია. ელიფსის A წერტილის ფოკალური რადიუსია 15. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან ამ ფოკუსის შესაბამის დირექტრისამდე

52. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F_1(2,0)$, ამ ფოკუსის შესაბამისი დირექტრისაა $x=8$, ხოლო ექსცენტრისიტეტია $1/2$. იპოვეთ მეორე ფოკუსი და მეორე დირექტრისა

53. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსებია $F_1(1,0)$ და $F_2(0,1)$, ხოლო დიდი ნახევარღერძი 1-ის ტოლია

54. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $5x^2+9y^2+30x-18y+9=0$; (2) $5x^2+9y^2+30x-18y+54=0$;

(3) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$; (4) $x=-2+\sqrt{-5-6y-y^2}$

55. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი სიმეტრიის ღერძები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია და საკოორდინატო ღერძებს ეხება წერტილებში: $A(5,0)$, $B(0,-2)$

56. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო $x^2+5y^2=20$ ელიფსის წვეროებია, ხოლო დარჩენილი ორი წვერო –ელიფსის მცირე ღერძის ბოლოებია

57. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის მარჯვენა ფოკუსიდან შესაბამის დირექტრისამდე

58. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფზე იპოვეთ წერტილები, რომელთა აბსცისაა (-3)

59. შეადგინეთ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსის $M(2,-5/3)$ წერტილის შესაბამისი ფოკალური რადიუსების შემცველი წრფეების განტოლებები

60. იპოვეთ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსის $M(-4,-2,4)$ წერტილის შესაბამისი ფოკალური რადიუსები.

61. იპოვეთ $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ელიფსის წერტილი, საიდანაც მარჯვენა ფოკუსამდე მანძილია 14.

62. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ ელიფსის წერტილები, საიდანაც მარცხენა ფოკუსამდე მანძილია $2,5$.

63. იპოვეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ:

(1) მცირე ღერძი, ფოკუსებიდან, 60°-იანი კუთხით მოსჩანს

(2) ფოკუსებს შორის მანძილი, მცირე ღერძის ბოლიებიდან, მართი კუთხით მოსჩანს

(3) მანძილი დირექტრისებს შორის, ფოკუსებს შორის მანძილზე, სამჯერ მეტია

64. დაადგინეთ, ექსცენტრისიტეტის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ელიფსის მარჯვენა ფოკისიდან დიდი ღერძისადმი აღმართული მართობის ელიფსთან გადაკვეთის წერტილისა და ელიფსის ცენტრის შემაერთებელი მონაკვეთი ელიფის მარცხენა და ზედა წვეროების შემაერთებელი მონაკვეთის პარალელური

65. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, რომლის ღერძებიც საკოორდინატო წრფეების პარალელურია, თუ ის აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებს, შესაბამისად, $A(3,0)$ და $B(0,-4)$ წერტილებში ეხება.

66. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, რომლის ღერძებიც საკოორდინატო წრფეების პარალელურია, თუ ცნობილია, რომ $O(-3,2)$ წერტილი მისი ცენტრია და ის ეხება ორივე საკოორდინატო ღერძს.

67. იპოვეთ $x+2y-7=0$ წრფისა და $x^2+4y^2=25$ ელიფსის გადაკვეთის წერტილები

68. იპოვეთ $3x+10y-25=0$ წრფისა და $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფსის გადაკვეთის წერტილები

69. იპოვეთ $3x-4y-40=0$ წრფისა და $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის გადაკვეთის წერტილები

70. გამოარკვიეთ, მოცემული წრფე ელიფსს კვეთს, ეხება თუ არ იკვეთება მასთან:

(1) $2x-y-3=0$ და $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; (2) $2x+y-10=0$ და $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

(3) $3x+2y-20=0$ და $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$

71. გამოარკვიეთ, m-ის რა მნიშვნელობისათვის $y=-x+m$ წრფე $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსს:

(1) კვეთს; (2) ეხება მას; (3) არ იკვეთება მასთან

72. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+m$ წრფე $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსს ეხება

73. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსისადმი, მისი ნებისმიერი დიამეტრის ბოლოებზე, გავლებული მხებები ერთმანეთის პარალელურია

74. შეადგინეთ $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $3x+2y+7=0$ წრფის პარალელურია

75. შეადგინეთ $x^2+4y^2=20$ ელიფსის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $2x-2y-13=0$ წრფის მართობულია

76. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ ელიფსისადმი $4x-2y+23=0$ წრფის პარალელურად გავლებულ მხებებს შორის

77. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც $2x-3y+25=0$ წრფიდან უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ ეს მანძილი

78. შეადგინეთ $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსისადმი გავლებული იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $A(10/3,5/3)$ წერტილზე გადიან

79. შეადგინეთ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსისადმი $A(10,-8)$ წერტილზე გავლებული მხებების ელიფსთან შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება

80. შეადგინეთ საკოორდინატო ღერძების პარალელური ღერძების მქონე ელიფსის განტოლება, თუ $3x-2y-20=0$ და $x+6y-20=0$ წრფეები მისი მხებებია

81. დაამტკიცეთ, რომ ფოკუსებიდან ელიფსის ნებისმიერ მხებამდე მანძილების ნამრავლი მისი მცირე ნახევარღერძის კვადრატის ტოლია

82. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ $F_1(-3,0)$ და $F_1(3,0)$ წერტილები მისი ფოკუსებია, ხოლო $x-y-5=0$ წრფე ეხება მას

83. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულნი არიან, მცირე ნახევარღერძია $b=2$ და $3x+10y-25=0$ წრფე მისი მხებია

84. იპოვეთ $x^2+9y^2=45$ და $x^2+9y^2-6x-27=0$ ელიფსების გადაკვეთის წერტილები.

ჰიპერბოლა

85. დაადგინეთ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ ჰიპერბოლის: (1) ნახევარღერძები, (2) ფოკუსები, (3) ექსცენტრისიტეტი, (4) ასიმპტოტები, (5) დირექტრისები.

86. დაადგინეთ $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=1$ ჰიპერბოლის: (1) ნახევარღერძები, (2) ფოკუსები, (3) ექსცენტრისიტეტი, (4) ასიმპტოტები, (5) დირექტრისები

87. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსებიც, კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულად, ორდინატთა ღერძზე ძევს, თუ: (1) ფოკუსებს შორის მანძილია $2c=12$ და ექსცენტრისიტეტი $6/5$, (2) ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x$ და დირექტრისებს შორის მანძილი $7\frac{1}{5}$, (3) ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{2}{3}x$ და $A(4,5;\ \sqrt{13})$ წერტილი მასზე ძევს.

88. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ჰიპერბოლის $A(-5;\ 9/4)$ წერტილის ფოკალური რადიუსები

89. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $5x^2-9y^2-30x+18y-9=0$; (2) $16x^2-25y^2+32x-100y+84=0$;

(3) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x+5}$; (4) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$

90. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: (1) წვეროებს შორის მანძილია 24, ხოლო ფოკუსები $F_1(-10,2)$ და $F_2(16,2)$; (2) დირექტრისებს შორის მანძილია 4 და ფოკუსები $F_1(2,3)$ და $F_2(-2,-3)$; (3) ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon=4/3$, ფოკუსის $F(4,0)$ და მისი შესაბამისი დირექტრისა $4x-9=0$; (4) ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon=5/4$, ფოკუსის $F(0,5)$ და მისი შესაბამისი დირექტრისა $5y-16=0$

91. შეადგინეთ ტოლფერდა (მისი ნახევარღერძები ტოლია) ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(2,0)$ და ასიმპტოტი $x=1$

92. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ის გადის $M(-5,3)$ წერტილზე და მისი ექსცენტრისიტეტია $\sqrt{2}$

93. შეადგინეთ $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$ ჰიპერბოლის $M(10,-\sqrt{5})$ წერტილის ფოკალური რადიუსების შემცველი წრფეების განტოლებები

94. იპოვთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ჰიპერბოლის $M(-5,9/4)$ წერტილის ფოკალური რადიუსები

95. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია $3/2$, ხოლო დირექტრისა $x=-8$. იპოვეთ მანძილი ჰიპერბოლის, 10-ის ტოლი აბსცისის მქონე, წერტილიდან მოცემული დირექტრისის შესაბამის ფოკუსამდე

96. იპოვეთ $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლის ის წერტილები, რომლებიც მარჯვენა ფოკუსიდან $4{,}5$-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული

97. იპოვეთ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის ის წერტილები, რომლებიც მარცხენა ფოკუსიდან 7-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული

98. იპოვეთ მანძილები $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ ჰიპერბოლის მარცხენა ფოკუსიდან მისი ღერძისადმი აღმართული მართობის ჰიპერბოლასთან გადაკვეთის წერტილებიდან ფოკუსებამდე

99. განსაზღვრეთ ტოლფერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი

100. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის ფოკუსებს ემთხვევა და ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon=2$

101. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის წვეროებს ემთხვევა, ხოლო დირექტრისები ელიფსის ფოკუსებზე გადის

102. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე b-ს ტოლია

103. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან მის ორ ასიმპტოტამდე მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა და უდრის $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

104. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებითა და მისი ნებისმიერი წერტილიდან ასიმპტოტების პარალელურად გავლებული წრფეებით შემოსაზღვრული პარალელოგრამის ფართობი მუდმივი სიდიდეა და $\frac{ab}{2}$-ის ტოლია

105. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან თითოეული განსაზღვრავს ჰიპერბოლას. იპოვეთ მისი ცენტრის კოორდინატები, ნახევარღერძები, ექსცენტრისიტეტი და შეადგინეთ ასიმპტოტებისა და დირექტრისების განტოლებები

(1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; (2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$

106. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon=5/4$, ფოკუსია $F(5,0)$ და შესაბამისი დირექტრისის განტოლება $5x-16=0$

107. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon=13/12$, ფოკუსია $F(0,13)$ და შესაბამისი დირექტრისის განტოლება $13y-144=0$

108. შეადგინეთ $x^2-y^2=a^2$ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლება ახალ საკოორდინატო სისტემაში, თუ ახალი საკოორდინატო სისტემას ღერძები მისი ასიმპტოტებია

109. დაადგინეთ, ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან რომელი შეესაბამება ჰიპერბოლას. იპოვეთ მისი ცენტრი, ნახევარღერძები და შეადგინეთ ასიმპტოტების განტოლებები

(1) $xy=18$; (2) $2xy-9=0$; (3) $3xy+25=0$

110. იპოვეთ $2x-y=10$ წრფისა და $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები

111. იპოვეთ $4x-3y-16=0$ წრფისა და $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები

112. გამოარკვიეთ წრფისა და ჰიპერბოლის ურთიერთ მდებარეობა: იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ წრფე მხებს წარმოადგენს

(1) $x-y-3=0$ და $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$; (2) $x-2y+1=0$ და $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; (3) $7x-5y=0$ და $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

113. იპოვეთ m-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=2{,}5x+m$ წრფე $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ პარაბოლას: (1) კვეთს; (2) ეხება მას; (3) არ იკვეთება მასთან

114. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+m$ წრფე ეხება $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლას

115. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის დიამეტრის ბოლოებზე გავლებული მხები წრფეები ერთმანეთის პარალელურია

116. შეადგინეთ $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ ჰიპერბოლისადმი გავლებული იმ მხების განტოლება, რომელიც $4x+3y-7=0$ წრფის მართობულია

117. შეადგინეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ ჰიპერბოლისადმი გავლებული იმ მხების განტოლება, რომელიც $10x-3y+9=0$ წრფის პარალელურია.

118. შეადგინეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ ჰიპერბოლისადმი $2x+4y-5=0$ წრფის პარალელური მხებების განტოლებები და გამოთვალეთ მანძილი მათ შორის.

119. იპოვეთ $3x+2y+1=0$ წრფის უახლოესი წერტილი $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ ჰიპერბოლაზე და გამოთვალეთ ეს მანძილი.

120. შეადგინეთ $A(-1,-7)$ წერტილიდან $x^2-y^2=16$ ჰიპერბოლისადმი გავლებული მხების განტოლება.

121. შეადგინეთ $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$ ჰიპერბოლისადმი $A(1,-10)$ წერტილიდან გავლებული მხებების მასთან შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება.

122. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომელიც $A(\sqrt{6},3)$ წერტილზე გადის და ეხება $9x+2y-15=0$ წრფეს (ჰიპერბოლის ღერძები საკოორდინატო ღერძებს ემთხვევა).

123. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომელიც ეხება $5x-6y-16=0$ და $13x-10y-48=0$ წრფეებს (ჰიპერბოლის ღერძები საკოორდინატო ღერძებს ემთხვევა).

124. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსისა და $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები მართკუთხედის წვეროებს წარმოადგენენ. შეადგინეთ მისი გვერდების განტოლებები.

125. აჩვენეთ, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსები მის ნებისმიერი მხები წრფის სხვადასხვა მხარეზე მდებარეობენ.

126. აჩვენეთ, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსებიდან მის ნებისმიერ მხებამდე მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა და ტოლია b^2-ის.

127. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური სახის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(3,0)$ და $2x-y-4=0$ წრფე ეხება მას.

128. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური სახის განტოლება თუ ცნობილია, რომ $15x+16y-36=0$ წრფე ეხება მას და მისი დიდი ღერძია $2a=8$.

129. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლისადმი მის რაიმე M წერტილში გავლებული მხები წრფე ტოლი სიდიდის კუთხეებს ადგენს F_1M და F_2M ფოკალურ რადიუსებთან და F_1MF_2 კუთხის შიგნით გადის.

პარაბოლა

130. იპოვეთ $y^2=24x$ პარაბოლის ფოკუსი და შეადგინეთ მისი დირექტრისის განტოლება.

131. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-7,0)$ წერტილი და დირექტრისის განტოლებაა $x-7=0$.

132. შედგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: (1) სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე და $A(1,-4)$ წერტილზე; (2) სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(0,2)$ წერტილშია მოთავსებული და წვერო კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა.

133. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: (1) სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $A(6,-2)$ წერტილზე; (2)

სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(3,0)$ წერტილშია მოთავსებული და წვერო კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა.

134. $y^2 = 4{,}5x$ პარაბოლის M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილია $9{,}125$. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

135. იპოვეთ შემდეგი წრფეების და პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები:

(1) $x + y - 3 = 0$, $y^2 = 4x$, (2) $3x + 4y - 12 = 0$, $y^2 = -9x$, (3) $3x - 2y + 6 = 0$, $y^2 = -6x$

136. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-3,1)$, ხოლო დირექტრისი $y + 7 = 0$.

137. შეადგინეთ $y^2 = 6x$ პარაბოლისადმი $A(4,5)$ წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

138. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y = kx + b$ წრფე $y^2 = 2px$ პარაბოლას ეხებოდეს.

139. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვეროა $A(1,-2)$ და: (1) სიმეტრიულია $x - 1 = 0$.

წრფის მიმართ და გადის წერტილზე $B(2,0)$; (2) სიმეტრიულია $y + 2 = 0$ წრფის მიმართ და გადის წერტილზე $B(2,0)$.

140. ჰორიზონტის მიმართ მახვილი კუთხით გასროლილი ქვა, მოძრაობს რა პარაბოლაზე, საწყისი მბებარეობიდან 24-ის ტოლ მანძილზე დაეცა. გამოთვალეთ პარაბოლის პარამეტრი, თუ ქვის მიერ მიღწეული მაქსიმალური სიმაღლეა 6.

141. იპოვეთ პარაბოლის წვეროს, პარამეტრი და ღერძის მიმართულება, თუ მისი განტოლებაა:

(1) $y^2 + 10x + 2y - 9 = 0$; (2) $y^2 + 6x + 14y + 43 = 0$;

(3) $y^2 + 8x + 16 = 0$; (4) $y = x^2 - 6x$.

142. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 1 \\ x^2 > 2(y-1) \end{cases}$; (2) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(x-1)^2}{9} > 1 \\ (y-1)^2 < 4(x-1) \end{cases}$

143. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსია $F(0,-3)$, გადის კოორდინატთა სათავეზე და მისი სიმეტრიის ღერძია ორდინატთა ღერძი.

144. იპოვეთ $y^2 = 20x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის აბსცისაა 7.

145. იპოვეთ $y^2 = 12x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის ორდინატაა 6.

146. იპოვეთ $y^2 = 16x$ პარაბოლის ის წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუსია 13.

147. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-7,0)$ და დირექტრისის განტოლება $x - 7 = 0$.

148. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული თითოეული განტოლება პარაბოლას განსაზღვრავს. იპოვეთ მისი წვერო, პარამეტრი და შეადგინეთ დირექტრისის განტოლება:

(1) $y^2 = 4x - 8$; (2) $y^2 = 4 - 6x$; (3) $x^2 = 6y + 2$; (4) $x^2 = 2 - y$.

149. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული თითოეული განტოლება პარაბოლას განსაზღვრავს. იპოვეთ მისი წვერო და პარამეტრი:

(1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$; (2) $y = 4x^2 - 8x + 7$; (3) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$

150. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული თითოეული განტოლება პარაბოლას განსაზღვრავს. იპოვეთ მისი წვერო და პარამეტრი:

(1) $x = 2y^2 - 12y + 14$; (2) $x = \frac{1}{4}y^2 + y$; (3) $x = -y^2 + 2y - 1$.

151. იპოვეთ $x + y - 3 = 0$ წრფისა და $x^2 = 4y$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები

152. იპოვეთ $3x + 4y - 12 = 0$ წრფისა და $y^2 = -9x$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები

153. იპოვეთ $3x - 2y + 6 = 0$ წრფისა და $y^2 = 6x$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები

154. გამოარკვიეთ, როგორი ურთიერთ მდებარეობა აქვთ პარაბოლასა და წრფეს: წრფე კვეთს პარაბოლას; წრფე ეხება პარაბოლას; წრფე კვეთს პარაბოლას:

(1) $x - y + 2 = 0$ და $y^2 = 8x$; (2) $8x + 3y - 15 = 0$ და $x^2 = -3y$; (3) $5x - y - 15 = 0$ და $y^2 = -5x$.

155. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = kx + 2$ წრფე $y^2 = 4x$ პარაბოლას: (1) კვეთს; (2) ეხება მას; (3) არ კვეთს.

156. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y = kx + b$ წრფე $y^2 = 2px$ პარაბოლას ეხება.

157. დაამტკიცეთ, რომ $y^2 = 2px$ პარაბოლისადმი გაივლება ერთადერთი მხები, რომლის საკუთხო კოეფიციენტი $k \neq 0$.

158. შეადგინეთ $y^2 = 8x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $2x + 2y - 3 = 0$ წრფის პარალელურია.

159. შეადგინეთ $x^2 = 16y$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $2x + 4y + 7 = 0$ წრფის მართობულია.

160. შეადგინეთ $y^2 = 12x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $3x - 2y + 30 = 0$ წრფის პარალელურია. იპოვეთ მანძილი მხებსა და მოცემულ სიბრტყეს შორის.

161. $y^2 = 64x$ პარაბოლაზე, იპოვეთ $4x + 3y - 14 = 0$ წრფიდან უახლოესი წერტილი. იპოვეთ ეს მანძილი.

162. შეადგინეთ $A(2,9)$ წერტილიდან $y^2 = 36x$ პარაბოლისადმი გავლებული მხებების განტოლებები.

163. შეადგინეთ $A(5,9)$ წერტილიდან $y^2 = 5x$ პარაბოლისადმი გავლებული მხებების მასთან შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება.

164. $P(-3,12)$ წერტილიდან $y^2 = 10x$ პარაბოლისადმი გავლებულია მხებები. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან შეხების წერტილების შემაერთებელ ქორდამდე.

165. იპოვეთ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ ელიფსისა და $y^2 = 24x$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

166. იპოვეთ $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ ელიფსისა და $y^2 = 3x$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

167. იპოვეთ $y = x^2 - 2x + 1$ და ელიფსისა და $x = y^2 - 6y + 7$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

168. $y^2 = 25x$ პარაბოლის ფოკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი, რომელიც აბსცისთა ღერძთან α მახვილ კუთხის ადგენს, პარაბოლასთან გადაკვეთის წერტილში მისადმი აირეკლება. შეადგინეთ არეკვლილი სხივის შემცველი წრფის განტოლება, თუ $tg\alpha = 3/4$.

169. დაამტკიცეთ, რომ საერთო ღერძისა და, მათ წვეროებს შორის მდებარე, საერთო ფოკუსის მქონე ორი პარაბოლა მართი კუთხით იკვეთებიან.

170. დაამტკიცეთ, რომ თუ ურთიერთ პერპენდიკულარული ღერძების მქონე პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობენ.

პასუხები:

1. $(x-1)^2+(y+2)^2=50$; **2.** (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$; (2) $(x+1)^2+(y+3)^2=10$; (3) $(x-2)^2+(y+1)^2=5$; (4) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$; **3.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$; **4.** $5x+2y-7=0$;

5. (1) $2x-5y+16=0$; (2) $5x+y-34=0$; (3) $3x+4y-27=0$; **6.** $3x-4y-41=0$;

7. $(x-2)^2+(y-3)^2=8$; **8.** $(x-2)^2+(y+3)^2=1{,}44$; **9.** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-10)^2+(y-10)^2=100$; **11.** (1) $x^2+(y-1)^2=2$, $(x-2)^2+(y-3)^2=2$;

(2) $(x-1{,}4)^2+(y-4{,}2)^2=5$, $(x-0{,}6)^2+(y-1{,}8)^2=0{,}2$; **12.** $(x-1-1/\sqrt{2})^2+(y-1-1/\sqrt{2})^2=0{,}5$, $(x-1+1/\sqrt{2})^2+(y-1+1/\sqrt{2})^2=0{,}5$, $\left(x-\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}$, $\left(x-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{(2-\sqrt{2})^2}$; **13.** (1) არ გაივლება; (2) $x+2y-9=0$; (3) $x+2y-9=0$ და $2x-y-8=0$; **14.** $(x-3)^2+(y+1)^2=38$; **15.** $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ და $(x-2)^2+(y-3)^2=5$; **16.** $(x+2)^2+(y+1)^2=20$;

17. $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ და $(x-9/5)^2+(y-22/5)^2=20$; **18.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$; **19.** $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ და $(x-29)^2+(y+2)^2=800$; **20.** $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ და $(x-22/5)^2+(y+31/5)^2=289/5$; **21.** $(x-2)^2+(y-1)^2=81/13$ და $(x+8)^2+(y+7)^2=25/13$; **22.** $(x+10/7)^2+(y+25/7)^2=1$ და $(x-30/7)^2+(y-5/7)^2=1$; **23.** (1) წრეწირის გარეთ; (2) წრეწირზე; (3) წრეწირის შიგნით; (4) წრეწირზე; (5) წრეწირის შიგნით; **24.** (1) $x+5y-3=0$; (2) $x+2=0$; (3) $3x-y-9=0$; (4) $y+1=0$; **25.** $2x-5y+19=0$; **26.** (1) 7; (2) 17; (3) 2; **27.** $A(-1,5)$ და $A(-2,-2)$; **28.** (1) კვეთს წრეწირს; (2) ეხება წრეწირს; (3) არ კვეთს წრეწირს; **29.** (1) $|k|<0{,}75$; (2) $k=\pm 0{,}75$; (3) $|k|>0{,}75$; **30.** $11x-7y-69=0$; **31.** $2\sqrt{5}$; **32.** $x^2+y^2+6x-9y-17=0$; **33.** $7x-4y=0$; **34.** 10; **35.** $x-2y+5=0$; **36.** $3x-4y+43=0$; **37.** 90°; **38.** $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2=R_1^2+R_2^2$; **40.** $x-2y-5=0$ და $2x-y-5=0$; **41.** $2x+y-8=0$ და $x-2y+11=0$; **42.** 90°; **43.** $x+2y+5=0$; **44.** (1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; (2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$;

45. (1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$; (2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; **46.** (1) $a=2,\ b=4/3,\ e=\sqrt{5}/3$; (2) $a=3,\ b=3/2,\ e=\sqrt{3}/2$; (3) $a=1/3,\ b=2/5,\ e=\sqrt{11}/45$; **47.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$; **48.** $M(\pm 4;\pm 2{,}25)$; **50.** $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; **51.** $22{,}5$; **52.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, $F(-2,0)$, $x=-8$; **53.** $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$; **54.** (1) ელიფსი $5(x+3)^2+9(y-1)^2=45$; (2) წერტილი $M(-3,1)$; (3) ნახევარ ელიფსი $16(x+3)^2+9(y-1)^2=144,\ y\le 1$; (4) ნახევარ წრეწირი

$(x+2)^2+(y+3)^2=4,\ x\ge -2$; **55.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$; **56.** 16; **57.** b^2/c; **58.** $A(-3,-8/5)$, $B(-3,8/5)$; **59.** $5x+12y+10=0$, $x-2=0$; **60.** $r_1=2{,}6$ და $r_2=7{,}4$; **61.** $A(-5,3\sqrt{3})$, $B(-5,-3\sqrt{3})$; **62.** $A(-2,\sqrt{21}/2)$, $B(-2,-\sqrt{21}/2)$; **63.** (1) $\sqrt{3}/2$; (2) $\sqrt{2}/2$; (3) $\sqrt{3}/3$; **64.** $\varepsilon=\sqrt{2}/2$; **65.** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$; **66.** $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$; **67.** $A(4,3/3)$, $B(3,2)$; **68.** $A(3,8/5)$ წრფე ეხება ელიფსს; **69.** წრფე ელიფსს არ კვეთს; **70.** (1) წრფე და ელიფსი იკვეთებიან; (2) წრფე და ელიფსი არ იკვეთებიან; (3) წრფე ეხება ელიფსს; **71.** (1) $|m|<5$-თვის, წრფე და ელიფსი იკვეთებიან; (2) $m=\pm 5$-თვის, წრფე ეხება ელიფსს; (3) $|m|>5$-თვის, წრფე და ელიფსი არ იკვეთებიან; **72.** $k^2a^2+b^2=m^2$; **74.** $3x+2y-10=0$ და $3x+2y+10=0$; **75.** $x+y-5=0$ და $x+y+5=0$; **76.** $d=24\sqrt{5}/5$; **77.** $A(-3,2)$, $d=\sqrt{13}$; **78.** $x+y-5=0$ და $x+4y-10=0$; **79.** $4x-5y-10=0$; **80.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$; **82.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$; **83.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; **84.** $A(3,2)$, $B(3,-2)$; **85.** (1) $a=5,\ b=12$; (2) $F_1(13,0),\ F_2(-13,0)$; (3) $\varepsilon=13/5$; (4) $y=\frac{12}{5}x,\ y=-\frac{12}{5}x$; (5) $x=\frac{25}{13},\ x=-\frac{25}{13}$; **86.** (1) $a=15,\ b=8$; (2) $F_1(0,17),\ F_2(0,-17)$; (3) $\varepsilon=17/8$; (4) $y=\frac{8}{25}x,\ y=-\frac{8}{25}x$; (5) $y=\frac{64}{17},\ y=-\frac{64}{17}$; **87.** (1) $-\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{25}=1$; (2) $-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$; (3) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; **88.** $r_1=2\frac{1}{4},\ r_2=10\frac{1}{4}$; **89.** (1), (2) ჰიპერბოლა; (3), (4) ჰიპერბოლის შტო; **90.** (1) $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$; (2) $(2\sqrt{13}-4)x^2+(2\sqrt{13}-9)y^2-12xy+26\sqrt{13}-52=0$; (3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$; (4) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; **91.** $(x-1)(y+1)=0{,}5$ და $(x-1)(y-1)=-0{,}5$; **92.** $x^2-y^2=16$; **93.** $x-4\sqrt{5}y+10=0$ და $x-10=0$; **94.** $r_1=2{,}25,\ r_2=10{,}25$; **95.** 27; **96.** $A(10;\ 4{,}5)$ და $B(10;-4{,}5)$; **97.** $A(-6;\ 4\sqrt{3})$ და $A(-6;-4\sqrt{3})$; **98.** $25/12$ და $53/12$; **99.** $\varepsilon=\sqrt{2}$; **100.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; **101.** $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$; **105.** (1) $O(2,-3)$, $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=5/3$, დირექტრისები: $5x-1=0$ და $5x-19=0$, ასიმპტოტები: $4x-3y-17=0$ და $4x+3y+1=0$; (2) $O(-5,1)$, $a=8$, $b=6$, $\varepsilon=1{,}25$, დირექტრისები: $x=-11{,}4$ და $x=1{,}4$, ასიმპტოტები: $3x+4y+11=0$ და $3x-4y+19=0$; **106.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; **107.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; **108.** $xy=\frac{a^2}{2}$ –ძველი სისტემის ღერძების (-45°)-ზე მობრუნებისას და $xy=-\frac{a^2}{2}$ –ძველი სისტემის ღერძების $(+45^\circ)$-ზე მობრუნებისას; **109.** (1) $O(0,0)$, $a=b=6$, ასიმპტოტები: $x=0$ და $y=0$; (2) $O(0,0)$, $a=b=3$, ასიმპტოტები: $x=0$ და $y=0$; (3) $O(0,0)$, $a=b=5$, ასიმპტოტები: $x=0$ და $y=0$; **110.** $A(6;\ 2)$ და $B(14/3;-2/3)$; **111.** $A(25/4;\ 3)$ წრფე ეხება ჰიპერბოლას; **112.** (1) წრფე ეხება ჰიპრბოლას; (2) წრფე ჰიპერბოლას ორ წერ-

ტილში კვეთს; (3) წრფე და ჰიპერბოლა ერთმანეთს არ კვეთს; **113.** (1) $|m|>4{,}5$-თვის წრფე კვეთს ჰიპერბოლას; (2) $m=\pm 4{,}5$-თვის წრფე ეხება ჰიპერბოლას; (3) $|m|<4{,}5$-თვის წრფე და ჰიპერბოლა არ იკვეტებიან; **114.** $k^2a^2-b^2=m^2$; **116.** $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$; **117.** $10x-3y-32=0$, $10x-3y+32=0$; **118.** $x+2y-4=0$, $x+2y+4=0$, $d=8/\sqrt{5}$; **119.** $M(-6,3)$, $d=11/\sqrt{13}$; **120.** $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$; **121.** $2x+5y-16=0$; **122.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1$, $\frac{3x^2}{10}-\frac{4y^2}{45}=1$; **123.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; **124.** $x=-4$, $x=4$, $y=-1$ და $y=1$; **127.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$; **128.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; **130.** $F(6,0)$, $x=-6$; **131.** $y^2=-28x$;

132. (1) $y^2=16x$, (2) $x^2=8y$; **133.** (1) $x^2=-18y$, (2) $y^2=12x$; **134.** 10; **135.** (1) $(-6,9)$, $(2,1)$; (2) $(-4,6)$;

(3) არ იკვეთებიან; **136.** $(x+3)^2=16(y+3)^2$; **137.** $3x-4y+8=0$ და $x-2y+6=0$; **138.** $p=2bk$;

139. (1) $(x-1)^2=\frac{1}{2}(y+2)$; (2) $(y+2)^2=4(x-1)$; **140.** 12; **141.** (1) $(0{,}1;-1)$, $p=-5$ ღერძი აბსცისთა ღერძის თანამიმართულია; (2) $(1,-7)$, $p=-3$ ღერძი აბსცისთა ღერძის თანამიმართულია; (3) $(-2,0)$, $p=-4$ ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის უარყოფით მიმართულებას; (4) $(3,-9)$, $p=1/2$ ღერძის ორდინატთა ღერძის თანამიმართულია; **143.** $x^2=-12y$; **144.** 12; **145.** 6; **146.** $A(9,12)$, $B(9,-12)$; **147.** $y^2=-28x$; **148.** (1) $A(2,0)$, $p=2$, $x-1=0$; (2) $A(2/3,0)$, $p=3$, $6x-13=0$; (3) $A(0,-1/3)$, $p=3$, $6x+11=0$; (4) $A(0,2)$, $p=1/2$, $4y-9=0$; **149.** (1) $A(-2,1)$, $p=2$; (2) $A(1,3)$, $p=1/8$; (3) $A(6,-1)$, $p=3$; **150.** (1) $A(-4,3)$, $p=1/4$; (2) $A(1,2)$, $p=2$; (3) $A(0,1)$, $p=1/2$; **151.** $A(2,1)$, $B(-6,9)$; **152.** $A(-4,6)$, წრფე ეხება პარაბოლას; **153.** წრფე და პარაბოლა არ იკვეთებიან; **154.** (1 ეხება პარაბოლას; (2 პარაბოლას ორ წერტილში კვეთს; (3) პარაბოლას არ კვეთს; **155.** (1) $k<1/2$; (2) $k=1/2$; (3) $k>1/2$; **156.** $p=2bk$; **158.** $x+y+2=0$; **159.** $2x-y-16=0$; **160.** $d=2\sqrt{13}$; **161.** $A(9,-24)$, $d=10$; **162.** $3x-y+3=0$ და $3x-2y+12=0$; **163.** $5x-18y+25=0$; **164.** $d=174/13$; **165.** $A(6,12)$ და $B(6,-12)$; **166.** $A(10,\sqrt{30})$, $B(10,-\sqrt{30})$, $C(2,\sqrt{6})$, $D(2,-\sqrt{6})$; **167.** $A(2,1)$, $B(-1,4)$, $C((3+\sqrt{13})/2,(7+\sqrt{13})/2)$, $D((3-\sqrt{13})/2,(7-\sqrt{13})/2)$; **168.** $y-18=0$

§6. გეომეტრიული გარდაქმნები

პარალელური გადატანა

ამოცანა-1. დაამტკიცეთ, რომ პარალელური გადატანის გარდაქმნა ინახავს მანძილს ორ წერტილს შორის

ამოცანა-2. შეადგინეთ პარალელური გადატანის გარდაქმნის ფორმულები

ამოცანა-3. აჩვენეთ, რომ სიბრტყის პარალელურ გადატანას წრფე წრფეში გადაჰყავს

ამოცანა-4. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანისას წრფე მის პარალელურ წრფეში გადადის.

ამოცანა-5. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანისას სიბრტყე მის პარალელურ სიბრტყეში გადადის

ამოცანა-6. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანათა კომპოზიცია პარალელური გადატანაა

ამოცანა-7. აჩვენეთ, რომ სიბრტყის (სივრცის) ყველა პარალელური გადატანათა სიმრავლე, პარალელურ გადატანათა კომპოზიციის მიმართ, წარმოადგენს ჯგუფს. არის თუ არა ეს ჯგუფი აბელური (კომუტაციური)

ამოცანა-8. რა ფიგურაზე აისახება პარალელური გადატანის დროს (პასუხი დაასაბუთეთ): პარალელოგრამი, სამკუთხედი, ტრაპეცია?

ღერძული სიმეტრია

ამოცანა-9. შეადგინეთ (გამოიყვანეთ) საკოორდინატო ღერძების მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნების ფორმულები

ამოცანა-10. შეადგინეთ $Ax + By + C = 0$ განტოლებით მოცემული m სიმეტრიის ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის გარდაქმნის ფორმულები

ამოცანა-11. რა ფიგურაზე აისახება ღერძული სიმეტრიის დროს:

ა) ტოლფერდა სამკუთხედი, თუ სიმეტრიის ღერძი მის ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეა;

ბ) ურთიერთ გადამკვეთ წრფეთა წყვილი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრფეებით შექმნილ ვერტიკალურ კუთხეთა ბისექტრისა;

გ) წრეწირი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრეწირის დიამეტრი;

დ) პარალელურ წრფეთა წყვილი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრფეთა მართობული რაიმე წრფე;

ე) პარალელურ წრფეთა წყვილი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრფეთა პარალელური რაიმე წრფე?

ცენტრული სიმეტრია

ამოცანა-12. აჩვენეთ, რომ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ცენტრის მქონე ცენტრული სიმეტრიის დროს $M(x, y, z)$ წერტილის $M'(x', y', z')$ ანასახის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x' = -x + 2x_0$$
$$y' = -y + 2y_0$$
$$z' = -z + 2z_0$$

ამოცანა-13. აჩვენეთ, რომ ორი ცენტრალური სიმეტრიის კომპოზიცია პარალელურ გადატანას წარმოადგენს

ამოცანა-14. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანისა და ცენტრალური სიმეტრიის კომპოზიცია ცენტრალური სიმეტრიაა

ამოცანა-15. იპოვეთ $M(2;-3;7)$ წერტილის ანასახები ცენტრალური სიმეტრიის დროს, რომლის ცენტრიცაა შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილი

$$\begin{cases} 7x + 9y + 7z + 1 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 + 7t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

ამოცანა-16. იპოვეთ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები თუ მას $M(1, 2, -4)$ წერტილი $M'(3, 4, -6)$ წერტილში გადაჰყავს

ამოცანა-17. დაადგინეთ A წერტილის კოორდინატები, თუ ის $B(2, 6, -8)$ წერტილის ანასახია, $O(1,0,1)$ სიმეტრიის ცენტრის მქონე ცენტრული სიმეტრიის დროს

ამოცანა-18. იპოვეთ $P(1,-1,2)$ წერტილის ანასახი ცენტრალური სიმეტრიის დროს იმ წერტილის მიმართ, რომელიც წარმოადგენს $5x + 8y - z - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ და $2x - 3y + 2z - 9 = 0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილს

მობრუნების გარდაქმნა

ამოცანა-19. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა სათავის გარშემო α კუთხეზე მობრუნების გარდაქმნის ფორმულებია

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

ამოცანა-20. აჩვენეთ, რომ $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha}$ კომპოზიცია არის R_C^{γ} მობრუნება, სადაც $\gamma = \alpha + \beta$ და $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABC = \frac{\beta}{2}$

ამოცანა-21. რა კუთხეს ადგენენ ერთმანეთთან წრფე და მისი ანასახი სიბრტყის α კუთხეზე მობრუნების დროს (პასუხი დაასაბუთეთ)?

ამოცანა-22. რა ფიგურაზე აისახება სიბრტყის α კუთხეზე მობრუნების დროს: ა) ტოლგვერდა სამკუთხედი; ბ) სხივი; გ) ნახევარსიბრტყე; დ) პარალელურ წრფეთა წყვილი; ე) კუთხე; ვ) კვადრატი?

ამოცანა-23. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა სათავის გარშემო ნებისმიერი ორი მობრუნება კომუტაციურია

ამოცანა-24. აჩვენეთ, რომ α კუთხეზე $R(\alpha)$ მობრუნების გარდაქმნა (ან $R_O(\alpha)$ მობრუნება O ცენტრის გარშემო) მატრიცულად ჩაიწერება სახით:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ამოცანა-25. იპოვეთ $P(7,-1)$ წერტილის ანასახის კოორდინატები თუ საკოორდინატო სისტემა ბრუნავს საათის ისრის მიმართულებით 30°-კუთხეზე

ამოცანა-26. იპოვეთ $P(1,-2)$ და $Q(1,1)$ წერტილების ანასახები შემდეგი გარდაქმნების დროს: (ა) $R_O(90^\circ)$; (ბ) $R_O(30^\circ)$

ამოცანა-27. იპოვეთ მობრუნების გარდაქმნის მობრუნების კუთხე, რომლითაც $A(-3/5,\ 4/5)$ წერტილი $B(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$ წერტილზე აისახება

ამოცანა-28. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა სათავის გარშემო 90°-ია კუთხეზე მობრუნებით $P(x,y)$ წერტილი $P'(-y,x)$ წერტილზე აისახება

ამოცანა-29. ჩაწერეთ მატრიცულად გარდაქმნა, რომელიც $P(1,-2)$ წერტილს $Q(1,1)$ წერტილზე ასახავს, თუ ეს გარდაქმნაა: (ა) $R_O(90^\circ)$; (ბ) $R_O(30^\circ)$

ამოცანა-30. ჩაწერეთ მატრიცულად შემდეგი ფორმულებით მოცემული გარდაქმნა:

$$x' = 3x + 7y$$
$$y' = 4x + 8y$$

ამოცანა-31. შეადგინეთ $R_O(45^\circ)$ გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა და დაადგინეთ $E(4,-3)$ წერტილის ანასახი ამ გარდაქმნის დროს

აფინური საკოორდინატო სისტემა

ამოცანა-32. იპოვეთ $\vec{c}$ ვექტორის გაშლა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებად

(1) $\vec{a} = (4,-2)$, $\vec{b} = (3,5)$, $\vec{c} = (1,-7)$

(2) $\vec{a} = (5,4)$, $\vec{b} = (-3,0)$, $\vec{c} = (19,8)$

(3) $\vec{a} = (-6,2)$, $\vec{b} = (4,7)$, $\vec{c} = (9,-3)$

იპოვეთ $\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{e_1} = \vec{a}$, $\vec{e_2} = \vec{b}$ ბაზისში

ამოცანა-33. შეიძლება თუ არა ვექტორთა შემდეგი სამეული ავიღოთ ბაზისად

(1) $\vec{e_1} = (-3, 0, 2)$, $\vec{e_2} = (2, 1, -4)$, $\vec{e_3} = (11, -2, -2)$

(2) $\vec{e_1} = (1, 0, 7)$, $\vec{e_2} = (-1, 2, 4)$, $\vec{e_3} = (3, 2, 1)$

(3) $\vec{e_1} = (5, -1, 4)$, $\vec{e_2} = (3, -5, 2)$, $\vec{e_3} = (-1, -13, -2)$

ამოცანა-34. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს. იპოვეთ $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში, თუ $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (3, -2, 1)$ და $\vec{d} = (-8, 9, -1)$

ამოცანა-35. იპოვეთ $\vec{a} = 8i + 10j$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ ბაზისში, სადაც $\vec{e_1} = 2i - j - k$, $\vec{e_2} = 3i + 2j - k$, $\vec{e_3} = 1 + 3j + k$

ამოცანა-36. იპოვეთ $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(3, 0)$ და $D(2, -5)$ წერტილების ახალი კოორდინატები საკოორდინატო სისტემაში, რომელიც მიიღება აფინური საკოორდინატო სისტემის პარალელური გადატანით, თუ ახალი კოორდინატთა სისტემის სათავეა $O'(6, -1)$

ამოცანა-37. ვთქვათ აფინურ კოორდინატთა სისტემაში აღებული $M(3, 4)$ წერტილის კოორდინატები, პარალელური გადატანის დროს, არის -2 და -5. იპოვეთ ახალი საკოორდინატო სისტემის O' ცენტრის კოორდინატები ძველ საკოორდინატო სისტემაში

ამოცანა-38. შეადგინეთ აფინური გარდაქმნის ფორმულები, თუ ცნობილია ახალი საბაზისო ვექტორებისა და ახალი საკოორდინატო სისტემის ცენტრის კოორდინატები ძველი საკოორდინატო სისტემის მიმართ

(1) $\vec{e_1}' = (2, -1)$, $\vec{e_2}' = (3, 7)$ და $O'(1, 3)$

(2) $\vec{e_1}' = (3, 0)$, $\vec{e_2}' = (0, 5)$ და $O'(2, 4)$

(3) $\vec{e_1}' = (0, -2)$, $\vec{e_2}' = (3, 0)$ და $O'(0, 7)$

ამოცანა-39. შეადგინეთ აფინური გარდაქმნის ფორმულები თუ ცნობილია, რომ ამ გარდამნით $A(1, 1)$, $B(5, 6)$, $C(1, 4)$ წერტილები ახალ სისტემაში გვაძლევენ წერტილებს $A(0, 1)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$

ამოცანა-40. ძველი საკოორდინატო სისტემის x და y კოორდინატები ახალი სისტემის x' და y' კოორდინატებთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$x = x'+2y'-3\,,\quad y = -5x'+3y'+2$$

იპოვეთ ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავის ძველი კოორდინატები

ამოცანა-41. ვიპოვოთ $M(1,-1,2)$ წერტილის ანასახი აფინური გარდაქმნის დროს, რომელიც ადგილზე ტოვებს $\alpha : x+y-z-1=0$ და $A(-3,-1,1)$ წერტილს $A'(3,2,1)$ წერტილზე ასახავს

ორთოგონალური საკოორდინატო სისტემა

ამოცანა-42. დაადგინეთ $A(-4,\,5)$, $B(3,\,-2)$, $C(x,\,y)$ წერტილების მართკუთხა კოორდინატები თუ საკოორდინატო სისტემას მოვაბრუნებთ:

(1) მართ კუთხეზე, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით

(2) მართ კუთხეზე, საათის ისრის მიმართულებით; (3) გაშლილ კუთხეზე

ამოცანა-43. შეადგინეთ კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის ფორმულები, თუ მართკუთხა საკოორდინატო სისტემას 60°-იან კუთხეზე მოვაბრუნებთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით და ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავეა $O'(5,\,-3)$ (ძველი და ახალი სისტემა ორივე მარჯვენაა)

ამოცანა-44. იპოვეთ $A(0,\,1)$, $B(3,0)$, $C(1,\,2)$ წერტილების კოორდინატები ახალ საკოორდინატო სისტემაში, თუ ის მიიღება 45° კუთხეზე მობრუნებით და ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავეა $O'(-2,\,3)$

ამოცანა-45. ძველ სისტემიდან ახალ საკოორდინატო სისტემებაზე გადასვლის ფორმულებია

$$x = x'+y'+z'-1\,,\quad y = x'+2y'+3z'+2\,,\ z = x'+3y'+4z'+1$$

იპოვეთ:

(1) ახალი საკოორდინატო სისტემის O' სათავის კოორდინატები

(2) ახალი $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$ საბაზისო ვექტორების კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ

ამოცანა-46.. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა გარდაქმნის

$$x = \frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'\,,\quad y = \frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'\,,\ z = -\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$$

ფორმულები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის გარდამნის ფორმულებია.

იპოვეთ:

(1) $A(0,1,\,1)$, $B(1,\,1,\,1)$ და $C(-3,\,1,4)$ ახალი წერტილების ძველი კოორდინატები

(2) $A(4,1,\,-3)$, $B(5,\,1,\,1)$ და $C(1,\,2,3)$ წერტილების ახალი კოორდინატები

კომბინირებული ამოცანები

ამოცანა-47. ააგეთ $T_{\vec{a}} \circ R_O(30^\circ)$ გარდაქმნის მატრიცი, თუ $\vec{a} = (-5, 3)$

ამოცანა-48. ვთქვათ, ახალი საკოორდინატო სისტემა მიიღება ძველისაგან ჯერ მისი მობრუნებით 90°-იან კუთხეზე და შემდეგ პარალელური გადატანით $\vec{m} = (-4, 2)$ ვექტორის გასწვრივ. ააგეთ ამ გარდაქმნის მატრიცი

ამოცანა-49. ააგეთ $R_O(90^\circ)$ მობრუნების გარდაქმნის შესაბამისი A მატრიცა

ამოცანა-50. ააგეთ F მატრიცის შესაბამისი გარდაქმნისა და $R_O(90^\circ)$ მობრუნების გარდაქმნის კომპოზიციის შესაბამისი G მატრიცი, სადაც

$$F = \begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 & 2 \\ 12/13 & 5/13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ამოცანა-51. ქმნის თუ არა ვექტორთა $\vec{m}_1 = (1, 0, 7)$, $\vec{m}_2 = (-1, 2, 4)$, $\vec{m}_3 = (3, 2, 1)$

სამეული ორთოგონალური ბაზისს. თუ ქმნის –ააგეთ შესაბამისი ორთონორმირებული ბაზისი

ამოცანა-52. ამოარკვიეთ შემდეგი მარტიცით მოცემული გარდაქმნა არის თუ არა ორთოგონალური, საკუთრივ ორთოგონალური:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

ამოცანა-53. აჩვენეთ, რომ ფიქსირებული წერტილის გარშემო ყველა მობრუნებათა სიმრავლე, ოპერაციით –მობრუნებათა კომპოზიცია, წარმოადგენს ჯგუფს

ამოცანა-54. აჩვენეთ, რომ მატრიცთა შემდეგი სიმრავლე, მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ, არის ჯგუფი:

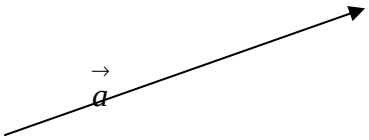
(1) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in R, \quad a^2 + b^2 > 0 \right\}$; (2) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in Q, \quad a^2 + b^2 > 0 \right\}$;

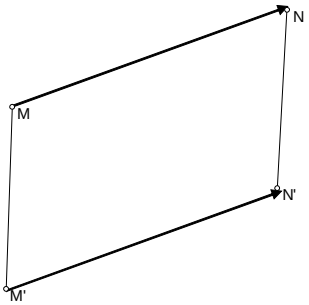
(3) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in R \right\}$.

გამოარკვიეთ, რომელი მათაგნია აბელური ჯგუფი

პასუხები და ამოხსნები

1. ავიღოთ ნებისმიერი ორი M და N ერთმანეთისაგან განსხვავებული წერტილი. ვთქვათ, $T_{\vec{a}}(M) = M'$ და $T_{\vec{a}}(N) = N'$. განვიხილოთ $MNM'N'$ ოთხკუთხედი





ამ ოთხკუთხედის MM' და NN' მოპირდაპირე გვერდები პარალელურები და ტოლები არიან. ამგვარად, $MNM'N'$ პარალელოგრამია, ამიტომ $MN = M'N'$. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანა ინახავს მანძილებს წერტილებს შორის ანუ ის მოძრაობის გარდაქმნაა.

2. ვთქვათ, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ და $M(x, y)$. $T_{\vec{a}}$ პარალელური გადატანისას, M წერტილის შესაბამისი $M'(x', y')$ წერტილისათვის გვექნება:

$$\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \end{cases}$$

ანალოგიურად მიიღება პარალელური გადატანის ფორმულები სივრცეში. კერძოდ, თუ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, მაშინ $M(x, y, z)$ წერტილის $M'(x', y', z')$ ანასახისათვის გვექნება

$$\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \\ z' = z + a_3 \end{cases}$$

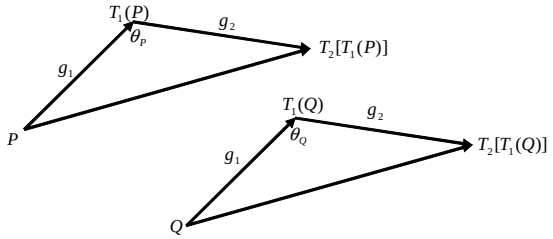
3. განვიხილოთ სიბრტყეზე $ax + by + c = 0$ განტოლებით მოცემული რაიმე m წრფე. ვიპოვოთ მისი m' ანსახი $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ვექტორის გასწვრივ $T_{\vec{a}}$ პარალელური

გადატანის დროს. ამისათვის მოცემული წრფის განტოლებაში ცვლადები შევცვალოთ პარალელური გადატანისას მიღებული შესაბამისი მნიშვნელობებით. შედეგად მივიღებთ, რომ m წრფის m' ანასახის განტოლება იქნება $a'x+b'y+c'=0$ ანუ m' არის წრფე.

4. განვიხილთ $T_{\vec{a}}$ პარალელური გადატანა. განვიხილოთ სიბრტყის (ან სივრცის) რაიმე m წრფე. შესაძლებელია შემდეგი ორი შემთხვევა: $\vec{a}$ ვექტორი პარალელურია m წრფისა (ძევს მასზე) ან მისი პარალელური არაა. თუ ვექტორი ძევს წრფეზე, მაშინ ამ წრფის ყოველი წერტილი $T_{\vec{a}}$ პარალელური გადატანით გადავა ამავე წრფის რაიმე წერტილში. ესე იგი ამ შემთხვევაში წრფე ადგილზე რჩება – წრფე გადადის თავის თავში. ვთქვათ m წრფე და $\vec{a}$ ვექტორი ერთმანეთის პარალელური არაა, ამ წრფეზე ნებისმიერად ავიღოთ ორი P და Q წერტილი. $T_{\vec{a}}$ პარალელური გადატანით m წრფე გადავა რაიმე m' წრფეში, ხოლი P და Q წერტილები m' წრფეზე მდებარე გარკვეულ P' და Q' წერტილებში. $PQQ'P'$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია და, შესაბამისად, m წრფე m' წრფის პარალელურია

5. $OXYZ$ საკოორდინატო სისტემაში განვიხილოთ $Ax+By+Cz+D=0$ განტოლებით მოცემული π სიბრტყე და ვიპოვოთ ამ სიბრტყის π' ანასახი $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ვექტორის გასწვრივ $T_{\vec{a}}$ პარალელური გადატანის დროს. სივრცის პარალელური გადატანის ფორმულების გამოყენებით, ნებისმიერი $M(x,y,z)$ წერტილის კოორდინატები გამოისახება ამ წერტილის $M'(x',y',z')$ ანასახის კოორდინატებით. თუ x, y და z გამოსახულებებს შევიტანთ π სიბრტყის განტოლებაში მივიღებთ, რომ π' სიბრტყის განტოლებას ექნება სახე $Ax'+By'+Cz'+D'=0$, სადაც $D'=D-Aa_1-Ba_2-Ca_3$. π' სიბრტყის მიღებული განტოლება პირველი ხარისხისაა. როგორც ვიცით, სივრცის ნებისმიერი პირველი ხარისხის განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეს. π და π' სიბრტყეთა განტოლებები ერთმანეთისაგან მხოლოდ თავისუფალი წევრებით განსხვავდებიან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი პარალელურნი არიან.

6. ვაჩვენოთ, რომ თუ T_1 და T_2 ორი პარალელური გადატანაა, მაშინ $T_2\circ T_1$ ასევე პარალელური გადატანა იქნება



მართლაც, როგორც ნახაზიდან ჩანს, P წერტილი, ორი დამოუკიდებელი პარალელური გადატანით, გადადის ჯერ $T_1(P)$ და შემდეგ $T_2[T_1(P)]$ წერტილში. იგივე გარდაქმნა შესრულდება თუ P წერტილს $T_2[T_1(P)]$ წერტილში გადავიტანთ ამ ორი წერტილის შემაერთებელი ვექტორის გასწვრივ. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი Q წერტილი $T_2[T_1(Q)]$

წერტილზე იგივე ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანით აისახება. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ შესაბამისი ორი სამკუთხედი კონგრუენტულია. მართლაც, ცხადია, რომ $m\angle\theta_P = m\angle\theta_Q$. ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით კონგრუენტულობის ნიშნით, სამკუთხედები კონგრუენტულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ სამკუთხედების $P\ T_2[T_1(P)]$ და $Q\ T_2[T_1(Q)]$ გვერდები კონგრუენტულია. ამავე დროს, ეს გვერდები პარალელურებიც არიან.

7. შეამოწმეთ ჯგუფის აქსიომები

8. პარალელოგრამზე, სამკუთხედზე, ტრაპეციაზე, რადგან პარალელური გადატანა ინახავს პარალელობას

10. $M(x,y)$ წერტილის სიმეტრიული $M'(x',y')$ წერტილის ასაგებად განვიხილოთ m წრფის ნორმალი $\vec{n} = (A,B)$ ვექტორის კოლინეარული $\vec{MM'} = (x'-x, y'-y)$ ვექტორი. კოლინეარულობის გამო, არსებობს ისეთი t რიცხვი, რომ $\vec{MM'} = t \cdot \vec{a}$, რაც კოორდინატებში ჩაიწერება სახით:

$$\begin{cases} x' = x + tA \\ y' = y + tB \end{cases}$$

რადგანაც MM' მონაკვეთის შუა წერტილი m წრფეზე ძევს, ამიტომ გვექნება $t = -\dfrac{2(Ax+By+C)}{A^2+B^2}$. ამგვარად

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \end{cases}$$

15. ვიპოვოთ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები, რისთვისაც ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x - y - z - 3 = 0 \\ x = 2 \\ y = -4 + 7t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

რომელიც შედგენილია პირველი წრფის შესაბამისი რომელიმე ერთი განტოლებითა და მეორე წრფის შესაბამისი განტოლებათა სისტემისაგან. ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს სიმეტრიის ცენტრს $A(2;-4;3)$. ამგვარად ეს წერტილი MM' მონაკვეთის შუა წერტილია, ამიტომ გვექნება $M(2;-5;-1)$.

25. ამ წერტილის $P'(x',y')$ ანასახის კოორდინატებია:

$$x' = 7\cos(-30^\circ) - (-1)\sin(-30^\circ) = 7\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)\frac{-1}{2} = \frac{7\sqrt{3}-1}{2}$$
$$y' = 7\sin(-30^\circ) + (-1)\cos(-30^\circ) = 7\frac{-1}{2} + (-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-7-\sqrt{3}}{2}.$$

32. (1) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, (2) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, (3) $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a}$; (1) $\vec{c} = (1,-1)$, (2) $\vec{c} = (2,-3)$, (3) $\vec{c} = (-\frac{3}{2}, 0)$

33. (1) არა, (2) კი, (3) არა

34. $\vec{d} = (2,3,-5)$

35. $\vec{a} = 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

36. $A(-5, 3)$, $B(-9, 5)$, $C(-3, 1)$ და $D(-4, -4)$

37. $O'(5,9)$

38. (1) $x = 2x'+3y'+1$, $y = -x'+7y'+3$; (2) $x = 3x'+2$, $y = 5y'+4$; (3) $x = -2y'$, $y = 3x'+7$;

39. $x = x'-y'+2$, $y = 2x'+y'$;

40. $O'(-3,2)$

41. დავადგინოთ თუ რა ფარდობით ყოფს α სიბრტყე AA' მონაკვეთს. თუ ეს ფარდობა λ-ს ტოლია, მაშინ α სიბრტყისა და AA' მონაკვეთის გადაკვეთის A_0 წერტილის კოორდინატებია:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{-3+3\lambda}{1+\lambda} \\ y_0 = \dfrac{-1+2\lambda}{1+\lambda} \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

რადგანაც A_0 წერტილი α სიბრტყეზე ძევს, ამიტომ

$$\frac{-3+3\lambda}{1+\lambda} + \frac{-1+2\lambda}{1+\lambda} - 2 = 0,$$

საიდანაც $\lambda = 2$. $M(1,-1,2)$ წერტილზე $\vec{AA'} = (6,3,0)$ ვექტორის პარალელური

$$\begin{cases} x = \quad 1+6t \\ y = -1+3t \\ z = 2 \end{cases},$$

წრფის α სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად, სიბრტყის განტოლებაში შევიტანოთ, შსაბამისად, x, y და z კოორდინატების მიღებული მნიშვნელობები. მივიღებთ, რომ $t = \frac{1}{3}$. ამგვარად M_0 წერტილის კოორდინატებია $M_0(3,0,2)$. M_0 წერტილი MM' მონაკვეთს ყოფს იმავე $\lambda = 2$ ფარდობით, როგორც A_0 წერტილი ყოფს AA' მონაკვეთს. ამგვარად, $M'(4;\ 0{,}5;\ 2)$.

42. (1) $A(-5, -4)$, $B(2, 3)$, $C(-y, x)$; (2) $A(5, 4)$, $B(-2, -3)$, $C(y, -x)$; (3) $A(4, -5)$, $B(-3, 2)$, $C(-x, -y)$;

43. $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 5$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 3$

44. $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

45. (1) $O'(-1, 2, 1)$; (2) $\vec{e_1}' = (1, 1, 1)$, $\vec{e_2}' = (1, 2, 3)$, $\vec{e_3}' = (1, 3, 4)$

46. უნდა შევამოწმოთ, რომ ორთონორმირებული ბაზისი ორთონორმირებულ ბაზისში გადადის; (1) $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1)$ და $C(0, 1, 5)$; (1) $A(5, 1, 0)$, $B(3, 3, 3)$ და $C(3, 1, 2)$

47. $T_{\vec{a}} \circ R_O(30^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -5 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

50. რადგან $R_O(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ამიტომ გვექნება

$$G = R_O(90^\circ) \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 & 2 \\ 12/13 & 5/13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/13 & -5/13 & -4 \\ 5/13 & -12/13 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

51. კი. $\vec{e_1} = (\sqrt{2}/10, 0, 7\sqrt{2}/10)$, $\vec{e_2} = (-\sqrt{21}/21,\ 2\sqrt{21}/21,\ 4\sqrt{21}/21)$, $\vec{e_3} = (3\sqrt{14}/14,\ 2\sqrt{14}/14,\ \sqrt{14}/14)$

§7 მეორე რიგის წირების კლასიფიკაცია.

განვიხილოთ ზოგადად მეორე რიგის ალგებრული განტოლება:

$$\boldsymbol{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}. \qquad \textbf{(1)}$$

მეორე რიგი ნიშნავს რომ a_{11}, a_{12}, a_{22} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია. ამ კოეფიციენტებს უფროსი კოეფიციენტები ეწოდება, კოეფიციენტებს a_{13}, a_{23} – წრფივი კოეფიციენტები, ხოლო a_{33} –თავისუფალი წევრი.

განვიხილოთ სიდიდეები $a_{11} + a_{22}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ და $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

სადაც გვაქვს სიმეტრია $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$, ანუ განვიხილოთ

$$\boldsymbol{I_1 = a_{11} + a_{22}}, \qquad \boldsymbol{I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \textbf{და} \quad \boldsymbol{I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \textbf{(2).}$$

ეს სიდიდეები არიან (1) განტოლების ინვარიანტები კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ.

ეს ნიშნავს შემდეგს: (1) განტოლება ჩაწერილია რაღაც მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. თუ ამ სისტემიდან გადავალთ ახალ საკოორდინატო სისტემაზე, მაშინ (1) განტოლება საზოგადოდ შეიცვლება. შეიცვლებიან კოეფიციენტებიც a_{ij} , მაგრამ სიდიდეები I_1, I_2, I_3 თურმე იგივე რჩება.

(1) განტოლებით მოცემულ წირს გააჩნია სიმეტრიის ცენტრი კოორდინატებით (x_0, y_0), მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა x_0 , y_0 ცვლადების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0} \\ \boldsymbol{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0} \end{cases}$$

დეტერმინანტი

$$\boldsymbol{I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0},$$

და ამიტომ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები (x_0, y_0) ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსნია.

საკოორდინატო სისტემის α კუთხით მობრუნებისას, სადაც

$$\boldsymbol{ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}},$$

(როცა $a_{12} \neq 0$) მეორე რიგის წირის ზოგადი განტოლება (1) გადადის შემდეგ განტოლებაში სადაც კოეფიციენტი xy-თან გახდება ნული (ანუ ხდება სტანდარტული გამარტივება).

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \qquad (3)$$

მეორე რიგის წირების გეომეტრიული დახასიათება და განლაგება სავსებით განისაზღვრება მისი I_1, I_2 და I_3 ინვარიანტების მნიშვნელობებით.

მეორე რიგის წირს ეწოდება

ელიფსური ტიპის, თუ $I_2 > 0$,

ჰიპერბოლური ტიპის, თუ $I_2 < 0$,

პარაბოლური ტიპის, თუ $I_2 = 0$.

ვიგულისხმოთ რომ მეორე რიგის წირის ზოგად (1) განტოლებაში ინვარიანტი $I_1 > 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამას მივაღწევთ -1-ზე გამრავლებით.

ელიფსური ტიპის წირი ($I_2 > 0$) წარმოადგენს ელიფსს როცა $I_3 < 0$, არის წერტილი (გადაგვარებული ელიფსი) როცა $I_3 = 0$, და არის ცარიელი სიმრავლე (ანუ წარმოსახვითი ელიფსი) როცა $I_3 > 0$.

ჰიპერბოლური ტიპის წირი ($I_2 < 0$) წარმოადგენს ჰიპერბოლას თუ

$I_3 \neq 0$, და თადამკვეთ წრფეთა წყვილს როცა $I_3 = 0$.

პარაბოლური ტიპის წირი ($I_2 = 0$) წარმოადგენს პარაბოლას თუ

$I_3 \neq 0$, და პარალელურ წრფეთა წყვილს ან ცარიელ სიმრავლეს როცა $I_3 = 0$.

.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. $2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0.$ (a)

აქ კოეფიციენტებია $a_{11} = 2,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = 5,\ a_{13} = -\frac{1}{2},\ a_{23} = \frac{5}{2},\ a_{33} = -4.$

ინვარიანტები: $I_1 = 7,\ I_2 = 6,\ I_3 = -131/4.$

რადგან $I_2 \neq 0$ ამიტომ ამ წირს აქვს ერთადერთი სიმეტრიის ცენტრი.

არის ელიფსური ტიპის, რადგან $I_2 > 0$.

თეორემა (4)-ით ეს წირი ელიფსია რადგან $I_3 < 0$.

ვიპოვოთ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები, ამისათვის ვისარგებლოთ თეორემა (2)-ით და ამოვხსნათ წრფივი სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - \frac{1}{2} = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

მივიღებთ $x_0 = -\frac{5}{12}$, $y_0 = -2/3$. ე.ი. სიმეტრიის ცენტრია წერტილი $(-\frac{5}{12}, -2/3)$.

გავამატრივოთ ეს განტოლება. ჯერ გვინდა მოვკლათ წრფივი წევრები. ამისათვის თეორემა (1) –ით მოვახდინოთ პარალელური გადატანა

$$\begin{cases} x = x' - 5/12 \\ y = y' - 2/3 \end{cases}$$

ჩავსვათ x და y-ის მნიშვნელობები წირის საწყის (a) განტოლებაში, მივიღებთ

$$2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 - \frac{131}{24} = 0. \qquad \text{(b)}$$

ეხლა გვინდა მოვკლათ კოეფიციენტი $x'y'$ –თან. ამისათვის ვისარგებლოთ თეორემა (3)-ით და მოვახდინოთ მობრუნება კუთხით

$$ctg2\alpha = \frac{2-5}{-4} = 3/4.$$

ამ დროს

$$cos2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}} = 3/5$$

ამიტომ

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{1-cos2\alpha}{2}} = 1/\sqrt{5}, \qquad cos\alpha = \sqrt{\frac{1+cos2\alpha}{2}} = 2/\sqrt{5}.$$

ამიტომ ამ კუთხით მობრუნებას აქვს სახე

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

ჩავსვათ (b) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x''^2 + 6y''^2 = \frac{131}{24}.$$

ამიტომ $\frac{131}{24}$ -ზე გაყოფით გვაქვს

$$\frac{x''^2}{(\sqrt{\frac{131}{24}})^2} + \frac{y''^2}{(\sqrt{\frac{131}{144}})^2} = 1 \qquad \textbf{(c)}$$

და საბოლოოდ მივიღეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება.

მაგალითი 2. განტოლება $8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0$

არის ჰიპერბოლური ტიპის, რადგან $I_2 = 8 \times 1 - 12^2 = -136 < 0,$

ეს წირი **არის თანამკვეთ წრფეთა წყვილი**, რადგან ინვარიანტი

$$I_3 = \begin{vmatrix} 8 & 12 & -28 \\ 12 & 1 & 9 \\ -28 & 9 & -55 \end{vmatrix} = 0.$$

მაგალითი 3. განტოლება $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$

არის პარაბოლური ტიპის რადგან $I_2 = 1 \times 1 - 1^2 = 0.$

ეს წირი არის პარაბოლა, რადგან $I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/4 \neq 0.$

ამოცანები:

1. გამოარკვიეთ, ქვემოთ მოცემულ წირებს შორის რომელი წარმოადგენს ცენტრალურ წირს (აქვს ერთადერთი ცენტრი), რომელს არ გააჩნია ცენტრი და რომელს აქვს უსასრულო რაოდენობის ცენტრი

(1) $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12y - 7 = 0$; (2) $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$;

(3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$; (4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$;

(5) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$; (6) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;

(7) $4x^2-20xy+25y^2-14x+2y-15=0$; (8) $4x^2-6xy-9y^2+3x-7y+12=0$

2. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული წირები ცენტრალური წირებია და იპოვეთ მათი ცენტრები:

(1) $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$; (2) $5x^2+4xy+2y^2+20x+20y-18=0$;

(3) $9x^2-4xy-7y^2-12=0$; (4) $2x^2-6xy+5y^2+22x-36y+11=0$

3. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემულ წირებს გააჩნიათ ცენტრების უსასრულო რაოდენობა. შეადგინეთ ცენტრების გეომეტრიული ადგილის განტოლებები

(1) $x^2-6xy+9y^2-12x+36y+20=0$; (2) $4x^2+4xy+y^2-8x-4y-21=0$;

(3) $25x^2-10xy+y^2+40x-8y+7=0$

4. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული წირები ცენტრალური წირებია. მოახდინეთ კოორდინატთა სისტემის სათავის წირის ცენრში პარალელური გადატანა

(1) $3x^2-6xy+2y^2-4x+2y+1=0$; (2) $6x^2+4xy+y^2+4x-2y+2=0$;

(3) $4x^2+6xy+y^2-10x-10=0$; (4) $4x^2+2xy+6y^2+6x-10y+9=0$

5. m და n პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება

$$mx^2+12xy+9y^2+4x+ny-13=0$$

განტოლებით მოცემული წირი:

(1) ცენტრალური; (2) ცენტრის არ მქონე; (3) უსასრულოდ ბევრი ცენტრის მქონე

პასუხები:

1. (1), (2), (5), (8) –ერთადერთი ცენტრი; (3), (7) – ცენტრი არა აქვს; (4), (6) –უსასრულოდ ბევრი ცენტრი; **2**. (1) $O(3,-2)$; (2) $O(0,-5)$; (3) $O(0,0)$; (4) $O(-1,3)$; **3**. (1) $x-3y-6=0$; (2) $2x+y-2=0$; (3) $5x-y+4=0$; **4.** (1) $9x^2-18xy+6y^2+2=0$; (2) $6x^2+4xy+y^2-7=0$; (3) $4x^2+6xy+y^2-5=0$; (4) $4x^2+2xy+6y^2+1=0$; **5.** (1) $m\neq 4$, n ნებისმიერია; (2) $m=4$, $n\neq 6$; (3) $m=4$, $n=6$;

მაგალითები იმისა თუ როგორ დავადგინეთ მეორე რიგის წირის ტიპი, მისი კანონიკური განტოლება და კანონიკურ კოორდინატთა სისტემა. ეს თემა კავშირია და გავიხსენოთ სიმეტრიული მატრიცით მოცემული კვადრატული ფორმა. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

მაგალითი. $\mathbf{5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0}$.

ამოხსნა. გვაქვს $a_{11} = 5,\ a_{12} = 2,\ a_{22} = 8,\ a_{13} = -16,\ a_{23} = -28,\ a_{33} = 80.$

ამიტომ წირის ინვარიანტები $I_1 = 13 > 0,\ I_2 = 36 > 0,\ I_3 = -1296 < 0.$

რადგან $I_2 > 0$ და I_2, I_3-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ წირი არის ელიფსი.

ამიტომ მოცემული განტოლება მიიყვანება სახემდე

$$\boldsymbol{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0},$$

სადაც λ_1, λ_2 კვადრატული ნაწილის შესაბამისი მახასიათებელი რიცხვებია.

ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ

$I_3 = I''_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = I''_2 a''_{33} = I_2 a''_{33}$, ანუ თავისუფალი წევრი იქნება $\frac{I_3}{I_2}$.

აგრეთვე, წირის განტოლების შესაბამისი კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი განტოლებაა

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$, ანუ $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$. ფესვებია $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$

გავიხსენოთ კვადრატული ფორმის მიყვანა კანონიკურ სახემდე. ეს ხდება ბაზისის გარდაქმნით იმ ორთოგონული მატრიცით რომლის სვეტები ფორმის საკუთრივი ვექტორებია.

ბაზისის ამ გარდაქმნით კვადრატული ნაწილი $5x^2 + 4xy + 8y^2$ მიიღებს ფორმას $4x'^2 + 9y'^2$, (ანუ xy-თან კოეფიციენტი გაქრება და კვადრატებთან კოეფიციენტები საკუთრივი რიცხვებია.)

შემდეგ როგორც ვიცით, პარალელური გადატანით, რომლის დროს სათავე გადადის წირის ცენტრში წრფივი ნაწილი $-32x - 56y$ გაქრება, ხოლო კვადრატული წევრების კოეფიციენტები არ შეიცვლება. ამასთან ახალი თავისუფალი წევრი ინვარიანტებით ასე გამოისახება $a'_{33} = I_3 : I_2 = -\frac{1296}{36} = -36.$

ანუ ახალ x', y' ცვლადებში წირს ექნება განტოლება

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0,$$

და 36-ზე გაყოფით მიიღება კანონიკური განტოლება

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

ცენტრის კოორდინატები, როგორც ვიცით არის შემდეგი სისტემის ამონახსნი:

$\begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0 \end{cases}$ ანუ $O'(2,3)$.

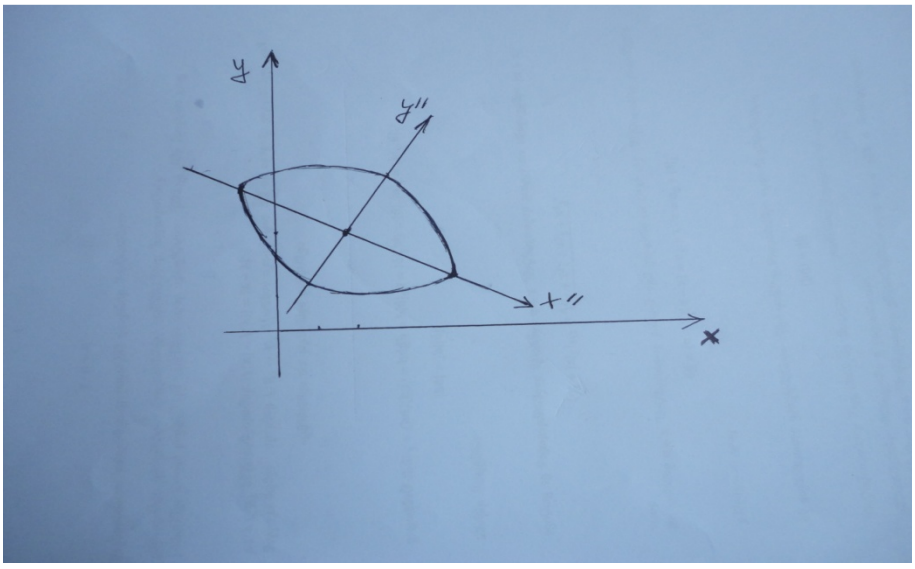
კანონიკური სისტემის საკოორდინატო ღერძების მგეზავებად e'_1, e'_2 უნდა ავიღოთ ერთეულოვანი საკუთრივი ვექტორები, e'_1 -ის კოორდინატებს გავიგებთ შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x + a_{12}y = 0 \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda_1)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ანუ $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ და $e'_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

e'_2-ს ანალოგიურად გამოვთვლით, თუმცა e'_2-ად შეიძლება ავიღოთ e'_1-ის მართობული ვექტორი $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

ეხლა რადგან ვიცით ელიფსის ცენტრი, კანონიკური განტოლება და ღერძები შეგვიძლია ეს ელიფსი დავხატოთ კიდეც.



მაგალითი. $\boldsymbol{F(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0}$.

წირის ინვარიანტებია $I_1 = 5 > 0,\ I_2 = 0,\ I_3 = -225 < 0$.

რადგან $I_2 = 0\ \ I_3 < 0$. წირი არის პარაბოლა.

მახასიათებელი ფესვებია $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, ე.ი. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$.

$$ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \quad tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = 2.$$

ამიტომ $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

წინასწარ ვიცით რომ მოცემული განტოლება დაიყვანება სახეზე

$$\boldsymbol{\lambda_2 y''^2 + \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x'' = 0.}$$

ანუ $\lambda_2 y''^2 + 2a''_{13}x'' = 0$, სადაც $|a''_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x''$.

ეს გვაქვს იქიდან, რომ $a''_{22} = I''_1 = I_1$ და $I_3 = I''_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a''_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a''_{22}a''^2_{13}$.

ანუ $|a''_{13}| = 3\sqrt{5}$ და რადგან $\lambda_2 = 5$ უნდა მივიღოთ

$$y''^2 = 6\frac{\sqrt{5}}{5}x''.$$

მართლაც გარდაქმნით

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$F(x,y) = 0$ მიიღებს სახეს

$F'(x'y') = (\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y')^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 4(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y')^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 7 = 0.$

ანუ

$F'(x', y') = 5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$

როგორც ვხედავთ y^2-ის კოეფიციენტი უდრის მახასიათებელ რიცხვს 5-ს. x^2-ის კოეფიციენტი ნულია, იხ. ზემოთ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

ეხლა უნდა მოვახდინოთ საკოორდინატო ღერძების პარალელური გადატანა რომ გავაქროთ წევრი $-2\sqrt{5}y'+7$, ანუ $F'(x',y')$-ში რაც დარჩება მივიყვანოთ პარაბოლის განტოლებამდე. ამისათვის ვთქვათ სათავე გადადის (x_0,y_0) წერტილში, ანუ გვაქვს ახალი კოორდინატები (x'',y'')

$$\begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$$

ანუ

$$F''(x'',y'') = 5(y''+y_0)^2 - 6\sqrt{5}(x''+x_0) - 2\sqrt{5}(y''+y_0) + 7 = 0$$

გავაქროთ წევრი $-2\sqrt{5}y'+7$ ნიშნავს, ბოლო განტოლებაში y''-ის კოეფიციენტი და თავისუფალი წევრი უნდა იყოს 0.

$F''(x'',y'')$ ანუ $\begin{cases} 10y_0 - 2\sqrt{5} = 0 \\ 5{y_0}^2 - 6\sqrt{5}x_0 - 2\sqrt{5}y_0 + 7 = 0 \end{cases}$

ამონახნია $(x_0,y_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, ანუ პარაბოლას წვეროს კოოდინატები (x',y')-ში არის $(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$,

ამიტომ ახალ (x'',y'') კოორდინატებში განტოლება მიიღებს სახეს

$$F''(x'',y'') = 5(y''+\frac{\sqrt{5}}{5})^2 - 6\sqrt{5}\left(x''+\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 2\sqrt{5}(y''+\frac{\sqrt{5}}{5}) + 7 = 0$$

ანუ

$$F''(x'',y'') = 5y''^2 - 6\sqrt{5}x'' = 0$$

ანუ საბოლოდ გვაქვს პარაბოლის კანონიკური განტოლება

$$y''^2 = 6\frac{\sqrt{5}}{5}x''.$$

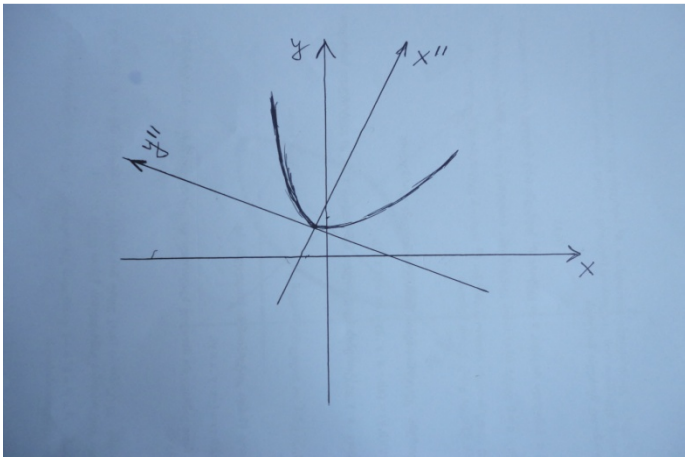
ამასთან ჩვენ ვიცით კანონიკური კოორდინატთა სისტემას:

x''-ის საკუთხო კოეფიციენტია $tg\alpha = 2$;

პარაბოლის წვეროს, ანუ კანონიკური საკორდინატო სისტემის სათავის კოორდინატები (x',y')-ში არის $(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$, ხოლო (x,y)-კოორდინატებში გავიგებთ ზემოთმოყვანილი გარდაქმნით

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -1/5 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 3/5. \end{cases}$$

ეხლა შეგვიძლია პარაბოლის დახატვაც.



ამოცანები.

განსაზღვრეთ მეორე რიგის წირის ტიპი. იპოვეთ მისი კანონიკური განტოლება, კანონიკურ კოორდინატთა სისტემა და დახატეთ წირი.

1. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$
2. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0.$
3. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$
4. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$
5. $8x^2 + 6xy - 26y^2 - 12x + 11y = 0.$
6. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$
7. $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0.$
8. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$
9. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$
10. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$
11. $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0.$
12. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0.$
13. $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0.$
14. $4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15 = 0.$

პასუხები: წირის ტიპი, კანონიკური განტოლება, ცენტრის კოორდინატები, კანონიკური ღერძების მგეზავები:

1. პარაბოლა, $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3,2)$, $e'_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
2. თანამკვეთი წრფეები $x - y - 1 = 0,\ x - 4y + 2 = 0.$
3. პარალელური წრფეები $2x - 3y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 2 = 0.$
4. ელიფსი, $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$, $O'\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $e'_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.